Matematika kolem nás

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Břeclav, 29. 1. 2011

Obsah přednášky

1. Co je matematika?

2. Hry a sázky
   - Hra na začátek/závěr
   - Nu(t/d)ný teoretický úvod
   - Hry pro zábavu
   - Důležitější hry
   - Volby jsou taky hra
   - Jeden statistický paradox
   - Chcete být v životě dravec či holubice?
   - Hra na začátek/závěr

Velmi obecný úvod

Matematika není soubor vzorečků (např. pro výpočet obsahu pravidelného dvanáctiúhelníku) ani konkrétní algoritmus pro řešení kvadratické rovnice.

- Peirce: *The science that draws necessary conclusions.*
- WWW: *Is math a science, an art, or some other anomaly?*
- *Jsou tři druhy matematiků: ti co umí počítat a ti co neumí.*

Matematika pochází z řeckého $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\zeta$, tj. *milující poznání*. Matematika je v podstatě jediným vědním oborem, kde mají dokázané výsledky absolutní platnost.

Vliv matematiky na jiné obory

Matematika se používá jako základní jazyk a prostředek ve všech přírodních vědách i technických oborech a je i velmi významným podpůrným nástrojem humanitních a společenských věd (ekonomie, jazykověda, právo, sociologie).
Některé konkrétní aplikace matematiky v technických oborech jsou velmi hezky ilustrovány na stránkách
`http://commons.bcit.ca/math/examples/`.
Na této přednášce se budeme snažit ilustrovat principy matematického myšlení v reálném životě na příkladech, kdy *ne vždy je intuitivní přístup rovněž optimální*.

Hra na začátek/závěr

Jak přemýšlejí jednotliví hráči v různých hrách si můžete vyzkoušet v následující hře:

- každý účastník napíše na papírek číslo od 0 do 100 a papírek odevzdá
- vypočte se aritmetický průměr odpovědí
- nejvyšší číslo, které nepřevyšuje 2/3 průměru, vyhrává.

Jaký bude váš tip?

Každý člověk dělá ve svém životě mnohá rozhodnutí, někdy racionální, někdy méně (těm iracionálním se zde věnovat nebudeme), někdy se znalostí potřebných informací, někdy (většinou) bez nich.
My se zmíníme především o dvou velmi úzce propojených oblastech „reálné“ matematiky – o teorii pravděpodobnosti a teorii her.
Teorie pravděpodobnosti je dnes již klasické odvětví matematiky, které se zabývá analýzou náhodných jevů.
Teorie her je jedním z moderních odvětví matematiky, které má v současné době mnoho diskutovaných aplikací v ekonomii, psychologii i třeba evoluční biologii. Studuje interakce mezi racionálně uvažujícími hráči, kteří se snaží v závislosti na strategii ostatních hráčů maximalizovat svůj výnos. Za zakladatele teorie her jsou považováni John von Neumann a Oskar Morgenstern, významné centrum vývoje tvořila v době studené války *RAND Corporation* (např. John Nash).

Očekávaný výnos

Z matematických pojmů zatím budeme potřebovat pouze pojem *očekávaný výnos* (střední hodnota) náhodné veličiny, který je definován jako součet příslušných výnosů vynásobených pravděpodobností jejich výskytu, tj.

$$E(X) = p_1 \cdot v_1 + \cdots p_n \cdot v_n.$$

Např. střední hodnota padlého čísla při hodu šestibokou kostkou je $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$

Očekávané čekání

Ilustrujme pojem střední hodnoty (v tomto případě *očekávaného čekání*) na (o něco) složitějším příkladu.

Příklad

Jaká je průměrná doba čekání na to, že při hodech kostkou padne číslo 6?

Řešení

Co říká intuice?

Postupujme obecně. Nechť je pravděpodobnost nějakého jevu p, jaký je očekávaný počet opakování pokusu, než se jev uskuteční?

Řešení (pokr.)

