Matematika (a fyzika) schovaná za GPS

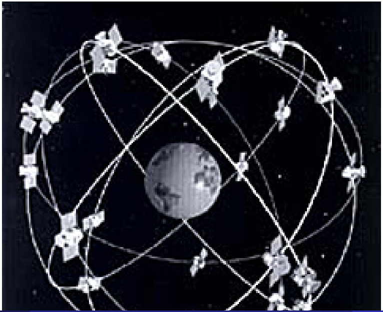
Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Brno, 14. března 2013

Global Positioning system

- minimálně 27 satelitů (24 aktivních – jsou po 4 rovnoměrně rozmístěny na 6 orbitálních drahách, 3 záložní), v tuto chvíli 32 aktivních, viz `http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus`
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně
- z každého místa na Zemi viditelných 4–12 satelitů
- od 1. května 2000 zrušeno umělé zkreslování dat (SA – selective availability)



Výpočet pozice – úvod

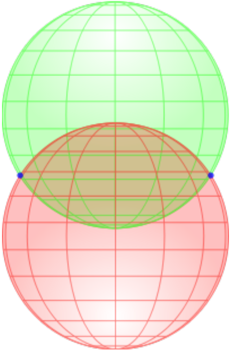
Satelity obíhající (nejde o stacionární družice) Zemi vysílají zprávy obsahující:

- čas vyslání zprávy,
- polohu satelitu,
- systémovou informaci o stavu a (přibližné) pozici ostatních satelitů.

Z těchto informací chce příjemce (GPS přijímač) odvodit informaci o své poloze.

Výpočet pozice

Přijímač na základě polohové a časové informace $[x_i, y_i, z_i, t_i]$ od alespoň 3(4) satelitů vypočte svoji zdánlivou vzdálenost r_i od jednotlivých vysílačů (*pseudorange*) za předpokladu, že se signál šíří rychlostí světla (odhadněte, jak dlouho letí signál). Vypočtená vzdálenost od satelitu spolu s jeho polohou při vyslání signálu udává sféru (povrch koule), na níž přijímač leží. Průsečíkem takových dvou sfér je pak kružnice, obsahující daný bod.



Výpočet pozice – pokračování

Průsečíkem třetí sféry s touto kružnicí jsou pak (obvykle) 2 body. Výslednou pozici je pak možné určit jako:

- ten z průsečíků, který je blíže povrchu Země (v obvyklém případě GPS přijímače v autě či v ruce)
- ten z průsečíků, který je blíže **čtvrté sféře** – v tomto případě je rovněž možné pomocí GPS určit nadmořskou výšku, v níž se přijímač pohybuje.

Konečně slíbená matematika

Pro zjednodušení výpočtů je možné bez újmy na obecnosti zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že středy sfér (tj. pozice vysílajících satelitů) jsou v rovině xy (tj. $z = 0$), jeden ze středů dále umístíme v počátku a druhý na ose x. Uvažujme tedy tři sféry se středy v bodech $[0, 0, 0], [u, 0, 0], [v, w, 0]$ a poloměry r_1, r_2, r_3 a dostaneme tak pro hledanou pozici $[x, y, z]$ rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 \\ (x - u)^2 + y^2 + z^2 &= r_2^2 \\ (x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 &= r_3^2 \end{aligned}$$

Konečně slíbená matematika

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 \\ (x-u)^2 + y^2 + z^2 &= r_2^2 \\ (x-v)^2 + (y-w)^2 + z^2 &= r_3^2 \end{aligned}$$

Zkuste si soustavu vyřešit! Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme $x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$, odkud po dosazení za x do první rovnice dostaneme vztah

$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$

Podmínkou pro řešitelnost (tj. pro to, že se první dvě sféry vůbec protínají) je $2ur_1 \geq r_1^2 - r_2^2 + u^2$, neboli $r_2^2 \geq (u - r_1)^2$, či $r_1 + r_2 \geq u \geq r_1 - r_2$ (tuto podmínku lze samozřejmě takřka ihned vidět z obrázku). Při splnění odvozené podmínky již vypočteme i souřadnici y pomocí dosazení do třetí rovnice. Souřadnici z pak lze dopočítat např. jako $z = \pm\sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

Newtonova metoda

S touto metodou přišel Newton kolem roku 1670 a vysvětlil ji na příkladu rovnice

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Jeden z kořenů je blízko 2, položil tedy $x = 2 + p$ a dosazením do rovnice dostal vztah pro p:

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Protože je ale p malé, je možné zanedbat členy $p^3, 6p^2$, odkud $p = \frac{1}{10}$. To samozřejmě není přesné řešení, jde ale o další zpřesnění, můžeme nyní psát $x = 2{,}1 + q$, dostat tak další aproximaci $x = 2{,}0946$ atd.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec[1]).

1. Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0.
2. Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Pro výpočet druhé odmocniny z a (tj. hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - a$) tak dostáváme iterační postup $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Tato metoda se dá analogicky použít při optimalizaci, kde místo kořene hledáme řešení rovnice $f'(x) = 0$.

[1] To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Příklad

Vypočtěme $\sqrt{12}$ s $x_0 = 3$: $x_1 = \frac{3+4}{2}$, $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3{,}46429$, přitom $\sqrt{12} \approx 3{,}46410$.

Analýza efektivity Newtonovy metody

Pomocí Taylorovy věty lze v nějakém okolí x_n psát

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(x - x_n)^2,$$

kde α je mezi x_n a x. Protože hledáme x splňující $f(x) = 0$, lze po vydělení $f'(x_n)$ vztah upravit na

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x - x_n) = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2,$$

a tedy

$$x - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2.$$

Newtonova metoda – příklad, kdy nefunguje

Efektivnost odmocňování

V našem konkrétním případě funkce $f(x) = x^2 - a$ tak dostáváme $(f'(x) = 2x, f''(x) = 2)$

$$x - x_{n+1} = -\frac{2}{4x_n}(x - x_n)^2$$

a je tedy vidět, že chyba $|x - x_n|$ se pro vhodná x (obvykle) rychle zmenšuje.

Příklad

Příkladem funkce, jejíž kořen tato metoda nenajde, ani když začneme sebeblíže, je $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Zde totiž dostaneme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = -2x_n.$$

Zobecnění na případ více proměnných

Zobecnění na (např.) k rovnic o k neznámých je relativně přímočaré:

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1} \cdot F(x_n),$$

kde J_F je Jacobián zobrazení F. Výpočet jeho inverze je ale časově velmi náročná operace, proto se často místo toho využívá

- řešení příslušné soustavy lineárních rovnic,
- výpočet zobecněné inverze, při více než k rovnicích metoda nejmenších čtverců
- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi*-newtonovských metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např. `http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/`.

Fyzika a praxe nám to trochu (no … dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

1. Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
2. Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
3. Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
4. Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.

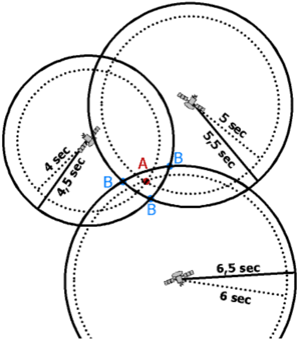
Zdroje chyb GPS

Error Source	Typical or Maximum Error
Ionosphere	10 Meters
Troposphere	1 Meter
Satellite Clock Synchronization	1 Meter
Electronic Noise	2 Meters
Multipath Error	0.5 Meters
Satellite Position (Ephemeris)	1 Meter
Intentional Degradation	0 Meters
Net RMS error	10 Meters
Typical Geometric Error (GDOP)	4
Final RMS error (Net x GDOP)	40 meters
Actual Typical Error	10 meters

Zdroj: `http://www.pdhcenter.com/courses/l116/l116content.htm`

Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

S nepřesností levných hodin v GPS přijímači se vyrovnáme poměrně snadno – k tomu nám slouží právě čtvrtý (a případně další) satelit, který jsme dosud ve výpočtech nepoužili. V praxi tak dostáváme čtyři nebo více rovnic o čtyřech neznámých $(x, y, z, error)$. Na obrázku je pro zjednodušení ukázán 2D případ, kde hodiny v přijímači jsou zpožděny o 0,5 s.



Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

Pokud je vidět více než čtyři satelity, máme tzv. přeurčený systém rovnic a do hry vstupuje možnost *vybrat si* z několika možností tu nejlepší – v takovém případě se poloha aproximuje pomocí metody nejmenších čtverců.

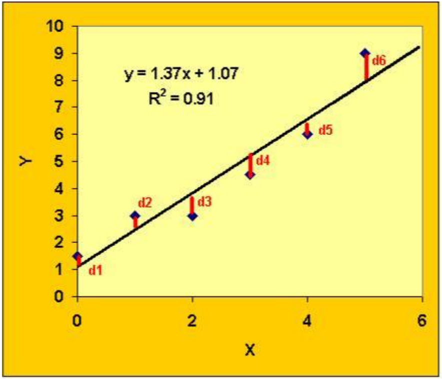
Metoda slouží k rekonstrukci funkce f z hodnot $f_0, \dots, f_n$ naměřených v uzlových bodech $a_0, \dots, a_n$. Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných) $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$ – ve tvaru

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat *součet čtverců*

$$\sum_{i=0}^{n} \big(f_i - y_m(a_i)\big)^2.$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců



Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.
Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \dots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Metoda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete *regresní přímku* odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1,5	1,5	1
2	1,6	3,2	4
3	2,1	6,3	9
4	3	12	16
10	8,2	23	30

Odtud $30a + 10b = 23, 10a + 4b = 8{,}2$, a tedy $a = 0{,}5, b = 0{,}8$.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy (ns $= 10^{-9}$ s), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přesností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

- Do hry tak vstupuje speciální teorie relativity, neboť přijímač a vysílač jsou vůči sobě v pohybu, dochází ke zpomalení hodin vysílače oproti pozorovateli (*dilatace času*) o $\frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{4^2}{2\cdot(3\cdot 10^5)^2} \approx 10^{-10}$, tj. asi o 7,7 μs/den.
- Další ještě významnější efekt představuje obecná teorie relativity, která implikuje, že hodiny poblíž masivního objektu (Země) jdou pomaleji než hodiny vzdálenější (díky většímu zakřivení prostoročasu). Z povrchu Země vidíme tedy satelitní hodiny jdoucí rychleji než tytéž hodiny umístěné na Zemi o cca 45μs za den.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

- Nezapočítáním teorie relativity bychom tak dostali chybu v řádu 38μs za den, což v důsledku znamená cca 10km chybu v určení pozice.
- Tato chyba je opravena umělým zpomalením atomových hodin umístěných v satelitech oproti hodinám na Zemi (10,22999999543 MHz oproti 10,23 MHz).

Diferenciální GPS

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogických atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím (http://www.ndblist.info/dgnavinfo/datamodes/worldDGPSdatabase.pdf, http://en.wikipedia.org/wiki/Wide_Area_Augmentation_System, http://cs.wikipedia.org/wiki/European_Geostationary_Navigation_Overlay_Service),vu nichž je s vysokou přesností známa poloha a které vysílají rozdíl mezi touto polohou a polohou vypočtenou na základě informací ze satelitů, je možné u špičových DGPS přístrojů dosáhnout přesnosti v řádu centimetrů.

Příklad na závěr

Příklad

V tabulce jsou uvedena skutečná data z několika satelitů – geocentrické souřadnice jsou uvedeny v metrech, čas přenosu signálu v nanosekundách. Vaším úkolem je s využitím vhodného SW (např OpenOffice Calc) určit:

1. geocentrické souřadnice místa pozorovatele,
2. popsat skutečné místo na Zemi, kde se pozorovatel nacházel (?!).

Č. sat.	x [m]	y [m]	z [m]	dt [ns]
1	14177553.47	-18814768.09	12243866.38	70446329.64
2	15097199.81	-4636088.67	21326706.55	75142197.81
3	23460342.33	-9433518.58	8174941.25	78968497.2
4	-8206488.95	-18217989.14	17605231.99	69887173.01
5	1399988.07	-17563734.90	19705591.18	67231182.38
6	6995655.48	-23537808.26	-9927906.48	80796265.09

Použitá literatura

- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.
- Neil Ashby, **Relativity and the Global Positioning System**. *Physics Today*, May 2002.

Děkuji za pozornost!