MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
Přírodovědecká fakulta

Kateřina MYŠKOVÁ

MODEL VÍCEROZMĚRNÉ KALIBRACE

Dizertační práce

Školitel: Prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.

Brno, 2009

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Kateřina Myšková

Název disertační práce: Model vícerozměrné kalibrace

Název disertační práce anglicky: Multidimensional calibration model

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, statistika a matematické modelování

Školitel: Prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.

Rok obhajoby: 2009

Klíčová slova v češtině: kalibrace, kalibrační funkce, odhady parametrů

Klíčová slova v angličtině: calibration, calibration function, estimators of parameters

Poděkování

Děkuji touto cestou svému školiteli prof. RNDr. Gejzovi Wimmerovi, DrSc. za vstřícný přístup, podnětné rady a připomínky, trpělivost a optimismus. Dále děkuji RNDr. Ivo Mollovi, CSc. za čas a ochotu, které věnoval konzultacím zpracovávaného tématu. Z této spolupráce vznikla 3. kapitola.

Abstrakt

Předložená dizertační práce je věnována modelům vícerozměrné kalibrace. Podrobněji řečeno se zabývá trojrozměrným a dvojrozměrným kalibračním modelem.

Práce obsahuje tři kapitoly a jeden dodatek. Kapitola 1 obsahuje stručný přehled teoretických východisek souvisejících s tématem práce. Konkrétně je věnována definici a vlastnostem Kroneckerova součinu matic, definici některých základních lineárních modelů měření a některých odvozených lineárních modelů měření, odhadům neznámých parametrů v daných modelech a určení jejich přesnosti, odhadům parametrů neznámé kovariační matice modelu pomocí metody MINQUE v některých základních lineárních modelech a jejich odvození pro speciální lineární modely měření. Poslední podkapitola shrnuje Kenwardův-Rogerův odhadovací postup, který slouží pro aproximaci rozdělení odhadu parametrů modelu při neznámé kovarianční matici.

V kapitole 2 je definován trojrozměrný nereplikovaný i replikovaný kalibrační model. V obou případech jsou odvozeny odhady neznámých parametrů modelu, tj. odhady středních hodnot a parametrů kalibrační funkce, při známé kovariační matici a určení jejich přesnosti. V replikovaném kalibračním modelu při neznámé kovariační matici jsou navíc pomocí metody MINQUE odhadnuty parametry této kovarianční matice a odvozena přesnost těchto odhadů a dále s využitím postupu Kenwarda a Rogera jsou vyjádřeny konfidenční oblasti, a to pro vektor parametrů kalibrační funkce i pro dvě vybrané lineární funkce parametrů kalibrační funkce. Závěr kapitoly je věnován malé simulační studii ověření aproximativních vlastnotí rozdělení.

Kapitola 3 definuje dvojrozměrný nereplikovaný model. Odvozuje odhady parametrů modelu za předpokladu, že kalibrační funkce zachovává objekty (matice transformace je ortonormální s determinantem rovným 1) - kalibrace identických nespecifikovaných objektů. Dále se odvozují odhady parametrů modelu za předpokladu, že objekt je specifikován a je jím kružnice.

Programy k zrealizování malé simulační studie, která je součástí dizertační práce, byly napsány v softwaru MATLAB a lze je nalézt na přiloženém CD.

Abstract

The present thesis is concerned with multicalibration models. More precisely, it deals with three- and two-dimensional calibration models.

It consists of three chapters and one appendix. Chapter 1 brings an overview of the theoretical concepts related to the subject of the thesis. In particular, it is concerned with the definition and properties of the Kronecker matrix product, the definition of some basic linear measurement models and some derived linear measurement models, estimators of the unknown parameters in particular models and the determination of their dispersion, estimators of the parameters of an unknown covariance model matrix based on the MINQUE methods in some basic linear models and their derivation for special linear measurement models. The last sub-chapter summarizes the Kenward-Roger estimation procedure used to approximate the distribution of model parameter estimators with unknown covariance matrix.

Chapter 2 defines 3D non-replicated and replicated calibration models. For both types, estimators are derived of the unknown parameters of a model, that is, estimators of the mean values and parameters of the calibration function if the covariance matrix is known with their dispersions determined. In a replicated calibration model with unknown covariance matrix, moreover, the MINQUE method is used to estimate the parameters of this covariance matrix and determine the dispersions of such estimators and next, using the Kenward and Roger procedure, the confidence areas are determined both for the vector of the calibration function parameters and for two selected linear functions of the parameters of the calibration function. The last part of the chapter deals with a small simulation study to verify the approximation properties of the distribution.

Chapter 3 defines a two-dimensional non-replicated model. It derives estimators of the parameters of the model provided that the calibration function preserves objects (the transformation matrix is orthogonal with the determinant equal to 1) - calibration of identical non-specified objects. Next estimators are derived of the parameters of the model if the object is specified as a circle.

The computer programs implementing the small simulation study are written in MATLAB and can be found on the enclosed CD.

Obsah

Úvod

Kalibrace je pojem, s kterým se často setkáváme, zejména v technické praxi. Snad nejčastěji v souvislosti s kalibrováním přístrojů. Pro matematický popis (sestavení modelu) kalibrace však nemusí jít jenom o dvě měření na různých přístojích, ale i o dvě měření získaná různými metodami či za různých podmínek.

Cíle zkoumání v kalibraci jsou dva. První je najít vztah mezi měřeními - tzv. kalibrační funkci. Druhým je stanovit predpis, jak určit skutečnou (bezchybnou) hodnotu měření a ,,nejistotu" tohoto určení, když měříme nakalibrovaným přístojem.

Pro vyjádření odhadu parametrů modelu rozlišujeme dvě situace. První, když jedno měření je pevné (přesné, bezchybné) a druhé je realizací náhodné veličiny či náhodného vektoru, potom se v podstatě jedná o regresní úlohu. Druhou je situace, kdy obě měření považujeme za realizace náhodné veličiny či náhodného vektoru, tj. obojí měříme s nějakou nepřesností.

Podle počtu stanovených veličin u jednotlivých měření rozlišujeme kalibraci jednorozměrnou či vícerozměrnou.

Podle toho, zda měření můžeme opakovat rozlišujeme modely kalibrace replikované a nereplikované.

Byly navrženy různé modely jednorozměrné kalibrace, kde jedno měření považujeme za ,,bezchybné". Jedny z prvních modelů popisují Eisenhart (1939) a Krutchkoff (1967), přehledně jsou popsány např. v [15], kde navíc kromě odhadů parametrů kalibrační funkce je navržen i odhad inverzní kalibrační funkce.

Vícerozměrné modely kalibrace, kde jedno měření je ,,bezchybné" jsou popsány např. v [2].

Jednorozměrný model, kde obě měření jsou s chybami, tzv. model komparativní kalibrace, je podrobně popsán např. v [7, 3]. V [20, 21, 22] jsou i odhady inverzní kalibrační funkce.

V práci se budeme zabývat vícerozměrným komparativním kalibračním modelem, tj. obě měření jsou zatížena chybami. Budeme předpokládat kalibrační funkci v lineárním tvaru. Cílem práce je najít odhady neznámých parametrů modelu, určit přesnost těchto odhadů (kovarianční matice), dále v replikovaném kalibračním modelu vyjádřit odhad neznámých komponent kovariační matice modelu a zkonstruovat konfidenční oblasti pro vektor parametrů kalibrační funkce či její lineární kombinaci v případě, že neznáme kovariační matici měření. Pro výpočet konfidenční oblasti při neznámé kovariační matici se aplikuje postup Kenwarda-Rogera (viz. [5]), který navrhuje odhad kovariační matice a s využitím ,,zpřesněné" kovariační matice uvádí statistiku, která má aproximativně F-rozdělení.

Bezprostřední motivací pro trojrozměrnou kalibraci byly dvě úlohy. První z oblasti genetiky, konkrétně měření prostorových souřadnic bodů na šroubovici DNA (genů) ze dvou různých poloh a určení vztahu mezi těmito měřeními. Výsledku se využívá na určení prostorových souřadnic bodů (genů), které můžeme určit pouze z jedné pozice. Druhá úloha je z fotogrammetrie, kde jde o nalezení vztahu mezi měřeními polohy předmětu ze dvou různých pozic. Speciálně pro konstrukci map. Samozřejmě předložená práce umožňuje řešit širokou škálu (zejména) trojrozměrných kalibračních úloh.

Použité značení

- $vec\,\mathbf{A}$ - vektor ze sloupců matice $\mathbf{A}$ uspořádaných pod sebe v přirozeném pořadí
- $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ - Kroneckerův součin matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (v pojetí definice 1)
- $\mathbf{I}_n$ - n-rozměrná jednotková matice
- $\mathbf{I}$ - jednotková matice vhodného typu
- $\mathbf{1}_n$ - n-rozměrný sloupcový vektor jedniček
- $\mathcal{P}_{\mathbf{A}}$ - projekční matice na ortogonální doplněk prostoru sloupců matice $\mathbf{A}$
- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ - lineární obal sloupců matice $\mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\mathbf{A}$ - stopa matice $\mathbf{A}$
- $h(\mathbf{A})$ - hodnost matice $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}'$ - transponovaná matice k matici $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^+$ - Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice k matici $\mathbf{A}$
- ${}_n\mathbf{e}_k$ - n-rozměrný vektor nul s jedničkou na k-té pozici
- ${}_n\mathbf{E}_{kk}$ - n-rozměrná čtvercová matice nul s jedničkou na pozici k, k
- $\mathbf{0}_k$ - k-rozměrná čtvercová matice nul
- $\mathbf{0}_{k,n}$ - matice nul typu (k, n)
- $\{\mathbf{A}\}_{\bullet,i}$ - i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$
- $\{\mathbf{A}\}_{i,\bullet}$ - i-tý řádek matice $\mathbf{A}$
- $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ - náhodný vektor $\mathbf{Y}$ se střední hodnotou $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ a kovariační maticí $\boldsymbol{\Sigma}$
- $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ - kriteriální matice (v pojetí definice 10)

Kapitola 1

Teoretická východiska

1.1 Kroneckerův součin

Definice 1. Mějme matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) a matici $\mathbf{B}$ typu (r, s). Jejich Kroneckerovým součinem $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ je blokově zapsaná matice typu (mr, ns):

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Níže uvádíme některé vlastnosti Kroneckerova součinu matic. Důkazy vět 1.1 - 1.4 jsou např. v [4, str. 122 - 125].

Věta 1.1. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *je typu* (m, n)*, matice* $\mathbf{C}$ *je typu* (n, k)*, matice* $\mathbf{B}$ *typu* (p, r) *a matice* $\mathbf{D}$ *typu* (r, s)*. Potom platí:*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

Věta 1.2. *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou regulární matice. Potom jejich Kroneckerův součin* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *je také regulární matice a platí:*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

Věta 1.3. *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou libovolné matice, potom*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'.$$

Věta 1.4. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou symetrické, potom jejich Kroneckerův součin* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *je také symetrická matice.*

Lemma 1.5. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *je typu* (m, n)*, matice* $\mathbf{B}$ *je typu* (n, k) *a matice* $\mathbf{C}$ *typu* (k, l)*. Potom platí:*

$$vec\,\mathbf{ABC} = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})vec\,\mathbf{B}.$$

Důkaz. Rozepsáním tvrzení lehce dokážeme. $\square$

Lemma 1.6. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *je typu* (m, n) *a matice* $\mathbf{B}$ *je typu* (n, m). *Potom platí:*

$$Tr\mathbf{AB} = (vec\,\mathbf{B}')'vec\,\mathbf{A}.$$

Důkaz. Rozepsáním tvrzení lehce dokážeme. $\square$

1.2 Modely měření

1.2.1 Některé základní lineární modely měření

Definice 2. Nechť $\boldsymbol{\beta}$ je k-rozměrný reálný vektor, $\mathbf{X}$ reálná matice typu (n,k) s vlastností $h(\mathbf{X}) = k \leq n$, $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitivně definitní n-rozměrná reálná matice a $\mathbf{Y}$ n-rozměrný náhodný vektor se střední hodnotou $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ a kovariační maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Potom trojici $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ nazýváme model nepřímého měření a zapisujeme ho ve tvaru

$$\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}). \tag{1.1}$$

Definice 3. Nechť $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ je model nepřímého měření a nechť $\mathbf{X} = \mathbf{I}$. Potom trojici $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ nazýváme model přímého měření a zapisujeme ho ve tvaru

$$\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}). \tag{1.2}$$

Definice 4. Nechť $\boldsymbol{\beta}_1$ je k_1-rozměrný reálný vektor, $\boldsymbol{\beta}_2$ je k_2-rozměrný reálný vektor, $\mathbf{b}$ je q-rozměrný reálný vektor, $\mathbf{B}_1$ je reálná matice typu (q, k_1) a $\mathbf{B}_2$ je reálná matice typu (q, k_2) s vlastnostmi $h(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = q \leq k_1 + k_2, h(\mathbf{B}_2) = k_2 \leq q$. Dále nechť $\mathbf{X}$ je reálná matice typu (n, k_1) s vlastností $h(\mathbf{X}) = k_1 \leq n$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitivně definitní n-rozměrná reálná matice a $\mathbf{Y}$ je n-rozměrný náhodný vektor se střední hodnotou $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1$ a kovariační maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Potom trojici $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma})$ s podmínkami $\mathbf{b}+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ nazýváme (regulární) model neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a zapisujeme ho ve tvaru

$$\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Věta 1.7. *Nechť (1.3) je (regulární) model neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Označme* $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2' & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}$. *Potom nejlepší nestranný lineární odhad parametrů* $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ *je*

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11} \\ \mathbf{Q}_{21} \end{pmatrix} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1,$$

kde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$*; kovariační matice odhadu je*

$$var\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \\ var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) &= -\mathbf{Q}_{22}, \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}. \end{aligned}$$

Důkaz. Viz. [7, str. 129]. $\square$

Definice 5. Nechť $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ je model neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a nechť $\mathbf{X} = \mathbf{I}$. Potom trojici $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma})$ s podmínkami $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ nazýváme model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a zapíšeme ho ve tvaru

$$\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

Věta 1.8. *Nechť (1.4) je model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Označme* $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2' & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}$. *Potom nejlepší nestranný lineární odhad parametrů* $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ *je*

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11} \\ \mathbf{Q}_{21} \end{pmatrix} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \mathbf{Y};$$

kovariační matice odhadu je

$$var\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) & cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2) \\ cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) & var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\Sigma}, \\ var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) &= -\mathbf{Q}_{22}, \\ cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne z věty 1.7 volbou $\mathbf{X} = \mathbf{I}$. $\square$

Lemma 1.9. *Nechť* $\mathbf{W}$ *je pozitivně definitní matice typu* (n, n) *a* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (n, k) *s hodností* $h(\mathbf{A}) = k$. *Potom matice*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

je regulární a její inverze je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}, & \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \\ (\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}, & -(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Existence inverzní matice plyne zřejmě z toho, že matice $\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}$ je regulární. Tvar inverze se ověří přímým výpočtem. $\square$

Poznámka. Matici

$$\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}$$

můžeme zapsat ve tvaru $(\mathcal{P}_A\mathbf{W}\mathcal{P}_A)^+$, kde $^+$ označuje Mooreovu-Penroseovu pseudoinverzi, viz [16, str. 47].

1.2.2 Dva speciální lineární modely měření

V aplikačních úlohách rozlišujeme dvě situace: nereplikované a replikované měření. V předchozí kapitole jsme se zabývali nereplikovanými modely. Nyní budeme uvažovat modely, které využívají replikace, tj. možnosti nezávisle opakovat měření. Replikace navíc umožňují odhadovat další parametry, nejčastěji neznámé parametry kovarianční matice (viz kapitola 1.3).

