M6520 — zkoušková písemka, skupina A
15. 4. 2003 (60 minut)

1. Zformulujte větu o dělení dvou celých čísel se zbytkem. *(1b.)*

2. Když při spartakiádní skladbě vytvořili cvičenci sedmistupy, zbývali 3 navíc, při cvičení v kruzích o 11 lidech přebývali 2 a při tvorbě pyramid (na každou je potřeba 13 lidí), jich 5 jen přihlíželo. Kolik cvičenců se vystoupení zúčastnilo, když jich bylo určitě méně než 1000? *(2b.)*

3. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení: „pro každé prvočíslo $p \neq 5$ platí, že alespoň jedno z čísel $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ není prvočíslo.“ *(1b.)*

4. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ dělitelné sedmi. *(2b.)*

5. Definujte pojem „prvočíslo“ a zformulujte větu, charakterizující prvočísla mezi přirozenými čísly nějakou další vlastností (tj. větu uvádějící nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby dané přirozené číslo bylo prvočíslem). *(1b.)*

6. Nalezněte koeficienty v Bezoutově rovnosti pro největšího společného dělitele čísel 123 a 321. *(2b.)*

M6520 — zkoušková písemka, skupina B
15. 4. 2003 (60 minut)

1. Zformulujte Fermatovu větu. *(1b.)*

2. Šest loupežníků si chtělo rozdělit zlaťáky, které měli na stole. Když je rozdělovali na šest stejných hromádek, tři zlaťáky zbyly. Když je zkusili rozdělit na pět stejných hromádek, jeden zlaťák zbyl. Nakonec se nepoprali, protože se vrátil sedmý loupežník, který z kapsy přidal tři zlaťáky na stůl a všechny zlaťáky pak rozdělil na sedm stejných hromádek. Kolik zlaťáků bylo původně na stole, víte-li, že jich nebylo více než 400 a méně než 100. *(2b.)*

3. Dokažte, že je-li $n > 4$ složené přirozené číslo, pak $n \mid (n-1)!$. *(1b.)*

4. Definujte Eulerovu funkci a uveďte, jaké vyjádření pro ni ještě znáte. Jako ukázku spočtete její hodnotu v čísle 735. *(2b.)*

5. Zformulujte větu o počtu řešení lineární kongruence. *(1b.)*

6. Dokažte tvrzení: „Pro každé přirozené číslo n platí, že číslo

$$2^{2^{6n+2}} - 16$$

je dělitelné číslem 37.“ *(2b.)*