

# Modely selektivní interakce a jejich aplikace

Marie Leváková

Ústav matematiky a statistiky  
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

5. 9. 2013



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



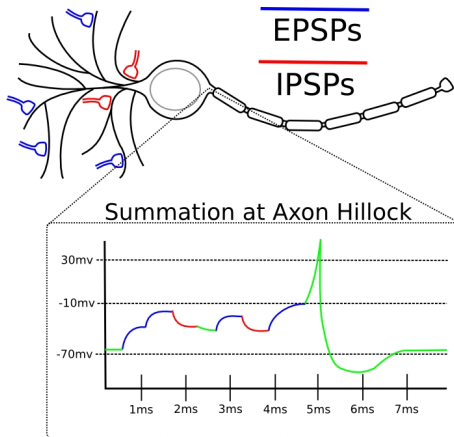
- 1 Úvod a motivace
- 2 Model selektivní interakce
- 3 Aplikace: model latence
- 4 Odhad latence

# Obsah

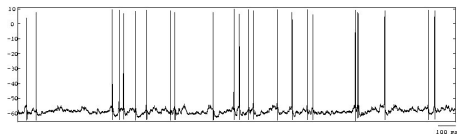
- 1 Úvod a motivace
- 2 Model selektivní interakce
- 3 Aplikace: model latence
- 4 Odhad latence

# Úvod a motivace

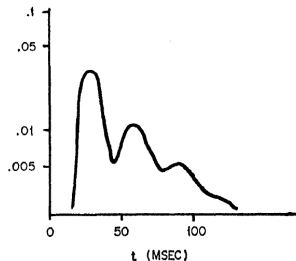
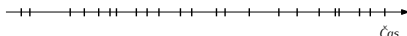
- Pomocí synapsí na dendritech jsou na neuron přenášeny excitační a inhibiční vzruchy.
- **Excitační vzruchy** - zvyšují membránový potenciál.
- **Inhibiční vzruchy** - snižují membránový potenciál.
- Membránový potenciál dosáhne prahové hodnoty → neuron vyše **výstupní impuls**.



- Při experimentu se zaznamenává průběh membránového potenciálu.
- Obecně se předpokládá, že pro přenos informace má význam pouze čas výskytu výstupních impulzů.
- Posloupnost impulzů - náhodný bodový proces.
- Mimo jiné nás zajímá pravděp. rozdělení délek intervalů mezi výstupními impulzy.
- Experimentální studie → rozdělení intervalů může být multimodální.



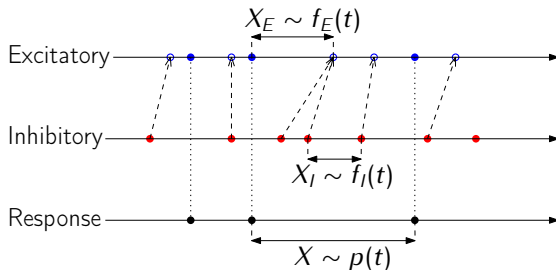
Záznam posloupnosti impulzů:



# Obsah

- 1 Úvod a motivace
- 2 Model selektivní interakce**
- 3 Aplikace: model latence
- 4 Odhad latence

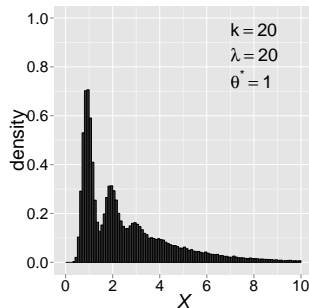
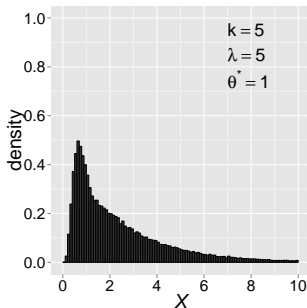
# Model selektivní interakce



- 1 Výstupní impulzy modelovány pomocí interakce dvou pomocných náhodných procesů reprezentujících:
  - a) excitační vzruchy
  - b) inhibiční vzruchy
- 2 Inhibiční vzruch „vymaže“ následující excitační vzruch.
- 3 Neeliminované excitační vzruchy → výstupní impulzy neuronu.

