



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
Přírodovědecká fakulta

**Zuzana HRDLIČKOVÁ**  
**MNOHOROZMĚRNÉ ZOBECNĚNÉ**  
**LINEÁRNÍ MODELY**

Dizertační práce

Školitel: doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.

Brno, 2006

## Bibliografická identifikace

**Jméno a příjmení autora:** Zuzana Hrdličková

**Název disertační práce:** Mnohorozměrné zobecněné lineární modely

**Název disertační práce anglicky:** Multivariate generalized linear models

**Studijní program:** Matematika

**Studijní obor :** Pravděpodobnost a matematická statistika

**Školitel:** doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.

**Rok obhajoby:** 2006

**Klíčová slova v češtině:** Mnohorozměrné zobecněné lineární modely, Deviance, Waldova statistika, Skórová statistika, Síla testů, Pitmanův přístup

**Klíčová slova v angličtině:** Multivariate generalized linear models, Deviance, Wald Statistic, Score Statistic, Power of the Test, Pitman Approach



## Poděkování

Chtěla bych touto cestou upřímně poděkovat doc. RNDr. Jaroslavu Michálkovi, CSc. za vnímavé vedení dizertační práce, za množství času, ochoty a trpělivosti, které mi věnoval. Dále bych ráda poděkovala RNDr. Viktoru Witkovskému, CSc. za poskytnutí matlabovského programu `Cdfchi.m` a doc. MUDr. Jaroslavu Michálkovi, Ph.D. za laskavé zpřístupnění dat získaných v rámci grantu GAČR č. 301/03/D196.

Dizertační práce byla vytvořena za podpory grantu GACR 201/05/H007, výzkumného záměru MSM0021622418 a grantu GACR 402/04/1308. Poděkování též patří nadaci Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových za cestovní stipendia podporující moji účast na zahraničních konferencích TIES 2003, TIES 2004 a TIES 2005.

## Abstrakt

Předložená dizertační práce je věnována vlastnostem mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů, větší pozornost je věnována silám testů lineárních hypotéz o parametrech těchto modelů.

Práce obsahuje šest kapitol a tři dodatky. Kapitola 1 je věnována vybraným pojmům z teorie maximální věrohodnosti. V kapitole 2 jsou uvedena tvrzení o hustotách exponenciálního typu. Mimo jiné jsou odvozeny předpoklady zajišťující regularitu hustot exponenciálního typu. Vedle vlastností nejčastěji studovaného mnohorozměrného rozdělení exponenciálního typu, kterým je rozdělení multinomické, jsou odvozeny i vlastnosti v literatuře opomíjeného Wishartova a transformovaného Dirichletova rozdělení.

V kapitole 3 je poté v souladu s monografií (Fahrmeir, 1994) definován mnohorozměrný zobecněný lineární model (MGLM). Dále jsou uvedena vybraná tvrzení o asymptotických vlastnostech modelu z článku (Fahrmeir, 1985), jejichž důkazy jsou oproti článku detailněji rozepsány. V kapitole 3 jsou též odvozeny asymptotické oblasti spolehlivosti pro vektor kontrastů parametrů modelu a jsou popsány testové statistiky běžně užívané v MGLM k testování lineárních hypotéz o parametrech modelu. Kapitola je uzavřena ukázkou užití modelu při genetické predikci rizika sepse u dětských pacientů.

Následující kapitoly jsou věnovány aproximacím sil testů lineárních hypotéz o parametrech MGLM. V kapitole 4 je pozornost věnována aproximacím sil testů hypotézy proti posloupnosti Pitmanových alternativ. Postup takové aproximace je detailněji odvozen v dodatku C. Kapitola 5, ve které jsou zobecněny publikované výsledky autora dizertace, se naopak zabývá aproximací sil v MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění. Zde jsou na rozdíl od předchozí kapitoly odvozeny aproximace sil testů hypotézy proti pevné alternativě. V kapitole 6 jsou pak oba možné přístupy aproximace v MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění porovnány a to především pomocí simulačních studií v modelech s multinomickým, Wishartovým, transformovaným Dirichletovým, binomickým, Poissonovým, gama a negativně binomickým rozdělením.

Výpočty uvedené v dizertační práci byly provedeny pomocí k tomu účelu sepsaných programů v MATLABU, které lze nalézt na přiloženém CD.

## Literatura

- Fahrmeir, Ludwig, Kaufmann, Heinz. Consistency and Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimator in Generalized Linear Models. *The Annals of Statistics*, Mar. 1985, Vol. 13, No. 1, s. 342-368.
- Fahrmeir, Ludwig, Tutz, Gerhard. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. New York: Springer – Verlag, 1994. ISBN 0387942335.

## Abstract

Submitted dissertation focuses on properties of multivariate generalized linear models, special attention is paid to powers of tests of linear hypothesis on parameters of these models.

The dissertation consists of six chapters and three appendixes. Chapter 1 is dedicated to selected terms in the theory of maximum likelihood. Propositions on properties of distribution from exponential family are considered in chapter 2. Assumptions assuring regularity of corresponding density function are derived among other things. Beside the properties of the most frequently studied multivariate distribution from exponential family, the multinomial distribution, properties of Wishart and transformed Dirichlet distribution are introduced.

Afterwards, the multivariate generalized linear model (MGLM) is defined according to the monograph (Fahrmeir, 1994). Selected theorems on asymptotic properties of the model from paper (Fahrmeir, 1985) are included in chapter 3. Their proofs are performed in more details in contrast to the paper. Asymptotic confidence sets for vector of contrasts of parameters of MGLM are also derived. Finally, test statistics usually used for test of the linear hypothesis on parameters of MGLM are introduced in this chapter. Chapter 3 is concluded by application of model in genetic prediction of sepsis in children patients.

Following chapters are dedicated to approximations of powers of the tests of linear hypothesis on parameters of MGLM. In chapter 4, attention is paid to approximations of powers of the tests of hypothesis against sequence of Pitman alternatives. Technique of these approximations is derived in appendix C in more details. Conversely, chapter 5, in which published results of the author of dissertation are generalized, deals with approximations of powers of tests in balanced one-way ANOVA type MGLM. Here, the powers of test of hypothesis against fixed alternative are considered in contrast to the previous chapter. Both approaches to approximations of the powers in balanced one-way ANOVA type MGLM are compared in chapter 6, especially by simulation studies in MGLM with multinomial, Wishart, transformed Dirichlet, binomial, Poisson, gamma and negative binomial distribution.

Calculations presented in the dissertation were carried out using MATLAB programs, which are to be found on enclosed CD.

## References

- Fahrmeir, Ludwig, Kaufmann, Heinz. Consistency and Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimator in Generalized Linear Models. *The Annals of Statistics*, Mar. 1985, Vol. 13, No. 1, s. 342-368.
- Fahrmeir, Ludwig, Tutz, Gerhard. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. New York: Springer – Verlag, 1994. ISBN 0387942335.

# Obsah

Seznam symbolů	9
Úvod	15
<b>1 Metoda maximální věrohodnosti</b>	<b>17</b>
1.1 Systém regulárních hustot . . . . .	17
1.2 Maximálně věrohodný odhad . . . . .	19
<b>2 Hustoty jednoduchého exponenciálního typu</b>	<b>21</b>
2.1 Definice a vlastnosti . . . . .	21
2.2 Příklady rozdělení exponenciálního typu . . . . .	24
<b>3 Mnohorozměrný zobecněný lineární model</b>	<b>33</b>
3.1 Definice modelu . . . . .	34
3.2 Skórový vektor a Fisherova informační matice . . . . .	36
3.3 Numerické řešení věrohodnostních rovnic . . . . .	39
3.4 Asymptotické vlastnosti modelu . . . . .	40
3.5 Testy hypotéz o parametrech modelu . . . . .	50
<b>4 Síla testů v MGLM</b>	<b>55</b>
4.1 Odvození sil testů . . . . .	56
4.2 Příklady . . . . .	61
<b>5 Síla testů v MGLM typu jednoduché třídění</b>	<b>67</b>
5.1 Popis modelu a odhady jeho parametrů . . . . .	67
5.2 Aproximace rozdělení deviance . . . . .	68
5.3 Aproximace rozdělení skórové statistiky . . . . .	71
5.4 Aproximace sil testů založených na $\Delta D$ a $S$ . . . . .	73
<b>6 Porovnání aproximací sil testů v MGLM</b>	<b>75</b>
6.1 Multinomické rozdělení . . . . .	76
6.2 Transformované Dirichletovo rozdělení . . . . .	76
6.3 Wishartovo rozdělení . . . . .	76
6.4 Binomické rozdělení . . . . .	77
6.5 Gama rozdělení . . . . .	77

6.6	Poissonovo rozdělení . . . . .	77
6.7	Negativně binomické rozdělení . . . . .	77
6.8	Závěry . . . . .	78
<b>Závěr</b>		<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Poznámky o symbolech <math>o_p</math> a <math>O_p</math></b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Poznámky o rozdělení kvadratických forem</b>	<b>101</b>
<b>C</b>	<b>Síla asymptotických testů založených na věrohodnostní funkci</b>	<b>105</b>
	C.1 Aproximace testových statistik . . . . .	107
	C.2 Asymptotické rozdělení testových statistik . . . . .	113
<b>Seznam matlabovských programů</b>		<b>135</b>
<b>Literatura</b>		<b>139</b>



# Seznam symbolů

## Matice a pole

$\mathbf{R}^n$	reálný $n$ -rozměrný euklidovský prostor
$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$	$n$ -rozměrný sloupcový vektor
$\mathbf{R}^+$	$= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{J} = [J_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, r}}$	matice typu $n \times r$ s prvky $J_{ij}$ , $i = 1, \dots, n$ , $j = 1, \dots, r$ . Pro přehlednost zápisu jsou někdy prvky matice $\mathbf{J}$ značeny $\{\mathbf{J}\}_{ij}$ .
$\mathcal{M}(\mathbf{J})$	lineární obal sloupců matice $\mathbf{J}$
$\mathbf{I}_n$	$n$ -rozměrná jednotková matice
$\mathbf{E}_{ij}$	$n$ -rozměrná čtvercová matice s prvky $\{\mathbf{E}_{ij}\}_{kl} = 1$ pro $k = i$ , $j = l$ , $i, j, k, l = 1, \dots, n$ , $\{\mathbf{E}_{ij}\}_{kl} = 0$ jinak
$\mathbf{J}^T$	transponovaná matice $\mathbf{J}$
$\mathbf{J}^{-1} = [J^{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$	inverzní matice k regulární $n$ -rozměrné čtvercové matici $\mathbf{J}$ s prvky $J^{ij}$ , $i, j = 1, \dots, n$ .
$\mathbf{J}^-$	pseudoinverzní matice k matici $\mathbf{J}$
$\mathbf{J}^{1/2}$	čtvercová matice příslušná symetrické pozitivně semidefinitní matici $\mathbf{J}$ , pro kterou $\mathbf{J}^{1/2} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{C}^T$ , kde $\mathbf{C}$ je matice normovaných vlastních vektorů matice $\mathbf{J}$ a $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ je matice s odmocninami vlastních čísel matice $\mathbf{J}$ na diagonále
$\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{12}, \mathbf{J}_{21}, \mathbf{J}_{22}$ $\mathbf{J}^{11}, \mathbf{J}^{12}, \mathbf{J}^{21}, \mathbf{J}^{22}$	submatice čtvercové matice $\mathbf{J}$ , matice $\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{22}$ jsou čtvercové submatice inverzní matice $\mathbf{J}^{-1}$ k regulární čtvercové matici $\mathbf{J}$ , matice $\mathbf{J}^{11}, \mathbf{J}^{22}$ jsou regulární čtvercové
$\mathbf{J}^{2\cdot}$	$= [\mathbf{J}^{21}, \mathbf{J}^{22}]$
$\mathbf{J}^{\cdot 2}$	$= [(\mathbf{J}^{12})^T, (\mathbf{J}^{22})^T]^T$
$\mathbf{J}_{22.1}$	$= \mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{21}\mathbf{J}_{11}^{-1}\mathbf{J}_{12}$ , tj. $\mathbf{J}_{22.1} = \mathbf{J}^{22}$
$\text{diag}(\mathbf{x})$	diagonální matice se složkami vektoru $\mathbf{x}$ na hlavní diagonále
$\text{diag}(\mathbf{J})$	diagonální matice s diagonálou čtvercové matice $\mathbf{J}$ na hlavní diagonále, tj. $\text{diag}(J_{11}, \dots, J_{nn})$
$\text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n)$	blokově diagonální matice se čtvercovými maticemi $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n$ na hlavní diagonále
$\mathbf{J}^\nabla$	$= [J_{11}, J_{12}, \dots, J_{1n}, J_{22}, \dots, J_{2n}, J_{33}, \dots, J_{nn}]^T$ , vektor prvků horního trojúhelníku symetrické $n$ -rozměrné matice $\mathbf{J}$
$\mathbf{y}^\square$	pro $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ , kde $k = n(n-1)/2, n \in \mathbf{N}$ , $\mathbf{y}^\square$ značí $n$ -rozměrnou symetrickou matici, takovou, že $(\mathbf{y}^\square)^\nabla = \mathbf{y}$ . Například pro $\mathbf{y} = [1, 2, 3]^T$ je $\mathbf{y}^\square = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$r(\mathbf{J})$	hodnost matice $\mathbf{J}$
$\text{Tr}(\mathbf{J})$	stopa matice $\mathbf{J}$
$ \mathbf{J} $	determinant čtvercové matice $\mathbf{J}$
$\ \mathbf{x}\ $	euklidovská norma vektoru $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{J}\ $	norma matice $\mathbf{J}$ kompatibilní s euklidovskou vektorovou normou, tj. norma, pro kterou platí $\ \mathbf{J}\mathbf{x}\  \leq \ \mathbf{J}\ \ \mathbf{x}\ $
$\ \mathbf{J}\ _2$	$\sqrt{\sum_{i,j=1}^q J_{ij}^2}$ , tj. euklidovská norma $q$ -rozměrné matice $\mathbf{J}$
$\mathbf{J} > 0$ , resp $\mathbf{J} \geq 0$	matice $\mathbf{J}$ je pozitivně definitní, resp. pozitivně semidefinitní
$\lambda_{\min}(\mathbf{J})$	nejmenší vlastní číslo symetrické matice $\mathbf{J}$
$\lambda_{\max}(\mathbf{J})$	největší vlastní číslo symetrické matice $\mathbf{J}$
$\otimes$	symbol Knockerova součinu

