

# Matematika (a fyzika) schovaná za GPS

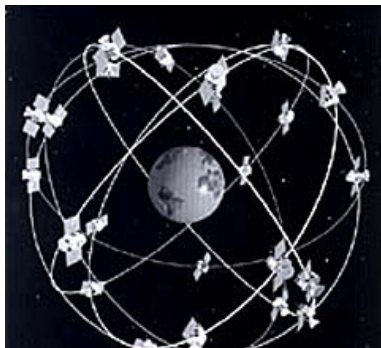
Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Přírodovědecká fakulta  
Ústav matematiky a statistiky

Brno, 8. března 2012

# Global Positioning system

- minimálně 27 satelitů (24 aktivních po 4 rovnoměrně rozmístěné na 6 orbitálních drahách, 3 záložní) –  
[http://www.nstb.tc.faa.gov/Full\\_WaasSatelliteStatus.htm](http://www.nstb.tc.faa.gov/Full_WaasSatelliteStatus.htm)
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně
- z každého místa na Zemi viditelných 4–12 satelitů
- od 1. května 2000 zrušeno umělé zkreslování dat (SA – selective availability)



Satelity obíhající (nejde o stacionární družice) Zemi vysílají zprávy obsahující:

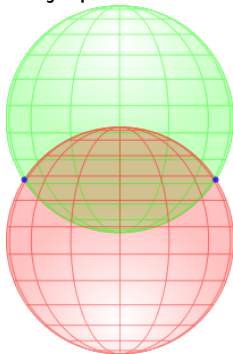
- čas vyslání zprávy,
- polohu satelitu,
- systémovou informaci o stavu a (přibližné) pozici ostatních satelitů.

Z těchto informací chce příjemce (GPS přijímač) odvodit informaci o své poloze.



# Výpočet pozice

Přijímač na základě polohové a časové informace  $[x_i, y_i, z_i, t_i]$  od alespoň 3(4) satelitů vypočte svoji zdánlivou vzdálenost  $r_i$  od jednotlivých vysílačů (*pseudorange*) za předpokladu, že se signál šíří rychlostí světla (odhadněte, jak dlouho letí signál). Vypočtená vzdálenost od satelitu spolu s jeho polohou při vyslání signálu udává sféru (povrch koule), na níž přijímač leží. Průsečíkem takových dvou sfér je pak kružnice, obsahující daný bod.



Průsečíkem třetí sféry s touto kružnicí jsou pak (obvykle) 2 body.

Výslednou pozici je pak možné určit jako:

- ten z průsečíků, který je blíže povrchu Země (v obvyklém případě GPS přijímače v autě či v ruce)
- ten z průsečíků, který je blíže **čtvrté sféře** – v tomto případě je rovněž možné pomocí GPS určit nadmořskou výšku, v níž se přijímač pohybuje.

Pro zjednodušení výpočtů je možné bez újmy na obecnosti zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že středy sfér (tj. pozice vysílajících satelitů) jsou v rovině  $xy$  (tj.  $z = 0$ ), jeden ze středů dále umístíme v počátku a druhý na ose  $x$ . Uvažujme tedy tři sféry se středy v bodech  $[0, 0, 0]$ ,  $[u, 0, 0]$ ,  $[v, w, 0]$  a poloměry  $r_1, r_2, r_3$  a dostaneme tak pro hledanou pozici  $[x, y, z]$  rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

Zkuste si soustavu vyřešit! Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme  $x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$ , odkud po dosazení za  $x$  do první rovnice dostaneme vztah

$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$

Podmínkou pro řešitelnost (tj. pro to, že se první dvě sféry vůbec protínají) je  $2ur_1 \geq r_1^2 - r_2^2 + u^2$ , neboli  $r_2^2 \geq (u - r_1)^2$ , či  $r_1 + r_2 \geq u \geq r_1 - r_2$  (tuto podmínku lze samozřejmě takřka ihned vidět z obrázku). Při splnění odvozené podmínky již vypočteme i souřadnici  $y$  pomocí dosazení do třetí rovnice. Souřadnici  $z$  pak lze dopočítat např. jako  $z = \pm \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$ .

# Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

## Newtonova metoda

S touto metodou přišel Newton kolem roku 1670 a vysvětlil ji na příkladu rovnice

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Jeden z kořenů je blízko 2, položil tedy  $x = 2 + p$  a dosazením do rovnice dostal vztah pro  $p$ :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Protože je ale  $p$  malé, je možné zanedbat členy  $p^3, 6p^2$ , odkud  $p = \frac{1}{10}$ . To samozřejmě není přesné řešení, jde ale o další zpřesnění, můžeme nyní psát  $x = 2,1 + q$ , dostat tak další aproximaci  $x = 2,0946$  atd.



# Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec<sup>1</sup>).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci  $f(x)$  a aproximaci jejího kořene  $x_0$ .
- 2 Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

Pro výpočet druhé odmocniny z  $a$  (tj. hledání kořene funkce  $f(x) = x^2 - a$ ) tak dostáváme iterační postup  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ .

Tato metoda se dá analogicky použít při optimalizaci, kde místo kořene hledáme řešení rovnice  $f'(x) = 0$ .

---

<sup>1</sup>To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

## Příklad

Vypočtěme  $\sqrt{12}$  s  $x_0 = 3$ :  $x_1 = \frac{3+4}{2}$ ,  $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3,46429$ ,  
přitom  $\sqrt{12} \approx 3,46410$ .

## Analýza efektivity Newtonovy metody

Pomocí Taylorovy věty lze v nějakém okolí  $x_n$  psát

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x - x_n)^2,$$

kde  $\alpha$  je mezi  $x_n$  a  $x$ . Protože hledáme  $x$  splňující  $f(x) = 0$ , lze po vydělení  $f'(x_n)$  vztah upravit na

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x - x_n) = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2,$$

a tedy

$$x - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2.$$

## Příklad

Příkladem funkce, jejíž kořen tato metoda nenajde, ani když začneme sebeblíže, je  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Zde totiž dostaneme

$$x_{n+1} = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = -2x_n.$$

# Zobecnění na případ více proměnných

Zobecnění na (např.)  $k$  rovnic o  $k$  neznámých je relativně přímočaré:

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1} \cdot F(x_n),$$

kde  $J_F$  je Jacobián zobrazení  $F$ . Výpočet jeho inverze je ale časově velmi náročná operace, proto se často místo toho využívá

- řešení příslušné soustavy lineárních rovnic,
- výpočet zobecněné inverze, při více než  $k$  rovnicích metoda nejmenších čtverců
- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi-newtonovských* metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např.

<http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/>.

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
- 3 Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
- 4 Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.

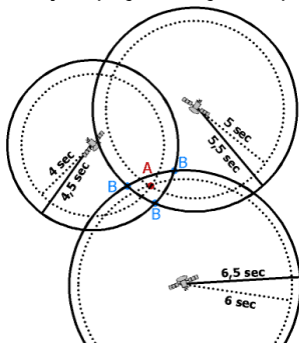
# Zdroje chyb GPS

Error Source	Typical or Maximum Error
Ionosphere	10 Meters
Troposphere	1 Meter
Satellite Clock Synchronization	1 Meter
Electronic Noise	2 Meters
Multipath Error	0.5 Meters
Satellite Position (Ephemeris)	1 Meter
Intentional Degradation	0 Meters
Net RMS error	10 Meters
Typical Geometric Error (GDOP)	4
Final RMS error (Net x GDOP)	40 meters
Actual Typical Error	10 meters

Zdroj: <http://www.pdhcenter.com/courses/l116/l116content.htm>

# Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

S nepřesností levných hodin v GPS přijímači se vyrovnáme poměrně snadno – k tomu nám slouží právě čtvrtý (a případně další) satelit, který jsme dosud ve výpočtech nepoužili. V praxi tak dostáváme čtyři nebo více rovnic o čtyřech neznámých ( $x, y, z, error$ ). Na obrázku je pro zjednodušení ukázán 2D případ, kde hodiny v přijímači jsou zpožděny o 0,5 s.



# Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

Pokud je vidět více než čtyři satelity, máme tzv. přeúčtený systém rovnic a do hry vstupuje možnost *vybrat si* z několika možností tu nejlepší – v takovém případě se poloha aproximuje pomocí metody nejmenších čtverců.

