Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU, Brno

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

12. února 2018

1. Je dána funkce $f\colon y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$. Určete body jejích lokálních minim a maxim. Pak vypočtěte $\int_a^b |f(x)|\mathrm{x}$, kde $\langle a, b\rangle$ je nejmenší interval, který obsahuje všechny body lokálních extrémů funkce f. (Návod: interval integrace rozdělte na části, na kterých je $f \geq 0$ nebo $f \leq 0$.) (5b)

2. V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ je dán bod $M[1, 1, 3]$ a mimoběžky p a q, kde

$$p\colon \begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= -4 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad q\colon \begin{aligned} 4x + y - z - 3 &= 0 \\ y + z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Určete:
a) obecnou rovnici roviny ϱ, pro niž platí $\varrho \parallel p$, $\varrho \parallel q$, $M \in \varrho$,
b) parametrickou rovnici osy o mimoběžek p a q,
c) vzdálenost přímek p a q,
d) odchylku přímky p od roviny σ, jež je určena podmínkou $M \in \sigma \perp q$,
e) bod X na přímce p mající stejnou vzdálenost od bodu M a od přímky q. (5b)

3. a) Z definice logaritmů odvoďte převodní vztah mezi $\log_a V$ a $\log_b V$.
b) Stanovte definiční obor nerovnice $\log_{\sqrt{\frac{2}{x}}} \frac{10\cdot 2^x - 4^x}{8} \leq \frac{2}{1-\log_2 x}$ a pak ji vyřešte. (Návod: V levé straně přejděte k logaritmu při základu 2.) (3b)

4. Ve třídě, ve které je 12 dvojsedadlových lavic, máme rozesadit 21 žáků. Určití dva žáci mají sedět (z výchovně psychologických důvodů) spolu v jedné ze tří lavic u tabule. Žádná lavice ve třídě nemá zůstat prázdná. Kolika způsoby je možné žáky rozesadit? Odpověď stačí upravit do tvaru $a \cdot b!$ s vhodnými čísly a a b. (3b)

5. Sestavte rovnice těch tečen ke kružnici $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $2x + y - 7 = 0$. (3b)

6. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 8x + 2\sin 6x + \sin 4x + 2\cos^2 x = 0$. (3b)

7. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod S. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník KLM s vrcholy K, L, M po řadě na stranách AB, BC, AC tak, aby jeho přepona LM měla střed v bodě S. Zapište rozbor a postup konstrukce. Určete, kolik může mít úloha řešení (uveďte jen možné počty, příslušné podmínky nevypisujte). (3b)

Postupy řešení, rozbory a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte. Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

Čas vypracování: 3,5 hodiny

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

11. června 2018

1. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ a načrtněte její graf. K vhodnějšímu zakreslení grafu zvolte na osách x, y odlišná měřítka. (5b)
2. V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ jsou dány body $A[1, -2, 2]$, $B[-3, 2, 0]$, $C[5, 4, 0]$, $D[1, 3, 4]$. Určete:
   a) obsah trojúhelníku ABC, b) objem čtyřstěnu $ABCD$,
   c) výšku čtyřstěnu $ABCD$ příslušnou stěně ABC,
   d) souřadnice středu kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$.
   Pak rozhodněte, které protější hrany čtyřstěnu $ABCD$ mají největší odchylku. (Protější hrany jsou AB a CD, AC a BD, AD a BC.) (5b)
3. Určete definiční obor a pak vyřešte: $\log_{\frac{x+15}{4}} \dfrac{3(x+29)}{2(22-x)} \leq 1.$ (3b)
4. V 1.A třídě je ve třech řadách vždy n lavic za sebou, v každé lavici jsou dvě sedadla. Máme do nich posadit $3n$ žáků a $3n$ žákyň za podmínky, že chlapci mohou sedět spolu pouze v prvních lavicích u tabule. Určete, kolik je všech takových zasedacích pořádků, při kterých lavice se dvěma chlapci
   a) není žádná, b) je 1, c) jsou 2, d) jsou 3.
   Pak ukažte, že nalezené počty jsou v postupném poměru
   $$64 : 48\binom{3n-1}{1} : 12\binom{3n-2}{2} : \binom{3n-3}{3}.$$
   (Návod: užijte kombinatorické pravidlo součinu k takové proceduře — nejprve usadíme chlapce po dvou, pak zbylé chlapce po jednom a nakonec všechna děvčata.) (3b)
5. Vypočtěte kartézské souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li průsečík $V[-1, 2]$ jeho výšek, patu $B_0[1, 1]$ výšky z vrcholu B a víte-li, že strana AB leží na přímce $c\colon x + 7y - 23 = 0$. (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $1 + (1 + \cos x)\cos 2x = \cos 3x + 2\cos^3 x$. (3b)
7. Vně čtverce $ABCD$ o středu S jsou dány dva body K a L. Sestrojte přímku p jdoucí bodem S, která protne hranici čtverce v bodech, jež lze označit X a Y tak, aby přímky KX a LY byly rovnoběžné. Zapište rozbor úlohy a postup konstrukce hledané přímky p. Rozhodněte, kolik může mít úloha řešení a ke každému počtu načrtněte příklad takové situace. Může mít úloha nekonečně mnoho řešení, když ne každá přímka p jdoucí bodem S je vyhovující? (3b)

Postupy řešení, rozbory a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte. Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

Čas vypracování: 3,5 hodiny