Pro trojdimenzionální pole  $\mathbb{K}_{\dots}$  s prvky  $[\mathbb{K}_{ijk}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,  $k = 1, \dots, r$  typu  $p \times q \times r$ , matici  $\mathbf{A}$  typu  $p \times q$ , matici  $\mathbf{B}$  typu  $q \times r$  a vektory  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$  definujeme

$$\text{skalár } \mathbb{K}_{\dots} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c} := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \mathbb{K}_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$\text{vektor } \mathbb{K}_{\dots} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c} := \left[ \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \mathbb{K}_{ijk} a_j b_k \right]_{i=1, \dots, p}$$

$$\text{matice } \mathbb{K}_{\dots} \circ \mathbf{c} := \left[ \sum_{k=1}^r \mathbb{K}_{ijk} c_k \right]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}}$$

$$\text{skalár } \mathbb{K}_{\dots} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{c} := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \mathbb{K}_{ijk} \mathbf{A}_{ij} c_k$$

$$\text{skalár } \mathbb{K}_{\dots} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{B} := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \mathbb{K}_{ijk} a_i \mathbf{B}_{jk}$$

V textu jsou užita následující pravidla maticového počtu, které lze nalézt např. v [31], str. 457 - 460,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \\ |\mathbf{A} + \mathbf{BD}| &= |\mathbf{A}| |\mathbf{I}_p + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{BD}|, \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{A}$  je regulární matice typu  $p \times p$ ,  $\mathbf{B}$  je matice typu  $p \times q$ ,  $\mathbf{C}$  je regulární matice typu  $q \times q$  a  $\mathbf{D}$  je matice typu  $q \times p$  a

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice typu  $p_1 \times p_2$ ,  $\mathbf{B}$  je matice typu  $q_1 \times q_2$ ,  $\mathbf{C}$  je matice typu  $p_2 \times r$  a  $\mathbf{D}$  je matice typu  $q_2 \times s$ .

## Náhodné vektory

$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$	$m$ -rozměrný vektorový parametr
$\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$	náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}$
$\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_q]^T$	pozorování náhodného vektoru $\mathbf{Y}$
$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ , resp. $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$	hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y}$ vzhledem k $\sigma$ -konečné míře $\mu$ . Míra $\mu$ je Lebesguovou mírou, je-li $\mathbf{Y}$ absolutně spojitý, a čítačí mírou, je-li $\mathbf{Y}$ diskrétní na $(\Omega, \mathcal{A}, P_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}$ , resp. $(\Omega, \mathcal{A}, P_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}$
$\mathbf{Y} \stackrel{\text{as}}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	náhodný vektor $\mathbf{Y}$ má asymptoticky $p$ -rozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ . Symbol $\stackrel{\text{as}}{\sim}$ je užíván i pro jiná rozdělení.
$Y \sim \sum_{i=1}^q l_i \chi^2(r_i, \delta_i)$	náhodná veličina $Y$ má rozdělení lineární kombinace $q$ nezávislých necentrálních $\chi^2$ rozdělení se stupni volnosti $r_i$ a parametry necentrality $\delta_i$ , přičemž koeficienty lineární kombinace jsou $l_i, i = 1, \dots, q$
$\chi_{1-\alpha}^2(r)$	$(1 - \alpha)\%$ kvantil $\chi^2$ rozdělení s $r$ stupni volnosti
$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$	průměr vektorů $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ . Značení je užíváno i pro náhodné vektory.
$\int g(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y})$	Lebesgueův integrál měřitelné funkce $g(\mathbf{y})$ vzhledem k $\sigma$ -konečné míře $\mu$
$\int \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y})$	matice, resp. vektor, Lebesgueových integrálů jednotlivých složek maticové, resp. vektorové měřitelné funkce $\mathbf{g}$

## Funkce a jejich derivace

$\boldsymbol{\mu}(\Theta)$	$\{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\} \subset \mathbf{R}^q$ , tj. obraz parametrického prostoru $\Theta$ při funkci $\boldsymbol{\mu} : \Theta \rightarrow \mathbf{R}^q$
$\Gamma(x)$	gama funkce, tj. $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$
$\psi(x)$	digama funkce, tj. $d \ln \Gamma(x) / dx$
$\psi_2(x)$	trigama funkce, tj. $d^2 \ln \Gamma(x) / dx^2$
$\psi_3(x)$	tetragama funkce, tj. $d^3 \ln \Gamma(x) / dx^3$
$\delta(x - a)$	Diracova $\delta$ funkce v bodě $a \in \mathbf{R}$ , tj. distribuce, pro kterou $\int_{-\infty}^\infty \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$ pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou komplexní funkci v $\mathbf{R}$ s omezeným nosičem, viz. [41] str.77
$\delta'(x)$	derivace Diracovy $\delta$ funkce, tj. distribuce, pro kterou $\int_{-\infty}^\infty \delta'(x - a) f(x) dx = -[df(x)/dx]_{x=a}$ , viz. [41] str. 81
$h(\mathbf{x})$	$[h(x_1), \dots, h(x_n)]^T$ , kde $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ . Zápís užíváme pro funkce exp, ln, $\psi_2, 1/\cdot$ , apod.

$\mathbf{M}'_{\theta} = \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta} \right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,r}}$	derivate maticové funkce $\mathbf{M}(\theta)$ typu $n \times r$ podle skáláru $\theta$
$f'_i = f'_{\theta_i}$	parciální derivate funkce $f$ podle $i$ -té složky vektoru $\theta$
$f'_{\theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = (f'_1, \dots, f'_m)^T$	derivate skalární funkce $f = f(\theta)$ podle vektoru $\theta$
$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$	derivate vektorové funkce $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\theta) = [f_1, \dots, f_n]^T$ podle vektoru $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$
$f''_{ij} = f''_{\theta_i \theta_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$	druhá parciální derivate funkce $f$ postupně podle $i$ -té a $j$ -té složky vektorového parametru $\theta$
$f''_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]^T$	matice druhých derivací funkce $f$ podle vektoru $\theta$
$\frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \theta \partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta} \right]$	matice třetích parciálních derivací funkce $f$ podle vektoru $\theta$ a jeho složky $\theta_i$
$\frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \theta \partial \theta}$	trojdimenzionální pole třetích parciálních derivací funkce $f$ podle vektoru $\theta$

V textu jsou v souladu s [31, 11] použita následující pravidla pro derivate skalárních a vektorových funkcí podle vektoru  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial cf}{\partial \theta} = c \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

kde  $c$  je konstanta nezávislá na  $\theta$ ,

$$\frac{\partial(\mathbf{N}\theta)^T}{\partial \theta} = \mathbf{N}^T, \quad \frac{\partial(\theta^T \mathbf{M} \theta)^T}{\partial \theta} = (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\theta,$$

kde  $\mathbf{M}$  (resp.  $\mathbf{N}$ ) je konstantní matice typu  $m \times m$  (resp.  $n \times m$ ) nezávislá na  $\theta$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{B}}{\partial M_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji})\mathbf{B} & \text{pro } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \\ \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B} & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $i, j = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{A}$  (resp.  $\mathbf{B}$ ) je konstantní matice typu  $p \times m$  (resp.  $m \times q$ ) nezávislá na  $\mathbf{M}$ ,

$$\frac{\partial \ln |\mathbf{M}|}{\partial \mathbf{M}} = \begin{cases} 2(\mathbf{M}^{-1})^T - \text{diag}(\mathbf{M}^{-1}) & \text{pro } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \\ (\mathbf{M}^{-1})^T & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial M_{ij}} = \begin{cases} -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji})\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_{ij}\delta_{ij}\mathbf{M}^{-1} & \text{pro } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{M}^{-1} & \text{jinak.} \end{cases}$$

kde  $i, j = 1, \dots, m$ ,  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  jinak,  $\mathbf{M}$  je regulární matice typu  $m \times m$ ,

$$\frac{\partial(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})^T}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{g}},$$

kde  $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_q]^T$ , resp.  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_p]^T$ , je vektorová funkce  $\boldsymbol{\theta}$ , resp  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ .

### **Poznámky**

V textu je užíváno značení  $o_p$  a  $O_p$  dle dodatku A. Vyskytuje-li se v zápise aproximace náhodné veličiny, vektoru, matice, resp. pole symbol  $o(b_n)$ , jak je tomu např. na str. 107, jsou všechny náhodné veličiny, vektory, matice, pole chápány jako jejich pevné realizace.

Dále v textu nebudeme zavedené označení znovu připomínat, i když bude důsledně využíváno.



# Úvod

Dizertační práce je věnována mnohorozměrným zobecněným lineárním modelům (MGLM), třídě statistických modelů, která vznikla přirozeným rozšířením třídy klasických lineárních modelů, a nachází proto mnohá uplatnění např. v biologii, ekonomii, medicíně apod. Poznamenejme, že do této třídy modelů mimo jiné patří log-lineární model, model probitové, resp. logitové analýzy, modely s kategoriálními proměnnými ale též klasický lineární model. Nicméně techniky zobecněného lineárního modelu jsou v současnosti užívány i v jiných oblastech, například pro odhad takzvaných ROC křivek [37].

Ve srovnání s klasickým lineárním modelem je v MGLM předpokládána širší třída rozdělání vysvětlovaných vektorů, tzv. třída rozdělání exponenciálního typu. Navíc je v MGLM požadováno, aby rozdělání vysvětlovaných vektorů bylo regulární. Z mnohorozměrných regulárních rozdělání, která patří do třídy rozdělání exponenciálního typu, je v literatuře vedle mnohorozměrného normálního rozdělání zmiňováno nejčastěji pouze rozdělání multinomické, viz. například [10]. Prvním záměrem dizertační práce proto bylo nalézt další příklady mnohorozměrných regulárních rozdělání exponenciálního typu. K tomu bylo třeba odvodit předpoklady zajišťující regularitu rozdělání exponenciálního typu. Hustotám exponenciálního typu je věnována kapitola 2.

Statistická analýza mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů je založena na maximálně věrohodných odhadech, a proto jsou v kapitole 1 uvedeny základní pojmy z teorie maximální věrohodnosti. Vlastnostem odhadů parametrů MGLM získaných metodou maximální věrohodnosti je věnován velmi rozsáhlý článek [9]. V kapitole 3, kde je MGLM definován, je proto pozornost mimo jiné věnována vybraným tvrzením z tohoto článku. Pro snažší čitelnost byly důkazy těchto tvrzení detailněji rozpracovány. Dále jsou v kapitole 3 odvozeny asymptotické oblasti spolehlivosti pro vektor kontrastů parametrů modelu a jsou uvedeny testové statistiky Deviance  $\Delta D$ , skórová  $S$  a Waldova statistika  $W$ , na kterých lze založit test lineární hypotézy o parametrech MGLM.

V předkládané dizertační práci je ovšem hlavní pozornost věnována silám testů lineárních hypotéz o parametrech MGLM založených na  $\Delta D$ ,  $S$  a  $W$ . Protože nejsou k dispozici explicitní vyjádření sil výše zmíněných testů, jak je tomu například u klasického jednoduchého třídění, viz. [42], je třeba obrátit pozornost na jejich asymptotickou aproximaci. Poznamenejme, že znalost aproximace síly testů lze s výhodou užít při návrhu designu experimentu.