Definice 6. Nechť $\mathbf{Y}_1 \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \mathbf{b}+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}, \dots, \mathbf{Y}_m \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \mathbf{b}+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$ jsou (regulární) modely neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Nechť $\mathrm{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = 0$ pro $i \neq j$. Označme $\underline{\mathbf{Y}} = (\mathbf{Y}_1', \dots, \mathbf{Y}_m')'$. Potom trojici $(\underline{\mathbf{Y}}, (\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ s podmínkami $\mathbf{b}+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$ nazýváme replikovaný neúplný nepřímý model měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a zapisujeme ho ve tvaru

$$\underline{\mathbf{Y}} \sim \left[(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}\right], \quad \mathbf{b}+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Věta 1.10. *Nechť (1.5) je replikovaný neúplný nepřímý model měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Označme* $\overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j$, $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2' & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}$*. Potom nejlepší nestranný lineární odhad parametrů* $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ *je dán vztahem*

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11} \\ \mathbf{Q}_{21} \end{pmatrix}\mathbf{b} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,$$

kde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{Y}}$*; kovariační matice odhadu je*

$$var\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} - \frac{1}{m^2}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \\ var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) &= -\mathbf{Q}_{22}, \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= -\frac{1}{m}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyplývá z vlastností Kroneckerova součinu uvedených v kapitole 1.1 a z věty 1.7, kde

$$\mathbf{X} \to \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{Y} \to \underline{\mathbf{Y}}.$$

($\mathbf{X}$ nahradím $\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ nahradím $\mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{Y}$ nahradím $\underline{\mathbf{Y}}$).
Potom $(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \to [(\mathbf{1}_m'\otimes\mathbf{X}')(\mathbf{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{1}_m\otimes\mathbf{X})]^{-1} = \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$ a $\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y} \to (\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{X}')(\mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma})\underline{\mathbf{Y}} = (\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma})\underline{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}_i = m\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{Y}}$. □

Definice 7. Nechť $\mathbf{Y}_1 \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{Y}_m \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ jsou (regulární) modely neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Nechť $\mathrm{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = 0$ pro $i \neq j$. Označme $\overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j$. Potom trojici $(\overline{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma})$ s podmínkami $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ nazýváme neúplný nepřímý model měření s aritmetickými průměry a s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a zapisujeme ho

$$\overline{\mathbf{Y}} \sim \left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1, \frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma}\right], \quad \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Věta 1.11. *Nechť (1.6) je neúplný nepřímý model měření s aritmetickými průměry a s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu. Označme* $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2' & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}$*. Potom nejlepší nestranný lineární odhad parametrů* $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ *je*

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11} \\ \mathbf{Q}_{21} \end{pmatrix}\mathbf{b} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,$$

kde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{Y}}$*; kovariační matice odhadu je*

$$var\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1 \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) & var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} - \frac{1}{m^2}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \\ var(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2) &= -\mathbf{Q}_{22}, \\ cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_2, \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_1) &= -\frac{1}{m}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyplývá z věty 1.7, kde

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}, \boldsymbol{\Sigma} \to \frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y} \to \overline{\mathbf{Y}}.$$

Potom $(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \to \frac{1}{m}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$;

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y} \to \mathbf{X}'(\tfrac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\overline{\mathbf{Y}} = m\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{Y}}. \qquad \square$$

Poznámka. Odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ v modelu s aritmetickými průměry a v replikovaném modelu jsou shodné.

1.2.3 Ekvivalence modelů

Definice 8. Mějme dva modely obsahující stejný neznámý vektor parametrů. Tyto modely nazveme ekvivalentní vzhledem k neznámému vektoru parametrů a zvolené metodě, dále jen ekvivaletní, když odhad neznámého vektoru parametrů zvolenou metodou je v obou modelech totožný.

Uvažujme (regulární) model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu (viz definice 5):

$$\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

Připomeňme, že $\mathbf{b}$ je q-rozměrný reálný vektor, $\mathbf{B}_1$ je reálná matice typu (q, k_1) a $\mathbf{B}_2$ je reálná matice typu (q, k_2) a vlastnost $h(\mathbf{B}_2) = k_2 \leq q$. Vektor $\mathbf{b}$ rozložíme na dva subvektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ tak, že první subvektor má rozměr $q - k_2$, druhý k_2. Matice $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ rozložíme na dvě submatice: $\mathbf{B}_1' = (\mathbf{B}_{11}', \mathbf{B}_{12}')$, kde $\mathbf{B}_{12}$ má rozměr (k_2, k_1) a $\mathbf{B}_2' = (\mathbf{B}_{21}', \mathbf{B}_{22}')$, kde $\mathbf{B}_{22}$ má rozměr (k_2, k_2) a navíc bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je regulární (oproti častěji používanému výběru prvních k_2 lineárně nezávislých sloupců bereme posledních k_2 sloupců). Podmínky přepíšeme následovně:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{12} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

Dostáváme soustavu dvou systémů rovnic

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{B}_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_{21}\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}_2 + \mathbf{B}_{12}\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_{22}\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

Z druhé rovnice vyjádříme

$$\boldsymbol{\beta}_2 = -\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{12}\boldsymbol{\beta}_1.$$

Dosadíme do první rovnice

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{B}_{11}\boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{12}\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$$

a upravíme

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 + (\mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{12})\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}.$$

Označme: $\mathfrak{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2$, $\mathcal{B} = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{12}$. Vzhledem k tomu, že matice $\mathcal{B}$ je plné řádkové hodnosti (důkaz viz. [6, str. 131]) dostáváme model úplného přímého měření s podmínkami I. typu na parametry 1. řádu (podrobněji v [7, str. 124]):

$$\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathfrak{b} + \mathcal{B}\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}.$$

Matici $\mathcal{B}$ rozložíme na dvě submatice: $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, kde $\mathcal{B}_2$ má rozměr $(q - k_2, q - k_2)$ a navíc bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je regulární. Vektor $\boldsymbol{\beta}_1$ rozložíme na dva subvektory $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ tak, že první subvektor má rozměr k_1+k_2-q, druhý $q-k_2$. Podmínku přepíšeme do tvaru

$$\mathfrak{b} + (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

nebo do tvaru

$$\mathfrak{b} + \mathcal{B}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathcal{B}_2\boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{0}.$$

Odtud vyjádříme

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = -\mathcal{B}_2^{-1}\mathfrak{b} - \mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1\boldsymbol{\gamma}_1.$$

Model úplného přímého měření s podmínkami I. typu na parametry 1. řádu lze zapsat

$$\mathbf{Y} \sim \left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}\right), \quad \mathfrak{b} + \mathcal{B}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathcal{B}_2\boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{0}.$$

Zahrnutím podmínek do modelu dostáváme

$$\mathbf{Y} \sim \left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ -\mathcal{B}_2^{-1}\mathfrak{b} - \mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1\boldsymbol{\gamma}_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}\right),$$

úpravou

$$\mathbf{Y} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathcal{B}_2^{-1}\mathfrak{b}\end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ -\mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\Sigma}\right).$$

Označme: $\boldsymbol{\beta}_{1,0} = -\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathcal{B}_2^{-1}\mathfrak{b}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ -\mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1\end{pmatrix}$. Vzhledem k tomu, že matice $\mathbf{K}_1$ je plné sloupcové hodnosti, dostáváme model nepřímého měření:

$$\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}_{1,0} \sim (\mathbf{K}_1\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Předchozí postup je důkazem následujícího lemmatu:

Lemma 1.12. *Model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu*

$$\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$$

je ekvivaletní s modelem nepřímého měření

$$\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}_{1,0} \sim (\mathbf{K}_1\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\Sigma}).$$

1.3 MINQUE odhady

Metoda MINQUE slouží k odhadu neznámé kovarianční matice, resp. k odhadu neznámých komponent kovariační matice či k odhadu lineární funkce těchto komponent. Název je zkratkou z anglického ,,minimum norm quadratic unbiased estimator". Budeme hledat odhady, které jsou kvadratické, invariantní, nevychýlené a minimalizují normu matice (v našem případě Euklidovskou normu matice). MINQUE odhady zavedl Rao v roce 1970.

Uvažujme model nepřímého měření $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$. Ekvivalentně lze model zapsat $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, kde $\boldsymbol{\epsilon}$ je náhodný vektor chyb. Vektor $\boldsymbol{\epsilon}$ bývá často ve tvaru: $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{U}_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + \mathbf{U}_p\boldsymbol{\xi}_p$, kde $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_p$ jsou známé matice, $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p$ jsou náhodné vektory s počty prvků $n_1, \ldots, n_p$, pro které platí

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}_i) = \vartheta_i\mathbf{I}, \quad kde \quad \vartheta_i > 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\text{a} \quad \mathrm{cov}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j) = \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad i, j = 1, \ldots, p \quad \text{a} \quad i \neq j.$$

(Tento model bývá také nazýván modelem se smíšenými efekty).
Z předchozího obdržíme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \\ \mathrm{var}(\mathbf{Y}) &= \vartheta_1\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1' + \cdots + \vartheta_p\mathbf{U}_p\mathbf{U}_p' = \vartheta_1\mathbf{V}_1 + \cdots + \vartheta_p\mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{V}_i = \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i'$ pro $i = 1, \ldots, p$.

Předpokládejme, že známe přibližné (apriorní) hodnoty $\vartheta_1^0, \ldots, \vartheta_p^0$ neznámých komponent $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$.

Parametry kovarianční matice modelu reparametrizujeme pomocí vztahů

$$\gamma_i = \frac{\vartheta_i}{\vartheta_i^0}, \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, p$$

odtud $\mathbf{W}_i = \sqrt{\vartheta_i^0}\mathbf{U}_i$, $\mathbf{T}_i = \vartheta_i^0\mathbf{V}_i = \mathbf{W}_i\mathbf{W}_i'$, $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\vartheta_i^0}\boldsymbol{\eta}_i$ pro $i = 1, \ldots, p$. Potom kovariační matici lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_1\mathbf{T}_1 + \cdots + \gamma_p\mathbf{T}_p.$$

Chceme odhadnout lineární funkci neznámých komponent

$$\sum_{i=1}^{p} g_i\vartheta_i = \sum_{i=1}^{p} p_i\gamma_i.$$

Hledáme kvadratický odhad, tedy odhad ve tvaru $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$. Dalšími přirozenými požadavky na odhad jsou invariance a nestrannost. Kritériem pro nejlepší odhad je v tomto případě minimalizace normy matice.

a) Invariance (nezávislost na posunutí). Nechť $\boldsymbol{\beta}_0 \in \mathbf{R}^p$, zvolme $\boldsymbol{\beta}_d = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0 \Rightarrow \mathbf{Y}_d = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_d + \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0$. Požadujeme, aby odhad $\mathbf{Y}_d'\mathbf{A}\mathbf{Y}_d$ byl pro všechna $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^p$ stejný jako $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$, což bude právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (viz [7, str. 97]).

b) Nestrannost $\Leftrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^p p_i\gamma_i$. Na základě věty 15 z [1, str. 80] lze psát $\mathrm{E}(\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}) = \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathrm{var}(\mathbf{Y})\} + \mathrm{E}(\mathbf{Y}')\mathbf{A}\mathrm{E}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\sum_{i=1}^p \gamma_i\mathbf{T}_i\} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^p \gamma_i \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}_i\} = \sum_{i=1}^p p_i\gamma_i$ pro všechna $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, p$. Odhad tedy bude nestranný právě tehdy, když $\mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}_i\} = p_i$ pro všechna $i = 1, \dots, p$.

c) Minimalizace normy. Pokud by hypotetické proměnné $\boldsymbol{\eta}_i$ (měření týkající se neznámé komponenty γ_i) byly známé, potom přirozeným odhadem γ_i je $\boldsymbol{\eta}_i'\boldsymbol{\eta}_i/n_i$ (vzhledem k nulové střední hodnotě) a dále přirozeným odhadem $\sum_{i=1}^p p_i\gamma_i$ je

$$\frac{p_1}{n_1}\boldsymbol{\eta}_1'\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + \frac{p_p}{n_p}\boldsymbol{\eta}_p'\boldsymbol{\eta}_p = \boldsymbol{\eta}'\Delta\boldsymbol{\eta},$$

kde $\boldsymbol{\eta}' = (\boldsymbol{\eta}_1', \dots, \boldsymbol{\eta}_p')$, $\Delta = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{n_1}\mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{q_2}{n_2}\mathbf{I}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{q_p}{n_p}\mathbf{I}_{n_p} \end{pmatrix}$ (vzhledem k nekorelovanosti vektorů).

Můžeme psát $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon})'\mathbf{A}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\eta}'\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\boldsymbol{\eta}$, kde $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p)$, neboť $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{U}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{W}\boldsymbol{\eta}$, kde $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_p), \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1', \dots, \boldsymbol{\xi}_p')'$.

S odhadem $\boldsymbol{\eta}'\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\boldsymbol{\eta}$ se chceme co nejvíc přiblížit přirozenému odhadu $\boldsymbol{\eta}'\Delta\boldsymbol{\eta}$, proto budeme minimalizovat rozdíl těchto dvou čísel, neboli minimalizovat normu rozdílu matic $\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - \Delta$.

Definice 9. Odhad $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$, kde matice $\mathbf{A}$ minimalizuje normu $\|\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - \Delta\|$ za podmínky $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}_i\} = p_i$ pro $i = 1, \dots, p$ nazýváme kvadratický, invariantní, nevychýlený odhad s minimální normou (MINQUE odhad) parametrické funkce $\sum_{i=1}^p p_i\gamma_i$.

Při volbě Euklidovské normy ($\|\mathbf{B}\|^2$ = součet čtverců všech prvků matice $\mathbf{B}$, $\|\mathbf{B}\|^2 = \mathrm{Tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}'\}$) obdržíme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - \Delta\|^2 &= \mathrm{Tr}\{(\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - \Delta)(\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - \Delta)'\} = \\ &= \mathrm{Tr}\{\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W} - 2\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\Delta + \Delta\Delta\} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\} - \mathrm{Tr}\{\Delta\Delta\} = \\ &= \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}\} - \mathrm{Tr}\{\Delta\Delta\}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^p \mathbf{W}_i\mathbf{W}_i' = \sum_{i=1}^p \mathbf{T}_i$. Výše uvedená rovnost vychází ze vztahu $\mathrm{Tr}\{\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{W}\Delta\} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{W}\Delta\mathbf{W}'\} = \sum_{i=1}^p \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\frac{p_i}{n_i}\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i'\} = \sum_{i=1}^p \frac{p_i}{n_i}p_i = \mathrm{Tr}\{\Delta\Delta\}$.

Minimalizace normy se tedy zjednodušuje na minimalici stopy $\mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}\}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{T}_i\} = p_i$ pro $i = 1, \dots, p$.

Podle [16, str. 91] oddílu (III) je minima dosaženo pro $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \mathbf{R}\mathbf{T}_i\mathbf{R}$, kde $\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{T}^{-1}$ a kde λ_i^* splňují $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \mathrm{Tr}\{\mathbf{R}\mathbf{T}_i\mathbf{R}\mathbf{T}_j\} = p_j$.

Zpětná reparametrizace: $\mathbf{T}_i = \vartheta_i^0 \mathbf{V}_i,\ p_i = \vartheta_i^0 g_i$.

Minima je tedy dosaženo pro $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}$, kde λ_i splňují $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{Tr}\{\mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}\mathbf{V}_j\} = g_j$ a $\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{T}^{-1}$.

