Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU, Brno

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

7. února 2019

1. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = (x+2)\sqrt{4-x}$ a pak načrtněte její graf. Nakonec vypočtěte integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\langle a, b\rangle$ je maximální interval, na kterém má funkce f pouze nezáporné hodnoty. (5b)
2. V eukl. prostoru $\mathbb{E}_3$ jsou dány body $K[0,0,-1]$, $M[-1,1,0]$ a přímky p, q:

$$p\colon \begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 4+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &= 8+3t \end{aligned} \qquad\qquad q\colon \begin{aligned} x-y+z-1 &= 0 \\ x-z &= 0 \end{aligned}$$

   a) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q.
   b) Určete obecnou rovnici roviny ϱ, pro kterou platí $\varrho \parallel p$, $\varrho \parallel q$, $M \in \varrho$.
   c) Na ose z najděte bod L tak, aby úsečka KL byla z bodu M vidět pod úhlem $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
   d) Rozhodněte a zdůvodněte, zda lze umístit úsečku délky 4 do prostoru tak, aby současně procházela bodem M a protínala obě přímky p a q. (5b)
3. Určete definiční obor a pak vyřešte nerovnici $\log_{\frac{4}{|x|}} \dfrac{x^2+2x-3}{12} \geq 0.$ (3b)
4. Určete počet všech pětimístných přirozených čísel, která jsou dělitelná čtyřmi a mají ve svém dekadickém zápisu lichý počet lichých číslic. (Návod: rozdělte vyhovující čísla do dvou skupin podle toho, zda mají na místě desítek lichou, nebo sudou číslici.) (3b)
5. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ označme O střed delší základny AB a $2c$ délku kratší základny CD. Předpokládejme, že kružnice k se středem O a poloměrem, který označíme r, se dotýká všech tří stran BC, CD, DA. Dokažte, že body jejího dotyku s rameny BC, DA mají vzdálenost $\dfrac{4r^2c}{r^2+c^2}$. (Návod: Uvažte kartézskou soustavu s počátkem ve středu O a body A, B na ose x; neznámé souřadnice bodu $X \in k \cap BC$ vypočtěte ze soustavy dvou rovnic, z níž jedna vyjadřuje podmínku $\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{CX}$.) (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1.$ (3b)
7. Ve vnitřní oblasti kružnice k o středu S je dán bod A. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy B, C, D ležely na kružnici k. Zapište rozbor, postup konstrukce a proveďte diskusi o počtu řešení. (3b)

Postupy řešení, rozbory a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte. Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

Čas vypracování: 3,5 hodiny

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU, Brno

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

13. června 2019

1. U funkce $f\colon y = (5 - |x-3|) \cdot \mathrm{e}^{-|x|}$ zjistěte limity v nevlastních bodech $x = \pm\infty$, intervaly monotónnosti a body lokálních a globálních extrémů. Pak vypočtěte obsah rovinné oblasti tvořené body, jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ splňují soustavu nerovnic $0 \le y \le f(x)$. Ve výsledku ponechte mocniny čísla e, přibližnou hodnotu nepočítejte. (5b)
2. V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$ v rovině $z = 0$ a výškou $v = 10$. Dále je známo, že platí $A[-1, -1, 0]$, $B[3, 2, 0]$, $y_C > y_B$, $z_V > 0$. Označme ještě K střed hrany VC a ϱ rovinu ABV. Určete:
   a) souřadnice bodů C, D, V; b) obecnou rovnici roviny ϱ;
   c) odchylku hrany VC od roviny ϱ; d) vzdálenost přímek AB a VC;
   e) obsah řezu daného jehlanu rovinou ABK.
   K zápisu přesných odpovědí užijte odmocnin nebo cyklometrických funkcí, přibližné numerické hodnoty neuvádějte. (5b)
3. Určete def. obor a pak vyřešte nerovnici $\log_{\left(\frac{1}{2}+2^x\right)}\left(2 \cdot 4^{x-1} + 17 \cdot 2^{x-3}\right) \le 2.$ (3b)
4. Určete počet všech devítimístných přirozených čísel, které mají svém zápisu právě tři nuly, právě tři pětky a zbylé tři číslice navzájem různé. (Výsledné číslo stačí zapsat ve tvaru součinu na prvočinitele.) Pak vyjádřete zlomkem v základním tvaru, s jakou pravděpodobností je jedno takové náhodně vybrané číslo dělitelné číslem 25 (když všechna vyhovující čísla mají stejnou pravděpodobnost výběru). (3b)
5. V daném lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí $|AB| = 3$, $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|BD| = \sqrt{13}$ a $|\sphericalangle BAD| = 60°$. Vypočtěte velikosti zbývajících tří stran tohoto lichoběžníku. (Návod: řešte užitím kosinové věty.) (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x$. (3b)
7. V rovině jsou dány úsečky délek a a t, přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož strana BC dané délky a leží na přímce p a jehož těžnice z vrcholu B má danou délku t. Zapište rozbor, postup konstrukce a proveďte diskusi o počtu řešení. (3b)

Postupy řešení, rozbory a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte. Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

Čas vypracování: 3,5 hodiny