Kapitola 4 je věnována aproximacím sil testů v MGLM, které jsou zobecněním výsledků z článku [5]. Aproximace užitá v kapitole 4 a článku [5] vychází z aproximací sil testů v obecné teorii maximální věrohodnosti v člancích [15, 36, 14]. V některých člancích jsou ovšem uvedeny pouze náznaky výpočtu aproximací, a proto je dodatek C věnován jejich detailnímu odvození. Vedle toho je možné v MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění odvodit i jinou aproximaci sil testů založených na  $\Delta D$  a  $S$ , která je zobecněním publikovaných výsledků autora dizertace [17, 18, 19] a je uvedena v kapitole 5. Pro stanovení aproximací v kapitole 5 bylo třeba znát rozdělení kvadratických forem náhodných vektorů s normálním rozdělením, kterému je věnován dodatek B. Na závěr jsou v kapitole 6 oba možné přístupy k aproximaci sil testů v MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění porovnány a to především pomocí simulačních studií založených na programech sepsaných v Matlabu, které lze nalézt na přiloženém CD.



# Kapitola 1

## Metoda maximální věrohodnosti

Tato kapitola je věnována základním pojmům a vybraným tvrzením z teorie maximální věrohodnosti, neboť odhady parametrů a testy o parametrech mnohorozměrného zobecněného lineárního modelu vychází právě z tohoto přístupu.

Ve srovnání s dalším možným přístupem, metodou momentů, je metoda maximální věrohodnosti často numericky náročnější. Většinou je totiž založena na řešení nelineárního systému rovnic. Nicméně za určitých předpokladů poskytuje metoda maximální věrohodnosti odhady s výhodnějšími asymptotickými vlastnostmi [1, 26, 28, 38]. Asymptotickým vlastnostem maximálně věrohodných odhadů v mnohorozměrném zobecněném lineárním modelu je věnována pozornost v kapitole 3.

Při hledání maximálně věrohodných odhadů je důležitá otázka jejich existence a jednoznačnosti. V této kapitole uvádíme pouze tvrzení použité v teorii mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů, nicméně další zajímavé výsledky lze nalézt např. v [29, 12, 44].

### 1.1 Systém regulárních hustot

**Definice 1.1** Necht' parametrický prostor  $\Theta \subset \mathbf{R}^m$  je otevřená borelovská množina. Řekneme, že systém hustot  $\mathcal{F} = \{f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^q\}$  vzhledem k  $\sigma$ -konečné míře  $\mu$  je regulární, jestliže platí:

1. Množina  $M = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbf{R}^q, f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) > 0\}$  nezávisí na  $\boldsymbol{\theta}$ .
2. Existuje vektor konečných parciálních derivací  $\frac{\partial f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\mathbf{y} \in M$ .
3.  $\int_M \frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ .
4. Prvky matice  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \int_M \frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left( \frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y})$  jsou konečné a matice  $\mathbf{J}$  je pozitivně definitní.

Matici  $\mathbf{J}$  nazýváme Fisherovou informační maticí a hustotu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  z regulárního systému hustot  $\mathcal{F}$  nazýváme regulární hustota.

**Definice 1.2** Nechť  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$  je náhodný vektor s regulární hustotou  $f$ . Pak  $m$ -rozměrný náhodný vektor  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$  nazýváme skórový vektor příslušný hustotě  $f$ .

**Definice 1.3** Nechť  $f$  je regulární hustota a existuje matice druhých parciálních derivací hustoty  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\mathbf{y} \in M$ . Pak empirickou Fisherovou informační maticí příslušnou hustotě  $f$  rozumíme náhodnou matici  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}$  typu  $m \times m$ .

**Věta 1.4** Nechť  $f$  je regulární hustota a existuje matice druhých parciálních derivací hustoty  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\mathbf{y} \in M$ . Pak platí

$$\int_M \frac{\partial^2 f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} d\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

právě tehdy, když  $\mathbf{J} = \mathbf{E}(\mathcal{J})$ .

**Důkaz.** Podmínku (1.1) lze zapsat ve tvaru  $\mathbf{E}\left(\frac{f''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}\right) = \mathbf{0}$ . Z úprav

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) &= \mathbf{E}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}\right)\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{f''_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}) - f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}))^2}\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{f''_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})}\right) - J_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

tedy plyne tvrzení věty.

**Věta 1.5** Nechť  $f$  je regulární hustota. Pak skórový vektor  $\mathbf{U}$  příslušný hustotě  $f$  má střední hodnotu  $\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$  a varianční matici  $\text{var}(\mathbf{U}) = \mathbf{J}$ .

**Důkaz.** Tvrzení o střední hodnotě skórového vektoru plyne z třetí podmínky v definici 1.1 regulárního systému hustot  $\mathcal{F}$ . Fisherova informační matice  $\mathbf{J}$  je proto z definice rovna varianční matici skórového vektoru  $\mathbf{U}$ .

**Lemma 1.6** Nechť  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  jsou nezávislé náhodné vektory s regulárními hustotami  $f_1(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_n(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\theta})$ . Pak pro skórový vektor příslušný sdružené hustotě vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  platí

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

kde  $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{U}_n(\boldsymbol{\theta})$  jsou nezávislé skórové vektory příslušné pořadě hustotám  $f_1(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_n(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\theta})$ .

**Důkaz.** Dokazované tvrzení plyne z definice skórového vektoru a z nezávislosti vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ .

## 1.2 Maximálně věrohodný odhad

**Definice 1.7** Necht'  $\mathbf{y}_0$  je pozorování náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  s hustotou  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . Existuje-li vektor  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}_0)$ , který je bodem globálního maxima funkce  $f(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\theta})$  na  $\Theta$ , pak  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Y})$  nazýváme maximálně věrohodným odhadem (MLE) parametru  $\boldsymbol{\theta}$ .

**Definice 1.8** Necht'  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  jsou nezávislé náhodné vektory s regulárními hustotami  $f_1(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_n(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\theta})$ . Pak funkci

$$l(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \ln \prod_{i=1}^n f_i(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\theta}),$$

kde  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_n^T]^T$ , nazýváme logaritmicke věrohodnostní funkci a systémem věrohodnostních rovnic rozumíme systém

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}.$$

**Poznámka 1.9** V dalším budeme systém věrohodnostních rovnic zapisovat i ve tvaru  $\partial l(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) / \partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ .

**Poznámka 1.10** Z definice 1.2 plyne, že systém věrohodnostních rovnic lze psát ve tvaru  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ , kde  $\mathcal{U}$  je skórový vektor příslušný sdružené hustotě náhodných vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ .

**Lemma 1.11** Necht' náhodný vektor  $\mathbf{Y}_i$  má regulární hustotu  $f_i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  s pozitivně definitní empirickou Fisherovou informační maticí  $\mathcal{J}_i(\boldsymbol{\theta})$  a konvexním parametrickým prostorem  $\Theta$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dále necht' jsou náhodné vektory  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  nezávislé. Existuje-li řešení systému věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ , pak je jediné a je maximálně věrohodným odhadem  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  parametru  $\boldsymbol{\theta}$ .

**Důkaz.** Za předpokladů tvrzení je logaritmicke věrohodnostní funkce striktně konkávní na konvexní množině, a proto, má-li lokální maximum, tj. existuje-li řešení systému věrohodnostních rovnic, je toto řešení i jedním globálním maximem (viz str. 223 v [30]).

**Definice 1.12** Necht'  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  jsou nezávislé náhodné vektory s regulárními hustotami  $f_1(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_n(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  s Fisherovými informačními maticemi  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n$ . Označme  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(0)}$  počáteční odhad parametru  $\boldsymbol{\theta}$ . Pak posloupnost odhadů

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(k+1)} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(k)} + \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(k)}) \right]^{-1} \mathcal{U}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

parametru  $\boldsymbol{\theta}$  nazýváme posloupnost odhadů získaných modifikovanou Newton-Raphsonovou iterační metodou (MNR posloupnost).



# Kapitola 2

## Hustoty jednoduchého exponenciálního typu

Teorie mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů vychází z toho, že mnoho výhodných vlastností normálního rozdělení sdílí i širší třída rozdělení nazývaná třída rozdělení jednoduchého exponenciálního typu. Vlastnostem této třídy zahrnující jak diskrétní, tak spojitá rozdělení je v literatuře věnována značná pozornost. Zmíňme např. monografie [38, 26, 25, 46, 21, 23].

Vybraná tvrzení o rozdělení jednoduchého exponenciálního typu uvedená v této kapitole jsou na jejím závěru doplněna konkrétními příklady rozdělení tohoto typu. Pozornost je především věnována regularitě hustot jednoduchého exponenciálního typu a maximálně věrohodným odhadům parametrů hustot z této třídy. Poznamenejme, že odhady metodou maximální věrohodnosti v třídě regulárních hustot exponenciálního typu odpovídají odhadům získaným metodou momentů, viz. [46]. V příkladech jsou zahrnuta standardně uváděná rozdělení jako je multinomické, Poissonovo, binomické, gama či negativně binomické rozdělení. Vedle toho jsou též studovány vlastnosti Wishartova rozdělení, které je uvedeno jako člen třídy rozdělení exponenciálního typu v monografii [23], a transformace Dirichletova rozdělení, o němž lze nalézt poznámky v monografiích [23, 11].

### 2.1 Definice a vlastnosti

**Definice 2.1** Řekneme, že náhodný vektor  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$  má hustotu jednoduchého exponenciálního typu, pokud existují borelovské funkce  $b(\boldsymbol{\theta}) : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$  a  $c(\mathbf{y}, \phi, \omega) : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  takové, že hustotu náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  lze pro každé  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbf{R}^q, \phi \in \mathbf{R}^+, \omega \in \mathbf{R}^+$  zapsat ve tvaru

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi, \omega) = \exp \left\{ \frac{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\theta} - b(\boldsymbol{\theta})}{\phi} \omega + c(\mathbf{y}, \phi, \omega) \right\}.$$

Parametr  $\boldsymbol{\theta}$  pak nazýváme přirozeným parametrem,  $\phi$  rušivým parametrem nebo parametrem disperze a  $\omega$  váhou.

**Věta 2.2** Necht' náhodný vektor  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$  má hustotu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  jednoduchého exponenciálního typu s konečnými parametry  $\phi$  a  $\omega$ ,  $\Theta \subset \mathbf{R}^q$  je otevřená borelovská množina, existují konečné první a druhé parciální derivace funkce  $b(\boldsymbol{\theta})$  podle složek parametru  $\boldsymbol{\theta}$  a matice  $b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$  je pozitivně definitní na  $\Theta$ . Pak hustota  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  je regulární a pro příslušnou empirickou Fisherovu informační matici platí  $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\omega}{\phi} b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ .

**Důkaz.** Předpoklady věty zaručují platnost podmínek 1. a 2. z definice 1.1. Protože lze podle věty 9., str. 59, v [25] zaměnit pořadí integrace a derivace, lze psát

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y}) &= \int_M \frac{f'_i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})} f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y}) = \\ &= \int_M f'_i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int_M f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} 1 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

tj. platí podmínka 3. v definici 1.1. Ze zaměnitelnosti pořadí druhých derivací s integrací navíc podle věty 1.4 plyne  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}))$ . Empirická Fisherova informační matice příslušná hustotě  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  přitom není náhodná

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\omega}{\phi},$$

tedy  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$  a podle předpokladů je splněna i podmínka 4. definice 1.1.

**Definice 2.3** Hustotu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  splňující předpoklady věty 2.2 budeme nazývat regulární hustota exponenciálního typu.

**Věta 2.4** Necht'  $\mathbf{Y}$  je  $q$ -rozměrný náhodný vektor s regulární hustotou exponenciálního typu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ , pak platí

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = b'_\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.1)$$

$$\text{var}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \phi b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) / \omega. \quad (2.2)$$

Navíc je  $q$ -rozměrná funkce  $\boldsymbol{\mu}$  na  $\Theta$  s oborem hodnot  $\boldsymbol{\mu}(\Theta) = \{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{R}^q : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$  prostá.

**Důkaz.** Skórový vektor příslušný hustotě náhodného vektoru  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  je tvaru

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{Y} - b'_\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta})}{\phi} \omega. \quad (2.3)$$

Podle věty 1.5 je střední hodnota skórového vektoru, v tomto případě

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{Y}) - b'_\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta})}{\phi} \omega,$$

rovna  $\mathbf{0}$ . Odtud plyne tvrzení o střední hodnotě  $E(\mathbf{Y})$ .

Podle věty 1.5 je varianční matice skórového vektoru rovna Fisherově informační matici  $\mathbf{J}$ , která je dle věty 2.2 rovna  $b''_{\theta\theta}(\theta)\frac{\omega}{\phi}$ . Varianční matici skórového vektoru lze ale také vypočíst přímo ze vztahu (2.3) ve tvaru

$$\text{var}(\mathbf{U}) = \frac{\omega^2}{\phi^2} \text{var}(\mathbf{Y}).$$

Porovnáním obou vyjádření varianční matice skórového vektoru

$$\frac{\omega^2}{\phi^2} \text{var}(\mathbf{Y}) = \frac{b''_{\theta\theta}(\theta)}{\phi} \omega$$

a jednoduchou úpravou získáme vztah (2.2).

