Matematické přístupy k pojištění automobilů

Silvie Kafková

3.–6. září 2013, Podlesí

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
AMathNet
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Obsah

Motivace

- **Pojištění motorových vozidel** je pojištění určené pro osobní automobily, nákladní vozy, motocykly a další silniční vozidla.
- Používá se k poskytnutí **finanční ochrany** proti poškození vozidla a zranění osob v důsledku dopravních kolizí.
- Kromě toho zajišťuje proti **odpovědnosti**, která by mohla vzniknout v důsledku dopravní nehody.
- Konkrétní podmínky pro pojištění vozidel a jeho typy se liší s právními předpisy daných zemí.

Motivace

- Jedním z hlavních úkolů pojišťovny je **navrhnout strukturu pojistných tarifů** tak, aby účtované pojistné bylo rozděleno mezi pojištěné "spravedlivě".
- Za tímto účelem jsou obvykle pojištění rozděleni do **tarifních (rizikových) skupin**.
- Všichni pojištění v dané skupině pak platí stejné pojistné.
- Tato **prvotní klasifikace** může probíhat např. na základě použití **zobecněných linearních modelů** (GLM's).

Motivace

- Problémem tohoto přístupu je existence skrytých rizikových faktorů.
- V důsledku toho zůstávají jednotlivé skupiny stále dosti heterogenní, ačkoli pracují s mnoha proměnnými.
- Proto byl navržen systém penalizující pojištěné odpovědné za jednu či více dopravních nehod pomocí **malusů** a na druhé straně zvýhodňující řidiče bez nehod pomocí **bonusů**.

Motivace

- Pojišťovny posuzují **individuální riziko.**
- Každý rok je pak účtované pojistné upraveno s ohledem na počet pojistných nároků daného pojištěného.
- K tomuto účelu byla navržena **teorie kredibility.**
- V praxi se spíše využívá její zjednodušení, **bonus-malus systém.**

Obsah

Prvotní klasifikace

- Výše účtovaného pojistného je obvykle závislá na střední hodnotě pojistného plnění.
- Riziko vzniku pojistné události je v celém kmeni **heterogenní** a proto není možné účtovat všem pojištěným stejné pojistné.
- U každého žadatele o pojištění se posuzuje jeho **rizikovost**. Důležitou roli zde hraje počet pojistných událostí v minulosti.
- Pro pojišťovnu je proto důležitým úkolem modelovat frekvenci pojistných nároků v daném portfoliu pojištěných. Ta je počítána jako počet pojistných nároků na jednu smlouvu za dané období (rok).

Prvotní klasifikace

- Frekvence pojistných nároků závisí na mnoha faktorech.
- Mezi tyto faktory pojišťovny řadí **charakteristiky vozu** (typ vozu, stáří vozu) a také **informace o řidiči** (věk, pohlaví, počet pojistných nároků v minulosti).
- Kombinací těchto rizikových faktorů vznikají **tarifní skupiny**, do kterých jsou řidiči rozděleni.
- Pro každou takovou skupinu je obvykle známý celkový počet pojistných nároků ve skupině a celková doba trvání všech smluv ve skupině.
- Pak je možné modelovat průměrný počet nehod na smlouvu pro každou skupinu (např. pomocí GLM’s) a na základě toho pojišťovna stanoví odpovídající pojistné ve skupině.

Prvotní klasifikace

- Problémem zůstává, že v takto vytvořených tarifních skupinách stále zůstává jistá míra heterogenity.
- Jedná se o tzv. **reziduální heterogenitu** s **náhodným efektem Θ_i.**
- Způsobují ji “neměřitelné” faktory, jako např. agresivita řidiče za volantem, rychlost reflexů, znalosti předpisů, atd.
- Z tohoto důvodu pojišťovny přistupují k následné individualizaci rizika a využívají **bonus-malus systém**.

Obsah

Základní myšlenka

- Bonus-malus (BM) systém se skládá z **konečného počtu** $s + 1$ úrovní, číslovaných od 0 do s.
- Označme ℓ, $\ell = 0, \ldots, s$ danou úroveň na BM stupnici.
- Za každý **bezeškodní rok** získá pojištěný **bonus** (posune se o jednu úroveň níž).
- Každý **nahlášený pojistný nárok** je penalizován **malusem** (pojištěný se posouvá o několik úrovní výš za každou událost).
- Po uplynutí dostatečného počtu bezeškodních let se pojištěný posouvá na stupeň 0 s maximálním bonusem.

