Kalibrace scoringových modelů

Finanční matematika v praxi III
Hotel Podlesí
3. – 4. září 2013

Pavel Plát
pavel.plat@rb.cz
Raiffeisenbank a.s., Policy & Analysis

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
AMathNet síť pro transfer znalostí v aplikované matematice

1. Scoringový model

Business pohádka...	...a trocha formalismu
▪ Banka poskytuje klientům úvěry a spravuje úvěrové portfolio	▪ Označme ***K*** množinu všech klientů/ kontraktů
▪ Z hlediska plnění závazků vůči bance je každý klient/kontrakt hodnocen buď jako dobrý nebo jako špatný (default)	▪ $D_k =$ 0 jestliže *k* ***K*** je dobrý 1 jestliže *k* ***K*** je špatný
▪ Někteří klienti mají vyšší šanci, že se dostanou do problémů než jiní.	▪ Používáme pravděpodobnostní model, tj. chceme predikovat pravděpodobnost defaultu $PD = P(D_k = 1)$
▪ O každém klientu/kontraktu má banka nějaké informace	▪ Situace klienta/kontraktu *k* ***K*** je popsána bodem ve vhodně zvoleném měřitelném prostoru(obvykle $\boldsymbol{R}^n$) $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$
▪ Na základě aktuální situace klienta/kontraktu chceme predikovat schopnost plnit závazky vůči bance v následujícím období	▪ $P(D_k = 1 \mid x_k) = p(x_k)$
▪ Hodnocení klienta je jednoznačně definované a opakovatelné	▪ SCORE: $\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$

1. Scoringový model

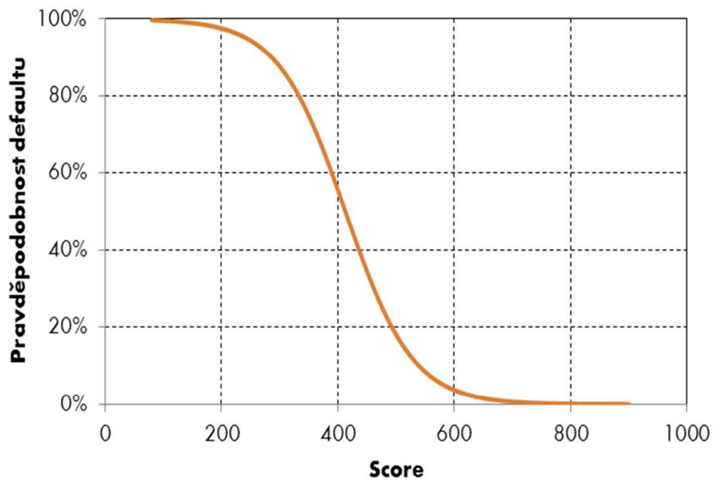
K čemu je skorekarta?

Jasně definovaná pravidla

- Automatizace
- Objektivita
- Opakovatelnost

Optimalizace využití informace

- Využití „soft" ukazatelů
- Kombinace více ukazatelů



P(D = 1 | SCORE = x, v čase t) = q(x,t)

- **q**: $R^2 \rightarrow [0,1]$
- **q je v x monotonní**

2. Kalibrované a nekalibrované score

Nekalibrované score

- Stejné základní ukazatele vstupující do výpočtu vedou v různém čase ke stejné hodnotě nekalibrovaného score

  (nekalibrované score „pana Nováka" se v čase nemění)

- Závislost PD na hodnotě nekalibrovaného score se v čase mění

$$\mathbf{q(x,t) = P(\ D = 1 \mid SCORE^{(NONCAL)} = x,\ v\ \check{c}ase\ t\ )}$$

- $t_1 \neq t_2$, pak

$$q(\ x,\ t_1\ ) \neq q(\ x,\ t_2\ )$$

- Rizikovost v závislosti na nekalibrovaném score vypočteném různými scorekartami není obecně srovnatelná. Dvě různé scorekarty:

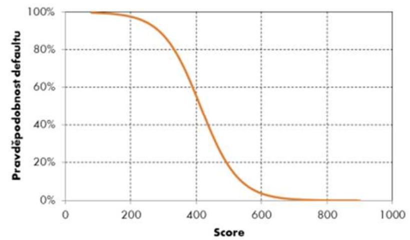
$$q_1\ (\ x,\ t\ ) \neq q_2(\ x,\ t\ )$$

2. Kalibrované a nekalibrované score

Standardní stupnice a kalibrované score

Standardní stupnice

- Definuje vztah mezi hodnotou score a pravděpodobností defaultu



Kalibrované score ($SCORE^{(CAL)}$)

- Platí v čase invariantní vztah mezi hodnotou score a pravděpodobností defaultu definovaný pomocí standardní stupnice
- Stejné základní ukazatele vstupující do výpočtu vedou v různém čase k různé hodnotě kalibrovaného score

  (pravděpodobnost selhání „pana Nováka“ se v čase mění, tzn. má v čase různé kalibrované score)

$$\mathbf{p(x) = P(D = 1 \mid SCORE^{(CAL)} = x)}$$

- Rizikovost v závislosti na kalibrovaném score vypočteném různými scorekartami je srovnatelná. Dvě různé scorekarty:

$$p_1(x) = p_2(x)$$

2. Kalibrované a nekalibrované score

A co my? (RBI standardní stupnice)

Score	Poměr šancí	ln(poměr šancí)	PD
460	2.25	0.811	30.77%
500	4.5	1.504	18.18%
540	9	2.197	10.00%
580	18	2.890	5.26%
620	36	3.584	2.70%
660	72	4.277	1.37%
700	144	4.970	0.69%
740	288	5.663	0.35%
780	576	6.356	0.17%
820	1152	7.049	0.09%

- score 660 = poměr šancí 72
- dvojnásobný poměr šancí každých 40 bodů

- $p(x) = \dfrac{1}{1 + \exp(i_{RBI} + s_{RBI} \cdot x)}$ $\qquad i_{RBI} = \ln(72) - \dfrac{660 \cdot \ln(2)}{40}$ $\qquad s_{RBI} = \dfrac{\ln(2)}{40}$

- Lineární závislost mezi score a logaritmem poměru šancí:

$$\ln\left(\frac{1 - p(x)}{p(x)}\right) = i_{RBI} + s_{RBI} \cdot x$$

2. Kalibrované a nekalibrované score

A co my? (URG ratingová stupnice)

- Na základě kalibrovaného score je stanoven rating

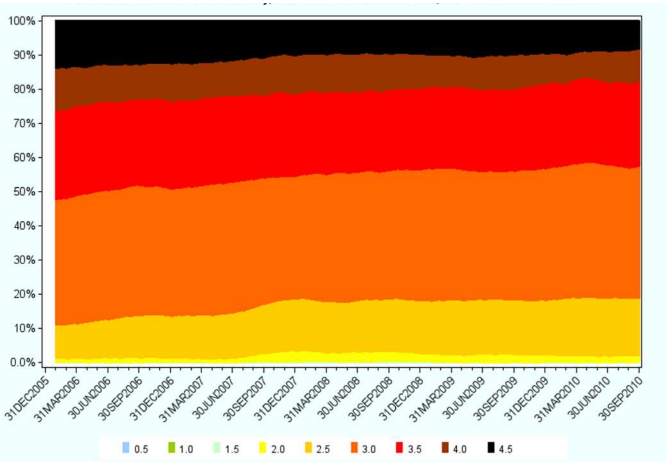
Score	Rating	Score	PD (%)
< 500	**4.5**	< 500	> 18.18
[500 , 540)	**4.0**	[500 , 540)	(10.00 , 18.18]
[540 , 580)	**3.5**	[540 , 580)	(5.26 , 10.00]
[580 , 620)	**3.0**	[580 , 620)	(2.70 , 5.26]
[620 , 660)	**2.5**	[620 , 660)	(1.37 , 2.70]
[660 , 700)	**2.0**	[660 , 700)	(0.69 , 1.37]
[700 , 740)	**1.5**	[700 , 740)	(0.35 , 0.69]
[740 , 780)	**1.0**	[740 , 780)	(0.17 , 0.69]
≥ 780	**0.5**	≥ 780	≤ 0.17

2. Kalibrované a nekalibrované score

Kalibrované nebo nekalibrované score?