Tvrzení, že funkce  $b'_\theta(\theta)$  je prostá na  $\Theta$  dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  takové, že  $\theta_1 \neq \theta_2$  a přitom  $b'_\theta(\theta_1) = b'_\theta(\theta_2)$ . Vyjádřeme hodnotu skórového vektoru v bodě  $\theta_1$  pomocí Taylorova polynomu v bodě  $\theta_2$

$$\mathbf{U}(\theta_1) = \mathbf{U}(\theta_2) + \mathbf{U}'_\theta(\theta^*)(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.4)$$

kde  $\theta^* = \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Protože z předpokladů věty plyne, že je skórový vektor příslušný hustotě  $f(\mathbf{y}; \theta)$  tvaru (2.3), platí  $\mathbf{U}(\theta_1) = \mathbf{U}(\theta_2)$ . Z Taylorova polynomu (2.4) tedy podle věty 2.2 dostáváme

$$\mathbf{J}(\theta^*)(\theta_1 - \theta_2) = \mathbf{0}.$$

Což je při  $\theta_1 \neq \theta_2$  v rozporu s regularitou Fisherovy informační matice  $\mathbf{J}(\theta^*)$ .

**Věta 2.5** Nechť  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  je náhodný výběr z rozdělení s regulární hustotou exponenciálního typu  $f(\mathbf{y}; \theta)$ . Pak je skórový vektor  $\mathcal{U}$  příslušný sdružené hustotě náhodného výběru  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  tvaru

$$\mathcal{U}(\theta) = \frac{\omega}{\phi} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - b'_\theta(\theta)).$$

Dále pokud existuje řešení  $\hat{\theta}$  věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\theta) = \mathbf{0}$ , je tvaru  $\boldsymbol{\mu}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}})$ . Takové řešení je též maximálně věrohodným odhadem parametru  $\theta$ .

**Důkaz.** Ze vztahu (2.3) v důkazu věty 2.4 a z lemmatu 1.6 odvodíme uvedený tvar skórového vektoru. Z věty 1.5 vyplývá, že varianční matice skórového vektoru  $\mathcal{U}$  je rovna  $n$ -násobku matice  $\mathbf{J}(\theta)$ , jejíž tvar pro regulární hustotu exponenciálního typu byl určen ve větě 2.2. Systém věrohodnostních rovnic je pak podle poznámky 1.10 tvaru

$$\bar{\mathbf{y}} - b'_\theta(\theta) = \mathbf{0}.$$

Pokud  $\bar{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{\mu}(\Theta)$ , je řešení systému věrohodnostních rovnic tvaru  $\boldsymbol{\mu}^{-1}(\bar{\mathbf{y}})$ , protože funkce  $b'_\theta(\theta) = \boldsymbol{\mu}(\theta)$  je podle věty 2.4 prostá.

Navíc je parametrický prostor  $\Theta$  podle lemmatu 7, str. 57 v [25] konvexní, a proto je řešení  $\hat{\theta}$  dle lemmatu 1.11 maximálně věrohodným odhadem parametru  $\theta$ .

## 2.2 Příklady rozdělení exponenciálního typu

V následujícím odstavci je pozornost věnována konkrétním rozdělením exponenciálního typu. Vedle v literatuře často zmiňovaných rozdělení – normální, multinomické, Poissonovo, binomické, negativně binomické a gama – jsou studována i rozdělení méně častá – Wishartovo a transformované Dirichletovo rozdělení. Poznámky o Wishartovu rozdělení, které je zobecněním  $\chi^2$  rozdělení, lze nalézt v [23, 2, 31, 22]. Dirichletovu rozdělení, které je mnohorozměrnou alternativou beta rozdělení, jsou věnovány kapitoly v monografiích [23, 11]. Maximálně věrohodnými odhady parametrů Dirichletova rozdělení se zabývají články [35, 34].

V jednotlivých příkladech jsou ověřeny předpoklady věty 2.2 zajišťující regularitu hustot a jsou odvozeny maximálně věrohodné odhady přirozeného parametru  $\theta$  podle věty 2.5.

**Příklad 2.6 (Normální rozdělení)** Předpokládejme, že náhodný vektor  $\mathbf{Y} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\boldsymbol{\Sigma} > 0$  je známá  $q$ -rozměrná matice. Hustotu náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  lze psát ve tvaru

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \exp \left\{ \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} [\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} + \ln |2\pi \boldsymbol{\Sigma}|] \right\}.$$

Po reparametrizaci  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$  dostáváme tvar hustoty

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) = \exp \left\{ \mathbf{y}^T \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} [\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} + \ln |2\pi \boldsymbol{\Sigma}|] \right\},$$

ze kterého je zřejmé, že  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$  je hustota exponenciálního typu s  $\omega = \phi = 1$ ,  $b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta}$ . Protože  $b'(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}$ ,  $b''(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma}$ ,  $b'''_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ ,  $i, j, k = 1, \dots, q$  a  $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{R}^q$ , platí tvrzení věty 2.2, tj. hustota  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  je regulární a  $\mathbf{J} = \mathcal{J} = \boldsymbol{\Sigma}$ . Dále z věty 2.4 plyne  $E(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu}$  a  $\text{var}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}$ .

Mějme náhodný výběr  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  z rozdělení vektoru  $\mathbf{Y}$ . Dle věty 2.5 je skórový vektor  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$  příslušný hustotě náhodného výběru roven  $\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta})$ . Protože je matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  regulární, řešení věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$  vždy existuje. Maximálně věrohodný odhad přirozeného parametru je proto roven  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{Y}}$ .

Poznamenejme, že při  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_q$  je  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_q)$  regulární hustota exponenciálního typu bez reparametrizace, tj. s přirozeným parametrem  $\boldsymbol{\mu}$  a rušivým parametrem  $\sigma^2$ , při  $\sigma^2$  neznámém, protože ji lze psát ve tvaru

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_q) = \exp \left\{ \frac{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}}{\sigma^2} - \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{q}{2} \ln(2\pi \sigma^2) \right] \right\}.$$

**Příklad 2.7 (Multinomické rozdělení)** Nechť  $[Y_1, \dots, Y_{q+1}]^T \sim \text{Mn}_{q+1}(N, \boldsymbol{\pi})$ ,  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_{q+1}]^T$ ,  $\sum_{i=1}^{q+1} \pi_i = 1$ ,  $\pi_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, q+1$  a  $N$  je známé přirozené číslo. Pak  $q$ -rozměrný náhodný vektor  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$  má hustotu  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\pi})$  exponenciálního typu, neboť ji lze psát ve tvaru

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^q y_i \ln \frac{\pi_i}{\pi_{q+1}} + N \ln(\pi_{q+1}) - \sum_{i=1}^q \ln y_i! - \ln \left( N - \sum_{i=1}^q y_i \right)! + \ln N! \right\},$$



pro  $\sum_{i=1}^q y_i \leq N, y_i \geq 0, y_i \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, q, f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\pi}) = 0$  jinak. Po reparametrizaci  $\theta_i = \ln(\pi_i/\pi_{q+1}), i = 1, \dots, q$  je totiž hustota náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$

$$f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ \mathbf{y}^T \boldsymbol{\theta} - b(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{i=1}^q \ln y_i! - \ln \left( N - \sum_{i=1}^q y_i \right)! + \ln N! \right\}$$

s  $b(\boldsymbol{\theta}) = N \ln(1 + \sum_{i=1}^q e^{\theta_i}), \omega = \phi = 1$ .

Abychom stanovili, zda je hustota  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\theta})$  regulární, ověříme předpoklady věty 2.2. Označme  $\boldsymbol{\pi}_{(k)} = [\boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_k]^T, 1 \leq k \leq q$ . Pro vektor  $\boldsymbol{\pi}_{(q)}$  platí

$$\boldsymbol{\pi}_{(q)} = \boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp(\boldsymbol{\theta})}{1 + \exp(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{1}_q}, \quad (2.5)$$

Parametrický prostor  $\Theta = \mathbf{R}^q$  je otevřená borelovská množina, derivace funkce  $b$  jsou tvaru

$$\begin{aligned} b'_i(\boldsymbol{\theta}) &= N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} = N \pi_i \\ b''_{ij}(\boldsymbol{\theta}) &= -N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \frac{\exp(\theta_j)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} = -N \pi_i \pi_j, \quad \text{pro } i \neq j \\ b''_{ii}(\boldsymbol{\theta}) &= N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \left( 1 - \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \right) = N \pi_i (1 - \pi_i), \\ b'''_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) &= 2N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \frac{\exp(\theta_j)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \frac{\exp(\theta_k)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} = \\ &= 2N \pi_i \pi_j \pi_k, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k \\ b'''_{iij}(\boldsymbol{\theta}) &= b'''_{iji}(\boldsymbol{\theta}) = b'''_{jii}(\boldsymbol{\theta}) = \\ &= N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \frac{\exp(\theta_j)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \left( 2 \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} - 1 \right) = \\ &= N \pi_i \pi_j (2\pi_i - 1), \quad i \neq j \\ b'''_{iii}(\boldsymbol{\theta}) &= N \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \left( 1 - 3 \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} + 2 \left( \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \sum_{l=1}^q \exp \theta_l} \right)^2 \right) = \\ &= N \pi_i (1 - 3\pi_i + 2\pi_i^2) \end{aligned}$$

$i, j, k = 1, \dots, q$ . Matice  $b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = N(\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta})) - \boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta})^T)$  je pozitivně definitní, neboť pro její  $k$ -tý hlavní minor dostáváme

$$\begin{aligned} |N(\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(k)}) - \boldsymbol{\pi}_{(k)}\boldsymbol{\pi}_{(k)}^T)| &= N^k |\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(k)})| \left( 1 - \boldsymbol{\pi}_{(k)}^T [\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(k)})]^{-1} \boldsymbol{\pi}_{(k)} \right) = \\ &= N^k \prod_{i=1}^k \pi_i \left( 1 - \sum_{i=1}^k \pi_i \right) > 0. \end{aligned}$$

Celkem je hustota  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\pi})$  regulární a platí

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = N(\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta})) - \boldsymbol{\pi}_{(q)}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_{(q)}^T(\boldsymbol{\theta})).$$

Z věty 2.4 navíc plyne  $E(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu} = N\boldsymbol{\pi}_{(q)}$  a  $\text{var}(\mathbf{Y}) = N(\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(q)}) - \boldsymbol{\pi}_{(q)}\boldsymbol{\pi}_{(q)}^T)$ .

Mějme náhodný výběr  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  z rozdělení vektoru  $\mathbf{Y}$ . Dle věty 2.5 pro skórový vektor  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$  příslušný hustotě náhodného výběru při užití značení (2.5) lze psát

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{Y}_i - \frac{N \exp(\boldsymbol{\theta})}{1 + \mathbf{1}_q^T \exp(\boldsymbol{\theta})} \right).$$

Dále pokud existuje řešení věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$  je i maximálně věrohodným odhadem přirozeného parametru, který pak můžeme vyjádřit ve tvaru  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \ln \bar{\mathbf{Y}} - \ln(N - \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q$ .