- Jev nastane při 1. pokusu – pravděpodobnost p
- Jev nastane při 2. pokusu – pravděpodobnost $(1-p)p$
- Jev nastane při 3. pokusu – pravděpodobnost $(1-p)^2p$
- ...
- Jev nastane při n-tém pokusu – pravděpodobnost $(1-p)^{n-1}p$

Celkem je očekávaný počet pokusů roven

$$1 \cdot p + 2 \cdot (1-p)p + 3 \cdot (1-p)^2 p + \cdots + n \cdot (1-p)^n p + \cdots .$$

Jde o součet nekonečné řady, který lze vypočítat s využitím geometrických řad – součet je roven $1/p$.

Obdobný princip vzužívají např. pojišťovny při odhadu částek, které budou muset vyplatit pojištěným (nehody, úmrtí, ...).

Kolik bude stát sběr kartiček?

Příklad

Marek sbírá kartičky hokejistů NHL. Jeho cílem je mít všech 100 kartiček a zajímá ho, kolik krabiček, do kterých jsou kartičky náhodně po jedné umisťovány, v průměru potřebuje, aby získal všech 100 kartiček.

Vaše odhady?

Řešení

První karta je jistě nová, druhá karta bude nová s pravděpodobností 99/100, takže délka očekávaného čekání na druhou kartu je 100/99 krabiček. Podobně třetí karta atd. Na zisk sté kartičky bude v průměru čekat 100/1 krabiček.
Celkem je očekávaná doba čekání na všechny kartičky rovna

$$100\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\approx 518{,}7.$$

Řada v závorce je tzv. **harmonická řada**, o níž je znám poměrně překvapivý fakt: sčítáme-li čísla $1/n$ dostatečně dlouho, překročíme libovolně velkou předem zvolenou mez. Součet prvních n členů harmonické řady se dá dobře odhadnout jako $\ln n+\gamma$, kde $\gamma\approx 0{,}57721$ je tzv. Eulerova konstanta. V našem případě dá tato aproximace výsledek $100(\ln 100+\gamma)\approx 518{,}2$.

Ruleta

Podívejme se teď na hazardní hry a sázky (uvedeme důvody, proč neznám mnoho matematiků, kteří by jim holdovali).

Ruleta je známá hra, kde se sází na čísla 1 až 36 a jejich různé kombinace. Aby měl provozovatel zisk, je dále na hrací ploše číslo 0 (a v americké verzi ještě 00).

S pomocí teorie pravděpodobnosti snadno spočítáme průměrný výnos při sázce 100 Kč na jedno číslo (v takovém případě vyhráváme 35-tinásobek vkladu):

$$-100\frac{36}{37} + 35 \cdot 100\frac{1}{37} = -2{,}70\text{Kč},$$

resp. $-5{,}26$ Kč v americké variantě.

Budeme-li sázet na červenou, je pravděpodobnost výhry $\frac{18}{37}$, tj. očekávaný výnos činí $-100\frac{19}{37} + 1 \cdot 100\frac{18}{37} = -2{,}70$ Kč. Všimněte si, že výplaty a sázky v ruletě jsou konstruovány tak, že je úplně jedno na co se sází, očekávaný výnos je vždy stejný, totiž $-\frac{1}{37}$ vkladu (v americké variantě pak $-\frac{2}{38}$ vkladu).

Šťastných (?) 10

Šťastných 10 je sázková hra, kterou provozuje Sazka, a.s., a v níž se tipuje 1 až 10 čísel z 80. V losování je taženo 20 čísel. Hra obsahuje mnoho variant výhry při uhodnutí různého počtu čísel a „dokonce“ cenu útěchy při tipování alespoň 6 čísel a neuhodnutí žádného. Vypočtěme si alespoň průměrný výnos z jedné vsazené stokoruny:

- při sázce na jedno číslo (při uhodnutí dostaneme dvojnásobek vkladu)
- při sázce na pět čísel (3: 2x; 4: 16x; 5: 200x)
- při sázce na deset čísel (0: 1x; 5: 3x; 6: 10x; 7: 20x; 8: 500x; 9: 10000x; 10: 200000x)

Jaká je pravděpodobnost výhry?