# Předpoklady základního modelu

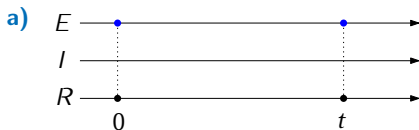
- **Excitační vzruchy** - proces obnovy,
  - interval mezi vzruchy - náh. veličina  $X_E$ , hustota  $f_E(t)$
- **Inhibiční vzruchy** - Poissonův proces s parametrem  $\mu$ ,
  - interval mezi vzruchy - náh. veličina  $X_I$ , hustota  $f_I(t) = \mu e^{-\mu t}$ .
- → výstupní impulzy tvoří proces obnovy,
  - délka intervalu mezi výstupními impulzy - náh. veličina  $X$ ,  $p(t)$  - hustota  $X$
- Model umožňuje multimodální rozdělení  $X$ .
- Simulace modelu s  $X_E \sim Gama(k, \lambda)$  - histogramy pro  $X$ :



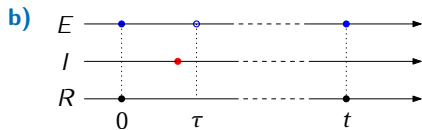


# Odvození Laplaceovy transformace $p(t)$

- Impulz nastal v čase  $t - 2$  možnosti:



$$f_E(t)e^{-\mu t}$$



$$f_E(\tau)(1 - e^{-\mu\tau})p(t - \tau)$$

- Celkem dostáváme:

$$p(t) = f_E(t)e^{-\mu t} + \int_0^t [f_E(\tau)(1 - e^{-\mu\tau})p(t - \tau)] d\tau$$

- Laplaceova transformace:

$$\hat{p}(s) = \hat{f}_E(s + \mu) + \hat{f}_E(s)\hat{p}(s) - \hat{f}_E(s + \mu)\hat{p}(s)$$

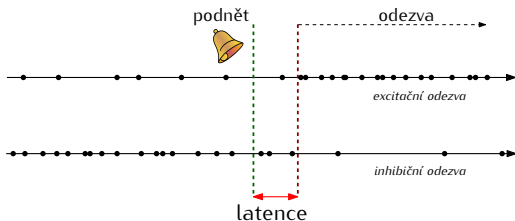
$$\hat{p}(s) = \frac{\hat{f}_E(s + \mu)}{1 - \hat{f}_E(s) + \hat{f}_E(s + \mu)}$$

# Obsah

- 1 Úvod a motivace
- 2 Model selektivní interakce
- 3 Aplikace: model latence**
- 4 Odhad latence

# Pojem latence

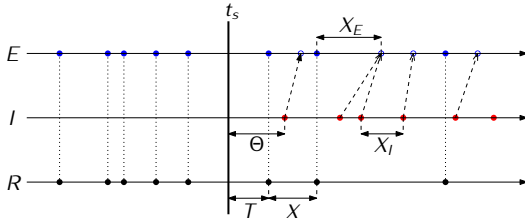
- Spontánní aktivita - impulzy nastávají náhodně, ale s konstantní intenzitou.
- V okamžiku  $t_s$  začne působit podnět, po něm se intenzita výskytu výstupních impulzů změní.
  - zvýšení intenzity – excitační odezva
  - snížení intenzity – inhibiční odezva



- Změna intenzity se projeví až po jistém zpoždění (latence).
- Jak odhadnout délku zpoždění, jestliže došlo k inhibiční odezvě?

