

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

11. února 2020

1. Vyšetřete průběh funkce $f: y = \frac{(2x+1) \cdot (4x-3)}{x^2 + 2|x| - 3}$ a pak načrtněte její graf.
Z jeho průběhu pak vyčtěte obor hodnot funkce f . Z obvyklého postupu při vyšetřování vynechte výpočet druhé derivace a určování konvexnosti, konkávnosti a inflexních bodů. (5b)
2. Rozměry obdélníku jsou v cm vyjádřeny dvěma přirozenými čísly. Zvětšili první rozměr na dvojnásobek a druhý rozměr o 3 cm, dostaneme nový obdélník se stejným obsahem, jako by měl obdélník, který bychom dostali z původního obdélníku zvětšením jeho prvního rozměru o 7 cm a druhého rozměru o 1 cm. Určete všechny možné rozměry původního obdélníku. (5b)
3. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $\log_{\frac{x+1}{x-1}} \frac{7x+13}{3(x-1)} \leq 2$. (3b)
4. Určete, kolik je všech pětimístných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu nikde není obsaženo číslo 13, tedy číslice 3 bezprostředně následující po číslici 1. Výsledek uveďte jedním číslem zapsaným v desítkové soustavě. (Nezapomeňte, že zápis čísla nezačíná číslicí nula.) (3b)
5. V trojúhelníku ABC platí $t_a = 5$ cm, $\cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ a $v_c = 6$ cm. Vypočtěte (přesné) délky stran a, b, c tohoto trojúhelníku (bez užití přibližných hodnot goniometrických a cyklometrických funkcí a odmocnin z kalkulačky). (3b)
6. V oboru $(-\pi, \pi)$ řešte rovnici $3 + 2 \sin 2x = 2 \cdot (3 \sin x + \cos x)$. (3b)
7. V rovině je dána kružnice $k(S, 3$ cm) a bod P tak, že $|SP| = 6$ cm. Sestrojte kružnici l o poloměru 5 cm, která prochází bodem P a má s kružnicí k společnou tětivu největší možné délky. Napište rozbor a postup konstrukce. Pak určete, kolik má tato polohová úloha řešení. (3b)

Postupy řešení, rozbor a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3,5 hodiny

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky, ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

15. září 2020

1. Vyšetřete průběh funkce $f: y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$ a pak načrtněte její graf. Z něj pak vyčtěte obor H hodnot funkce f . Z obvyklého postupu při vyšetřování vynechte výpočet druhé derivace a určování konvexnosti, konkávnosti a inflexních bodů. (5b)
2. V euklidovském prostoru \mathbb{E}_3 je dán čtyřstěn $ABCD$ svými vrcholy $A[1, 2, 3]$, $B[4, 5, 6]$, $C[2, 4, 7]$, $D[6, 0, 5]$. Označme T těžiště trojúhelníku BCD , U těžiště trojúhelníku ACD a V těžiště trojúhelníku ABD . Určete:
 - a) obecnou rovnici roviny ABC ,
 - b) souřadnice kolmému průmětu bodu T do roviny ABC ,
 - c) odchylku přímky AT od roviny ABC (ve výsledku může být cyklotrická funkce),
 - d) objem čtyřstěnu $ABCD$,
 - e) obsah trojúhelníku TUV . (5b)
3. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2) \geq 3$. (3b)
4. Několik autorů má napsat knihu o 16 kapitolách s danými náměty i pořadím. Dva nejzkušenější mají napsat po 3 kapitolách, další čtyři daní autoři po 2 kapitolách a zbylí autoři po 1 kapitole. Určete počet P všech způsobů, jakými si autoři mohou kapitoly pro psaní konkrétně rozdělit. Hodnota P je příliš velká, proto ji ponechte ve tvaru číselného výrazu. K němu pak najděte největší n , při kterém je číslo P násobkem čísla $n!$, a запиšte příslušnou rovnost $P = k \cdot n!$ s konstantou k vyjádřenou v desítkové soustavě. (3b)
5. V kosočtverci $ABCD$ s tupým úhlem při vrcholu B je sestrojena výška DP . Její pata P dělí stranu AB na dva úseky daných délek $p = |AP|$ a $q = |PB|$. Pomocí nich vyjádřete výšku kosočtverce i délky obou jeho úhlopříček. (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\cos 4x}$. (3b)
7. V rovině je dána kružnice k o středu S a v její vnější oblasti dva různé body A a B . Sestrojte takový průměr KL kružnice k , aby přímky AK a BL byly navzájem rovnoběžné. Napište rozbor a postup konstrukce. Pak určete, kolik může mít tato polohová úloha řešení. (3b)

Postupy řešení, rozbor a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3,5 hodiny

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky, ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.