Hledanou pravděpodobnost vyjádříme jako podíl počtu úspěšných jevů ku počtu všech možných. Sázíme-li ℓ čísel, jaká je pravděpodobnost, že uhodneme h z nich?
Všech možných vsazených ℓ-tic je $\binom{80}{\ell}$, vyhrávajících pak $\binom{20}{h}\binom{60}{\ell-h}$. Pro jednotlivé zkoumané možnosti tak dostáváme průměrné výnosy

- $100\frac{1}{4} - 100\frac{3}{4} = -50$ Kč
- $100(200 \cdot 6,4 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 8,4 \cdot 10^{-2} - 1) \approx -51$ Kč
- $-50{,}15$ Kč (i s cenou útěchy, jejíž pravděpodobnost je $\binom{60}{10}/\binom{80}{10} \approx 4,6\%$)

Jak tedy vyhrát?

Letmý pohled na internet nám přitom nabídne hned několik zaručených tipů, jak sázet v různých hrách a neprohrát.Např. ve hře „Šťastných 10“ sázíme na jedno číslo (dokud nevyhrajeme) vždy dvojnásobek předchozí sázky (strategie známá i v ruletě jako *Martingale betting strategy)*.

Návody jsou v podstatě korektní až na předpoklad, že dotyčný má k dispozici neomezený zdroj peněz na sázky a s tím, že výnos ze sázení je i v takovém případě zanedbatelný vzhledem k množství peněz, které musíme mít k dispozici.

(Psychologické) kouzlo úspěchu těchto her je samozřejmě v tom, že prohra 100 Kč bolí méně než těší výhra 3500 Kč.

Závěr matematika: chcete-li opravdu hrát hazardní hry, bude pro vaši kapsu lepší, půjdete-li (i do amerického) kasina než do Sazky na „Šťastných 10“.

Sportovní sázky

Na blížící se zápas Evropské ligy mezi Spartou Praha a Liverpoolem byly včera u jedné internetové sázkové společnosti následující kurzy:
3,67 na vítězství Sparty; 3,20 na remízu a 1,90 na vítězství Liverpoolu.
Předpokládáme, že kurzy vypsané sázkovou společností odrážejí pravděpodobnost výskytu daného jevu – podle vztahu pro očekávaný výnos dostáváme při sázce 100 Kč na každou z variant

$$367 \cdot \frac{1}{3,67} + 320 \cdot \frac{1}{3,20} + 190 \cdot \frac{1}{1,90} - 300 = 0.$$

Je to skutečně tak, že sázková kancelář s námi „čestně“ hraje hru, v níž vydělává jen díky tomu, že její bookmakeři jsou lepší v tipování výsledku nebo jsme někde udělali chybu?

b) je správně: Chybu jsme udělali v tom, že jsme předpokládali, že kurzy vypsané sázkovou společností odpovídají pravděpodobnostem výskytu daných jevů – protože součet $P = \frac{1}{3{,}67} + \frac{1}{3{,}20} + \frac{1}{1{,}90} = 1{,}111$ není roven jedné (žádný jiný jev přitom nastat nemůže a jevy jsou tzv. *vylučující se jevy*), „reálné" kurzy pro spravedlivou hru tedy dostaneme, když uvedené kurzy vynásobíme číslem $P = 1{,}111$.
Převrácená hodnota P pak zároveň udává, kolik vyhrajeme z každé koruny, rozdíl $1/P - 1 = -0,1$ je tedy hledaná očekávaná hodnota výnosu ze sázení.
Tedy: čím větší je součet převrácených hodnot vylučujících se kurzů, které zároveň popisují všechny možné jevy, tím větší je nevýhoda na straně sázejícího.
Do těchto her by se ale i (sportovně založený) matematik mohl zapojit, pokud je přesvědčen, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou stanoveny chybně (tedy, je že chytřejší nebo informovanější než příslušný bookmaker).