Základní myšlenka

- K určení úrovně v systému pro další rok postačuje znalost současného dosaženého stupně pojištěného a počet pojistných nároků v daném roce.
- Za předpokladu, že počet ročních pojistných nároků je nezávislý, může být trajektorie posunu pojištěných systémem reprezentována **Markovským řetězcem**.

Pravděpodobnost přechodu

- Nechť $\{L_1(\vartheta), L_2(\vartheta), \ldots\}$ značí **trajektorii pohybu** BM systémem.
- Trajektoriie závisí na **roční frekvenci pojistných nároků** $\boldsymbol{\vartheta}$.
- Označme $\boldsymbol{p_{\ell_1\ell_2}(\vartheta)}$ **pravděpodobnost přechodu** pojištěného se střední hodnotou frekvence nehod ϑ z úrovně ℓ_1 na ℓ_2, tedy

$$p_{\ell_1\ell_2}(\vartheta) = \mathrm{P}[L_{k+1}(\vartheta) = \ell_2 | L_k(\vartheta) = \ell_1].$$

Pravděpodobnost přechodu

- Označme $\boldsymbol{P}(\vartheta)$ **matici přechodu**, tedy

$$\boldsymbol{P}(\vartheta) = \{p_{\ell_1 \ell_2}(\vartheta)\}, \ \ell_1, \ell_2 = 0, 1, ..., s.$$

- n-tá mocnina matice $\boldsymbol{P}(\vartheta)$ je n-kroková matice přechodu jejíž prvky $p^n_{\ell_1 \ell_2}(\vartheta)$, vyjadřují pravděpodobnost přechodu ze stavu ℓ_1 do stavu ℓ_2 v n krocích.

Chování systému z dlouhodobého hlediska

- Každý BM systém má obvykle nějakou “nejlepší” úroveň, kdy pojištěný dosahuje nejvyššího bonusu.
- BM se z dlouhodobého hlediska řídí neperiodickými pravidly.
- Matice přechodu spojená s BM systémem je **regulární**.
- Existuje přirozené číslo $\xi \geq 1$ takové, že všechny prvky matice $\{\boldsymbol{P}(\vartheta)\}^{\xi}$ jsou kladné.

Chování systému z dlouhodobého hlediska

- Pak můžeme říci, že Markovský řetězec popisující trajektorii pojištěného s očekávanou frekvencí pojistných nároků ϑ je **ergodický** a má **stacionární rozložení** $\boldsymbol{\pi}(\vartheta) = (\pi_0(\vartheta), \pi_1(\vartheta), \ldots, \pi_s(\vartheta))'$.
- $\pi_\ell(\vartheta)$ je stacionární pravděpodobnost pojištěného na úrovni ℓ. Tedy

$$\pi_{\ell_2}(\vartheta) = \lim_{n\to+\infty} p^n_{\ell_1\ell_2}(\vartheta).$$

- Stacionární vektor $\boldsymbol{\pi}(\vartheta)$ nezávisí na počátečním stavu pojištěného.

Výpočet stacionárního vektoru

Stacionární vektor lze vypočítat řešením následujícího systému rovnic

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}'(\vartheta) = \boldsymbol{\pi}'(\vartheta)\boldsymbol{P}(\vartheta), \\ \boldsymbol{\pi}'(\vartheta)\boldsymbol{e} = 1, \end{cases}$$

kde $\boldsymbol{e}$ označuje vektor jedniček odpovídající dimenze.

Residualní heterogenita

- Residualni heterogenita má náhodný vliv Θ_i.
- Dále přepokládáme, že počet pojistných nároků N_i má smíšené Poissonovo rozložení, kde náhodný parametr vyjadřuje reziduální heterogenitu. Tedy

$$\mathrm{P}[N_i = k | \Theta_i = \theta] = \exp(-\lambda_i \theta) \frac{(\lambda_i \theta)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Předpokládáme, že Θ_i jsou nezávislé a řídí se rozložením $\Gamma(a, a)$ s hustotou

$$u(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a)} a^a \theta^{a-1} \exp(-a\theta), \quad \theta > 0.$$

Bayesovské relativní pojistné

- Předpokládejme, že pojištěný na úrovni ℓ bude platit **pojistné** ve výši $\boldsymbol{r_\ell}$% apriorního pojistného, které je určeno na základě pozorovatelných rizikových faktorů.
- Cílem je určit r_ℓ co **nejblíže "teoretickému" relativnímu pojistnému** Θ náhodně vybraného pojištěného.
- K tomuto účelu se nejčastěji využívá **minimalizace** výrazu

$$\mathrm{E}[(\Theta - r_L)^2].$$

Bayesovské relativní pojistné

- **Náhodně** vybereme jednoho pojištěného z portfolia.
- Jeho **apriorní** (neznámou) očekávanou hodnotu frekvence pojistných nároků označíme jako Λ a rezidualní efekt rizikových faktorů označíme jako Θ.
- Pak současnou (neznámou) roční očekávanou hodnotu frekvence pojistných nároků můžeme vyjádřit jako $\Lambda\Theta$.
- Protože náhodná veličina Θ vyjadřuje rezidualní efekt skrytých vysvětlujících proměnných, můžeme předpokládat, že náhodné veličiny Λ a Θ jsou nezávislé.