Odhad lineární funkce $\sum_{i=1}^{p} g_i\vartheta_i = \sum_{i=1}^{p} p_i\gamma_i$ je $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{Y}'\mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i = \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{Q}$, kde $Q_i = \mathbf{Y}'\mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}\mathbf{Y}$ pro $i = 1, \ldots, p$, $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \mathbf{Q}' = (Q_1, \ldots, Q_p)$, přičemž vektor $\boldsymbol{\lambda}$ vyhovuje rovnici $\mathbf{S}'_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q}' = (q_1, \ldots, q_p)$.

Definice 10. Matici $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}$ nazýváme kriteriální matice a její prvky jsou definovány vztahem $\{\mathbf{S}_{\mathbf{R}}\}_{ij} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{R}\mathbf{V}_i\mathbf{R}\mathbf{V}_j\}$.

Věta 1.13. *Nechť* $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ *je model nepřímého měření a nechť kovariační matice je v součtovém tvaru, tj.* $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i \mathbf{V}_i$. *Označme* $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i^0 \mathbf{V}_i$. *Potom*

(a) *Funkce* $g(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{i=1}^{p} g_i\vartheta_i$ *je nestranně kvadraticky a invariantně odhadnutelná právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{g} \in \mathcal{M}(\mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}).$$

(b) *Jestliže funkce* $g(\cdot)$ *splňuje podmínku z (a), potom MINQUE této funkce je*

$$\widehat{\boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta}} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{Y}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_i(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{Y},$$

kde vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ *je řešením rovnice*

$$\mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}.$$

Jestliže matice $\mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}$ *je regulární (tzn. pozitivně definitní), potom odhad metodou MINQUE celého vektoru existuje a je*

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{S}^{-1}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_p(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{Y} \end{pmatrix}.$$

(c) *V případě normality vektoru* $\mathbf{Y}$ *navíc platí, že kovariační matice odhadu* $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ *je*

$$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}|\boldsymbol{\vartheta}_0) = 2\mathbf{S}^{-1}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}.$$

Důkaz. Důkaz viz [7, str. 101]. □

Lemma 1.14. *Nechť* $\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ *je model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu, potom platí*
(1) $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+ = \mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1$
(2) $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}_{1,0}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)$,
kde $\mathbf{K}_1, \boldsymbol{\beta}_{1,0}$ *je z lemmatu 1.12 a* $\mathbf{Q}_{11}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ *je z věty 1.8.*

Důkaz. Důkaz viz. [7, str. 194] □

Poznámka. Vztahy platí i při náhradě matice $\boldsymbol{\Sigma}$ maticí $\boldsymbol{\Sigma}_0$, musíme však tuto náhradu provést i ve vyjádření matice $\mathbf{Q}_{11}$ a odhadu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$.

Lemma 1.15. *Nechť* $\overline{\mathbf{Y}} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ *je model neúplného přímého měření s aritmetickými průměry a s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu, potom platí*
(1) $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+ = \mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1$
(2) $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\beta}_{1,0}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)$,
kde $\mathbf{K}_1, \boldsymbol{\beta}_{1,0}$ *je z lemmatu 1.12,* $\mathbf{Q}_{11}$ *je z věty 1.8 a* $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ *je z věty 1.11 při volbě* $\mathbf{X} = \mathbf{I}$.

Důkaz. Důkaz tvrzení (1) i (2) vychází z lemmatu 1.14 rozepsáním a využitím definice Mooreovy-Penroseovy pseudoinverze. □

Poznámka. Vztahy platí i při náhradě matice $\boldsymbol{\Sigma}$ maticí $\boldsymbol{\Sigma}_0$, musíme však tuto náhradu provést i ve vyjádření matice $\mathbf{Q}_{11}$ a odhadu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$.

Kombinací předchozího lemmatu a věty a využitím ekvivalence modelů dostáváme následující lemma.

Lemma 1.16. *Nechť* $\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ *je model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a nechť kovariační matice je v součtovém tvaru, tj.* $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^p \vartheta_i \mathbf{V}_i$. *Označme* $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \sum_{i=1}^p \vartheta_i^0 \mathbf{V}_i$. $\mathbf{Q}_{11}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ *jsou z věty 1.8. Potom*

(a) Funkce $g(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{i=1}^p g_i\vartheta_i$ *je nestranně kvadraticky a invariantně odhadnutelná právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{g} \in \mathcal{M}(\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}).$$

(b) Jestliže funkce $g(\cdot)$ *splňuje podmínku z (a), potom MINQUE této funkce je*

$$\widehat{\boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta}} = \sum_{i=1}^p \lambda_i(\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1),$$

kde vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ *je řešením rovnice*

$$\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}.$$

Jestliže matice $\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}$ *je regulární (tzn. pozitivně definitní), potom MINQUE celého vektoru existuje a je*

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{S}^{-1}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1} \begin{pmatrix} (\mathbf{Y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{Y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{Y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{Y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \end{pmatrix}.$$

(c) *V případě normality vektoru* $\mathbf{Y}$ *navíc platí, že kovariační matice odhadu* $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ *je*

$$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}|\boldsymbol{\vartheta}_0) = 2\mathbf{S}^{-1}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}.$$

Důkaz. Na základě lemmatu 1.12 přepíšeme model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu (1.4) na model nepřímého měření (1.1). Dále aplikujeme větu 1.13 a lemma 1.14. □

Věta 1.17. *Nechť* $\underline{\mathbf{Y}} \sim \left[(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}\right]$ *je replikovaný model neúplného nepřímého měření a nechť kovariační matice je v součtovém tvaru, tj.* $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^p \vartheta_i \mathbf{V}_i$. *Označme* $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \sum_{i=1}^p \vartheta_i^0 \mathbf{V}_i$, $\overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j$, $\mathbf{S} = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^m (\mathbf{Y}_j - \overline{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_j - \overline{\mathbf{Y}})'$. *Potom*

(a) *Funkce* $g(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{i=1}^p g_i\vartheta_i$ *je nestranně kvadraticky a invariantně odhadnutelná právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{g} \in \mathcal{M}((m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}).$$

(b) *Jestliže funkce* $g(\cdot)$ *splňuje podmínku z (a), potom MINQUE této funkce je*

$$\widehat{\boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta}} = \sum_{i=1}^p \lambda_i[(m-1)\,Tr(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m\overline{\mathbf{Y}}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_i(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\overline{\mathbf{Y}}],$$

kde vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ *je řešením rovnice*

$$[(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}]\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}.$$

Jestliže matice $(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}$ *je regulární (tzn. pozitivně definitní), potom MINQUE celého vektoru existuje a je*

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = [(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}]^{-1}\hat{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$\text{kde } \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} (m-1)\,Tr(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m\overline{\mathbf{Y}}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\overline{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ (m-1)\,Tr(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m\overline{\mathbf{Y}}'(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\mathbf{V}_p(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix},$$

(c) *V případě normality vektoru* $\underline{\mathbf{Y}}$ *navíc platí, že kovariační matice odhadu* $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ *je*

$$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}|\boldsymbol{\vartheta}_0) = 2[(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{X}})^+}]^{-1}.$$

Důkaz. Důkaz plyne z věty 1.13, kde $\mathbf{Y} \to \underline{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{X} \to \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{X}$, $\boldsymbol{\Sigma} \to \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}$. Podrobně v [7, str. 139-142]. □

Věta 1.18. *Nechť* $\underline{\mathbf{Y}} \sim \left[(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}\right]$, $\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ *je replikovaný model neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu a nechť kovariační matice je v součtovém tvaru, tj.* $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^p \vartheta_i \mathbf{V}_i$. *Označme* $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \sum_{i=1}^p \vartheta_i^0 \mathbf{V}_i$, $\overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j$, $\mathbf{S} = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^m (\mathbf{Y}_j - \overline{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_j - \overline{\mathbf{Y}})'$. $\mathbf{Q}_{11}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ *jsou z věty 1.8. Potom*

(a) *Funkce* $g(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{i=1}^p g_i\vartheta_i$ *je nestranně kvadraticky a invariantně odhadnutelná právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{g} \in \mathcal{M}((m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}),$$

(b) *Jestliže funkce* $g(\cdot)$ *splňuje podmínku z (a), potom MINQUE této funkce je*

$$\widehat{\boldsymbol{g}'\boldsymbol{\vartheta}} = \sum_{i=1}^p \lambda_i (m-1)\, Tr\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}\} + m(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1),$$

kde vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ *je řešením rovnice*

$$[(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}]\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}.$$

Jestliže matice $(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}$ *je regulární (tzn. pozitivně definitní), potom MINQUE celého vektoru existuje a je*

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = [(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}]^{-1}\hat{\boldsymbol{\gamma}},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} (m-1)\, Tr\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}\} + m(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \\ \vdots \\ (m-1)\, Tr\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}\} + m(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \end{pmatrix}.$

(c) *V případě normality vektoru* $\mathbf{Y}$ *navíc platí, že kovariační matice odhadu* $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ *je*

$$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}|\boldsymbol{\vartheta}_0) = 2[(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}]^{-1}.$$

Důkaz. Na základě lemmatu 1.12 s využitím označení $\mathbf{K}_1, \boldsymbol{\beta}_{1,0}$ přepíšeme model neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu na model nepřímého měření (bez podmínek):

$$\underline{\mathbf{Y}} - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}_{1,0} \sim \left[(\mathbf{1} \otimes \mathbf{K}_1)\boldsymbol{\gamma}, \sum_{i=1}^p \vartheta_i(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}_i)\right],$$

Využitím věty 1.17 dostáváme:

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = [(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+}]^{-1}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\,, \text{ kde}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} (m-1)\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\beta}_{1,0})'(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\beta}_{1,0}) \\ \vdots \\ (m-1)\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\beta}_{1,0})'(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+\mathbf{V}_p(\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathcal{P}_{\mathbf{K}_1})^+(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\beta}_{1,0}) \end{pmatrix}.$$

Nyní aplikujeme lemma 1.15 a obdržíme

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = [(m-1)\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{\mathbf{B}_1\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}]^{-1}\hat{\gamma},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} (m-1)\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \\ \vdots \\ (m-1)\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) + m(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \end{pmatrix}.$

□

1.4 Kenwardův-Rogerův odhadovací postup

Kenwardův-Rogerův odhadovací postup slouží na konstrukci konfidenční oblasti pro vektor parametrů (či lineární funkci prvků vektoru parametru) v nepřímém modelu měření při neznámé kovariační matici. Vychází z odhadu kovariační matice (resp. jejích parametrů), který se zpřesňuje (viz [5]). Odvozuje se statistika, která má aproximativně F-rozdělení.

Uvažujme model nepřímého měření

$$\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Předpokládejme, že kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je funkcí r neznámých parametrů, r-rozměrného vektoru $\boldsymbol{\vartheta}$. Pokud budeme chtít zdůraznit závislost kovariační matice na neznámých parametrech, budeme psát $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\vartheta})$. Nejprve odhadneme vektor neznámých parametrů $\boldsymbol{\vartheta}$, čímž dostáváme i odhad kovariační matice $\boldsymbol{\Sigma}$. Označíme $\mathbf{W} = \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ kovariační matici odhadu $\boldsymbol{\vartheta}$. Odhadnout neznámé parametry kovariační matice můžeme např. metodou REML (popsanou v [5]). Pokud kovariační matice je v součtovém tvaru, také např. metodou MINQUE uvedenou v kapitole 1.3. Označme $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\vartheta}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{X})^{-1}$. Zpřesnění této matice je dané vztahem

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_A = \hat{\boldsymbol{\Phi}} + 2\hat{\boldsymbol{\Phi}}\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\{\mathbf{W}\}_{ij}(\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{P}_i\hat{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{P}_j - \frac{1}{4}\mathbf{R}_{ij})\right\}\hat{\boldsymbol{\Phi}},$$

kde $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}'\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\partial\vartheta_i}\mathbf{X}$, $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{X}'\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\partial\vartheta_i}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\partial\vartheta_j}\mathbf{X}$, $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}$ a $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$.

Pokud kovarianční matice je v součtovém tvaru, tj. $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{r}\vartheta_i\mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ jsou známé matice, potom vzhledem k rovnosti $\frac{\partial^2\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j} = \mathbf{0}$ je zpřesnění dáno vztahem

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_A = \hat{\boldsymbol{\Phi}} - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\{\mathbf{W}\}_{ij}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}.$$

Pokud navíc předpokládáme přímý model měření ($\mathbf{X} = \mathbf{I}$), pak $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Sigma}$ a

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_A = \hat{\boldsymbol{\Phi}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}.$$

Uvažujme l lineárních kombinací prvků vektoru $\boldsymbol{\beta}$: $\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$, kde $\mathbf{L}$ je známá matice typu (k, l). Označme

$$F = \frac{1}{l}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{L}(\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\Phi}}_A\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}).$$

V [5] je odvozeno, že λF má aproximativně F rozdělení o l a m^* stupních volnosti, kde

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{m^*}{E^*(m^*-2)},\\
m^* &= 4 + \frac{l+2}{l\rho - 1},\\
\rho &= \frac{V^*}{2{E^*}^2},\\
V^* &= \frac{2}{l}\frac{1+c_1B}{(1-c_2B)^2(1-c_3B)},\\
E^* &= (1-\frac{A_2}{l})^{-1},\\
c_3 &= \frac{l+2-g}{3l+2(1-g)},\\
c_2 &= \frac{l-g}{3l+2(1-g)},\\
c_1 &= \frac{g}{3l+2(1-g)},\\
g &= \frac{(l+1)A_1-(l+4)A_2}{(l+2)A_2},\\
B &= \frac{1}{2l}(A_1+6A_2),
\end{aligned}
$$

$$
A_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta\Phi P}_i\mathbf{\Phi}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta\Phi P}_j\mathbf{\Phi}\},
$$

$$
A_2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta\Phi P}_i\mathbf{\Phi\Theta\Phi P}_j\mathbf{\Phi}\},
$$

$$
\mathbf{\Theta} = \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{\Phi L})^{-1}\mathbf{L}.
$$

Konfidenční oblast pro lineární funkci vektoru parametrů je dána vztahem

$$
P(F \le \frac{1}{\lambda}F_{l,m^*}(\alpha)) = 1-\alpha.
$$

Kapitola 2

Trojrozměrný kalibrační model

2.1 Nereplikovaný trojrozměrný kalibrační model

Uvažujeme, že dvěma různými metodami měříme 3 hodnoty (např. 3 souřadnice) u n objektů. První měření jsou realizace n náhodných vektorů, u kterých předpokládáme

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1i} \\ \mathbf{X}_{2i} \\ \mathbf{X}_{3i} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_X);\ i = 1, \ldots, n,$$

kde $\boldsymbol{\mu}_i = \begin{pmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \\ \mu_{3i} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$. Druhé měření je realizací n náhodných vektorů s následujícími předpoklady:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1i} \\ \mathbf{Y}_{2i} \\ \mathbf{Y}_{3i} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_Y);\ i = 1, \ldots, n,$$

kde $\boldsymbol{\nu}_i = \begin{pmatrix} \nu_{1i} \\ \nu_{2i} \\ \nu_{3i} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{pmatrix}$. Dále předpokládáme nekorelovanost prvního a druhého měření i měření mezi objekty (jednotlivých vektorů). Tuto skutečnost vyjádříme následovně:

$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_j) = \mathbf{0} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad i \neq j.$$