# Latence v modelu selektivní interakce

- 1 Před stimulací do neuronu vstupují pouze excitační vzruchy.
  - 2 Od okamžiku  $t_s$  se začnou objevovat inhibiční vzruchy.
  - 3 Latence - doba mezi  $t_s$  a výskytem prvního inhibičního vzruchu.
- **Excitační vzruchy** - *proces obnovy*,
    - interval mezi vzruchy  $X_E$ , hustota  $f_E(t)$
  - **Inhibiční vzruchy** - *Poissonův proces* s parametrem  $1/\theta^*$ ,
    - interval mezi vzruchy  $X_I$ , hustota  $f_I(t) = (e^{-t/\theta^*})/\theta^*$



- $\Theta$  - latence, doba do výskytu inhibičního vzruchu, střední hodnota  $\theta^*$
- $T$  - doba mezi  $t_s$  a prvním následujícím impulzem, hustota  $p_T(t)$
- $X$  - interval mezi prvním a druhým impulzem po  $t_s$ , hustota  $p(t)$

Rozdělení veličiny  $T$ 

- První impuls nastal po uplynutí doby  $t$ . Dvě možné situace:
  - 1 První exc. vzruch v čase  $t$ , před ním žádný inh. vzruch.
  - 2 První exc. vzruch v čase  $\tau < t$ , před ním alespoň jeden inhibiční vzruch.
- $p^F(t)$  - hustota dopředné rekurenční doby excitačního procesu.

$$\Rightarrow p_T(t) = p^F(t)e^{-t/\theta^*} + \int_0^t p^F(\tau)(1 - e^{-\tau/\theta^*})p(t - \tau) d\tau$$

- Laplaceova transformace  $p_T(t)$ :

$$\widehat{p}_T(s) = \widehat{p}^F(s + 1/\theta^*) + \widehat{p}(s) \left[ \widehat{p}^F(s) - \widehat{p}^F(s + 1/\theta^*) \right].$$

- Po dosazení  $\widehat{p}(s)$ :

$$\widehat{p}_T(s) = \widehat{p}^F(s + 1/\theta^*) + \frac{\widehat{f}_E(s + 1/\theta^*) \left[ \widehat{p}^F(s) - \widehat{p}^F(s + 1/\theta^*) \right]}{1 - \widehat{f}_E(s) + \widehat{f}_E(s + 1/\theta^*)}.$$

Pro dopřednou rekurenční dobu v procesu obnovy platí

$$p^F(t) = \frac{1 - F_E(t)}{E(X_E)}; \quad \widehat{p}^F(s) = \frac{1 - \widehat{f}_E(s)}{sE(X_E)}.$$

# Model s gama rozdělením $X_E$

- **Excitační vzruchy** - proces obnovy,  $X_E \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ .

$$f_E(t) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t}, \quad \hat{f}_E(s) = \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k$$

- Laplaceova transformace hustoty  $X$ :

$$\hat{p}(s) = \frac{[\lambda(s + \lambda)]^k}{\left[ (s + \lambda)(s + \lambda + \frac{1}{\theta^*}) \right]^k + [\lambda(s + \lambda)]^k - \left[ \lambda(s + \lambda + \frac{1}{\theta^*}) \right]^k}.$$

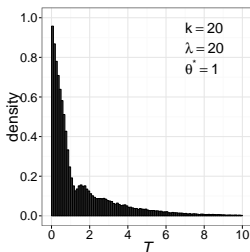
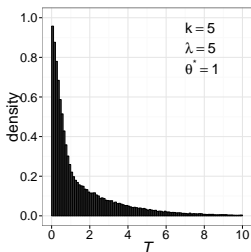
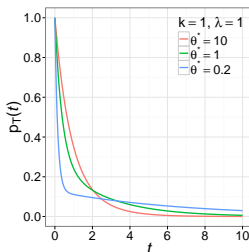
- Laplaceova transformace hustoty  $T$ :

$$\hat{p}_T(s) = \frac{-\lambda}{k(s + 1/\theta^*)} \left\{ \left( \frac{\lambda}{s + \lambda + 1/\theta^*} \right)^k - 1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda}{s + \lambda + 1/\theta^*} \right)^k \frac{\left[ s \left( \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k - \left( \frac{\lambda}{s + \lambda + 1/\theta^*} \right)^k \right) + \frac{1}{\theta^*} \left( \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k - 1 \right) \right]}{s \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k + \left( \frac{\lambda}{s + \lambda + 1/\theta^*} \right)^k \right]} \right\}.$$