Bayesovské relativní pojistné

- Nechť w_k označuje váhu k-té rizikové skupiny, kde roční očekávaná frekvence pojistných nároků je λ_k.
- Tedy
$$\mathrm{P}[\Lambda = \lambda_k] = w_k.$$
- Označme L úroveň BM systému, kde se nachází náhodně vybraný pojištěný, jehož stacionární úroveň je ℓ. Pak

$$\mathrm{P}[L = \ell] = \sum_k w_k \int_0^\infty \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta)\, \mathrm{d}\theta, \ell = 0, 1, ..., s, \qquad (3.1)$$

kde $\pi_\ell(\lambda_k \theta) = \mathrm{P}[L = \ell | \Lambda = \lambda_k, \Theta = \theta]$.

Bayesovské relativní pojistné

Nyní již můžeme odhadnout r_ℓ jako minimum

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(\Theta - r_L)^2\right] &= \sum_{\ell=0}^{s} \mathrm{E}\left[(\Theta - r_\ell)^2 | L = \ell\right] \mathrm{P}\left[L = \ell\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{s} \int_0^{+\infty} (\theta - r_\ell)^2 \, \mathrm{P}[L = \ell | \Theta = \theta] u(\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k} w_k \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{s} (\theta - r_\ell)^2 \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta) \, \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Bayesovské relativní pojistné

Řešením rovnic

$$\frac{\partial\, \mathrm{E}\left[(\Theta - r_L)^2\right]}{\partial r_\ell} = 0, \quad \ell = 0, \dots, s$$

dostáváme

$$r_\ell = \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta)\, \mathrm{d}\theta}{\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta)\, \mathrm{d}\theta}. \tag{3.2}$$

Příklad

Příklad

Uvažujme pojištění motorových vozidel, kde jsou při uzavírání smlouvy klienti přiděleni do jedné z 23 *skupin na základě kombinace jistých pozorovatelných rizikových faktorů, jako např. věk, užití vozu, oblast,... V každé z těchto skupin byla odhadnuta očekávaná roční frekvence pojistných nároků* (λ_k) *a váha každé této skupiny* (w_k)*. Pomocí metody maximální věrohodnosti byl také odhadnut parametr* $a = 1,065$ *rozdělení* $\Gamma(a, a)$. *BM systém užívaný pojišťovnou má úrovně* 0 *až* 5*. Jestliže klient bourá posouvá se na úroveň* 5*. Za každý rok bez nehody klient sestupuje o úroveň níže. Pojišťovna potřebuje určit relativní pojistné* r_ℓ *pro každou tuto úroveň.*

Příklad

Tarifní skupina	Očekávaná roční frekvence nehod λ_k v %	Váhy w_k v %
1	11.76	10.49
2	14.08	13.96
3	18.97	3.98
4	22.72	7.05
5	14.57	0.76
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	13.78	5.17
22	18.56	0.25
23	22.23	0.44

Výsledné relativní pojistné

Podle vzorců (3.1) a (3.2) dostaneme

úroveň ℓ v BM systému	$\mathrm{P}[L=\ell]$	**Relativní pojistné r_ℓ v %**
5	12.8	181.2
4	9.7	159.9
3	7.7	143.9
2	6.2	131.3
1	5.2	120.9
0	58.5	61.2

Reference

- DENUIT, M.; et al.:
  Actuarial modelling of claim counts: risk classification, credibility and bonus-malus systems
  Hoboken: Wiley. 2007.
- PITREBOIS, S.; DENUIT, M.; WALHIN, J. F.
  Fitting the belgian bonus-malus system
  Belgian Actuarial Bulletin, 2003, 3: 58-62.
- PITREBOIS, S.; DENUIT, M.; WALHIN, J. F.
  Bonus-malus scales in segmented tariffs: Gilde & Sundt's work revisited
  Australian Actuarial Journal, 2004, 10: 107-125.
- NORBERG, R.
  A credibility theory for automobile bonus systems
  Scandinavian Actuarial Journal, 1976, 1976.2: 92-107.

Děkuji za pozornost!