Nekalibrované score

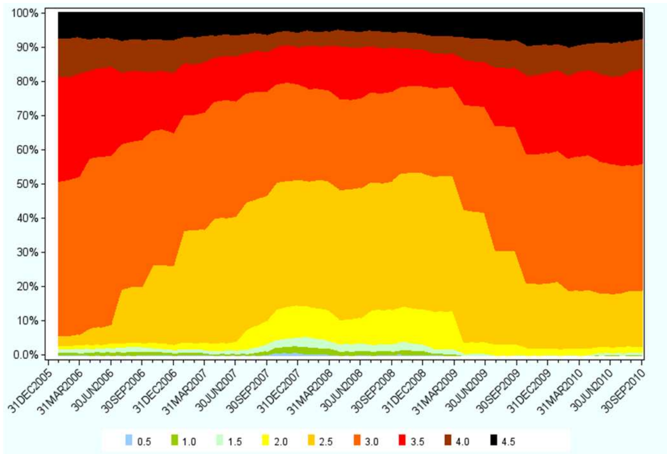
- Ratingová struktura:
  - Pokud banka nemění procesy, výrazně se nemění
  - Její vývoj odráží změny v portfoliu z pohledu ukazatelů vstupujících do scorekarty
  - Neříká mnoho o vývoji rizikovosti



- Scvhalovací strategie (Cut-off):
  - Je třeba měnit dle vývoje rizikovosti

Kalibrované score

- Ratingová struktura:
  - Dynamičtější
  - Nese informaci o rizikovosti portfolia
  - Srovnatelná mezi různými scorekartami



- Scvhalovací strategie (Cut-off):
  - Není třeba měnit

3. Kalibrace

Kalibrace

- **Cíl: Najít transformaci, která převede nekalibrované score na kalibrované**
  - Hledáme f_t: $S^{(NONCAL)} \rightarrow S^{(CAL)}$ pro kterou platí:

$$q(x,t) = p(f_t(x))$$

- Předpoklady o tvaru funkce q(x,t)
  - Podobně jako při vývoji scorekarty můžeme použít logistickou transformaci
  - Lineární závislost ln(ODDS) a score je příliš omezující předpoklad
  - Chceme umožnit korekci závisloti score na vybraných ukazatelích

$$q(x,t) = \frac{1}{1+\exp\left(g_t(x)+\sum_{v\in SV}\gamma_{t,v}v\right)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1-q(x,t)}{q(x,t)}\right) = g_t(x) + \sum_{v\in SV}\gamma_{t,v}v$$

$$f_t(x) = -i_{RBI}/s_{RBI} + 1/s_{RBI}\left(g_t(x) + \sum_{v\in SV}\gamma_{t,v}v\right)$$

3. Kalibrace

Odhad g_t

- **Potřebujeme konkrétnější specifikaci $g_t(x)$:**

$$g_t(x) = \sum_i \beta_{t,i}\, h_i(x),$$

  - $h_i(x)$ jsou velmi jednoduché funkce score.
  - Příklad: $h_i(x) = x^i$ (polynomiální transformace score při kalibraci)

- Výsledný model:

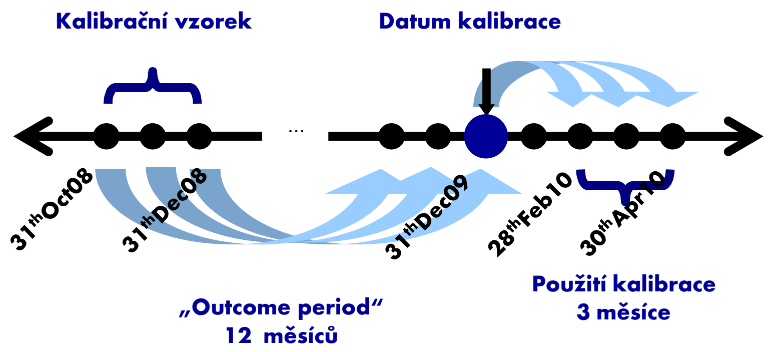
$$q(x,t) = \frac{1}{1+\exp\left(\sum_i \beta_{t,i}\, h_i(x), + \sum_{v \in SV} \gamma_{t,v} v\right)}$$