Rozhodovací „hry“ v životě

Rozhodovací hry, které hrajeme v životě, mají často jeden velký rozdíl od „hazardních“ her – neznáme dopředu příslušné pravděpodobnosti, někdy ale můžeme využít četnosti jevu v minulosti za podobných podmínek.
Příklady z pojišťovnictví:

- Penzijní připojištění – fondy vycházejí z tabulek mortality (úmrtnosti), kdy na základě několika skutečností stanoví pravděpodobnost dožití určitého věku. V případě, že si věříte, že se dožijete více let, je pro vás výhodnější čerpat doživotní rentu, v opačném případě je lepší vybrat naspořenou sumu, jakmile to bude možné.
- Havarijní pojištění – vlastně se v příslušném poměru `pojistné : pojistné plnění` sázíte s pojišťovnou, že havarujete (pojišťovna vyhrává, pokud nehavarujete).

Příklady z pojistné tématiky jsou zjednodušené, ale psychologicky v principu stejné, jako třeba hraní rulety. Méně nás „bolí“ malé platby pojistného, podstatný je vysoký jednorázový výnos v případě výskytu události. Jinými slovy – nemá asi moc smysl pojišťovat se proti vzniku událostí, které pro nás znamenají nízkou újmu (jež navíc bez problému zvládneme vlastními prostředky) – snad pouze v případě, kdy tušíme, že z nějakého důvodu nastanou tyto události častěji než očekává pojišťovna (nebo to dokonce víme, ale to už je minimálně na hraně pojistného podvodu a je to podobné, jako fotbalisté sázející na svůj vlastní zápas).

Pojišťovny samozřejmě žijí z toho, že očekávaný výnos je (stejně jako v případě rulety) pro klienta záporný (a v případě, že pojišťovna často prohrává a klienti vyhrávají – jako v případě nedávných povodní[1] – pojišťovny sazby upravují, aby očekávaný výnos zůstával na jejich straně).

[1] Jakkoli není v tomto případě úplně solidní mluvit o výhře někoho, koho postihla povodeň, např. důvod vzniku požáru města Ankh-Morpork v Zeměploše Terryho Pratchetta ukazuje korektnost této terminologie.

Volby jsou taky hra

Předpokládejme, že máme 3 voliče (nebo skupiny voličů), kteří se rozhodují mezi 3 kandidáty A,B,C:

- volič 1 preferuje kandidáty v pořadí A, B, C.
- volič 2 preferuje kandidáty v pořadí B, C, A.
- volič 3 preferuje kandidáty v pořadí C, A, B.

Ať je zvolen kterýkoliv kandidát, vždy se najde jiný kandidát, kterého většina voličů upřednostňuje před tímto kandidátem. Tento jev se nazývá **Condorcetův volební paradox**, je způsoben cykličností preferencí jednotlivých voličů a vyskytuje zejména v systémech s alespoň 3 kandidáty/stranami, kdy může kandidát s podporou jen lehce nad 1/3 zvítězit, přestože téměř 2/3 voličů preferují jiného kandidáta.

Problematické volební systémy

Uveďme si problematičnost volebních systémů na malém příkladu:
15 lidí se má dohodnout, jaký nápoj se bude servírovat na party. V nabídce jsou *pivo, víno* a *mléko*. Preference účastníků party (bez toho, aby si je dopředu sdělovali) jsou následující:

- 6 z nich má preference v pořadí: mléko, víno, pivo;
- 5 z nich má preference v pořadí: pivo, víno, mléko;
- 4 pak víno, pivo, mléko.

Jakým způsobem se dohodnou na společném nápoji?

Jednokolový většinový systém – každý hlasuje pro 1 variantu, proto vyhraje mléko. Přitom je to ale pro 60% voličů nejhorší varianta!
Dvoukolový většinový systém – dva nápoje s největším počtem hlasů (*mléko* a *pivo*) postupují do druhého kola, kde pivo vyhrává 9:6. Přitom ale celých 10 lidí preferuje víno před pivem ?!