**Příklad 2.8 (Transformované Dirichletovo rozdělení)** Předpokládejme, že náhodný vektor  $[X_1, \dots, X_{q+1}]^T$  má Dirichletovo rozdělení  $D_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1})$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, q+1$ . Označme  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_q]^T$ ,  $\alpha_T = \sum_{i=1}^{q+1} \alpha_i$  a předpokládejme, že  $\alpha_T$  je známý pevný parametr. Hustota náhodného vektoru  $[X_1, \dots, X_q]^T$  je rovna

$$\frac{\Gamma(\alpha_T)}{\prod_{i=1}^{q+1} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^q x_i^{\alpha_i-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^q x_i \right)^{\alpha_{q+1}-1} \quad \text{pro } x_i > 0, i = 1, \dots, q, \sum_{i=1}^q x_i < 1.$$

Ze zápisu hustoty náhodného vektoru  $[X_1, \dots, X_q]^T$  ve tvaru

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_i \ln \left( \frac{x_i}{1 - \sum_{j=1}^q x_j} \right) - \ln \left( \Gamma(\alpha_T - \sum_{i=1}^q \alpha_i) \prod_{i=1}^q \Gamma(\alpha_i) \right) + \ln \frac{\Gamma(\alpha_T)(1 - \sum_{i=1}^q x_i)^{\alpha_T-1}}{\prod_{i=1}^q x_i} \right\}$$

je zřejmé, že  $q$ -rozměrný náhodný vektor  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_q]^T$  se složkami  $Y_j = \ln X_j - \ln(1 - \sum_{i=1}^q X_i)$ ,  $j = 1, \dots, q$  má hustotu jednoduchého exponenciálního typu s přirozeným parametrem  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\phi = \omega = 1$  a  $b(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^q \ln \Gamma(\alpha_i) + \ln \Gamma(\alpha_T - \sum_{i=1}^q \alpha_i)$ . Rozdělení náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  budeme nazývat transformované Dirichletovo a budeme jej značit TD( $\boldsymbol{\alpha}, \alpha_T$ ). Jakobián uvedené transformace je  $\prod_{i=1}^q x_i(1 - \sum_{i=1}^q x_i)$ . Náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  má proto hustotu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}, \alpha_T)$  tvaru

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_i y_i - b(\boldsymbol{\alpha}) + \ln \Gamma(\alpha_T)(1 + \sum_{i=1}^q e^{y_i})^{-\alpha_T} \right\}.$$

Abychom určili, zda je hustota  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}, \alpha_T)$  regulární, ověříme předpoklady věty 2.2. Parametrický prostor  $\Theta = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^q : \alpha_i > 0, i = 1, \dots, q, \sum_{i=1}^q \alpha_i < \alpha_T\}$  je otevřená borelovská množina, derivace funkce  $b$  jsou tvaru

$$\begin{aligned} b'_i(\boldsymbol{\alpha}) &= \psi(\alpha_i) - \psi(\alpha_T - \sum_{l=1}^q \alpha_l) \\ b''_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) &= \psi_2(\alpha_T - \sum_{l=1}^q \alpha_l), \quad \text{pro } i \neq j \\ b''_{ii}(\boldsymbol{\alpha}) &= \psi_2(\alpha_i) + \psi_2(\alpha_T - \sum_{l=1}^q \alpha_l), \\ b'''_{ijk}(\boldsymbol{\alpha}) &= b'''_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = b'''_{ji}(\boldsymbol{\alpha}) = b'''_{ii}(\boldsymbol{\alpha}) = -\psi_3(\alpha_T - \sum_{l=1}^q \alpha_l), \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k \\ b'''_{iii}(\boldsymbol{\alpha}) &= \psi_3(\alpha_i) - \psi_3(\alpha_T - \sum_{l=1}^q \alpha_l) \end{aligned}$$

$i, j, k = 1, \dots, q$ . Dále, matice

$$b''_{\alpha\alpha}(\alpha) = \text{diag}(\psi_2(\alpha)) + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q \mathbf{1}_q^T$$

je pozitivně definitní, neboť při označení  $\alpha_{(k)} = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]^T, 1 \leq k \leq q$  je hlavní  $k$ -tý minor matice  $b''_{\alpha\alpha}(\alpha)$  kladný

$$\begin{aligned} & |\text{diag}(\psi_2(\alpha_{(k)})) + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T| = \\ & = |\text{diag}(\psi_2(\alpha_{(k)}))| \left(1 + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_k^T [\text{diag}(\psi_2(\alpha_{(k)}))]^{-1} \mathbf{1}_k\right) = \\ & = \prod_{i=1}^k \psi_2(\alpha_i) \left(1 + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \sum_{i=1}^k \frac{1}{\psi_2(\alpha_i)}\right) > 0. \end{aligned}$$

Pro  $x > 0$  totiž platí  $\psi_2(x) > 0$ . Hustota  $f(\mathbf{y}; \alpha, \alpha_T)$  je tedy podle věty 2.2 regulární a  $\mathbf{J} = \mathcal{J} = \text{diag}(\psi_2(\alpha)) + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q \mathbf{1}_q^T$ .

Z věty 2.4 navíc plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Y}) &= \psi(\alpha) - \psi(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q, \\ \text{var}(\mathbf{Y}) &= \text{diag}(\psi_2(\alpha)) + \psi_2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q \mathbf{1}_q^T. \end{aligned}$$

Mějme náhodný výběr  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  z rozdělení vektoru  $\mathbf{Y}$ . Pak dle věty 2.5 pro skórový vektor příslušný sdružené hustotě náhodného výběru lze psát

$$\mathcal{U}(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \psi(\alpha) + \psi(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q) \mathbf{1}_q),$$

Pokud existuje řešení věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\alpha) = \mathbf{0}$  je i maximálně věrohodným odhadem parametru  $\alpha$ . Stanovení maximálně věrohodného odhadu  $\hat{\alpha}$  však v tomto případě vyžaduje numerické řešení věrohodnostních rovnic. Popišme nyní volbu počítačnické aproximace v iteračním procesu vybrané numerické metody pro hledání řešení systému věrohodnostních rovnic, které jsou dle poznámky 1.10 tvaru

$$\bar{\mathbf{Y}} = \psi(\alpha) - \psi(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1}_q).$$

Pokud  $[X_1, \dots, X_{q+1}]^T \sim D_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}), \alpha_i > 0, i = 1, \dots, q+1$ , pak dle kapitoly 49. v [23] existují nezávislé náhodné veličiny  $Z_1, \dots, Z_{q+1}, Z_i \sim \chi^2(2\alpha_i)$ , popřípadě, neplatí-li  $2\alpha_i \in \mathbf{N}$  je hustotou  $Z_i$  hustota odpovídajícího gama rozdělení,  $i = 1, \dots, q+1$ , a přitom

$$X_i = \frac{Z_i}{\sum_{j=1}^{q+1} Z_j}, \quad i = 1, \dots, q+1.$$

To znamená, že pro náhodné veličiny  $Y_j = \ln \frac{X_j}{1 - \sum_{i=1}^q X_i}$  lze psát  $Y_j = \ln Z_j - \ln Z_{q+1}$   $j = 1, \dots, q$ . Odtud lze střední hodnotu vektoru  $\mathbf{Y}$  dle odstavce 3.2.2 v [40] aproximovat jako

$$\mathbf{E}\mathbf{Y} \doteq \ln \frac{2\alpha}{2(\alpha_T - \alpha^T \mathbf{1})},$$

neboť  $EZ_i = 2\alpha_i$ . Za počáteční aproximaci řešení systému věrohodnostních rovnic proto volíme řešení soustavy rovnic

$$\bar{\mathbf{Y}} \doteq \ln \frac{\boldsymbol{\alpha}}{(\alpha_T - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{1})},$$

které je tvaru  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_T [\exp(\bar{\mathbf{Y}}) \mathbf{1}_q^T + \mathbf{I}_q]^{-1} \exp(\bar{\mathbf{Y}})$ .

**Příklad 2.9 (Wishartovo rozdělení)** Nechť náhodná matice  $\mathbf{X}_{r \times r}$  má Wishartovo rozdělení  $W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ ,  $N$  je známé přirozené číslo, pak  $q$ -rozměrný ( $q = r(r+1)/2$ ) náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^\nabla = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1r}, X_{22}, \dots, X_{2r}, X_{33}, \dots, X_{rr})^T$$

má hustotu  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\Sigma})$  tvaru

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}^\square) - \frac{N}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| + \frac{N-1-r}{2} \ln |\mathbf{y}^\square| - \ln C_r(N)\right\},$$

kde  $C_r(N) = 2^{Nr/2} \pi^{r(r-1)/4} \prod_{i=1}^r \Gamma(\frac{1}{2}(N+1-i))$ , pro  $\mathbf{y}^\square > 0$ ,  $N \geq r$ . Protože platí

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}^\square) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \Sigma^{ij} X_{ij} = -\sum_{i \leq j} \Sigma^{ij} X_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \Sigma^{ii} X_{ii},$$

je po reparametrizaci  $\boldsymbol{\theta} = (-\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2} \text{diag} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^\nabla$ , tj.  $\theta_{ij} = -\Sigma^{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $\theta_{ii} = -\frac{1}{2} \Sigma^{ii}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = i, \dots, r$  hustota náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  exponenciálního typu ve tvaru

$$f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\theta} - \frac{N}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})| + \frac{N-1-r}{2} \ln |\mathbf{y}^\square| - \ln C_r(N)\right\}, \quad (2.6)$$

s  $b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})|$ , přičemž  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = [-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square]^{-1}$ . Řekneme-li, že náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  má Wishartovo rozdělení, rozumíme tím, že náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  má hustotu (2.6), tj.  $\mathbf{Y}^\square \sim W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$ . Rozdělení  $\mathbf{Y}$  budeme značit  $W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$ , tedy shodně s označením rozdělení náhodné matice  $\mathbf{Y}^\square$ . Zdůrazněme, že pro přehlednost budeme i nadále složky vektorového parametru  $\boldsymbol{\theta}$  z hustoty (2.6) indexovat multiindexem  $ij$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = i, \dots, r$ .

Abychom zjistili, zda je hustota  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\theta})$  regulární, ověříme předpoklady věty 2.2. Ukažme nejprve, že parametrický prostor  $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^q : -\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square > 0\}$  je otevřená borelovská množina (vzhledem k euklidovské normě). Je třeba dokázat, že pro každé  $\boldsymbol{\theta}^* \in \Theta$  existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že pro všechna  $\boldsymbol{\theta}$ , taková, že  $\|\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\| < \varepsilon$ , platí  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . Libovolnému pevnému vektoru  $\boldsymbol{\theta}^* \in \Theta$  odpovídá symetrická pozitivně definitní matice  $\mathbf{M}^* = -\boldsymbol{\theta}^{*\square} - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^{*\square}$ , tj. nutně  $\lambda_{\min}(\mathbf{M}^*) > 0$ . Položme  $\varepsilon = \lambda_{\min}(\mathbf{M}^*)/2$ .

Pro libovolný  $q$ -rozměrný vektor  $\boldsymbol{\theta}$  z  $\varepsilon$ -okolí bodu  $\boldsymbol{\theta}^*$  existuje  $r$ -rozměrná symetrická matice  $\mathbf{M}$  tak, že  $\boldsymbol{\theta} = (-\mathbf{M} + \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{M})^\nabla$ . Dále existuje  $r$ -rozměrná

symetrická matice  $\mathbf{N}$  taková, že  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^* + \mathbf{N}$ . Proto lze vektor  $\boldsymbol{\theta}$  psát ve tvaru  $(-\mathbf{M}^* - \mathbf{N} + \frac{1}{2}\text{diag}\mathbf{M}^* + \frac{1}{2}\text{diag}\mathbf{N})^\nabla$ .

Pro normu rozdílu vektorů  $\boldsymbol{\theta}^*$  a  $\boldsymbol{\theta}$  tedy platí

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\| &= \|(\mathbf{N} - \frac{1}{2}\text{diag}\mathbf{N})^\nabla\| = \sqrt{\sum_{i<j} N_{ij}^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^r N_{ii}^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^r N_{ij}^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^r N_{ii}^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^r N_{ij}^2} = \frac{1}{2}\|\mathbf{N}\|_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Označme  $\lambda_i, i = 1, \dots, r$  vlastní čísla matice  $\mathbf{N}$ . Zřejmě  $\|\mathbf{N}\|_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{N}\mathbf{N}^\text{T})$ . Ze spektrálního rozkladu symetrické matice  $\mathbf{N}$  proto dostáváme  $\|\mathbf{N}\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$ . Dále, protože  $\varepsilon = \lambda_{\min}(\mathbf{M}^*)/2$ , plyne z (2.7)

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{M}^*) > \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2}.$$

Protože  $\sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2} \geq |\lambda_i|, i = 1, \dots, r$ , a tím také  $\sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2} \geq -\lambda_{\min}(\mathbf{N})$ , platí pro všechna  $\boldsymbol{\theta}$  z  $\varepsilon$ -okolí  $\boldsymbol{\theta}^*$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{M}^*) > -\lambda_{\min}(\mathbf{N}). \quad (2.8)$$

Navíc dle vztahu (1f.2.1), str. 87 v [38]

$$\lambda_{\min}(\mathbf{M}) = \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^r} \frac{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \mathbf{M} \boldsymbol{\gamma}}{(\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \boldsymbol{\gamma})},$$

přičemž minima je dosaženo, je-li  $\boldsymbol{\gamma}$  vlastním vektorem matice  $\mathbf{M}$  příslušným vlastnímu číslu  $\lambda_{\min}(\mathbf{M})$ . Protože zřejmě

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{M}) &= \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^r} \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \mathbf{M}^* \boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \boldsymbol{\gamma}} + \frac{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \boldsymbol{\gamma}} \right) \geq \\ &\geq \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^r} \frac{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \mathbf{M}^* \boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \boldsymbol{\gamma}} + \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^r} \frac{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma}^\text{T} \boldsymbol{\gamma}} = \lambda_{\min}(\mathbf{M}^*) + \lambda_{\min}(\mathbf{N}), \end{aligned}$$

plyne z (2.8) nerovnost  $\lambda_{\min}(\mathbf{M}) > 0$ , tj. matice  $\mathbf{M}$  příslušná vektoru  $\boldsymbol{\theta}$  z  $\varepsilon$ -okolí bodu  $\boldsymbol{\theta}^*$  je pozitivně definitní. Tím je dokázána otevřenost parametrického prostoru  $\Theta$ .