  - **$\beta_{t,i}$ a $\gamma_{t,v}$ mohou odhadnout pomocí logistické regrese**

3. Kalibrace

Kalibrační vzorek

- Můžeme použít data s ukončenou outcome period, tzn. 12 měsíců stará data



Stabilita versus aktuálnost

- Pro relevantní odhady v logistické regresy potřebuji dostatečný počet defaultních klientů

  ⇨ **Pravidlo , které určí délku kalibračního vzorku podle počtu pozorováných špatných klientů**

- Nejvíce chci zohlednit nejaktuálnější data

  ⇨ **Každému pozorování přiřadím váhu podle jeho stáří**

3. Kalibrace

Délka kalibračního vzorku, váhová funkce

Váhová funkce

- Požadavky
  - Starší pozorování mají menší váhu
  - Nastavitelná rychlost zapomínání
- Formalizace:
  - w: Z×[0,1] → R
  - $z_1 < z_2 \Rightarrow w_\alpha(z_1,\alpha) \leq w(z_2,\alpha)$
  - $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow w(z,\alpha_1) \geq w(z,\alpha_2)$

Další parametry

- $TARGET\_N_B$ – požadovaný počet defaultních klientů ve vzorku
- MIN_LS – minimální délka kalibračního vzorku
- MAX_LS – maximální délka kalibračního vzorku

- Délka kalibračního vzorku:

$$LS_{t,w} = \min\left(\max\left(\min\left\{ l : \sum_{i=0}^{l-1} w(-12-i,1) \cdot n_B(t-12-i) \geq TARGET\_N_B \right\}, MIN\_LS \right), MAX\_LS \right)$$

- Parametrizace váhové funkce:

$\alpha_t = 1$	když $LS_t < MAX\_LS$
$\max\left\{ \alpha : \sum_{i=0}^{MAX\_LS-1} w(-12-i,\alpha) \cdot n_B(t-12-i) \geq TARGET\_N_B \right\}$	když $LS_t = MAX\_LS$
0	když $\sum_{i=0}^{MAX\_LS-1} w(-12-i,0) \cdot n_B(t-12-i) \leq TARGET\_N_B$

3. Kalibrace

A co my? (Parametrizace kalibrací)

- **$g_t(x)$**
  - Lineární transformace

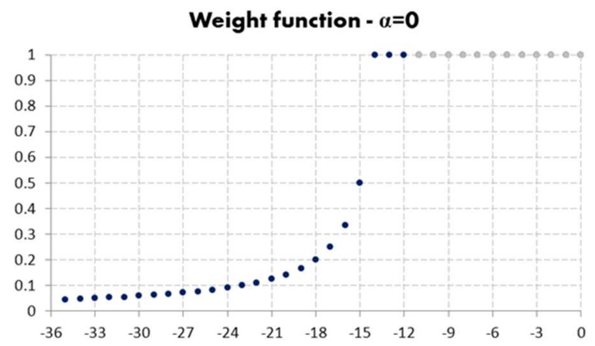
$$g_t(x) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1}x$$

  - Pokud je detekována nelinearita v závislosti mezi kalibrovaným score a logaritmem poměru šancí, pak

$$g_t(x) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1}x + \beta_{t,1}x^2 + \beta_{t,1}x^3$$