Jak z toho ven?
Bordův protokol – každý volič očísluje kandidáty sestupně podle své preference, rozhodne součet. Vítězem je víno.
Condorcetovo kritérium – vyhraje kandidát, který v hlasování jeden proti jednomu porazí všechny soupeře. Vítězem je opět víno.

Arrowův volební paradox

Kenneth Arrow (1951) klade na volební metody několik přirozených podmínek:

- **neexistence diktátora** – výsledek musí ovlivnit mínění více voličů, ne pouze přebírat preference jednoho z nich
- **univerzalita** – metoda musí brát v potaz preference všech voličů a vyústit v jednoznačné pořadí
- **nezávislost na nepodstatných alternativách** – metoda musí poskytnout stejný výsledek na podmnožině možností (bez ohledu na případné změny preferencí *nepodstatných alternativ*, tj. možností mimo tuto podmnožinu)
- **monotonie** – pokud jednotlivec nově upřednostní nějakou alternativu, metoda nesmí reagovat tak, že ve výsledku tato alternativa dopadne hůře než před touto změnou
- **kolektivní racionalita** – každé možné výsledné pořadí musí být dosažitelné

Poslední 2 podmínky (monotonie a kolektivní racionalita) mohou být nahrazeny tzv. **Paretovou efektivností** – pokud všichni voliči preferují jednoho kandidáta před jiným, musí toto respektovat i výsledek).
Arrow vzápětí dokázal, že **neexistuje** žádná konzistentní metoda, která by spravedlivým způsobem za splnění těchto podmínek určila vítěze mezi alespoň 3 kandidáty.
Všechny volební metody (s výjimkou diktátorství) jsou tedy již z principu nedokonalé, což prokazují mnohé praktické příklady.

Simpsonův paradox

Uveďme další situace, kdy se lidská intuice dostává do problémů:
Statistický paradox, který se poměrně často objevuje i na reálných datech.
Nejlépe je asi pochopitelný na (skutečném) příkladu:
Klinická studie se zabývala porovnáním úspěšnosti dvou způsobů léčby ledvinových kamenů. Studie zkoumala zvlášť úspěšnost na malých kamenech a velkých kamenech.

	Metoda A	Metoda B
Malé kameny	93% (81/87)	87% (234/270)
Velké kameny	73% (192/263)	69% (55/80)
Celkem	78% (273/350)	83% (289/350)

Ačkoliv je metoda A lepší jak pro malé, tak velké kameny, celkově se ukazuje jako horší. Je to proto, že v testu byla metoda A výrazně častěji použita pro výrazně hůře dopadající *velké kameny*.

Podobný efekt mívá např. srovnávání úspěšnosti středních škol při přijímacích zkouškách na vysoké školy (Absolventi třídy A dopadli při přijímačkách na každý obor lépe než absolventi třídy B, protože se ale výrazně víc hlásili na obory s menší úspěšností, celkové procento úspěšnosti třídy A bylo nižší).
Vždy je proto třeba pečlivě uvážit, jestli učiněné závěry opravdu odpovídají naměřeným datům nebo jde o jednu z mnoha méně či více „přiohnutých“ statistik a jejich interpretací.

Vězňovo dilema

Známým příkladem z teorie her je vězňovo dilema – příklad tzv. *hry s nenulovým součtem*.