- Pro obecné  $k$  je obtížné najít inverzní transformaci  $\widehat{p}(s)$  a  $\widehat{p}_T(s)$ .
- Je-li  $k = 1$ , excitační vzruchy tvoří Poissonův proces:

$$p_T(t) = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{4\lambda\theta^* + 1} e^{-\frac{t}{2}(2\lambda+1/\theta^*)} \times \\ \times \left[ \left(1 + 4\lambda\theta^* + \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*}\right) e^{-\frac{t}{2\theta^*} \sqrt{1+4\lambda\theta^*}} + \right. \\ \left. + \left(1 + 4\lambda\theta^* - \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*}\right) e^{\frac{t}{2\theta^*} \sqrt{1+4\lambda\theta^*}} \right].$$

- Hustoty a histogramy pro  $T$  (ze simulace modelu):



# Obsah

- 1 Úvod a motivace
- 2 Model selektivní interakce
- 3 Aplikace: model latence
- 4 Odhad latence**



# Odhad latence

- Zajímá nás rozdělení náhodné veličiny  $\Theta$ .
- Z předpokladů modelu plyne, že  $\Theta \sim \text{Exp}(1/\theta^*)$ .
- $\theta^*$  je zároveň střední doba latence.
- K odhadu  $\theta^*$  použijeme:
  - pozorování  $t_1, \dots, t_n$  proměnné  $T$
  - pozorování  $x_1, \dots, x_n$  proměnné  $X$ .
- Předpokládáme, že všechny ostatní parametry modelu jsou známe.
  
- Tři metody odhadu:
  - 1 Metoda maximální věrohodnosti
  - 2 Momentová metoda
  - 3 Metoda vycházející z Laplaceovy transformace hustoty

# Odhad metodou maximální věrohodnosti

- Lze aplikovat jedině je-li známa hustota.
- Zde pouze v případě, kdy  $k = 1$ .

$$\begin{aligned}
 l(\theta^*) = & -n \ln 2 + n \ln \lambda - n \ln \theta^* - n \ln \left[ 4\lambda + \frac{1}{\theta^*} \right] - \frac{2\lambda\theta^* + 1}{2\theta^*} \sum_{i=1}^n t_i + \\
 & + \sum_{i=1}^n \ln \left[ \left( 1 + 4\lambda\theta^* + \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*} \right) e^{-\frac{t_i}{2\theta^*} \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*}} + \right. \\
 & \left. + \left( 1 + 4\lambda\theta^* - \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*} \right) e^{\frac{t_i}{2\theta^*} \sqrt{1 + 4\lambda\theta^*}} \right].
 \end{aligned}$$

- Maximum věrohodnostní funkce se určí numericky.
- Odhad lze zpřesnit, dosadí-li se do věrohodnostní funkce jak pozorování  $t_i$ , tak  $x_i$  (pochází ze stejného rozdělení).

# Odhad momentovou metodou

- Výpočet momentů z Laplaceovy transformace hustoty:

$$E(Z^n) = (-1)^n \hat{f}_Z^{(n)}(0)$$

- Momentový odhad - řešení momentové rovnice.
- Několik možností momentových odhadů:

1  $\hat{\theta}_{M,T}^*$ :

$$E(T) = \bar{t}$$

2  $\hat{\theta}_{M,X}^*$ :

$$E(X) = \bar{x}$$

3  $\hat{\theta}_{M,T+X}^*$ :

$$E(T + X) = E(T) + E(X) = \overline{t + x}$$

- Jen pro  $\hat{\theta}_{M,X}^*$  lze nalézt explicitní řešení pro obecné  $k$

$$\hat{\theta}_{M,X}^* = \frac{1}{\lambda} \left[ \left( \frac{\lambda}{k} \bar{x} \right)^{1/k} - 1 \right]^{-1}.$$

- V ostatních případech se rovnice řeší numericky.

# Odhad vycházející z Laplaceovy transformace hustoty

- Rozdělení jednoznačně určeno Laplaceovou transformací hustoty.