Dále, derivace funkce  $b$  jsou při užití indexování složek vektorového parametru

$\boldsymbol{\theta}$  multiindexem  $ij, i = 1, \dots, r, j = i, \dots, r$  tvaru

$$\begin{aligned}
b'_{ij}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial [(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^\nabla]^\text{T} \partial - \frac{N}{2} \ln |(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)|}{\partial \theta_{ij} \partial (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^\nabla} = \\
&= \frac{N}{2} \left\{ [2(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} - \text{diag}(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1}]^\nabla \right\}_{ij} = \\
&= N \Sigma_{ij}, \quad i \neq j \\
&= N \left\{ [2(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} - \text{diag}(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1}]^\nabla \right\}_{ii} = \\
&= N \Sigma_{ii}, \quad i = j \\
b''_{ijkl}(\boldsymbol{\theta}) &= \left\{ \frac{\partial N(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1}}{\partial \theta_{kl}} \right\}_{ij} = \\
&= \left\{ N(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} \right\}_{ij} = \\
&= \left\{ N \Sigma (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) \Sigma \right\}_{ij} = N (\Sigma_{ik} \Sigma_{lj} + \Sigma_{il} \Sigma_{kj}) \\
b'''_{ijklmo}(\boldsymbol{\theta}) &= \left\{ \frac{\partial N(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1}}{\partial \theta_{mo}} \right\}_{ij} = \\
&= \left\{ N(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} (\mathbf{E}_{mo} + \mathbf{E}_{om}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} \times \right. \\
&\quad \times (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} + \\
&\quad \left. + N(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times (\mathbf{E}_{mo} + \mathbf{E}_{om}) (-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1} \right\}_{ij} = \\
&= \left\{ N \Sigma (\mathbf{E}_{mo} + \mathbf{E}_{om}) \Sigma (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) \Sigma + \right. \\
&\quad \left. N \Sigma (\mathbf{E}_{kl} + \mathbf{E}_{lk}) \Sigma (\mathbf{E}_{mo} + \mathbf{E}_{om}) \Sigma \right\}_{ij} = \\
&= N (\Sigma_{im} \Sigma_{ok} \Sigma_{lj} + \Sigma_{io} \Sigma_{ml} \Sigma_{kj} + \Sigma_{ik} \Sigma_{lm} \Sigma_{oj} + \Sigma_{il} \Sigma_{ko} \Sigma_{mj})
\end{aligned}$$

Matice druhých partiálních derivací funkce  $b$  je podle [2], str. 224, varianční maticí Wishartova rozdělení, proto je pozitivně definitní. Celkem je dle věty 2.2 hustota  $f(\mathbf{y}; N, \boldsymbol{\theta})$  regulární a  $\mathbf{J} = \mathcal{J} = b''(\boldsymbol{\theta})$ . Z věty 2.4 navíc plyne

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{Y}) &= N \boldsymbol{\Sigma}^\nabla, \\
\text{cov}(X_{ij}, X_{kl}) &= N (\Sigma_{ik} \Sigma_{lj} + \Sigma_{il} \Sigma_{kj}).
\end{aligned}$$

Mějme náhodný výběr  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  z rozdělení vektoru  $\mathbf{Y}$ . Dle věty 2.5 je skórový vektor příslušný sdružené hustotě náhodného výběru tvaru

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{Y}_i - N [(-\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag} \boldsymbol{\theta}^\square)^{-1}]^\nabla \right).$$

Dále, pokud existuje řešení věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ , je toto řešení dle věty 2.5 i maximálně věrohodným odhadem parametru  $\boldsymbol{\theta}$ , který pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[ -(\bar{\mathbf{Y}}^\square)^{-1} + \frac{1}{2} \text{diag}(\bar{\mathbf{Y}}^\square)^{-1} \right]^\nabla.$$

**Poznámka 2.10** V tabulce 2.1 lze nalézt důležité charakteristiky vybraných rozdělení exponenciálního typu. Jsou jimi postupně normální rozdělení se známou varianční maticí  $N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , normální rozdělení  $N_q(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_q)$ , multinomické rozdělení  $Mn_{q+1}(N, \boldsymbol{\pi})$  se známým  $N$ , transformované Dirichletovo rozdělení  $TD(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_T)$  dle příkladu 2.8, Wishartovo rozdělení  $W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$  dle příkladu 2.9, Poissonovo  $Po(\lambda)$ , gama rozdělení  $G(\alpha, \beta)$ , binomické rozdělení (absolutní četnosti)  $Bi(N, \pi)$  se známým  $N$ , binomické rozdělení (relativní četnosti)  $Bi(N, \pi)/N$ , negativně binomické rozdělení  $NB(k, \pi)$  se známým  $k$ .

Zmíněná jednorozměrná rozdělení jsou exponenciálního typu, neboť lze jejich hustoty psát ve tvaru

$$f(y, \lambda) = \exp\{y \ln(\lambda) - \lambda - \ln y!\}, \quad y = 0, 1, \dots$$

pro Poissonovo rozdělení  $Po(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ ,

$$f(y, \alpha, \beta) = \exp\left\{\frac{-y\frac{\beta}{\alpha} + \ln \frac{\beta}{\alpha}}{1/\alpha} + \frac{\ln \frac{y}{1/\alpha}}{1/\alpha} - \ln(y\Gamma(\alpha))\right\}, \quad y > 0$$

pro gama rozdělení  $G(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,

$$f(y, N, \pi) = \exp\left\{y \ln \frac{\pi}{1-\pi} + N \ln(1-\pi) + \ln \binom{N}{y}\right\}, \quad y = 0, 1, \dots, N$$

pro binomické rozdělení (absolutní četnosti)  $Bi(N, \pi)$ ,  $\pi \in (0, 1)$ ,  $N \in \mathbf{N}$  je známé,

$$f(y, N, \pi) = \exp\left\{\frac{y \ln \frac{\pi}{1-\pi} + \ln(1-\pi)}{1/N} + \ln \binom{N}{Ny}\right\}, \quad y \in \langle 0, 1 \rangle$$

pro binomické rozdělení (relativní četnosti)  $Bi(N, \pi)/N$ ,  $\pi \in (0, 1)$ ,  $N \in \mathbf{N}$ ,

$$f(y, N, \pi) = \exp\left\{y \ln(1-\pi) + k \ln \pi + \ln \binom{y+k-1}{y}\right\} \quad y = 0, 1, \dots$$

pro negativně binomické rozdělení  $NB(k, \pi)$ ,  $\pi \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbf{N}$  je známé. Poznamenejme, že z tabulky 2.1 a věty 2.2 zřejmě plyne, že všechna uvedená jednorozměrná rozdělení exponenciálního typu jsou regulární.

Rozdělení	$\boldsymbol{\theta}$	$\Theta$	$\phi$	$b(\boldsymbol{\theta})$	$b'(\boldsymbol{\theta})$	$b''(\boldsymbol{\theta})$
$N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$	$\mathbf{R}^q$	1	$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\Sigma}$
$N_q(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_q)$	$\boldsymbol{\mu}$	$\mathbf{R}^q$	$\sigma^2$	$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{I}_q$
$Mn_{q+1}(N, \boldsymbol{\pi})$	$\ln \frac{\pi}{\pi_{q+1}}$	$\mathbf{R}^q$	1	$N \ln(1 + \mathbf{1}^T \exp(\boldsymbol{\theta}))$	$N \frac{\exp \boldsymbol{\theta}}{1 + \mathbf{1}^T \exp(\boldsymbol{\theta})}$	$N(\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{(q)}) - \boldsymbol{\pi}_{(q)}\boldsymbol{\pi}_{(q)}^T)$
$TD(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_T)$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\Theta_{TD}$	1	$\sum_{i=1}^{q+1} \ln \Gamma(\alpha_i)$	$\psi(\boldsymbol{\alpha}) - \psi(\alpha_{q+1})$	$\text{diag}(\psi_2(\boldsymbol{\alpha})) + \psi_2(\alpha_{q+1})\mathbf{1}\mathbf{1}^T$
$W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$	$(-\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2}\text{diag}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^\nabla$	$\Theta_W$	1	$\frac{N}{2} \ln  \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) $	$N\boldsymbol{\Sigma}^\nabla$	$\{N(\sum_{ik}\Sigma_{lj} + \sum_{il}\Sigma_{kj})\}_{\substack{i \leq j, k \leq l \\ i, j, k, l = 1, \dots, r}}$
$Po(\lambda)$	$\ln(\lambda)$	$(0, \infty)$	1	$\exp(\theta)$	$\exp(\theta)$	$\exp(\theta)$
$G(\alpha, \beta)$	$-\beta/\alpha$	$(-\infty, 0)$	$1/\alpha$	$-\ln(-\theta)$	$-\theta^{-1}$	$\theta^{-2}$
$Bi(N, \pi)$	$\ln \frac{\pi}{1-\pi}$	$\mathbf{R}$	1	$N \ln(1 + \exp(\theta))$	$\frac{N \exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)}$	$\frac{N \exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)^2}$
$Bi(N, \pi)/N$	$\ln \frac{\pi}{1-\pi}$	$\mathbf{R}$	$1/N$	$\ln(1 + \exp(\theta))$	$\frac{\exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)}$	$\frac{\exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)^2}$
$NB(k, \pi)$	$\ln(1 - \pi)$	$(0, \infty)$	1	$-k \ln(1 - \exp(\theta))$	$\frac{k \exp(\theta)}{1 - \exp(\theta)}$	$\frac{k \exp(\theta)}{1 - \exp(\theta)^2}$

Tabulka 2.1: Některé charakteristiky vybraných rozdělení jednoduchého exponenciálního typu. Užitá označení pro rozdělení vychází z poznámky 2.10. V tabulce je užito značení  $\Theta_{TD} = \{\boldsymbol{\alpha} : \alpha_i > 0, \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{1} < \alpha_T\}$ ,  $\Theta_W = \{\boldsymbol{\theta} : -\boldsymbol{\theta}^\square - \text{diag}\boldsymbol{\theta}^\square > 0\}$ ,  $\alpha_{q+1} = \alpha_T - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\alpha}$



## Kapitola 3

# Mnohorozměrný zobecněný lineární model

Mnohorozměrný zobecněný lineární model (MGLM), jak je z názvu patrné, vychází z konceptu klasického lineárního modelu. Navíc je MGLM zřejmým rozšířením zobecněného lineárního modelu ve smyslu dimenze vysvětlovaných proměnných. Porovnejme blíže lineární model s MGLM. Jak již bylo naznačeno v úvodu kapitoly 2, ve srovnání s lineárním modelem je v MGLM předpokládána širší třída rozdělení vysvětlovaných proměnných. Stejně jako v lineárním modelu je rozdělení vysvětlovaných proměnných v MGLM ovlivněno vektorem doprovodných proměnných skrze tzv. lineární prediktor, nicméně v MGLM není vazba mezi lineárním prediktorem a střední hodnotou vysvětlovaných proměnných nutně identická. Poznamenejme, že volbou rozdělení v MGLM předepisujeme i funkční vztah prvních a druhých momentů vysvětlovaných proměnných. Důsledkem toho nejsou tyto charakteristiky v modelu odhadovány odděleně, jak tomu je v klasickém lineárním modelu, neboť mohou být obě funkcí parametrů modelu. Nicméně klasický lineární model lze chápat jako speciální případ MGLM. Dalšími často užívanými statistickými modely, které patří mezi MGLM, jsou log-lineární modely, modely probitové, resp. logitové analýzy, popřípadě modely analýzy přežití.

Vlastnostem zobecněných lineárních modelů je věnováno mnoho publikací, zmiňme na tomto místě alespoň [6, 32, 33]. Monografie [10] je zaměřena na mnohorozměrné zobecněné lineární modely, nicméně poznámky o zobecněných lineárních modelech s nejčastěji studovaným mnohorozměrným rozdělením, totiž s rozdělením multinomickým, lze nalézt i v monografii [32]. Konkrétní příklady mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů s multinomickým rozdělením, jako je multinomický logitový model nebo tří-dimenzionální probitový model, lze nalézt např. v článku [8].

Cílem následující kapitoly je souhrnně uvést základní poznatky o mnohorozměrném zobecněném lineárním modelu v souladu s monografií [10]. V části věnované asymptotickým vlastnostem modelu vycházíme především z článku [9]. Snahou je uvést předpoklady zajišťující asymptotickou existenci, konzistenci a normalitu maximálně věrohodných odhadů parametrů modelu. V závěru části věnované asymp-

totickým vlastnostem modelu jsou odvozeny oblasti spolehlivosti pro vektory kontrastů (lineárních kombinací) parametrů modelu. Kapitulu pak uzavírají poznámky o testových statistikách vhodných k testování lineárních hypotéz o parametrech modelu.