Vektory pozorování můžeme uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11}, \ldots, X_{1n} \\ X_{21}, \ldots, X_{2n} \\ X_{31}, \ldots, X_{3n} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11}, \ldots, Y_{1n} \\ Y_{21}, \ldots, Y_{2n} \\ Y_{31}, \ldots, Y_{3n} \end{pmatrix},$$

stejně tak i vektory středních hodnot

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11}, \dots, \mu_{1n} \\ \mu_{21}, \dots, \mu_{2n} \\ \mu_{31}, \dots, \mu_{3n} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \nu_{11}, \dots, \nu_{1n} \\ \nu_{21}, \dots, \nu_{2n} \\ \nu_{31}, \dots, \nu_{3n} \end{pmatrix}.$$

Pomocí operace *vec* (uspořádání jednotlivých vektorů matice pod sebe v přirozeném pořadí) zapíšeme model měření ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \right]$$

s podmínkami na parametry

$$\boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_i \quad \text{pro} \quad i = 1, ..., n,$$

kde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Podmínky na parametry lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{N} = \mathbf{1}'_n \otimes \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{M}$$

nebo ve tvaru

$$vec\,\mathbf{N} = \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}) vec\,\mathbf{M}.$$

Model je nelineární vzhledem k parametrům, protože ve vyjádření podmínek se vyskytuje součin parametrů $\mathbf{B}$ a $\mathbf{M}$. Linearizaci provedeme vhodným rozvinutím pomocí Taylorova rozvoje okolo $\mathbf{B}_0, \mathbf{M}_0$ a členy s výrazy $(\mathbf{I}_n \otimes \delta\mathbf{B}) vec\,\delta\mathbf{M}$ zanedbáme. Dostáváme aproximaci podmínek ve tvaru

$$vec\,\mathbf{N} \approx \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \delta\mathbf{B}) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\delta\mathbf{M},$$

kde $\delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0,\ \delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$.
Vzhledem k lemmatu 1.5 můžeme psát

$$(\mathbf{I}_n \otimes \delta\mathbf{B}) vec\,\mathbf{M}_0 = vec\,(\delta\mathbf{B}\mathbf{M}_0\mathbf{I}_n) = vec\,(\mathbf{I}_3\delta\mathbf{B}\mathbf{M}_0) = (\mathbf{M}_0{}' \otimes \mathbf{I}_3) vec\,\delta\mathbf{B}.$$

Podmínky na parametry můžeme tedy přepsat do tvaru

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} vec\,\delta\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix} + (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}'_0 \otimes \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\delta\mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dostáváme linearizovaný model

$$\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{pmatrix} vec\,\delta\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \right] \tag{2.1}$$

s podmínkami na parametry

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} vec\,\delta\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix} + (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}'_0 \otimes \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\delta\mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Definice 11. Model (2.1) nazýváme nereplikovaným trojrozměrným kalibračním modelem.

Věta 2.1. *V modelu (2.1) jsou nejlepší nestranné lineární odhady neznámých parametrů dány vztahy*

$$vec\,\hat{\mathbf{M}} = vec\,\mathbf{X} + \big(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\big)(vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X}), \tag{2.2}$$

$$vec\,\hat{\mathbf{N}} = vec\,\mathbf{Y} - (\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\big)(vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X}), \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right)\big(vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X}\big). \tag{2.4}$$

Kovariační matice těchto odhadů vyjádříme následovně:

$$var\begin{pmatrix} vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Sigma}_Y \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix},$$

$$var\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C},$$

$$cov\left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix}\right) = \left(-\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X,\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\right),$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y$ *a* $\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}$ *je projekční matice na ortogonální doplněk prostoru sloupců matice* $(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')$.

Důkaz. Jedná se o speciální případ modelu neúplného přímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu (viz věta 1.8), kde

$$\mathbf{b} \to (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0)vec\,\mathbf{M}_0, \quad \mathbf{B}_1 \to (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}), \quad \boldsymbol{\beta}_1 \to \begin{pmatrix} vec\,\delta\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 \to (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_0' \otimes \mathbf{I}_3), \quad \boldsymbol{\beta}_2 \to \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\delta\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} \to \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix}.$$

Ověření předpokladů modelu:

- $h(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = 3n$ je zaručena, neboť matice $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ obsahuje jednotkovou matici řádu $3n$,

- podmínka $3n \leq 6n + 12$ platí,

- $h(\mathbf{B}_2) = 12$, bude zaručena pokud zvolíme matici $\mathbf{M}_0$ tak, že $h(\mathbf{1}, \mathbf{M}_0) = 4$,

- podmínka $12 \leq 3n$ bude platit pokud $n \geq 4$.

Na základě lemmatu 1.9, kde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W} \to \mathbf{B}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{B}_1' &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0') + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y) = \\
&= \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y) = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} \to \mathbf{B}_2 = (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_0' \otimes \mathbf{I}_3) = (\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3,
$$

vyjádříme

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1} = \\
&= \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1} - \Big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\Big]\Big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\Big] \\
&\quad \left(\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right]\Big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\Big]\Big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\Big]\right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right]\Big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\Big] = \\
&= \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1} - \Big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{C}^{-1}\Big]\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right] = \\
&= \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1} - \left[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right] = \\
&= \left[\mathbf{I}_n - (\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix}\right] \otimes \mathbf{C}^{-1} = \\
&= \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{22} &= -(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \\
&= -\left(\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right]\Big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}\Big]^{-1}\Big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\Big]\right)^{-1} = \\
&= -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right)^{-1} = -\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{21} &= -\mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) = \\
&= \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \right) \otimes \mathbf{I}_3,
\end{aligned}
$$

$\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{21}'$.

Nyní již dle věty 1.8 můžeme vyjádřit odhady parametrů:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} &= -\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{b} + \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi} = \\
&= -\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} \left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \\
&\quad \left[(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix} \right] + \\
&\quad + \begin{pmatrix} vec\mathbf{X} - vec\mathbf{M}_0 \\ vec\mathbf{Y} \end{pmatrix} = \\
&= -\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \left(vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X} - vec\,\mathbf{Y} \right) + \\
&\quad + \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \left(vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X} \right) + \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jelikož $vec\,\hat{\mathbf{M}} = vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} + vec\,\mathbf{M}_0$, potom

$$
vec\,\hat{\mathbf{M}} = vec\,\mathbf{X} + \left(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1} \right) (vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X})
$$

a

$$
vec\,\hat{\mathbf{N}} = vec\,\mathbf{Y} - (\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1} \big) (vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X}).
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} &= -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{b} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{Q}_{21}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi}) = \\
&= -\left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \\
&\quad \left[(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y} \end{pmatrix} \right] = \\
&= \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \left(vec\,\mathbf{Y} - vec\,\mathbf{B}_0\mathbf{X} \right).
\end{aligned}
$$

Ještě vyjádříme kovariační matice odhadů

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}\begin{pmatrix} vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} &= \mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1\mathbf{\Sigma} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} \\
&\qquad \left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right](\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right] \\
&\qquad (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y) = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} - \\
&\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Sigma}_Y \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{var}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = -\mathbf{Q}_{22} = \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C},
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix}\right) = -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1\mathbf{\Sigma} \\
&= -\left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \\
&= -\left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y) = \\
&= \left(-\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X, \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y\right).
\end{aligned}
$$

□

2.2 Replikovaný trojrozměrný kalibrační model

Předpokládejme, že pokus (měření) m-krát nezávisle opakujeme. Model, který zahrnuje všech m opakování měření zapíšeme ve tvaru

$$
\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^1 - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ vec\,\mathbf{X}^m - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^m \end{pmatrix} \sim \left[(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_{6n}) \begin{pmatrix} vec\,\delta\mathbf{M} \\ vec\,\mathbf{N} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\right] \quad (2.5)
$$

V modelu jsou kladeny podmínky na parametry ve tvaru

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\, \mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \begin{pmatrix} vec\, \delta\mathbf{M} \\ vec\, \mathbf{N} \end{pmatrix} + (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_0' \otimes \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\, \delta\mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Definice 12. Model (2.5) nazýváme replikovaným trojrozměrným kalibračním modelem.

Věta 2.2. *V modelu (2.5) jsou nejlepší nestranné lineární odhady neznámých parametrů dány vztahy*

$$vec\, \hat{\mathbf{M}} = vec\, \overline{\mathbf{X}} + \left(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0' \mathbf{C}^{-1}\right)(vec\, \overline{\mathbf{Y}} - vec\, \mathbf{B}_0 \overline{\mathbf{X}}) \tag{2.6}$$

$$vec\, \hat{\mathbf{N}} = vec\, \overline{\mathbf{Y}} - (\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \mathbf{C}^{-1}\big)(vec\, \overline{\mathbf{Y}} - vec\, \mathbf{B}_0 \overline{\mathbf{X}}) \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\, \delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n' \mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \left[vec\, \overline{\mathbf{Y}} - vec\, \mathbf{B}_0 \overline{\mathbf{X}} \right] \tag{2.8}$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y$, $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}^i$, $\overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}^i$.

Kovariační matice těchto odhadů jsou:

$$\begin{aligned} var \begin{pmatrix} vec\, \hat{\mathbf{M}} \\ vec\, \hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0' \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_X \mathbf{B}_0' \mathbf{C}^{-1} \mathbf{\Sigma}_Y \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \mathbf{C}^{-1} \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix}, \\ var \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\, \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n' \mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov\left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\, \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vec\, \hat{\mathbf{M}} \\ vec\, \hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{m} \Bigg(- & \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n' \mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{B}_0 \mathbf{\Sigma}_X, \\ & \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n' \mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \Bigg). \end{aligned}$$

Důkaz. Tento model je speciálním případem modelu neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu (viz. věta 1.7), kde

$$\mathbf{X} \to \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_{6n}, \quad \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} \to (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0) vec\, \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{B}_1 \to (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}), \quad \boldsymbol{\beta}_1 \to \begin{pmatrix} vec\, \delta\mathbf{M} \\ vec\, \mathbf{N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 \to (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_0' \otimes \mathbf{I}_3), \quad \boldsymbol{\beta}_2 \to \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\delta\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Ověření předpokladů modelu:

- $h(\mathbf{X}) = 6n$ je zaručena, neboť matice $\mathbf{X}$ obsahuje jednotkovou matici řádu $6n$,
- nerovnost $6n \leq 6mn$ bude platit pro $m \geq 1$,
- $h(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = 3n$ je zaručena, neboť matice $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ obsahuje jednotkovou matici řádu $3n$,
- podmínka $3n \leq 6n + 12$ platí,
- $h(\mathbf{B}_2) = 12$, bude zaručena pokud zvolíme matici $\mathbf{M}_0$ tak, že $h(\mathbf{1}, \mathbf{M}_0') = 4$,
- podmínka $12 \leq 3n$ bude platit, pokud $n \geq 4$.

Pro odhad parametrů potřebujeme nejprve vyjádřit prvky inverzní matice $\mathbf{Q}_{11}$, $\mathbf{Q}_{22}$, $\mathbf{Q}_{21}$. To uděláme na základě lemmatu 1.9, kde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W} \to \mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1' &= \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \left[\left(\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{I}_{6n}\right) \left(\mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \end{pmatrix} \right) \left(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_{6n}\right) \right]^{-1} \\
&\quad \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \left[\left(\mathbf{1}_m'\mathbf{1}_m\right) \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n}) \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{m} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \left((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0') + (\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y) \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C} \right),
\end{aligned}
$$

$$A \to \mathbf{B}_2 = (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_0' \otimes \mathbf{I}_3) = (\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3.$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1} = \\
&= m\big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big] - m\big(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big)\big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\big] \\
&\quad \left[\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right] m\big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big]\big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\big]\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right] m\big(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big) \\
&= m\big(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big) - m\big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{C}^{-1}\big] \\
&\quad \left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right] \\
&= m\big(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big) - m(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\
&= m\left(\mathbf{I}_n - (\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix}\right) \otimes \mathbf{C}^{-1} \\
&= m\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{22} &= -(\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \\
&= -\left[\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right] m\big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big]\big[(\mathbf{1}_n, \mathbf{M}_0') \otimes \mathbf{I}_3\big]\right]^{-1} = \\
&= -\frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_1'\mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right]^{-1} = -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{21} &= -\mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}'\mathbf{W}^{-1} = \\
&= \frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C}\right]\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right] m\big[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}^{-1}\big] = \\
&= \left(\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix}\right) \otimes \mathbf{I}_3,
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{21}'.
$$

Nyní již můžeme vyjádřit odhady parametrů

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 &= (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \\
&= \left[\big(\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{I}_{6n}\big)\left(\mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \end{pmatrix}\right)\big(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_{6n}\big)\right]^{-1}\big(\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{I}_{6n}\big)
\end{aligned}
$$

$$\left(\mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^1 - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ vec\,\mathbf{X}^m - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^m \end{pmatrix} =$$

$$= \left((\mathbf{1}_m'\mathbf{1}_m)^{-1} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\right)\left(\mathbf{1}_m' \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^1 - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ vec\,\mathbf{X}^m - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^m \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{m}\mathbf{1}_m' \otimes \mathbf{I}_{6n}\right) \begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^1 - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ vec\,\mathbf{X}^m - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\mathbf{Y}^m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m (vec\,\mathbf{X}^i - vec\,\mathbf{M}_0) \\ \sum_{i=1}^m vec\,\mathbf{Y}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} &= -(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1)\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \\
&= -(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \\
&= -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix} m\Big[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\Big] \\
&\quad \left((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0)vec\,\mathbf{M}_0 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n})\begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}\right) \\
&\quad + \begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \\
&= -\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right]\Big((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0)vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\Big) \\
&\quad + \begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}\Big(vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\mathbf{B}_0\overline{\mathbf{X}}\Big) + \begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\mathbf{M}_0 \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jelikož $vec\,\hat{\mathbf{M}} = vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} + vec\,\mathbf{M}_0$, potom

$$vec\,\hat{\mathbf{M}} = vec\,\overline{\mathbf{X}} + \Big(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\Big)(vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\mathbf{B}_0\overline{\mathbf{X}})$$

a

$$vec\,\hat{\mathbf{N}} = vec\,\overline{\mathbf{Y}} - (\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\Big)(vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\mathbf{B}_0\overline{\mathbf{X}}).$$

Dále

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{b} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = -\mathbf{Q}_{21}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) =$$

$$= -\left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right]\left(vec\,\mathbf{B}_0\overline{\mathbf{X}} - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\right) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right]\left(vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\mathbf{B}_0\overline{\mathbf{X}}\right).$$

Kovarianční matice odhadů jsou

$$\text{var}\begin{pmatrix} vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} =$$

$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} - \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_{3n} \end{pmatrix}$$

$$m\left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right](\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n})\frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' \\ -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\left[\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right](\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y) =$$

$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_Y \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix},$$

$$\text{var}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = -\mathbf{Q}_{22} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{C},$$

$$\text{cov}\left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\delta\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vec\,\delta\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix}\right) = -\mathbf{Q}_{21}\mathbf{B}_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1} =$$

$$= -\left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right](\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0, -\mathbf{I}_{3n})\frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3\right](\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X, -\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y) =$$

$$= \frac{1}{m}\left[-\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X, \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y\right].$$

□

2.2.1 MINQUE odhady v replikovaném modelu

Kovarianční matice modelu nemusí být známa. Když máme dostatek měření, můžeme kromě neznámých parametrů modelu odhadnout i neznámé parametry kovarianční matice. Připomeňme, že kovarianční matice replikovaného trojrozměrného kalibračního modelu (2.5) je

$$\mathbf{I}_m \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{pmatrix}.$$

Odhadovat tedy budeme neznáme parametry σ_i^2 pro $i = 1, \ldots, 6$. Použijeme metodu MINQUE popsanou v kapitole 1.3. Označme