- **Váhová funkce**

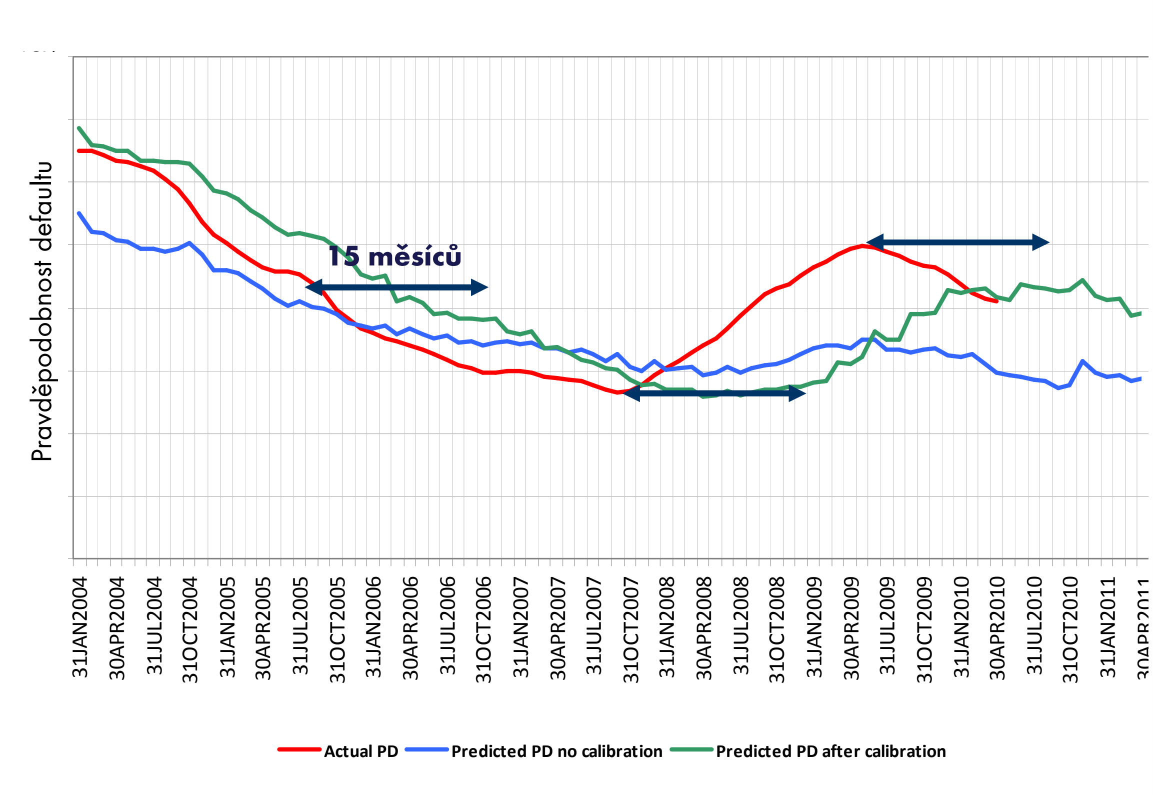
$$w(z,\alpha) = \frac{1}{\left(\max(1, -z-13)\right)^{\alpha}}.$$



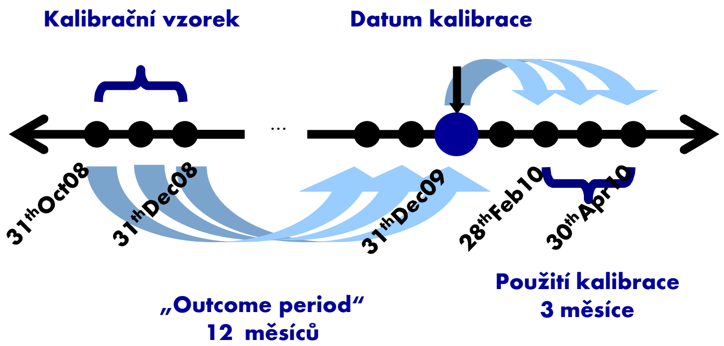
- **Další parametry**
  - $TARGET\_N_B = 350$
  - $MIN\_LS = 3$
  - $MAX\_LS = 24$

3. Kalibrace

„Forward looking" kalibrace – motivace



- **Chyba kalibrace založené na historii**
  - hlavní důvod je zpoždění mezi kalibračním vzorkem a obdobím použití kalibrace.