Poznamenejme, že vedle v této kapitole uvedených tvrzení lze v článku [9] nalézt i tvrzení o silné konzistenci odhadů (ve smyslu konvergence skoro jistě). Navíc jsou tvrzení v tomto článku doprovázena zajímavými závěry v konkrétních modelech, například v jednorozměrných zobecněných lineárních modelech s Poissonovým nebo gama rozdělením. Dále je na tomto místě vhodné připomenout článek [47], který je věnován asymptotické existenci a jednoznačnosti odhadů ve vybraných zobecněných lineárních modelech.

### 3.1 Definice modelu

**Definice 3.1** Necht ve dvojici  $(\mathbf{Y}_i, \mathbf{x}_i)$  značí  $\mathbf{Y}_i = [Y_{i1}, \dots, Y_{iq}]^T$   $i$ -tý vysvětlovaný náhodný vektor a  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^k$  jemu odpovídající vektor reálných vysvětlujících proměnných  $i = 1, \dots, n$ . Dále necht platí:

1. Náhodné vektory  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  jsou vzájemně nezávislé a každý má regulární hustotu jednoduchého exponenciálního typu

$$f(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \phi, \omega_i), \boldsymbol{\theta}_i \in \Theta \subset \mathbf{R}^q, \phi \in \mathbf{R}^+, \quad i = 1, \dots, n,$$

se známými váhami  $\omega_i \in \mathbf{R}^+$ .

2. Rozdělení náhodného vektoru  $\mathbf{Y}_i$  závisí na  $q$ -rozměrném lineárním prediktoru

$$\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B} \subset \mathbf{R}^p, p \leq nq$ , je vektorový parametr a  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}(\mathbf{x}_i)$  je hodnota  $q \times p$  maticové funkce  $\mathbf{Z}$  v bodě  $\mathbf{x}_i$ .

3. Existuje regulární a prostá funkce  $\mathbf{g} : \boldsymbol{\mu}(\Theta) \rightarrow \mathbf{R}^q$ , pro kterou platí

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\eta}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde  $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{E}(\mathbf{Y}_i), i = 1, \dots, n$ .

Pak říkáme, že se náhodný vektor  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_n^T]^T$  řídí mnohorozměrným zobecněným lineárním modelem (MGLM) s linkovací funkcí, popř. linkem,  $\mathbf{g}$  a maticí plánu  $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1^T, \dots, \mathbf{Z}_n^T]^T$ . Píšeme  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z})$ .

Je-li matice  $\mathbf{Z}$  plně sloupcové hodnosti, tj. má-li matice  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i$  plnou hodnotu, nazýváme model mnohorozměrným zobecněným lineárním modelem plné hodnosti.

Rozdělení	Kanonická linkovací funkce
$N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	identita
$N_q(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_q)$	identita
$Mn_{q+1}(N, \boldsymbol{\pi})$	$\ln \frac{\boldsymbol{\mu}}{N - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{1}}$
$TD(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_T)$	inverzní funkce k $(\psi(\boldsymbol{\alpha}) - \psi(\alpha_T - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\alpha}))$ (explicitní výraz není znám)
$W_r(N, \boldsymbol{\Sigma})$	$\{-N(\boldsymbol{\mu}^\square)^{-1} + \frac{N}{2} \text{diag}(\boldsymbol{\mu}^\square)^{-1}\}^\nabla$
$Po(\lambda)$	$\ln(\lambda)$
$G(\alpha, \beta)$	$-1/\mu$
$Bi(N, \pi)$	$\ln \frac{\mu}{N - \mu}$
$Bi(N, \pi)/N$	$\ln \frac{\mu}{1 - \mu}$
$NB(k, \pi)$	$\ln \frac{\mu}{k + \mu}$

Tabulka 3.1: Tabulka kanonických linkovacích funkcí vybraných rozdělení jednoduchého exponenciálního typu. Užitá označení pro rozdělení vychází z poznámky 2.10.

**Poznámka 3.2** Protože  $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_i)$ , určuje linkovací funkce vztah přirozeného parametru  $\boldsymbol{\theta}_i$  a lineárního prediktoru  $\boldsymbol{\eta}_i$  a tím i vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_i)) = \boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Inverzní funkci  $(\mathbf{g} \circ \boldsymbol{\mu})^{-1}$  na  $\Theta$ , která dle věty 2.4 existuje, budeme značit  $\mathbf{u}$ . Můžeme tedy psát  $\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Poznámka 3.3** Řekneme, že linkovací funkce  $\mathbf{g}$  mnohorozměrného zobecněného lineárního modelu je kanonickou linkovací funkcí, pokud  $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\eta}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . V takovém modelu proto platí  $\mathbf{g} = \boldsymbol{\mu}^{-1}$ , funkce  $\mathbf{u}$  je identita. Zdůrazněme, že z věty 2.4 plyne existence inverzní funkce  $\boldsymbol{\mu}^{-1}$  na  $\Theta$ .

**Příklad 3.4** V tabulce 3.1 jsou uvedeny příklady kanonických linkovacích funkcí vybraných rozdělení jednoduchého exponenciálního typu z poznámky 2.10.

**Poznámka 3.5** Uvažujme MGLM, ve kterém je více náhodných vektorů vysvětlovaných shodným vektorem vysvětlujících proměnných. Označme  $\mathbf{Y}_{i_1}, \dots, \mathbf{Y}_{i_{n_i}}$  náhodné vektory vysvětlované vektorem  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Jim příslušné váhy označme postupně  $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{n_i}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . V takovém modelu nahrazujeme vysvětlované vektory  $\mathbf{Y}_{i_1}, \dots, \mathbf{Y}_{i_{n_i}}$  jedním náhodným vektorem  $\mathbf{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{Y}_{i_j}$ , přičemž jemu příslušná váha  $\omega_i$  je rovna  $n_i^2 \left( \sum_{j=1}^{n_i} \omega_{i_j}^{-1} \right)^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Speciálně, při  $\omega_{i_j} = 1$ ,

$j = 1, \dots, n_i$  je parametr  $\omega_i$  roven  $n_i$ . Takto získaný model má  $n$  vysvětlovaných náhodných vektorů.

## 3.2 Skórový vektor a Fisherova informační matice

**Poznámka 3.6** Dále budeme užívat následující značení

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}) &= [\boldsymbol{\mu}_1^T(\boldsymbol{\beta}), \dots, \boldsymbol{\mu}_n^T(\boldsymbol{\beta})]^T, \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}) &= \text{diag}(\partial\boldsymbol{\mu}_1^T(\boldsymbol{\beta})/\partial\mathbf{g}, \dots, \partial\boldsymbol{\mu}_n^T(\boldsymbol{\beta})/\partial\mathbf{g}), \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}) &= \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\beta}), \dots, \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta})), \\ \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})^T.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že zápis  $\boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\beta})$ , resp.  $\boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta})$ , je zjednodušením přesnějšího zápisu  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_i) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}(\mathbf{Z}_i\boldsymbol{\beta}))$ , resp.  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_i) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{Z}_i\boldsymbol{\beta}))$ , plynoucí z poznámky 3.2.

**Věta 3.7** Nechť  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z}), r(\mathbf{Z}) = p$ . Pak skórový vektor příslušný hustotě náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  je tvaru

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) \quad (3.2)$$

a Fisherova informační matice

$$\mathcal{J} = \mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{Z} \quad (3.3)$$

je pozitivně definitní.

**Důkaz.** Skórový vektor příslušný sdružené hustotě náhodných vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  lze dle lemmatu 1.6 vyjádřit jako

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial l_i}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \quad (3.4)$$

kde  $l_i = \ln f(\mathbf{Y}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \phi, \omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . S využitím vlastností parciálních derivací můžeme psát

$$\mathbf{U}_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_i^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^T}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} \frac{\partial l_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Zdůrazněme pro přehlednost, že členy výrazu (3.5) mají postupně rozměry  $p \times q$ ,  $q \times q$ ,  $q \times q$  a  $q \times 1$ . Existence derivace  $\partial l_i / \partial \boldsymbol{\theta}_i$  plyne z regularity hustot. Diferencovatelnost  $\boldsymbol{\theta}_i$  podle  $\boldsymbol{\mu}_i$  plyne z regularity Fisherovy informační matice. Existence matice parciálních derivací  $\partial \boldsymbol{\mu}_i^T / \partial \boldsymbol{\eta}_i = \partial \boldsymbol{\mu}_i^T / \partial \mathbf{g}$  plyne z regularity linkovací funkce  $\mathbf{g}$ .

Poslední nezmíněný člen v (3.5) je derivací lineární funkce a je roven  $\mathbf{Z}_i^T$ . S použitím věty 2.4 postupně vypočteme parciální derivace z (3.5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} &= \frac{\mathbf{Y}_i - b'_{\boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i)}{\phi} \omega_i = \frac{\omega_i}{\phi} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i), \\ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} &= b''_{\boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i).\end{aligned}$$

Po dosazení do (3.5) dostaneme

$$\mathbf{U}_i(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \mathbf{g}} [b''_{\boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i)]^{-1} \frac{\omega_i}{\phi} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i). \quad (3.6)$$

Využitím vztahu (2.2) a označením  $\mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta}) = \partial \boldsymbol{\mu}_i^T / \partial \mathbf{g}$  obdržíme vyjádření skórového vektoru ve tvaru

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i^T \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\beta})). \quad (3.7)$$

Vztah (3.2) je zřejmě maticovým přepisem (3.7).

Fisherovu informační matici  $\mathcal{J}$  příslušnou hustotě náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  odvodíme užitím věty 1.5, podle které  $\text{var}(\mathbf{U}) = \mathcal{J}$ . Proto ze vztahu (3.2) plyne

$$\mathcal{J} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{Z}.$$

Poznamenejme pro přehlednost, že matice  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\beta})$  je typu  $nq \times nq$  a matice  $\mathbf{Z}$  je typu  $nq \times p$ . Z regularity  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})$  a regularity hustot plyne pozitivní definitnost matice  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\beta})$ , tedy  $r(\mathbf{W}(\boldsymbol{\beta})) = nq > p$ . Protože za předpokladů věty má matice  $\mathbf{Z}$  plnou sloupcovou hodnotu je Fisherova informační matice regulární a tedy pozitivně definitní.

**Věta 3.8** Nechť  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z})$ ,  $r(\mathbf{Z}) = p$ , a existují druhé parciální derivace funkce  $\mathbf{u}$  podle  $\boldsymbol{\eta}$ . Pak empirická Fisherova informační matice příslušná hustotě náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  je tvaru

$$\mathcal{J} = \mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{Z} - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_i^T \mathbf{P}_{il} \mathbf{Z}_i (Y_{il} - \mu_{il}), \quad (3.8)$$

kde  $\mathbf{P}_{il} = \frac{\omega_i}{\phi} \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta}_i \partial \boldsymbol{\eta}_i}$ ,  $i = 1, \dots, n, l = 1, \dots, q$ .

**Důkaz.** Pro odvození tvaru empirické Fisherovy informační matice uvažme vyjádření (3.6) skórového vektoru příslušného hustotě  $i$ -tého náhodného vektoru  $\mathbf{Y}_i$  v důkazu věty 3.7. Protože dle poznámky 3.2 platí  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}_i) = \boldsymbol{\theta}_i$ , můžeme psát

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^T}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \mathbf{g}_i} [b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_i)]^{-1}.$$

Poznamenejme, že při označení  $\mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta}) = \partial \boldsymbol{\mu}_i^T / \partial \mathbf{g}$  a užití vztahu (2.2) dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} = \frac{\phi}{\omega_i} \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}).$$

Odtud je vyjádření skórového vektoru příslušného hustotě  $f(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta}), \phi, \omega_i)$  náhodného vektoru  $\mathbf{Y}_i$  ve tvaru

$$\mathbf{U}_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \left( Y_{il} \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial u_l}{\partial \boldsymbol{\eta}} - \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \theta_l} \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial u_l}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right).$$

Z předchozího vztahu odvodíme empirickou Fisherovu informační matici příslušnou hustotě  $f(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta}), \phi, \omega_i)$  jako

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i &= -\frac{\partial \mathbf{U}_i^T(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \\ &= \frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \left( -Y_{il} \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \theta_l \partial \boldsymbol{\theta}} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{Z}_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \theta_l} \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_i \right) = \\ &= -\sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_i^T \frac{\omega_i}{\phi} \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_i (Y_{il} - \mu_{il}) + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{D}_i^T(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{Z}_i. \end{aligned}$$

Z lemmatu 1.6 plyne  $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \mathcal{J}_i$ . Odtud dostáváme vyjádření empirické Fisherovy informační matice (3.8).

**Důsledek 3.9** Nechť  $\mathbb{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbb{Z}), r(\mathbb{Z}) = p$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbb{Y}$  je regulární a pro příslušný skórový vektor  $\mathbf{U}$  platí  $E(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$ ,  $\text{var}(\mathbf{U}) = \mathcal{J}$ .