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_Y \end{pmatrix}.$$

Nejprve přepíšeme tuto kovariační matici do součtového tvaru. Protože lze psát

$$\mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \sigma_1^2 \mathbf{E}_{11} + \sigma_2^2 \mathbf{E}_{22} + \sigma_3^2 \mathbf{E}_{33},$$

$$\mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{pmatrix} = \sigma_4^2 \mathbf{E}_{11} + \sigma_5^2 \mathbf{E}_{22} + \sigma_6^2 \mathbf{E}_{33},$$

potom při označení

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{ii} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{i-3i-3} \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad i = 4, 5, 6,$$

vyjádříme

$$\mathbf{\Sigma} = \sum_{i=1}^{6} \sigma_i^2 \mathbf{V}_i.$$

Věta 2.3. *Nechť $\boldsymbol{\vartheta} = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_6^2)'$ je vektor neznámých parametrů kovarianční matice v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu (2.5). Dále nechť $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (\sigma_{1,0}^2, \ldots, \sigma_{6,0}^2)'$ je přibližná hodnota parametru $\boldsymbol{\vartheta}$. Analogicky označme*

$$\mathbf{\Sigma}_{X,0} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,0}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_{Y,0} = \begin{pmatrix} \sigma_{4,0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{5,0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{6,0}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0} \end{pmatrix}.$$

Potom MINQUE odhad neznámého vektoru $\boldsymbol{\vartheta}$ je dán vztahem

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = [(m-1)\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1)}]^{-1}\boldsymbol{\kappa}, \tag{2.9}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= (\kappa_1, \dots, \kappa_6)', \\ \kappa_i &= \sigma_{i,0}^{-4} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{X}_{ij}^k - \overline{\mathbf{X}}_{ij})^2 + m(\overline{\mathbf{X}}_{ij} - \hat{\mathbf{M}}_{ij})^2 \Big), \quad i = 1, 2, 3, \\ \kappa_i &= \sigma_{i,0}^{-4} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{Y}_{i-3j}^k - \overline{\mathbf{Y}}_{i-3j})^2 + m(\overline{\mathbf{Y}}_{i-3j} - \hat{\mathbf{N}}_{i-3j})^2 \Big), \quad i = 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Kovariační matice odhadu je

$$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}|\boldsymbol{\vartheta}_0) = 2[(m-1)\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}} + \mathbf{S}_{(\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1)}]^{-1}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Důkaz vychází z věty 1.18, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_0^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} = \sigma_{1,0}^{-4}\mathbf{V}_1, \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,0}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,0}^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,0}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,0}^{-2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,0}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,0}^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_{1,0}^{-4}\mathbf{E}_{11}. \end{aligned}$$

Analogicky dostáváme

$$\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\mathbf{\Sigma}_0^{-1} = \sigma_{i,0}^{-4}\mathbf{V}_i \quad \text{pro} \quad i = 2, \dots, 6.$$

Dále

$$\operatorname{Tr}\Big\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\Big\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\Big\{\sigma_{i,0}^{-4}\mathbf{V}_i\sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\Big\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\Big\{\sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\mathbf{V}_i\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big\} =$$
$$= \sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}(vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})'(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{ii})(vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}}) =$$
$$= \sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_{ij}^k - \overline{\mathbf{X}}_{ij})^2 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\operatorname{Tr}\Big\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\Big\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\Big\{\sigma_{i,0}^{-4}\mathbf{V}_i\sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\Big\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\Big\{\sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}\Big((vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}})', (vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'\Big)\mathbf{V}_i\begin{pmatrix} vec\,\mathbf{X}^k - vec\,\overline{\mathbf{X}} \\ vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\Big\} =$$
$$= \sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}(vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}})'(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{i-3i-3})(vec\,\mathbf{Y}^k - vec\,\overline{\mathbf{Y}}) =$$
$$= \sigma_{i,0}^{-4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{Y}_{i-3j}^k - \overline{\mathbf{Y}}_{i-3j})^2 \quad \text{pro} \quad i = 4, 5, 6.$$

Podobně

$$m\Big((vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\hat{\mathbf{M}})', (vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\hat{\mathbf{N}})'\Big)\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\hat{\mathbf{N}}\end{pmatrix} =$$
$$= m\,\sigma_{i,0}^{-4}\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{X}}_{ij} - \hat{\mathbf{M}}_{ij})^2 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3.$$

$$m\Big((vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\hat{\mathbf{M}})', (vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\hat{\mathbf{N}})'\Big)\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\begin{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{X}} - vec\,\hat{\mathbf{M}} \\ vec\,\overline{\mathbf{Y}} - vec\,\hat{\mathbf{N}}\end{pmatrix} =$$
$$= m\,\sigma_{i,0}^{-4}\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{Y}}_{i-3j} - \hat{\mathbf{N}}_{i-3j})^2 \quad \text{pro} \quad i = 4, 5, 6.$$

Z výše uvedených rovností již plyne tvrzení věty. □

Vyjádření kriteriálních matic

V závěru kapitoly ukážeme jakého tvaru jsou kriteriální matice, a to na základě definice $\{\mathbf{S}_{\mathbf{A}}\}_{i,j} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{V}_i\mathbf{A}\mathbf{V}_j\}$ postupným výpočtem jejich prvků. Neprve spočítáme prvky kriteriální matice $\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}}$:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}}\}_{1,1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1) = \mathrm{Tr}\Big\{ &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} = \\
= \mathrm{Tr}\Big\{ &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} \\
= \mathrm{Tr} &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} = n\,\sigma_{1,0}^{-4},
\end{aligned}$$

neboť $\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}}\}_{1,2} = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_2) = \mathrm{Tr}\Big\{ &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{Y,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} = \\
= \mathrm{Tr}\Big\{ &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} \\
= \mathrm{Tr} &\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

neboť $\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{11}\mathbf{\Sigma}_{X,0}^{-1}\mathbf{E}_{22} = \mathbf{0}_3$.
Analogicky dopočítáme ostatní prvky kriteriální matice a dostáváme:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}} = n \begin{pmatrix} \sigma_{1,0}^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,0}^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,0}^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{4,0}^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{5,0}^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{6,0}^{-4} \end{pmatrix}.$$

Tentýž postup budeme aplikovat i při výpočtu prvků kriteriální matice $\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}$. Označme $\mathbf{C}_0 = \mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_{X,0}\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_{Y,0}$. Nejprve vyjádřeme

$$\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tuto matici využijeme v dalších výpočtech.

$$
\begin{aligned}
&\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{1,1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\mathbf{V}_1\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\mathbf{V}_1) = \\
&= \mathrm{Tr}\Big\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} = \\
&= \mathrm{Tr}\Big\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} \\
&= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}\}\,\mathrm{Tr}\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\} = \\
&= (n-4)\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{1,1}^2,
\end{aligned}
$$

neboť $\mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}\} = h(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}) = n-4$.

$$
\begin{aligned}
&\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{1,2} = \mathrm{Tr}(\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\mathbf{V}_1\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\mathbf{V}_2) = \\
&= \mathrm{Tr}\Big\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} = \\
&= \mathrm{Tr}\Big\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \Big\} \\
&= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \\ -\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')} \otimes \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{22} & \mathbf{0}_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}\}\,\mathrm{Tr}\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{11}\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{E}_{22}\} = \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}\}\,\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{2,1}\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{1,2} = \\
&= (n-4)\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{1,2}^2,
\end{aligned}
$$

neboť $\mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}\} = h(\mathcal{P}_{(\mathbf{1}_n,\mathbf{M}_0')}) = n-4$ a matice $\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0$ je symetrická.

Analogickými výpočty dostáváme

$\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{i,j} = (n-4)\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{i,j}^2$ pro $i = 1,2,3,\ j = 1,2,3$;
$\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{i,j} = (n-4)\{\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\}_{j-3,i}^2$ pro $i = 1,2,3,\ j = 4,5,6$;
$\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{i,j} = (n-4)\{\mathbf{B}_0'\mathbf{C}_0^{-1}\}_{j,i-3}^2$ pro $i = 4,5,6,\ j = 1,2,3$;
$\{\mathbf{S}_{\mathbf{B}_1'\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}_1}\}_{i,j} = (n-4)\{\mathbf{C}_0^{-1}\}_{i-3,j-3}^2$ pro $i = 4,5,6,\ j = 4,5,6$.

2.2.2 Konfidenční oblasti

V replikovaném modelu, kromě odhadu parametrů kovariační matice, lze využitím postupu Kenwarda a Rogera (viz. kap. 1.4) zkonstruovat konfidenční oblast pro vektor parametrů kalibrační funkce či pro lineární funkci těchto parametrů.

Uvažujeme model

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\mathbf{B} \end{pmatrix} ; \frac{1}{m} \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes (\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y) \right).$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$\mathbf{G} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1} \otimes (\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y).$$

Vzhledem k

$$\mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \sigma_1^2\mathbf{E}_{11} + \sigma_2^2\mathbf{E}_{22} + \sigma_3^2\mathbf{E}_{33},$$

$$\mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{pmatrix} = \sigma_4^2\mathbf{E}_{11} + \sigma_5^2\mathbf{E}_{22} + \sigma_6^2\mathbf{E}_{33}$$

můžeme kovarianční matici zapsat ve tvaru

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{6} \sigma_i^2 \mathbf{G}_i,$$

kde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\mathbf{M}_0' \\ \mathbf{M}_0\mathbf{1}_n & \mathbf{M}_0\mathbf{M}_0' \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{D} \otimes \mathbf{B}_0\mathbf{E}_{ii}\mathbf{B}_0' = \mathbf{D} \otimes \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}' \quad \text{pro} \quad i = 1,2,3,$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}_{i-3\,i-3} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}' \quad \text{pro} \quad i = 4,5,6.$$

Při aplikaci postupu Kenwarda a Rogera shodně s [5] označme

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial \mathbf{G}^{-1}}{\partial \sigma_i^2} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1},$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{G}^{-1}}{\partial \sigma_i^2}\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{G}^{-1}}{\partial \sigma_j^2} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{G}^{-1}\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2}\mathbf{G}^{-1} = 0.$$

Protože se jedná o model přímého měření s kovariační maticí v součtovém tvaru, platí vzhledem ke značení použitém v kapitole 1.4

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{G} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{\Phi}}_A = \hat{\mathbf{G}}.$$

Nyní konstruujeme konfidenční oblasti, neprve pro celý vektor parametrů kalibrační funkce, potom pro dvě konkrétní lineární kombinace těchto parametrů. V následujích podkapitolách budeme opět respektovat značení zavedené v [5] s tím, že v jednotlivých podkapitolách použijeme vždy stejné symboly, jejichž vyjádření bude dáno konkrétní situací.

Konfidenční oblast pro vektor parametrů kalibrační funkce

Konstruujeme nejprve konfidenční oblast pro celý vektor parametrů kalibrační funkce $(\mathbf{a}', vec\mathbf{B}')'$. Označme

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_{12},$$

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}' = \mathbf{G}^{-1}.$$

A spočítejme

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\}\mathrm{Tr}\{-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\} &= \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}']\} = \\ &= \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}'\} = \\ &= 4\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}'(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i} \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,3, \\ \mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\} &= \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\mathbf{E}_{i-3\,i-3}]\} = \\ &= \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{E}_{i-3\,i-3}\} = \\ &= 4\{(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{i-3,i-3} \qquad \text{pro} \quad i = 4,5,6. \end{aligned}$$

Dále spočtěme

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\} = \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\} = \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\},
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}] \\
&\qquad [\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}]\} = \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i} \\
&\qquad (\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\} = \\
&= 4\cdot\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i} \\
&\qquad \{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} \qquad i,j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}] \\
&\qquad [\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}'_{j-3}]\} = \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i} \\
&\qquad (\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}'_{j-3}\} = \\
&= 4\cdot\mathbf{e}'_{j-3}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i} \\
&\qquad \{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{j-3} \\
&= 4\cdot\{(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{j-3,\bullet}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i} \\
&\qquad \{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\{(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{\bullet,j-3} \qquad i=1,2,3;\, j=4,5,6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}'_{i-3}] \\
&\qquad [\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}]\} = \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}'_{i-3} \\
&\qquad (\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\} = \\
&= 4\cdot\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{i-3} \\
&\qquad \mathbf{e}'_{i-3}(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} \\
&= 4\cdot\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\{(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{\bullet,i-3} \\
&\qquad \{(\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{i-3,\bullet}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} \qquad i=4,5,6;\, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\} = {} & \mathrm{Tr}\{[\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'] \\
& [\mathbf{D}^{-1}\otimes(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}][\mathbf{D}\otimes\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}_{j-3}']\} = \\
= {} & \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_4\otimes(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}' \\
& (\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}_{j-3}'\} = \\
= {} & 4\cdot\mathbf{e}_{j-3}'(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{i-3} \\
& \mathbf{e}_{i-3}'(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\mathbf{e}_{j-3} \\
= {} & 4\cdot\{(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{j-3,i-3} \\
& \{(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\Sigma}_X\mathbf{B}_0' + \boldsymbol{\Sigma}_Y)^{-1}\}_{i-3,j-3} \qquad i,j = 4,5,6.
\end{aligned}
$$

S využitím hodnot A_1, A_2 postupně vypočteme

$$
\begin{aligned}
& l = 12, \\
& B = \frac{1}{2l}(A_1 + 6A_2) = \frac{1}{24}(A_1 + 6A_2), \\
& g = \frac{(l+1)A_1 - (l+4)A_2}{(l+2)A_2} = \frac{13A_1 - 16A_2}{14A_2}, \\
& c_1 = \frac{g}{3l + 2(1-g)} = \frac{g}{36 + 2(1-g)}, \\
& c_2 = \frac{l-g}{3l + 2(1-g)} = \frac{12-g}{36 + 2(1-g)}, \\
& c_3 = \frac{l+2-g}{3l + 2(1-g)} = \frac{14-g}{36 + 2(1-g)}, \\
& E^* = (1 - \frac{A_2}{l})^{-1} = (1 - \frac{A_2}{12})^{-1}, \\
& V^* = \frac{2}{l}\frac{1 + c_1B}{(1-c_2B)^2(1-c_3B)} = \frac{1}{6}\frac{1 + c_1B}{(1-c_2B)^2(1-c_3B)}, \\
& \rho = \frac{V^*}{2{E^*}^2}, \\
& m^* = 4 + \frac{l+2}{l\rho - 1} = 4 + \frac{14}{12\rho - 1}, \qquad (2.11) \\
& \lambda = \frac{m^*}{E^*(m^*-2)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Nyní již můžeme zapsat statistiku

$$
F = \frac{1}{12}\left(\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{a}} \\ vec\hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ vec\,\mathbf{B}\end{pmatrix}\right)'\hat{\mathbf{G}}^{-1}\left(\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{a}} \\ vec\hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ vec\,\mathbf{B}\end{pmatrix}\right),
$$

jejíž λ násobek má aproximativně F-rozdělení

$$
F^* = \lambda F \sim F_{12,m^*}.
$$

Konfidenční interval pro vektor parametrů kalibrační funkce:

$$P(F \leq \frac{1}{\lambda} F_{12,m^*}(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

Konfidenční interval pro jednotlivé složky vektoru parametrů kalibrační funkce

Konfidenční interval pro jednotlivý parametr dostaneme jako konfidenční oblast pro speciální linearní kombinaci všech parametrů kalibrační funkce. Maticově zapsáno jako součin příslušného jednotkového vektoru s vektorem parametrů. Vektor parametrů má 12 prvků, jejich pořadí budeme indexovat symbolem r. Stejně jako v předchozím odstavci neprve označme:

$$\mathbf{L} = {}_{12}\mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}' = {}_{12}\mathbf{e}_r({}_{12}\mathbf{e}_r'\,\mathbf{G}\,{}_{12}\mathbf{e}_r)^{-1}{}_{12}\mathbf{e}_r' = \frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}.$$