Dva podezřelí mají možnost buď spolupracovat nebo nespolupracovat a výsledek (výše trestu) závisí na jejich rozhodnutí. Protože policie nemá dostatek důkazů, pořebuje udání některého z podezřelých na toho druhého – ve hře jsou následující možnosti:

	Karel mlčí	Karel udává
Franta mlčí	Oba dostanou 1/2 roku	Karel je volný, Franta dostane 10 let
Franta udává	Franta je volný, Karel dostane 10 let	Oba dostanou 2 roky

Pohled teorie her

Uveďme se na příkladu vězňova dilematu některé pojmy teorie her:

- **dominantní strategie** je taková strategie jednotlivce, že je lepší než kterákoliv jiná strategie, ať už soupeř zvolil cokoliv – v tomto případě je to *udávání*
- **Nashova rovnováha** je situace složená z dominantních strategií jednotlivců (jednostrannou změnou si každý jednotlivec pohorší) – zde *všichni udávají*
- **Paretovo optimum** je taková situace, v níž neexistuje žádná změna, která by někomu pomohla a nikomu neuškodila – v našem případě *oba mlčí*

Všimněte si, že Paretovo optimum je sice nejlepší pro celek, ale v našem případě je nestabilní – každý jednotlivec je v pokušení své rozhodnutí změnit a vydělat na tom.

Vězňovo dilema a lidstvo

Tyto výsledky působily přinejmenším mentální problém spoustě humanitních vědců – lidská společnost je založena na spolupráci, přitom výsledky ukazují, že každý jednotlivec by se měl raději řídit podle hesla *člověk člověku vlkem*, na což by ale lidstvo zákonitě doplatilo.
Až mnohem později se podařilo ukázat, že sobectví není racionální postup, pokud se hra hraje **opakovaně**. V roce 1979 proběhla soutěž, ve které hrály počítačové programy s různými strategiemi 200 kol této hry. Ukázalo se, že „hodnější" programy byly úspěšnější, přičemž nejúspěšnější byl program **tit-for-tat** (půjčka za oplátku).

Ten v prvním kole spolupracuje a v dalších kolech vždy udělá to, co předtím jeho soupeř. Ani v opakované soutěži s novými programy se nenašel program, který by program tit-for-tat dokázal porazit.

Ke stejným výsledkům mezitím došli někteří biologové pozorováním chování zvířat – často zde docházelo k tzv. *recipročnímu altruismu* (např. u *koljušek*, či afrických ryb *cichlid*).
Na internetu najdete mnoho online simulátorů chování různých strategií ve „vězňově dilematu“ – viz např.
`http://www.gametheory.net/applets/prisoners.html`.

Varianty opakovaného vězňova dilematu

Uvažované strategie *cooperate, defect, tit-for-tat, random, unforgiving* mají v homogenní společnosti složené pouze z hráčů se stejnou strategií průměrné výnosy $3, 1, 3, \frac{9}{4}$ a 3. Situace v heterogenní společnosti může být ale úplně jiná. Uveďme si průměrný výnos jednotlivých strategií v situacích při velkém počtu opakování a vysokém počtu účastníků (není-li řečeno jinak, stejném pro všechny strategie):

- cooperate x defect $(1,5 : 3)$
- tit-for-tat x defect $(2 : 1)$
- unforgiving x defect $(2 : 1)$
- random x defect $(\frac{11}{8} : 2)$
- random x cooperate $(\frac{25}{8} : \frac{9}{4})$
- tit-for-tat x random $(\frac{21}{8} : \frac{9}{4})$

	C	D
C	3	0
D	5	1

Bude se v této virtuální společnosti dařit lépe nevyzpytatelným *random* hráčům než naivním *cooperate*?

- tit-for-tat x cooperate x defect ($\frac{7}{3} : 2 : \frac{7}{3}$)
- 2 * tit-for-tat x cooperate x defect ($\frac{31}{12} : \frac{7}{4} : 2$)
- tit-for-tat x random x defect ($\frac{25}{12} : \frac{5}{3} : \frac{5}{3}$)
- 2 * tit-for-tat x random x defect ($\frac{37}{16} : \frac{29}{16} : \frac{3}{2}$)
- tit-for-tat x cooperate x random x defect ($\frac{37}{16} : \frac{15}{8} : \frac{9}{4} : \frac{10}{4}$)

Hra na začátek/závěr

Jak přemýšlejí jednotliví hráči v různých hrách si můžete vyzkoušet v následující hře:

- každý účastník napíše na papírek číslo od 0 do 100 a papírek odevzdá
- vypočte se aritmetický průměr odpovědí
- nejvyšší číslo, které nepřevyšuje 2/3 průměru, vyhrává.