- Platí:

$$\widehat{\rho}_T(s) = E \left( e^{-sT} \right).$$

- Aproximace střední hodnoty pomocí empirického odhadu:

$$\widetilde{\rho}_T(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-st_i}.$$

- Myšlenka metody: porovnání teoretické a empirické Laplaceovy transformace v předem zvolených bodech  $s_1, s_2, \dots, s_q$ .
- Nelineární regresní model:

$$\widetilde{\rho}_T(s_i) = \widehat{\rho}_T(s_i; \theta^*) + \varepsilon_i.$$

- odhad parametru  $\theta^*$  metodou nejmenších čtverců.

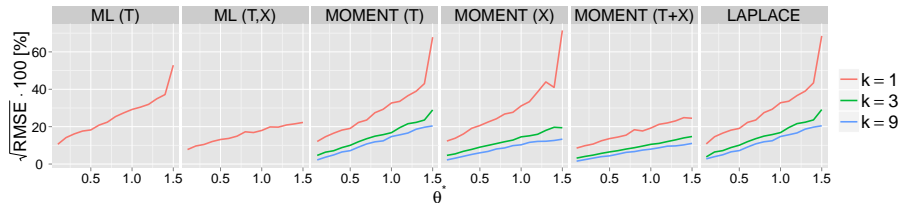
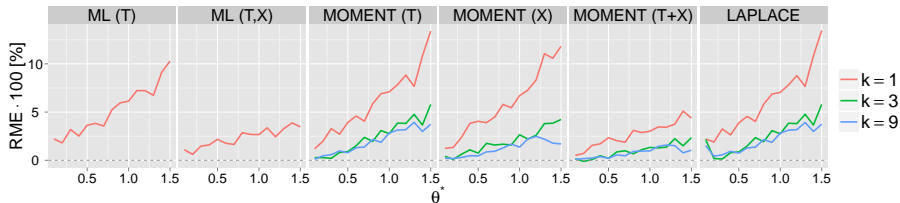
- Přesnost odhadu závisí na použitých bodech  $s_i$ .
- Neexistuje jednoduchý návod pro jejich optimální volbu.

## Výsledky

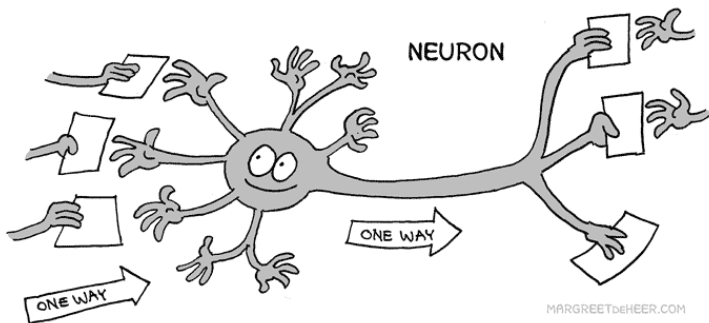
- $\lambda = 1, n = 100, N = 1000$
- $k \in \{1, 3, 9\}$
- $\theta^* \in [0.1, 1.5]$






$$\text{RME}(\hat{\theta}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{\theta}_i^* - \theta^*}{\theta^*} \right)$$

$$\text{RMSE}(\hat{\theta}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{\theta}_i^* - \theta^*}{\theta^*} \right)^2$$



# Děkuji za pozornost!



-  Coleman, R.; Gastwirth, J. I. (1969) Some models for interaction of renewal processes related to neuron firing. *J. Appl. Prob.* 6, 38–58.
-  Fienberg, S. E. (1974) Stochastic models for single neuron firing trains: A survey. *Biometrics* 30, 399–427.
-  Lawrance, A. J. (1970) Selective interaction of a Poisson and renewal process: first-order stationary results. *J. Appl. Prob.* 7, 359–372.
-  Lawrance, A. J. (1971) Selective interaction of a Poisson and renewal process: the dependency structure of the intervals between responses. *J. Appl. Prob.* 8, 170–183.
-  Ten Hoopen, M.; Reuver, H. A. (1965) Selective interaction of two independent recurrent processes. *J. Appl. Prob.* 2, 286–292.