Spočítáme

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\} \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\Big\{-\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\Big\}\mathrm{Tr}\Big\{-\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}_i\Big\}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}_j\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{\{\mathbf{G}_i\}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\Big\}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{\{\mathbf{G}_j\}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\Big\} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\frac{\{\mathbf{G}_i\}_{rr}\{\mathbf{G}_j\}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}^2}.
\end{aligned}$$

Dále spočteme

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\} = \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\Big\} = \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}_i\frac{{}_{12}\mathbf{E}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}}\mathbf{G}_j\Big\} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\frac{\{\mathbf{G}_i\}_{rr}\{\mathbf{G}_j\}_{rr}}{\{\mathbf{G}\}_{rr}^2}.
\end{aligned}$$

Z předchozích výpočtů dostáváme:

$$A_1 = A_2$$

Dále postupně spočítáme

$$
\begin{aligned}
l &= 1,\\
B &= \frac{1}{2l}(A_1 + 6A_2) = \frac{7}{2}A_1,\\
g &= \frac{(l+1)A_1 - (l+4)A_2}{(l+2)A_2} = -1,\\
c_1 &= \frac{g}{3l + 2(1-g)} = -\frac{1}{7},\\
c_2 &= \frac{l-g}{3l + 2(1-g)} = \frac{2}{7},\\
c_3 &= \frac{l+2-g}{3l + 2(1-g)} = \frac{4}{7},\\
E^* &= (1 - \frac{A_2}{l})^{-1} = (1 - A_1)^{-1},\\
V^* &= \frac{2}{l}\frac{1 + c_1 B}{(1 - c_2 B)^2(1 - c_3 B)} = \frac{2 - A_1}{(1-A_1)^2(1-2A_1)},\\
\rho &= \frac{V^*}{2E^{*2}} = \frac{2 - A_1}{2(1-2A_1)},\\
m^* &= 4 + \frac{l+2}{l\rho - 1} = 4 + \frac{3}{\rho - 1} = \frac{4\rho - 1}{\rho - 1} = \frac{2}{A_1},\\
\lambda &= \frac{m^*}{E^*(m^* - 2)} = \frac{(1-A_1)(4\rho - 1)}{2\rho + 1} = 1.
\end{aligned}
$$

Nyní již můžeme zapsat statistiku

$$
F = \frac{\left(\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{a}}\\ vec\hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ vec\,\mathbf{B}\end{pmatrix}\right)' {}_{12}\mathbf{E}_{rr}\left(\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{a}}\\ vec\hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ vec\,\mathbf{B}\end{pmatrix}\right)}{\{\hat{\mathbf{G}}\}_{rr}},
$$

pro kterou podle [5] platí

$$F^* = F \sim F_{1,m^*}.$$

Konfidenční interval pro danou složku vektoru parametrů kalibrační funkce

$$P(F \leq F_{1,m^*}(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

Konfidenční oblast pro lineární funkci vektoru parametrů kalibrační funkce

V této podkapitole zkonstruujeme konfidenční oblast pro polohu obrazu pevně určeného bodu. Označme $(x_1, x_2, x_3)'$ bezchybné souřadnice daného bodu. Souřadnice obrazu odpovídají funkční hodnotě kalibrační funkce pro daný vektor souřadnic bodu, tj. $\mathbf{a}+\mathbf{B}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. Protože parametry kalibrační funkce máme uspořádány do vektoru, musíme určit matici transformace celého vektoru tak, aby hodnoty obrazu byly stejné. Tuto matici označíme $\mathbf{L}$ a zapíšeme

$$\mathbf{L}=\mathbf{x}\otimes\mathbf{I}_3;\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\mathbf{L}'\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ vec\mathbf{B}\end{pmatrix}=\mathbf{a}+\mathbf{B}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Dále označme

$$\begin{aligned}\mathbf{\Theta}=\mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}'&=[\mathbf{x}\otimes\mathbf{I}_3]\big([\mathbf{x}'\otimes\mathbf{I}_3][\mathbf{D}\otimes\mathbf{C}][\mathbf{x}\otimes\mathbf{I}_3]\big)^{-1}[\mathbf{x}'\otimes\mathbf{I}_3]=\\&=[\mathbf{x}\otimes\mathbf{I}_3][(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x})^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}][\mathbf{x}'\otimes\mathbf{I}_3]=\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\otimes\mathbf{C}^{-1},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{C}=\mathbf{B}_0\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{B}_0'+\mathbf{\Sigma}_Y$.

A vypočítáme

$$\begin{aligned}A_1&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\}\\&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{-\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\}\mathrm{Tr}\{-\mathbf{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_j\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\}\\&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}_i\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}_j\},\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}_i\}&=\mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\otimes\mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D}\otimes\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}]\}=\\&=\frac{1}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\}\\&=\frac{1}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\,\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\\&=\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\qquad i=1,2,3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_i\} &= \mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}'_{i-3}]\} = \\
&= \frac{1}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\}\mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}'_{i-3}\} \\
&= \frac{1}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\,\mathbf{e}'_{i-3}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3} = -\mathbf{e}'_{i-3}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3} \\
&= \{\mathbf{C}^{-1}\}_{i-3,i-3} \qquad i = 4, 5, 6.
\end{aligned}$$

Ještě vypočítáme

$$A_2 = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_i\mathbf{G}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{G}\} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\{\mathbf{W}\}_{ij}\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_i\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_j\},$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_i\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}] \\
&\qquad [\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}]\} = \\
&= \frac{1}{(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x})^2}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\} \\
&\qquad \mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\} = \\
&= \{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} = \\
&= [\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}]^2 \qquad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_i\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}] \\
&\qquad [\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}'_{j-3}]\} = \\
&= \frac{1}{(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x})^2}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\} \\
&\qquad \mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}'_{j-3}\} = \\
&= \mathbf{e}'_{j-3}\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{j-3} \\
&= \{\mathbf{C}^{-1}\}_{j-3,\bullet}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,i}\{\mathbf{C}^{-1}\}_{\bullet,j-3} = \\
&= [\{\mathbf{C}^{-1}\}_{j-3,\bullet}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,i}]^2 \qquad i = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_i\boldsymbol{\Theta}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}'_{i-3}] \\
&\qquad [\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}'_{\bullet,j}]\} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x})^2}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\} \\
&\qquad \mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}'\} = \\
&= \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} \\
&= \{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}'\{\mathbf{C}^{-1}\}_{\bullet,i-3}\{\mathbf{C}^{-1}\}_{i-3,\bullet}\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j} \\
&= [\{\mathbf{B}_0\}_{\bullet,j}'\{\mathbf{C}^{-1}\}_{\bullet,i-3}]^2 \qquad i = 4,5,6; j = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Theta}\mathbf{G}_i\mathbf{\Theta}\mathbf{G}_j\} &= \mathrm{Tr}\{[\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'] \\
&\qquad [\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{C}^{-1}][\mathbf{D} \otimes \mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}_{j-3}']\} = \\
&= \frac{1}{(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x})^2}\mathrm{Tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{D}\} \\
&\qquad \mathrm{Tr}\{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{j-3}\mathbf{e}_{j-3}'\} = \\
&= \mathbf{e}_{j-3}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{i-3}\mathbf{e}_{i-3}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_{j-3} = \{\mathbf{C}^{-1}\}_{j-3,i-3}\{\mathbf{C}^{-1}\}_{i-3,j-3} \\
&= [\{\mathbf{C}^{-1}\}_{j-3,i-3}]^2 \qquad i,j = 4,5,6.
\end{aligned}
$$

S využitím hodnot A_1, A_2 dále vypočteme

$$
\begin{aligned}
&l = 3 \\
&B = \frac{1}{2l}(A_1 + 6A_2) = \frac{1}{6}(A_1 + 6A_2) \\
&g = \frac{(l+1)A_1 - (l+4)A_2}{(l+2)A_2} = \frac{4A_1 - 7A_2}{5A_2} \\
&c_1 = \frac{g}{3l + 2(1-g)} = \frac{g}{11 - 2g} \\
&c_2 = \frac{l - g}{3l + 2(1-g)} = \frac{3 - g}{11 - 2g} \\
&c_3 = \frac{l + 2 - g}{3l + 2(1-g)} = \frac{5 - g}{11 - 2g} \\
&E^* = (1 - \frac{A_2}{l})^{-1} = (1 - \frac{A_2}{3})^{-1} = 3(3 - A_2)^{-1} \\
&V^* = \frac{2}{l}\frac{1 + c_1 B}{(1 - c_2 B)^2 (1 - c_3 B)} = \frac{2}{3}\frac{1 + c_1 B}{(1 - c_2 B)^2 (1 - c_3 B)} \\
&\rho = \frac{V^*}{2E^{*2}}
\end{aligned}
$$

$$m^* = 4 + \frac{l+2}{l\rho - 1} = 4 + \frac{5}{3\rho - 1} = \frac{12\rho + 1}{3\rho - 1} \tag{2.14}$$

$$\lambda = \frac{m^*}{E^*(m^* - 2)} = \frac{3 - A_2}{3}\frac{12\rho + 1}{6\rho + 3} = \frac{3 - A_2}{9}\frac{12\rho + 1}{2\rho + 1} \tag{2.15}$$

Nyní již můžeme zapsat statistiku

$$F = \frac{1}{3\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\mathbf{B} \end{pmatrix} \right)' (\mathbf{x}\mathbf{x}' \otimes \hat{\mathbf{C}}^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\mathbf{B} \end{pmatrix} \right),$$

jejíž λ násobek má aproximativně F-rozdělení

$$F^* = \lambda F \sim F_{3,m^*}. \tag{2.16}$$

Konfidenční oblast pro lineární funkci vektoru parametrů kalibrační funkce je dána vztahem

$$P(F \leq \frac{1}{\lambda} F_{3,m^*}(\alpha)) = 1 - \alpha. \tag{2.17}$$

2.2.3 Výpočetní programy a simulace

Některé ze vztahů odvozených v kapitole 2.2 jsme naprogramovali v programu Matlab. Programy jsme využili na zrealizování malé simulační studie pro orientační ověření vhodnosti aproximačně určené konfidenční oblasti pro lineární funkci parametrů kalibrační funkce (2.13). Algoritmus simulační studie je následující

1. vytvoření procedury pro získání (simulaci) výsledků měření $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ (využití funkce Matlabu, která generuje realizace z vícerozměrného normálního rozdělení)

2. výpočet počátečních hodnot matic $\mathbf{M}_0, \mathbf{B}_0$ a variačních komponent $\boldsymbol{\vartheta}_0$ (viz následující podkapitola)

3. výpočet odhadů parametrů modelu $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{B}}$ (dle vzorců (2.6), (2.7) a (2.8))

4. výpočet odhadu vektoru parametrů kovarianční matice modelu $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ a kovariační matice tohoto odhadu $var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ (dle vzorců (2.9) a (2.10))

5. výpočet konfidenční oblasti pro lineární funkci parametrů kalibrační funkce podle vztahu (2.17)

6. ověření ,,platnosti" konfidenční oblasti pro konkrétní volbu matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\Sigma}_X$, $\boldsymbol{\Sigma}_Y$

Určení odhadů se provádí iteračně, tj. vypočtené odhady $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}$ a odhad $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ se opět použijí jako počáteční odhady (opakují se kroky 3 a 4). Ukazuje se, že po 5 iteracích se odhady prakticky ustálily. Počet iterací zůstává teoreticky otevřeným problémem.

Seznam a popis programů je uveden v příloze A, samotné programy jsou potom na přiloženém CD.

Počáteční hodnoty

Počáteční odhad matice $\mathbf{M}_0$: vzhledem k tomu, že se jedná o počáteční odhad střední hodnoty, vezmeme aritmetický průměr (nejlepší nestranný lineární bodový odhad střední hodnoty pro normální rozdělení):

$$\mathbf{M}_0 = \overline{\mathbf{X}}. \tag{2.18}$$

Počáteční odhad matice $\mathbf{B}_0$: za počáteční volbu hodnoty $\mathbf{B}_0$ položíme odhad $\mathbf{B}$ z modelu

$$\overline{\mathbf{Y}} \sim \left[(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \overline{\mathbf{X}}' \otimes \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ vec\,\mathbf{B} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_{3n} \right].$$

Model vychází z myšlenky, že za $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ vezmeme jejich nejlepší nestranné lineární odhady (aritmetické průměry), a hledáme lineární vztah mezi $\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}$. Jde o model nepřímého měření, odhad neznámých parametrů je tedy dán vztahem:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ vec\,\hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \otimes \mathbf{I}_3 \\ \overline{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \overline{\mathbf{X}}' \otimes \mathbf{I}_3) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \otimes \mathbf{I}_3 \\ \overline{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} vec\,\overline{\mathbf{Y}} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\overline{\mathbf{X}}' \\ \overline{\mathbf{X}}\mathbf{1}_n & \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}' \end{pmatrix}^{-1} \otimes \mathbf{I}_3 \right] \left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \overline{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right] vec\,\overline{\mathbf{Y}} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_n'\overline{\mathbf{X}}' \\ \overline{\mathbf{X}}\mathbf{1}_n & \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n' \\ \overline{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right] vec\,\overline{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Počáteční odhad vektoru $\boldsymbol{\vartheta}_0$: pro počáteční volbu rozptylů opět použijeme nejlepší nestranné bodové odhady. Tedy

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_{1j}^k - \overline{\mathbf{X}}_{1j})^2 \\
\sigma_{2,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_{2j}^k - \overline{\mathbf{X}}_{2j})^2 \\
\sigma_{3,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_{3j}^k - \overline{\mathbf{X}}_{3j})^2 \\
\sigma_{4,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{Y}_{1j}^k - \overline{\mathbf{Y}}_{1j})^2 \\
\sigma_{5,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{Y}_{2j}^k - \overline{\mathbf{Y}}_{2j})^2 \\
\sigma_{6,0}^2 &= \frac{1}{n(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{Y}_{3j}^k - \overline{\mathbf{Y}}_{3j})^2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Simulace

Vztah pro interval spolehlivosti pro lineární funkci vektoru parametrů kalibrační funkce (2.13) jsme prověřili na simulovaných datech. K pevně zvoleným maticím

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 20 & -20 & 20 & 0 & 20 & 1 & 4 & 7 & 10 & 3 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 20 & 20 & -20 & 20 & 0 & 3 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

jsme pevně volili kovariační matice třemi různými způsoby

volba A: $\quad \mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

volba B: $\quad \mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$

volba C: $\quad \mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma}_Y = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

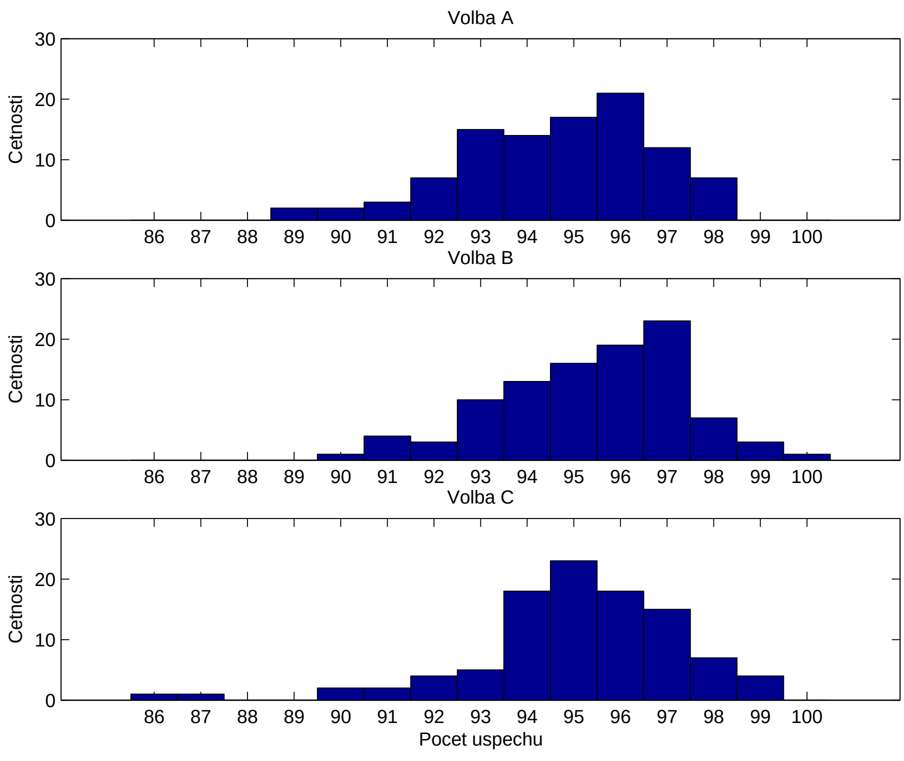
Ve všech třech případech jsme vygenerovali náhodně data pro pevně zvolený počet replikací $m = 10$. Při numerickém výpočtu jsme použili pevného počtu iterací, a to pěti.