Komentář

Kdyby hráči tipovali náhodně, průměr by byl blízko číslo 50, proto by očekávaný tip měl znít 33. Problém je, že takto uvažuje více lidí, volená čísla tedy nebudou náhodná, ale budou se spíše snižovat. Kdyby všichni tipovali 33, bude nejlepší tip 22, ...atd. Zřejmě vyhraje ten hráč, kterému se nejlépe podaří odhadnout počet iterací této úvahy u ostatních (případně počet hráčů, kterým nezáleží na výhře a budou tipovat náhodně, či záměrně, mimo strategii).

Uvažování hráče nad dominancí jednotlivých strategií můžeme ilustrovat ještě na jednom příkladu:

Příklad

Při hodu mincí (**P**anna, **O**rel) opakovaném 3krát, máme 8 možných jevů, každý se stejnou pravděpodobnosti $\frac{1}{8}$:

$$PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP, OOO.$$

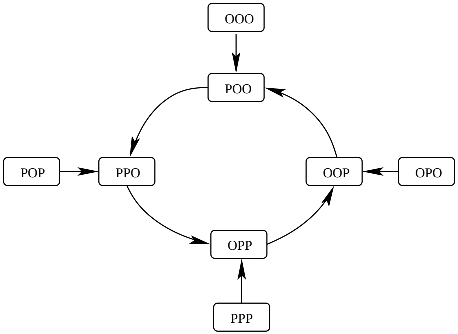
Hru hrají 2 hráči – každý si vybere jednu trojici, pak házeme mincí tak dlouho, až se jedna z těchto trojic objeví. Dotyčný hráč vyhrává.

Kdo si zahraje?

Vysvětlení příkladu

Lze ukázat, že existuje pro druhého hráče strategie výběru tak, že má vždy pravděpodobnost výhry alespoň 2/3.

- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající *xx*, já vyberu *yxx*
- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající *xy*, já vyberu *xxy*



Dokončení příkladu

Ukážeme, že při výběru POP a PPO je pravděpodobnost prvního výskytu trojice PPO rovna $2/3$.
Snadno je vidět, že dokud padá orel, šance obou se nemění. Jakmile padne panna, máme v dalším tahu pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že padne znovu panna a stejnou pravděpodobnost, že padne orel. Pak

- v případě panny s jistotou vyhrává PPO – házeme tak dlouho než padne orel – celkem pravděpodobnost $\frac{1}{2}$
- v případě orla vyhrává POP pouze tehdy, pokud následně padne panna, v opačném případě jsme znovu na začátku – tj. celkem pro POP $\frac{1}{4}$.

Celkem tedy ve *dvojnásobném počtu případů* vyhrává PPO, tj. pravděpodobnost jeho vítězství je $\frac{2}{3}$.

Dokončení příkladu, 2. část

Podobně snadno zdůvodníme, že pokud 1. hráč vybere např. *PPO*, my budeme mít s volbou *OPP* větší pravděpodobnost úspěchu.

- dokud se v seznamu hodů neobjeví dvojice *PP*, jistě nemohl nikdo zvítězit
- uvažme první výskyt dvojice *PP*:
  1. je-li hned na začátku posloupnosti hodů ($p = \frac{1}{4}$), vyhrává jistě 1. hráč
  2. objeví-li se dvojice *PP* až později, nutně před jejím prvním výskytem musel padnout *O*rel a vítězíme.

Celkem tedy vyhrává *OPP* s pravděpodobností $\frac{3}{4}$.

Použitá literatura

- J. G. Truxal, **Probability examples**, State University of New York, 1989.
- M. M. Mobius, **Introduction to Game Theory**, Harvard University, 2007.
- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.

Děkuji za pozornost!