Metoda slouží k rekonstrukci funkce  $f$  z hodnot  $f_0, \dots, f_n$  naměřených v uzlových bodech  $a_0, \dots, a_n$ . Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných)  $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$  – ve tvaru

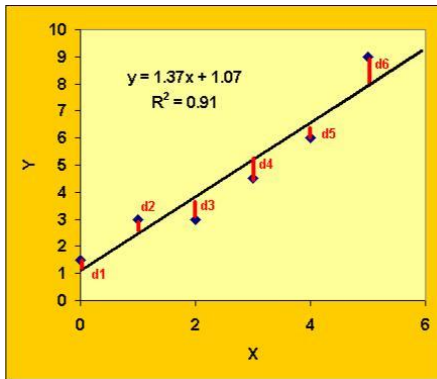
$$y_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat *součet čtverců*

$$\sum_{i=0}^n (f_i - y_m(a_i))^2.$$



# Aproximace metodou nejmenších čtverců



Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno  $n$  bodů  $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$  a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru  $f(x) = a \cdot x + b$  s neznámými  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

## Věta

*Mezi přímkami tvaru  $f(x) = a \cdot x + b$  má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech  $x_1, \dots, x_n$  od hodnot  $y_i$  funkce splňující*

$$\begin{aligned} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b \cdot n &= \sum y_i \end{aligned}$$

# Metoda nejmenších čtverců – příklad

## Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete *regresní přímku* odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

## Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x <sup>2</sup>
1	1,5	1,5	1
2	1,6	3,2	4
3	2,1	6,3	9
4	3	12	16
10	8,2	23	30

Odtud  $30a + 10b = 23$ ,  $10a + 4b = 8,2$ , a tedy  $a = 0,5$ ,  $b = 0,8$ .

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy ( $ns = 10^{-9}$  s), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přesností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

- Do hry tak vstupuje speciální teorie relativity, neboť přijímač a vysílač jsou vůči sobě v pohybu, dochází ke zpomalení hodin vysílače oproti pozorovateli (*dilatace času*) o  $\frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{4^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^5)^2} \approx 10^{-10}$ , tj. asi o  $7,7 \mu s/\text{den}$ .
- Další ještě významnější efekt představuje obecná teorie relativity, která implikuje, že hodiny poblíž masivního objektu (Země) jdou pomaleji než hodiny vzdálenější (díky většímu zakřivení prostoročasu). Z povrchu Země vidíme tedy satelitní hodiny jdoucí rychleji než tytéž hodiny umístěné na Zemi o cca  $45 \mu s$  za den.

- Nezapočítáním teorie relativity bychom tak dostali chybu v řádu  $38\mu\text{s}$  za den, což v důsledku znamená cca 10km chybu v určení pozice.
- Tato chyba je opravena umělým zpomalením atomových hodin umístěných v satelitech oproti hodinám na Zemi (10,22999999543 MHz oproti 10,23 MHz).

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogických atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím

(<http://www.ndblist.info/datamodes/worldDGPSdatabase.pdf>), u nichž je s vysokou přesností známa poloha a které vysílají rozdíl mezi touto polohou a polohou vypočtenou na základě informací ze satelitů, je možné u špičových DGPS přístrojů dosáhnout přesnosti v řádu centimetrů.

## Příklad

V tabulce jsou uvedena skutečná data z několika satelitů – geocentrické souřadnice jsou uvedeny v metrech, čas přenosu signálu v nanosekundách. Vaším úkolem je s využitím vhodného SW (např. OpenOffice Calc) určit:

- 1 geocentrické souřadnice místa pozorovatele,
- 2 popsat skutečné místo na Zemi, kde se pozorovatel nacházel.

Č. sat.	x [m]	y [m]	z [m]	dt [ns]
1	14177553.47	-18814768.09	12243866.38	70446329.64
2	15097199.81	-4636088.67	21326706.55	75142197.81
3	23460342.33	-9433518.58	8174941.25	78968497.2
4	-8206488.95	-18217989.14	17605231.99	69887173.01
5	1399988.07	-17563734.90	19705591.18	67231182.38
6	6995655.48	-23537808.26	-9927906.48	80796265.09

- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org).
- Neil Ashby, **Relativity and the Global Positioning System**. *Physics Today*, May 2002.

Děkuji za pozornost!