Pro každou volbu kovarianční matice A, B, C jsme provedli 100 simulací (100-krát jsme opakovali postup popsaný v úvodu kapitoly) a sledovali jsme, kolikrát platí nerovnost $\lambda F \leq F_{3,m^*}(1-\alpha)$ pro $\alpha = 0,05$. Vzhledem k tomu, že 100 simulací není mnoho, provedli jsme dalších 100 a opět jsme sledovali, kolikrát platí nerovnost $\lambda F \leq F_{3,m^*}(1-\alpha)$ pro $\alpha = 0,05$. Celkem jsme provedli 100 opakování. Kromě frekvence splnění výše uvedené nerovnosti nás zajímalo, zda tvar kovariační matice má vliv na výsledky realizací.

Výsledky jsou zaznamenány v následující tabulce:

Počet úspěchů	**Kovarianční matice**		
	A	**B**	**C**
86	0	0	1
87	0	0	1
88	0	0	0
89	2	0	0
90	2	1	2
91	3	4	2
92	7	3	4
93	15	10	5
94	14	13	18
95	17	16	23
96	21	19	18
97	12	23	15
98	7	7	7
99	0	3	4
100	0	1	0
Celkový součet	**100**	**100**	**100**

a zobrazeny v histogramu:



Z tabulky lze soudit, že simulované výsledky odpovídají teoretickým výpočtům, tj. počet úspěšných simulací ze 100 se pohybuje kolem 95. Konkrétně největší četnosti jsou u hodnot 95, 96 a 97 v závislosti na tvaru kovariační matice. Simulace tedy navíc potvrdily i předpoklad o výrazném vlivu tvaru kovariančních matic na realizaci odhadů parametrů kalibračního modelu.

Pro každou ze tří voleb kovariační matice jsme vlastně provedli 10 000 simulací. Můžeme tedy spočítat empirickou pravděpodobnost, že realizace padne do konfidenčního intervalu. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

Kovarianční matice	A	B	C
Empirická pravděpodobnost	0,9467	0,954	0,951

Kapitola 3

Některé speciální případy dvojrozměrné kalibrace

Shodně s kapitolou 2 předpokládejme, že první měření je realizací n náhodných vektorů, pro které platí

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1i} \\ \mathbf{X}_{2i} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_X);\ i = 1, \dots, n,$$

kde $\boldsymbol{\mu}_i$ je dvojrozměrný vektor a $\boldsymbol{\Sigma}_X$ je pozitivně definitní matice typu $(2,2)$. Druhé měření je realizací n náhodných vektorů s následujícími předpoklady:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1i} \\ \mathbf{Y}_{2i} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_Y);\ i = 1, \dots, n,$$

kde $\boldsymbol{\nu}_i$ je dvojrozměrný vektor a $\boldsymbol{\Sigma}_Y$ je pozitivně definitní matice typu $(2,2)$. Dále předpokládáme nekorelovanost prvního a druhého měření i měření mezi objekty (jednotlivých vektorů). Tuto skutečnost vyjádříme následovně:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_j) = \mathbf{0} \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$
$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad i \neq j.$$

Nechť parametry jsou vázány lineárním vztahem (kalibrační funkcí)

$$\boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_i \quad \text{pro} \quad i = 1, ..., n,$$

kde $\mathbf{a}$ je dvourozměrný vektor a $\mathbf{B}$ je matice typu $(2,2)$. Model měření zapíšeme následovně:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{2n} \\ \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \right) \tag{3.1}$$

Definice 13. Model (3.1) nazýváme nereplikovaným dvourozměrným kalibračním modelem.

Definice 14. Nechť (3.1) je nereplikovaný dvourozměrný kalibrační model a nechť matice $\mathbf{B}$ je ortonormální s determinantem rovným 1. Úlohu odhadnout neznámé parametry $\boldsymbol{\mu}_1, ..., \boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{a}, \mathbf{B}$ nazýváme *dvourozměrnou kalibrací nespecifikovaných identických objektů*. Úlohu odhadnout neznámé parametry $\boldsymbol{\mu}_1, ..., \boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{a}, \mathbf{B}$ za předpokladu, že vektory $\boldsymbol{\mu}_1, ..., \boldsymbol{\mu}_n$ jsou souřadnicemi bodů na zadaném objektu, nazýváme *dvourozměrnou kalibrací specifikovaných identických objektů*.

Začneme definicí matice funkcí jedné reálné proměnné a poté budeme pokračovat několika zřejmými tvrzeními o ortonormálních maticích typu $(2, 2)$.

Definice 15. Matici $\mathbf{B}(\beta)$, jejímiž prvky jsou diferencovatelné funkce proměnné β, tedy $\{\mathbf{B}(\beta)\}_{ij} = b_{ij}(\beta)$ pro všechny i, j, nazýváme matice funkcí jedné reálné proměnné.

Definice 16. Derivaci matice funkcí jedné reálné proměnné označíme $\mathbf{B}'(\beta)$. Její prvky jsou definovány vztahem $\{\mathbf{B}'(\beta)\}_{ij} = b'_{ij}(\beta)$ pro všechny i, j.

Věta 3.1. *Buď $\mathbf{B}$ libovolná pevně vybraná ortonormální matice typu $(2, 2)$, jejíž determinant je roven jedné. Potom existuje jediné $\beta \in \langle 0, 2\pi)$ takové, že*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Věta 3.2. *Označme pro každé reálné číslo β*

$$\mathbf{B}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Potom $\mathbf{B}(\beta)$ je ortonormální matice s determinantem rovným jedné.

Důsledek 3.3. Množina $\{\mathbf{B}(\beta); \beta \in \langle 0, 2\pi)\}$ je množina všech ortonormálních matic typu $(2, 2)$ s determinantem rovným jedné.

Věta 3.4. *a) Pro inverzní matici k matici $\mathbf{B}(\beta)$ platí*

$$\mathbf{B}^{-1}(\beta) = \mathbf{B}(-\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

b) Pro derivaci matice $\mathbf{B}(\beta)$ platí

$$\mathbf{B}'(\beta) = \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta) = \begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & -\sin\beta \end{pmatrix},$$

c) $-\mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(\pi + \beta)$*,* *d)* $\mathbf{B}(\beta_1 + \beta_2) = \mathbf{B}(\beta_1)\mathbf{B}(\beta_2)$.

Poznámka. Zopakujme, že v zápisu (3.1) jsou $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{a}, \mathbf{B}$ neznámé parametry modelu. Díky důsledku 3.3 lze čtyři neznámé prvky matice $\mathbf{B}$ jedno-jednoznačně nahradit jediným parametrem β. Model (3.1) pak zapíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{2n} \\ \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}\right). \tag{3.2}$$

Střední hodnota každého z náhodných vektorů $\mathbf{Y}_i$ je nelineární funkcí parametrů $\beta, \boldsymbol{\mu}_i$, neboť $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Každý ze součinů $\mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_i$ linearizujeme rozvinutím do Taylorovy řady o středu $[\beta_0, \boldsymbol{\mu}_i^0]$ a zanedbáním členů druhého řádu a vyšších. Obdržíme tvrzení:

Věta 3.5. *Buď $\beta_0 \in R, \boldsymbol{\mu}_i^0 \in R^2$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom platí přibližný vztah*

$$E(\mathbf{Y}_i) \doteq \mathbf{a} + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_i^0\beta + \mathbf{B}(\beta_0)\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_i^0\beta_0 \tag{3.3}$$

pro všechna i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Poznámka. Vztah (3.3) můžeme pro $i = 1, 2, ..., n$ zapsat ve tvaru

$$\mathrm{E}\big(\mathbf{Y}_i + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_i^0\beta_0\big) \doteq \big(\mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_i^0, \mathbf{I}_2, \mathbf{B}(\beta_0)\big)\begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\mu}_i \end{pmatrix}.$$

Důsledek 3.6. Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_1^0 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{B}(\beta_0) & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_2^0 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{B}(\beta_0) & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta_0)\boldsymbol{\mu}_n^0 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{B}(\beta_0) \end{pmatrix}.$$

Použitím vztahů z předchozí poznámky lze model (3.2) přepsat do (přibližného) tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_1 + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta_0)\boldsymbol{\mu}_1^0\beta_0 \\ \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta_0)\boldsymbol{\mu}_2^0\beta_0 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta_0)\boldsymbol{\mu}_n^0\beta_0 \end{pmatrix} \approx N\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{2n} \\ \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix} \right), \tag{3.4}$$

v němž přibližnost se týká středních hodnot.

Poznámka. Vztahy uvedené v předchozím důsledku jsou hledaným vyjádřením regulární dvojrozměrné kalibrace nespecifikovaných identických objektů pomocí zobecněného Gaussova-Markovova regresního modelu. Určit odhady parametrů modelu a kovarianční matice odhadů parametrů modelu jsou již standardní úlohy (např. v [1]). Model (3.4) je také modelem nepřímého měření, viz definice 2. Pro parametry $\boldsymbol{\nu}_1, ..., \boldsymbol{\nu}_n$ platí vztah $\boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_i$.

Poznámka. V následující poněkud delší poznámce ukážeme nepříliš formalizovaným způsobem jednu z možností převedení regulární dvojrozměrné kalibrace identických kružnic na zobecněný Gaussův-Markovův regresní model.

Poznámka. Uvažujme, že specifikovaným objektem je kružnice. Nechť $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in R^2$, $\rho_\mu, \rho_\nu \in R$ a $k(\mathbf{U}, \rho_\mu)$ je kružnice se středem $\mathbf{U}$ a poloměrem ρ_μ, $k(\mathbf{V}, \rho_\nu)$ je kružnice se středem $\mathbf{V}$ a poloměrem ρ_ν. Potom nová úloha regulární dvojrozměrné kalibrace identických kružnic je dřívější úloha regulární dvojrozměrné kalibrace nespecifikovaných identických objektů doplněná o podmínky:

$$\boldsymbol{\mu}_i \in k(\mathbf{U}, \rho_\mu), \boldsymbol{\nu}_i \in k(\mathbf{V}, \rho_\nu), \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_i \text{ pro } i = 1, 2, ..., n. \tag{3.5}$$

Tyto podmínky lze přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{U} + \rho_\mu \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix}, \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{V} + \rho_\nu \begin{pmatrix} \cos\psi_i \\ \sin\psi_i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} + \rho_\nu \begin{pmatrix} \cos\psi_i \\ \sin\psi_i \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\mathbf{U} + \rho_\mu \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \beta) \\ \sin(\varphi_i - \beta) \end{pmatrix},$$

kde $\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_n$ jsou nějaká reálná čísla.

Díky regularitě úlohy obdržíme

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\mathbf{U}, \rho_\mu = \rho_\nu = \rho, \begin{pmatrix} \cos\psi_i \\ \sin\psi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \beta) \\ \sin(\varphi_i - \beta) \end{pmatrix} \text{ pro } i = 1, 2, ..., n.$$

Z posledních vztahů opět díky regularitě dostáváme $\psi_i = \varphi_i - \beta$ pro $i = 1, 2, ..., n$.

Řešená úloha je tedy ekvivalentní úloze, v níž vektor $(\mathbf{X}_1', ..., \mathbf{X}_n', \mathbf{Y}_1', ..., \mathbf{Y}_n')'$ má normální rozdělení se střední hodnotou

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{U} + \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i) = \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\mathbf{U} + \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \beta) \\ \sin(\varphi_i - \beta) \end{pmatrix},$$

a kovarianční matici stejnou jako v předchozím případě.

Rozviňme postupně funkce

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix},\ \mathbf{B}(\beta)\mathbf{U},\ \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \beta) \\ \sin(\varphi_i - \beta) \end{pmatrix}$$

do Taylorových řad o středech postupně $(\rho_0, \varphi_i^0), (\beta_0, \mathbf{U}^0), (\rho_0, \beta_0, \varphi_i^0)$; zanedbejme členy druhého a vyšších řádů. Dostaneme

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \rho_0\varphi_i^0 \sin\varphi_i^0 \\ -\rho_0\varphi_i^0 \cos\varphi_i^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_i^0 \\ \sin\varphi_i^0 \end{pmatrix} \rho + \begin{pmatrix} -\rho_0 \sin\varphi_i^0 \\ \rho_0 \cos\varphi_i^0 \end{pmatrix} \varphi_i,$$

$$\mathbf{B}(\beta)\mathbf{U} \doteq -\mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta)\mathbf{U}^0\beta_0 + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta)\mathbf{U}^0\beta + \mathbf{B}(\beta_0)\mathbf{U},$$

$$\rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \beta) \\ \sin(\varphi_i - \beta) \end{pmatrix} \doteq$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_i^0 - \beta_0) \\ \sin(\varphi_i^0 - \beta_0) \end{pmatrix} \rho + \rho_0 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_i^0 - \beta_0) \\ \cos(\varphi_i^0 - \beta_0) \end{pmatrix} (\varphi_i - \beta) - \rho_0 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_i^0 - \beta_0) \\ \cos(\varphi_i^0 - \beta_0) \end{pmatrix} (\varphi_i^0 - \beta_0).$$

Neznámými parametry nového modelu budou ,,posunutí" v kalibrační funkci $\mathbf{a}$, střed ,,první" kružnice $\mathbf{U}$, společný poloměr obou kružnic ρ, parametr ,,otočení" druhé kružnice oproti první kružnici β a úhly $\varphi_1, ..., \varphi_n$, které svírají průvodiče bodů ležících kružnici $k(\mathbf{U}, \rho_\mu)$ s osou x.