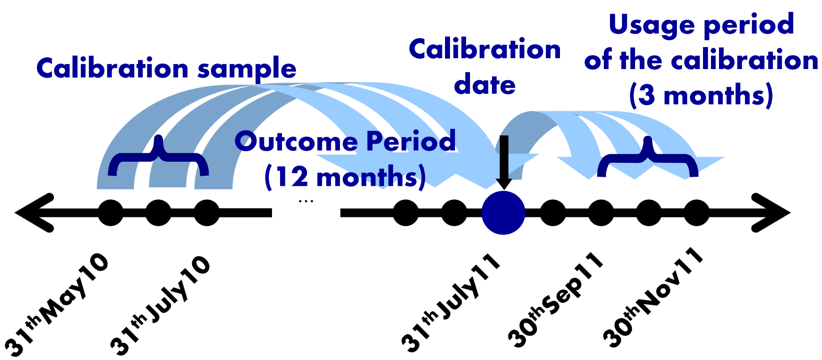


- **Je možné kalibrovat lépe? Snad ano!**
  - prediktivní model pro PD (červená křivka) s použitím makroekonomických veličin
  - použít makroekonomickou predikci PD k úpravě kalibrační transformace

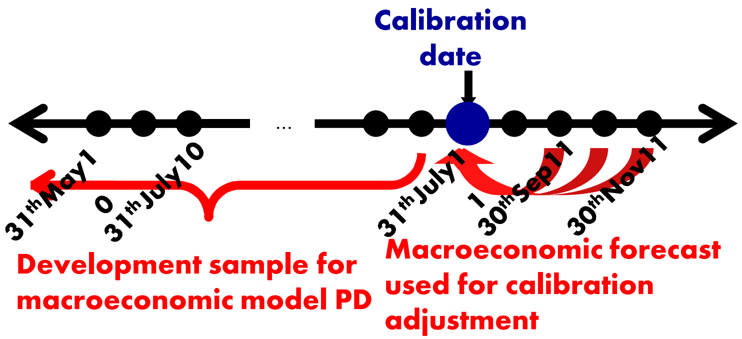
3. Kalibrace

Historie vs. budoucnost

- **Historická kalibrace**
  - Kalibrace založená na historickém kalibračním vzorku.
  - Logistická regrese s jedním prediktorem SCORE* (nekalibrované score).
- Výstup:
  - $f_t(x)$
  - $SCORE^{(CAL,history)} = f_t(SCORE^{(NONCAL)})$



- **Predikce PD**
  - Predikce PD založená na makroekonomickém modelu.
- Výstup:
  - $PD_m^{(macro)}$ - makroekonomická predikce váženého PD v měsíci m
  - $$PD^{(target)} = \frac{1}{3} \sum_{m \in \text{období použití kalibrace}} PD_m^{(macro)}$$



3. Kalibrace

Úprava historické kalibrace dle predikce PD

- Korekce interceptu kalibrační transformace získané z historické kalibrace tak aby PD predikované pomocí výsledného kalibrovaného score bylo na kalibračním vzorku rovno požadované hodnotě dle makroekonomické predikce. Tzn je třeba nalézt takové Δ aby platilo

$$PD^{(target)} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\substack{\text{contract } i \in \\ \text{calibration sample}}} \frac{1}{1 + \exp\left(\ln(72) - \frac{660}{40}\ln(2) + \frac{\ln(2)}{40}\left(\Delta + f_t\left(SCORE_i^{(NONCAL)}\right)\right)\right)}$$

- Iterativní algoritmus pro výpočet Δ (ukončit když $\Delta^{(j+1)} - \Delta^{(j)}$ je dostatečně malé):

$$\Delta^{(0)} = 0, \quad PD^{(i)} = \frac{1}{N}\sum \frac{1}{1 + \exp\left(\ln(72) - \frac{660}{40}\ln(2) + \frac{\ln(2)}{40}\left(\Delta^{(i)} + f_t\left(SCORE_i^{(NONCAL)}\right)\right)\right)},$$

$$\Delta^{(i+1)} = \Delta^{(i)} + \frac{40}{\ln 2}\left(\ln\frac{1 - PD^{(target)}}{PD^{(target)}} - \ln\frac{1 - PD^{(i)}}{PD^{(i)}}\right)$$

- Výstup:
  - **$SCORE^{(CAL)} = \Delta + f_t(SCORE^{(NONCAL)})$**
    (finální kalibrované score)