M7500 — zkoušková písemka
23. 1. 2006 (90 minut)

1. Definujte pojem *vytvořující rozklad na grupoidu* a uveďte příklad:
   - rozkladu na $(\mathbb{R}, +)$, který není vytvořující
   - vytvořujícího rozkladu na $(\mathbb{Z}, \cdot)$, jehož každá třída je nekonečná a příslušný faktorgrupoid je konečný a netriviální. *(4b.)*
2. Na množině přirozených čísel definujte operaci sčítání a dokažte přímo z definice, že je komutativní. *(6b.)*
3. Definujte pojmy *prvoideál* a *maximální ideál* okruhu R a uveďte, jaký je mezi nimi vztah a jaký je vztah těchto pojmů k pojmu *faktorokruh*. *(3b.)*
4. Definujte obvyklé násobení reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(6b.)*
5. Definujte pojmy *rozšíření těles, stupeň rozšíření* a dokažte, že pro tělesa $K \subseteq L \subseteq M$ platí $[M : K] = [M : L][L : K]$ *(6b.)*
6. Uveďte příklad (příklady stručně okomentujte, tvrzení není třeba dokazovat):
   - konečného tělesa, majícího 8 prvků
   - okruhu R a ideálu $I \subseteq R$, který není hlavní
   - pravidelného n-úhelníka ($n > 6$), který je konstruovatelný pomocí pravítka a kružítka
   - lineárně uspořádané množiny, kterou nelze vnořit do spojitě uspořádané množiny
   - konečné grupy s netriviální komutátorovou podgrupou *(5b.)*