Díky předchozím vztahům dostaneme při označení $\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ zápisy

$$\rho\mathbf{R}(\varphi_i) \doteq -\rho_0\varphi_i^0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2} + \varphi_i^0) + \mathbf{R}(\varphi_i^0)\rho + \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2} + \varphi_i^0)\varphi_i,$$
$$\mathbf{B}(\beta)\mathbf{U} \doteq -\mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta)\mathbf{U}^0\beta_0 + \mathbf{B}(\frac{\pi}{2} + \beta)\mathbf{U}^0\beta + \mathbf{B}(\beta_0)\mathbf{U},$$
$$\rho\mathbf{R}(\varphi_i - \beta) \doteq$$
$$\doteq \mathbf{R}(\varphi_i^0 - \beta_0)\rho + \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2} + \varphi_i^0 - \beta_0)(\varphi_i - \beta) - \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2} + \varphi_i^0 - \beta_0)(\varphi_i^0 - \beta_0).$$

Odtud

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{U} + \rho\mathbf{R}(\varphi_i) \doteq -\rho_0\varphi_i^0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0) + \big(\mathbf{0}_2, \mathbf{I}_2, \mathbf{R}(\varphi_i^0), \mathbf{0}_{2,1}, \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0)\big)\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{U}\\ \rho\\ \beta\\ \varphi_i\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i) = \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\mathbf{U} + \rho\mathbf{R}(\varphi_i - \beta) &\doteq \\ \doteq -\mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta)\mathbf{U}^0\beta_0 - \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)(\varphi_i^0-\beta_0) + \mathbf{a} &+ \\ + \mathbf{B}(\beta_0)\mathbf{U} + \mathbf{R}(\varphi_i^0-\beta_0)\rho + [\mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta)\mathbf{U}^0 - \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)]\beta &+ \\ + [\rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)]\varphi_i&.\end{aligned}$$

Označme $\mathbf{K}_i = -\mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta)\mathbf{U}^0\beta_0 - \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)(\varphi_i^0-\beta_0)$,
$\mathbf{L}_i = \mathbf{B}(\frac{\pi}{2}+\beta)\mathbf{U}^0 - \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)$. Potom

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{K}_i + \big(\mathbf{I}_2, \mathbf{B}(\beta_0), \mathbf{R}(\varphi_i^0-\beta_0), \mathbf{L}_i, \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_i^0-\beta_0)\big)\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{U}\\ \rho\\ \beta\\ \varphi_i\end{pmatrix}.$$

Důsledek 3.7. Označme symbolem $\mathbf{C}$ matici

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{R}(\varphi_1^0) & \mathbf{0}_{2,1} & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_1^0) & \mathbf{0}_{2,1} & \dots & \mathbf{0}_{2,1}\\
\mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{R}(\varphi_2^0) & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,1} & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_2^0) & \dots & \mathbf{0}_{2,1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{R}(\varphi_n^0) & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & \dots & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_n^0)\\
\mathbf{I}_2 & \mathbf{B}(\beta_0) & \mathbf{R}(\varphi_1^0-\beta_0) & \mathbf{L}_1 & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_1^0-\beta_0) & \mathbf{0}_{2,1} & \dots & \mathbf{0}_{2,1}\\
\mathbf{I}_2 & \mathbf{B}(\beta_0) & \mathbf{R}(\varphi_2^0-\beta_0) & \mathbf{L}_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_2^0-\beta_0) & \dots & \mathbf{0}_{2,1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\mathbf{I}_2 & \mathbf{B}(\beta_0) & \mathbf{R}(\varphi_n^0-\beta_0) & \mathbf{L}_n & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,1} & \dots & \rho_0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_n^0-\beta_0)
\end{pmatrix}$$

Použitím vztahů z předchozí poznámky lze výraz (3.2) při respektování podmínek (3.5) přepsat do přibližného tvaru

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1 + \rho_0\varphi_1^0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_1^0)\\ \mathbf{X}_2 + \rho_0\varphi_2^0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_2^0)\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n + \rho_0\varphi_n^0\mathbf{R}(\frac{\pi}{2}+\varphi_n^0)\\ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{K}_1\\ \mathbf{Y}_2 - \mathbf{K}_2\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_n - \mathbf{K}_n\end{pmatrix} \approx N\left(\mathbf{C}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{U}\\ \rho\\ \beta\\ \varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{\Sigma}_X & \mathbf{0}_{2n}\\ \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_n\otimes\mathbf{\Sigma}_Y\end{pmatrix}\right), \qquad (3.6)$$

v němž přibližnost se týká středních hodnot. Model (3.6) je hledaný zobecněný Gaussův-Markovův model, v [7] je nazvaný modelem nepřímého měření. Upřesněme, že pro parametry $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, ..., \boldsymbol{\nu}_n$ platí zřejmá podmínka $\boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{a} + \mathbf{B}(\beta)\boldsymbol{\mu}_i$.

Závěr

Práce se zabývá modely vícerozměrné kalibrace a je rozdělena na tři části. První je věnována teorii, konkrétně některým lineárním modelům měření, MINQUE odhadům a postupu Kenwarda a Rogera pro konstrukci konfidenční oblasti.

Druhá část se zabývá trojrozměrným kalibračním modelem s kalibrační funkcí v lineárním vztahu. Na základě analogie s modely neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu jsou odvozeny odhady neznámých parametrů modelu, konkrétně středních hodnot a kalibrační funkce, včetně kovariačních matic těchto odhadů za předpokladu známé kovariační matice modelu. V replikovaném kalibračním modelu lze navíc odhadnout parametry kovariační matice modelu. V práci je k tomuto účelu použita metoda MINQUE. Dále je za předpokladu neznámé kovariační matice modelu zkonstruována konfidenční oblast pro vektor parametrů kalibrační funkce a pro dvě konkrétní lineární kombinace parametrů kalibrační funkce. Využili jsme postupu Kenwarda a Rogera, který odhad kovariační matice zpřesňuje a odvozuje statistiku, která má aproximativně F-rozdělení.

Odvozené vztahy jsme naprogramovali v programu Matlab a procedur využili k malé simulační studii pro ověření aproximativních vlastností konfidenčních oblastí. Simulace potvrdily teoretické úvahy. Navíc se ukázalo, že záleží na volbě kovarianční matice.

Třetí část je věnována dvěma speciálním případům dvojrozměrné kalibrace. V prvním předpokládáme, že kalibrační funkce zachovává objekty, tedy že matice transformace je ortonormální s determinantem rovným jedné. V druhém případě navíc předpokláme, že objekt je specifikován, konkrétně uvažujeme kružnici. Druhý případ lze rozšířit i na další konkrétní objekty.

Dalším přirozeným pokračováním práce je rozšířit postup uvedený v kapitole 2 (pro trojrozměrnou kalibraci) pro větší dimenzi i zobecnit pro dimenzi d. Vyžaduje to více formalizmu a počítání. Dále provést rozsáhlejší simulační studii. V neposlední řadě vyjádřit odhad parametrů inverzní kalibrační funkce a popsat její vlastnosti.

Stručný přehled dosažených výsledků

- Výpočet odhadu neznámých parametrů v trojrozměrném nereplikovaném kalibračním modelu se známou kovariační maticí a kovariačních matic těchto odhadů.

- Výpočet odhadu neznámých parametrů v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu se známou kovariační maticí a kovariačních matic těchto odhadů.
- Výpočet odhadu neznámých parametrů kovariační matice v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu s neznámou kovariační maticí a kovariační matice tohoto odhadu.
- Výpočet konfidenční oblasti pro vektor parametrů kalibrační funkce v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu s neznámou kovariační maticí.
- Výpočet konfidenčního intervalu pro jednotlivé složky vektoru parametrů kalibrační funkce v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu s neznámou kovariační maticí.
- Výpočet konfidenční oblasti pro lineární funkci prvků vektoru parametrů kalibrační funkce v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu s neznámou kovariační maticí.
- Výpočet odhadu neznámých parametrů v dvojrozměrném nereplikovaném kalibračním modelu se známou kovariační maticí za předpokladu, že kalibrační funkce zachovává objekty - kalibrace identických nespecifikovaných objektů.
- Výpočet odhadu neznámých parametrů v dvojrozměrném nereplikovaném kalibračním modelu se známou kovariační maticí za předpokladu, že kalibrační funkce zachovává objekty a že tím objektem je kružnice - kalibrace identických specifikovaných objektů (kalibrace kružnic).

Literatura

[1] Anděl, J.: *Matematická statistika.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978.

[2] Brown, P., J.: *Multivariate Calibration.* Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 44, No. 3, 287–321, 1982.

[3] Brown, P., J.: *Measurement, Regression, and Calibration.* Oxford Statistical Science Series, 12, 1994.

[4] Fiedler, M.: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[5] Kenward, M. G., Roger, J. H.: *Small sample inference for fixed effects from restricted maximum likelihood.* Biometrics, 53, 1997, 983–997.

[6] Kubáčková, L., Kubáček, L., Kukuča, J.: *Pravdepodobnosť a štatistika v geodézii a geofyzike.* VEDA, Bratislava, 1982.

[7] Kubáček, L., Kubáčková, L.: *Statistika a metrologie.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2000.

[8] Moll, I., Moll, P., Myšková, K.: *Konfidenční oblast pro lineární funkci parametrů kalibrační funkce v trojrozměrném kalibračním modelu.* XVIII. letní škola biometriky, Račková dolina, Pribylina, 2008.

[9] Moll, I., Myšková, K.: *Calibration of identical objects.* Summer School DATASTAT 06, Proceedings, Masaryk Univeristy, 2007, ISBN 978-80-210-4493-7, str. 195

[10] Moll, I., Myšková, K.: *Tři přístupy k lineární kalibraci.* 6. matematický workshop, FAST VUT v Brně, 2007.

[11] Myšková, K.: *Parameter estimators in a multidimensional calibration model.* Summer School DATASTAT 06, Proceedings, Masaryk Univeristy, 2007, ISBN 978-80-210-4493-7, str. 203

[12] Myšková, K.: *Trojrozměrná kalibrace se shodnými diagonálnámi kovariačními maticemi.* 17. letní škola biometriky, str. 245–252, Lednice 2006.

[13] Myšková, K.: *Estimation of parameters of covariance matrix in three-dimensional calibration model.* ISCAM 2007.

[14] Myšková, K.: *Konfidenční interval pro parametry kalibrační funkce v trojrozměrném kalibračním modelu.* XXV. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu, Univerzita obrany, Brno 2007.

[15] Osborne, C.: *Statistical Calibration: A Review.* International Statistical Review 59, 309–336, 1991.

[16] Rao, C., R.: *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace.* Academia, Praha, 1978.

[17] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M., Šedivý, J.: *Geometrie I.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1986.

[18] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M., Šedivý, J.: *Geometrie II.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1988.

[19] Wimmer, G.: *Niektoré matematicko-štatistické modely kalibrace.* Robust, 2006.

[20] Wimmer, G., Witkovský, V.: *Univariate linear calibration via replicated errors-in-variables model.* Journal of Statistical Computation and Simulation 77 (3), 213–227, 2007.

[21] Wimmer, G., Witkovský, V.: *Scheffé-type confidence region for the calibration line.* Austrian Journal of Statistics 35, 397–406, 2006.

[22] Wimmer, G., Witkovský, V.: *Linear comparative calibration with correlated measurements.* Kybernetika 43 (4), 443–452, 2007.

Příloha

Seznam programů uvedených na přiloženém CD

generuj.m

pocatek.m

nkalireplik.m

MINQUE.m

iterace.m

KRbod.m

KRvektor.m

KRkonfbod.m

simulace.m

Popis programů uvedených na přiloženém CD

Generování výsledků měření z mnohorozměrného normálního rozdělení
`[x,y]=generuj(m)`
m ... počet replikací
x, y ... matice výsledků prvního a druhého měření

Výpočet počátečních hodnot v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu
`[M0,B0,v0]=pocatek(x,y,m)`
x, y ... matice výsledků prvního a druhého měření
m ... počet replikací
$\mathbf{M}_0$ ... počáteční odhad střední hodnoty prvního měření (viz vzorec (2.18))
$\mathbf{B}_0$ ... počáteční odhad matice tranformace z kalibrační funkce (viz vzorec (2.19))
$\boldsymbol{\vartheta}_0$ ... počáteční odhad vektoru komponent kovarianční matice (viz vzorec (2.20))

Odhady parametrů v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu
`[oM,oN,a,B]=nkalireplik(x,y,m,B0,M0,v0)`

x, y ... matice výsledků prvního a druhého měření
m ... počet replikací
$\mathbf{M}_0$ ... počáteční odhad střední hodnoty prvního měření
$\mathbf{B}_0$ ... počáteční odhad matice tranformace kalibrační funkce
$\boldsymbol{\vartheta}_0$ ... počáteční odhad vektoru komponent kovarianční matice
$\hat{\mathbf{M}}$ ... odhad matice středních hodnot prvního měření (viz vzorec (2.6))
$\hat{\mathbf{N}}$ ... odhad matice středních hodnot druhého měření (viz vzorec (2.7))
$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{B}}$ ... odhad parametrů kalibrační funkce (viz vzorec (2.8))

Odhad vektoru neznamých komponent kovariační matice v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu pomocí metody MINQUE a kovariační matice tohoto odhadu
`[ov,varov]=MINQUE(x,y,m,oM,oN,oB,v0)`
x, y ... matice výsledků prvního a druhého měření
m ... počet replikací
$\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}$ ... odhad matic středních hodnot
$\hat{\mathbf{B}}$ ... odhad parametrů kalibrační funkce
$\boldsymbol{\vartheta}_0$ ... počáteční odhad vektoru komponent kovarianční matice
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ ... odhad vektoru komponent kovarianční matice (viz vzorec (2.9))
$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ ... kovarianční matice odhadu vektoru komponent kovarianční matice (viz vzorec (2.10))

Iterativní odhad parametrů v trojrozměrném replikovaném kalibračním modelu s neznámou kovariační maticí
`[oM,oN,a,B,ov,varov]=iterace(x,y,m)`
x, y ... matice výsledků prvního a druhého měření
m ... počet replikací
$\hat{\mathbf{M}}$ ... odhad matice středních hodnot prvního měření (viz vzorec (2.6))
$\hat{\mathbf{N}}$ ... odhad matice středních hodnot druhého měření (viz vzorec (2.7))
$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{B}}$ ... odhad parametrů kalibrační funkce (viz vzorec (2.8))
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ ... odhad vektoru komponent kovarianční matice (viz vzorec (2.9))
$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ ... kovarianční matice odhadu vektoru komponent kovarianční matice (viz vzorec (2.10))

Výpočet parametrů pro konstrukci konfidenční oblasti pro lineární funkci vektoru parametrů podle postupu Kenwarda a Rogera
`[m*,lam]=KRbod(B0,ov,varov)`
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ ... odhad vektoru komponent kovarianční matice
$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ ... kovarianční matice odhadu vektoru komponent kovarianční matice
$\mathbf{B}_0$ ... počáteční odhad matice tranformace z kalibrační funkce
m^* ... odhad druhého stupně volnosti v F-rozdělení (viz vzorec (2.14))
λ ... odhad multiplikativní konstanty (viz vzorec (2.15))

Výpočet parametrů pro konstrukci konfidenční oblasti pro vektor parametrů podle postupu Kenwarda a Rogera
`[m*,lam]=KRvektor(B0,ov,varov)`
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ ... odhad vektoru komponent kovarianční matice
$var(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ ... kovarianční matice odhadu vektoru komponent kovarianční matice
$\mathbf{B}_0$ ... počáteční odhad matice tranformace z kalibrační funkce
m^* ... odhad druhého stupně volnosti v F-rozdělení (viz vzorec (2.11))
λ ... odhad multiplikativní konstanty (viz vzorec (2.12))

Ověření konstrukce konfidenční oblasti pro lineární funkci vektoru parametrů kalibrační funkce
`[F*,Fm*]=KRkonfbod(xx,m)`
m ... počet replikací
xx ... souřadnice konkrétního bodu
$F*$ ... hodnota testové statistiky (viz vzorec (2.16))
$Fm*$ ... kvantil F-rozdělení o 3, m^* stupních volnosti

Výsledek simulace
`[pp]=simulace`