**Důkaz.** Tvrzení plyne z vět 1.5 a 3.7.

**Důsledek 3.10** Nechť  $\mathbb{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbb{Z}), r(\mathbb{Z}) = p$  a existují druhé parciální derivace funkce  $\mathbf{u}$  podle  $\boldsymbol{\eta}$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbb{Y}$  splňuje vztah (1.1) z věty 1.4.

**Důkaz.** Tvrzení plyne z věty 1.4, jejíž předpoklady jsou splněny z důsledku 3.9, vět 3.8 a 2.4.

**Důsledek 3.11** Nechť  $\mathbb{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbb{Z}), r(\mathbb{Z}) = p$  a  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce. Pak je skórový vektor příslušný hustotě náhodného vektoru  $\mathbb{Y}$  tvaru

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbb{Z}^T \boldsymbol{\Delta} (\mathbb{Y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})),$$

kde  $\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{\phi} \text{diag}(\omega_1 \mathbf{I}_q, \dots, \omega_n \mathbf{I}_q)$ . Přitom empirická Fisherova informační matice  $\mathcal{J}$  je rovna Fisherově informační matici

$$\mathcal{J} = \mathbb{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Delta} \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Navíc platí tvrzení důsledku 3.10.

**Důkaz.** V modelu s kanonickou linkovací funkcí dle poznámky 3.3 a věty 2.4 platí

$$D_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = b''_{\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{\omega_i}{\phi} \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}),$$

tj. matice  $D(\boldsymbol{\beta})$  je rovna  $\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ . Odtud dosazením do vztahu (3.2) dostáváme dokazovaný tvar skórového vektoru. Empirickou Fisherovu informační matici odvodíme derivací skórového vektoru

$$\mathcal{J} = -\boldsymbol{U}'_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{Z}.$$

Protože

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_i^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_i^T}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = \boldsymbol{Z}_i^T \frac{\omega_i}{\phi} \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}),$$

tj. matice  $\partial \boldsymbol{\mu}^T / \partial \boldsymbol{\beta}$  je rovna  $\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ , platí  $\mathcal{J} = \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{Z}$ . Matice  $\mathcal{J}$  ovšem není náhodná a proto je užitím důsledku 3.10 a věty 1.4 rovna své střední hodnotě  $\boldsymbol{J}$ . Poznamenejme, že předpoklady důsledku 3.10 jsou skutečně splněny, neboť z poznámky 3.3 plyne, že matice druhých parciálních derivací  $u_l$  podle  $\boldsymbol{\eta}$  je nulová,  $l = 1, \dots, n$ .

### 3.3 Numerické řešení věrohodnostních rovnic

**Věta 3.12** Nechť  $\boldsymbol{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \boldsymbol{Z})$ ,  $r(\boldsymbol{Z}) = p$ ,  $\boldsymbol{B}$  je otevřená množina. Nechť  $\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  je MNR posloupnost odhadů vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$ . Pak posloupnost  $\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  je posloupnost získaná iterační metodou vážených nejmenších čtverců

$$\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{W}^{(m)} \boldsymbol{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{W}^{(m)} \boldsymbol{\Upsilon}^{(m)}, \quad (3.10)$$

kde

$$\boldsymbol{\Upsilon}^{(m)} = \boldsymbol{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + [(\boldsymbol{D}^{(m)})^T]^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}^{(m)}),$$

$$\boldsymbol{W}^{(m)} = \boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}), \boldsymbol{D}^{(m)} = \boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}), \boldsymbol{\mu}^{(m)} = \boldsymbol{\mu}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}).$$

**Důkaz.** Podle důsledku 3.9 je hustota náhodného vektoru  $\boldsymbol{Y}$  regulární vzhledem k parametrickému prostoru  $\boldsymbol{B}$ .  $(m+1)$ -vý člen MNR posloupnosti lze vyjádřit jako

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + [\boldsymbol{J}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})]^{-1} \boldsymbol{U}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}). \quad (3.11)$$

Po vynásobení systému rovnic (3.11) maticí  $\boldsymbol{J}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$  a dosazení za  $\boldsymbol{J}$ , resp.  $\boldsymbol{U}$ , vyjádření (3.3), resp. (3.2), obdržíme

$$\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{W}^{(m)} \boldsymbol{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{W}^{(m)} \boldsymbol{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{D}^{(m)} [\boldsymbol{\Sigma}^{(m)}]^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}^{(m)}), \quad (3.12)$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma}^{(m)} = \boldsymbol{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$ . Protože lze psát

$$\boldsymbol{D}^{(m)} [\boldsymbol{\Sigma}^{(m)}]^{-1} = \boldsymbol{W}^{(m)} [(\boldsymbol{D}^{(m)})^T]^{-1},$$

platí dokazované tvrzení.

**Důsledek 3.13** Necht'  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z}), r(\mathbf{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a  $\mathbf{B}$  je otevřená množina. Necht'  $\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  je MNR posloupnost odhadů vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$ . Pak posloupnost  $\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  je posloupnost získaná iterační metodou vážených nejmenších čtverců

$$\mathbf{Z}^T \Delta \Sigma^{(m)} \Delta \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \mathbf{Z}^T \Delta \Sigma^{(m)} \Delta \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + \mathbf{Z}^T \Delta (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}^{(m)}), \quad (3.13)$$

kde  $\Sigma^{(m)}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^{(m)}$  jsou hodnotami příslušných matic, resp. vektoru, v  $\boldsymbol{\beta} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}$ .

**Důkaz.** Tvrzení plyne z věty 3.12 a důsledku 3.11.

### 3.4 Asymptotické vlastnosti modelu

**Poznámka 3.14** V následujících tvrzeních značí  $\boldsymbol{\beta}_0$  skutečnou hodnotu parametru  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ . Dále pro Fisherovu informační matici  $\mathbf{J}$ , vektorový parametr  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$  a libovolné  $\delta > 0$  označíme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\delta) &= \{ \boldsymbol{\beta} : \|\mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\| < \delta \}, \\ \overline{\mathcal{O}}(\delta) &= \{ \boldsymbol{\beta} : \|\mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\| \leq \delta \}, \\ \partial \overline{\mathcal{O}}(\delta) &= \{ \boldsymbol{\beta} : \|\mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\| = \delta \}, \end{aligned}$$

tedy  $\mathcal{O}(\delta)$  je otevřené okolí,  $\overline{\mathcal{O}}(\delta)$  je uzavřené okolí a  $\partial \overline{\mathcal{O}}(\delta)$  je hranice okolí bodu  $\boldsymbol{\beta}_0$ . V tvrzeních též užíváme značení  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)$ .

**Věta 3.15** Necht'  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z}), r(\mathbf{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a existují třetí parciální derivace funkce  $b$  podle  $\boldsymbol{\theta}$ . Necht' je množina  $\mathbf{B}$  otevřená a konvexní a navíc  $\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta}))$ ,  $i = 1, \dots, n$  pro všechny  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ . Dále necht'

$$(P1) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)) = \infty$$

$$(P2) \text{ pro každé } \delta > 0 \text{ existuje } n_1 = n_1(\delta) \text{ a } c > 0, \text{ tak že pro všechna } n \geq n_1 \text{ a } \boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta) \text{ je matice } \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) - c\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \geq 0.$$

Pak existuje posloupnost  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$  taková, že

(V1) asymptoticky je řešením věrohodnostních rovnic a maximálně věrohodným odhadem parametru  $\boldsymbol{\beta}$ , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\mathcal{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \mathbf{0}\} = 1$$

(V2) je konzistentním odhadem  $\boldsymbol{\beta}_0$ , tj. pro každé  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\|\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\| < \varepsilon\} = 1$$



**Důkaz.** Dle důsledku 3.11 je empirická Fisherova informační matice nenáhodná a pozitivně definitní. Proto dle lemmatu 1.11 existuje na konvexní množině  $\mathcal{B}$  nejvýše jeden kořen věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$  a je globálním maximem, tedy maximálně věrohodným odhadem. Pokud pro všechna  $n$  a  $\delta > 0$ , ve všech bodech hranice  $\partial\overline{\mathcal{O}}(\delta) = \{\boldsymbol{\beta} : \|\mathcal{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\| = \delta\}$  platí

$$l(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{y}) - l(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{y}) < 0,$$

leží bod  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$  lokálního maxima věrohodnostní funkce v otevřeném okolí  $\mathcal{O}(\delta)$  a je řešením věrohodnostních rovnic  $\mathcal{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \mathbf{0}$ .

V následujícím odstavci ukážeme, že pro každé  $\eta > 0$  existuje  $\delta > 0$  a  $n_1 = n_1(\delta)$  takové, že pro všechna  $n \geq n_1$  platí

$$\mathrm{P}\{l(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{y}) - l(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{y}) < 0, \boldsymbol{\beta} \in \partial\overline{\mathcal{O}}(\delta)\} \geq 1 - \eta, \quad (3.14)$$

z čehož podle předchozích úvah plyne, že pro každé  $\eta > 0$  a pro všechna  $n \geq n_1$

$$\mathrm{P}\{\|\mathcal{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0)\| < \delta\} \geq 1 - \eta. \quad (3.15)$$

Užitím tvrzení o minimalizaci kvadratické formy v [38], str. 87, ovšem dostáváme

$$\delta^2 > \|\mathcal{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0)\|^2 = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0)^T \mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}_0)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0) \geq \|\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\|^2 \lambda_{\min}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}_0)).$$

z čehož plyne

$$\|\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\| < \delta / \sqrt{\lambda_{\min}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}_0))}.$$

Odtud při platnosti předpokladu (P1) odvodíme vlastnost (V2). Ze vztahu (3.14) ovšem též plyne, že pro každé  $\eta > 0$  a  $n \geq n_1$

$$\mathrm{P}\{\mathcal{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \mathbf{0}\} \geq 1 - \eta,$$

což odpovídá dokazované vlastnosti (V1).

Zbývá dokázat, že pro každé  $\eta > 0$  existuje  $\delta > 0$  a  $n_1 = n_1(\delta)$  takové, že pro všechna  $n \geq n_1$  platí vztah (3.14). Taylorův polynom logaritmické věrohodnostní funkce v bodě  $\boldsymbol{\beta}_0$  je tvaru

$$l(\boldsymbol{\beta}) = l(\boldsymbol{\beta}_0) + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)^T \mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)^T \mathcal{U}'_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^*)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0),$$

kde  $\boldsymbol{\beta}^* = \alpha\boldsymbol{\beta}_0 + (1 - \alpha)\boldsymbol{\beta}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Poznamenejme, že při  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$  platí  $\boldsymbol{\beta}^* \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$ . Dle důsledku 3.11 je empirická Fisherova informační matice rovna své střední hodnotě  $-\mathcal{U}'_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^*) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}^*)$ . Označíme-li  $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)/\delta$  lze psát

$$l(\boldsymbol{\beta}) - l(\boldsymbol{\beta}_0) = \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathcal{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0) - \frac{\delta^2}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathcal{V}(\boldsymbol{\beta}^*) \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.16)$$

přičemž pro  $\beta \in \partial\overline{\mathcal{O}}(\delta)$  je vektor  $\gamma$  je normovaný ( $\gamma^T \gamma = 1$ ). Aby platilo  $l(\beta) - l(\beta_0) < 0$  pro  $\beta \in \partial\overline{\mathcal{O}}(\delta)$ , stačí, aby

$$\max_{\|\gamma\|=1} \delta \gamma^T \mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0) < \min_{\|\gamma\|=1} \frac{\delta^2}{2} \gamma^T \mathbf{V}(\beta^*) \gamma. \quad (3.17)$$

Ze Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\max_{\|\gamma\|=1} \gamma^T \mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0) = \|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|.$$

Minimum kvadratické formy na pravé straně nerovnosti (3.17) je podle [38], str. 87, rovno  $\delta^2/2$  násobku nejmenšího vlastního čísla matice  $\mathbf{V}(\beta^*)$ , protože

$$\min_{\|\gamma\|=1} \gamma^T \mathbf{V}(\beta^*) \gamma = \lambda_{\min}(\mathbf{V}(\beta^*)).$$

Celkem dostatečná podmínka proto, aby  $l(\beta) - l(\beta_0) < 0$  pro  $\beta \in \partial\overline{\mathcal{O}}(\delta)$  je

$$\|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|^2 < \frac{\delta^2}{4} \lambda_{\min}^2 \mathbf{V}(\beta^*).$$

Podle předpokladu (P2) pro každé  $\delta > 0$  existuje  $n_1$  a  $c_1 > 0$  tak, že pro všechna  $n \geq n_1$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}^p$ ,  $\beta \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$  platí

$$\gamma^T \mathbf{J}(\beta) \gamma \geq c_1 \gamma^T \mathbf{J}(\beta_0) \gamma,$$

z čehož plyne

$$\lambda_{\min}(\mathbf{J}(\beta)) > c,$$

kde  $0 < c < c_1 \gamma_{\min}^T \mathbf{J}(\beta_0) \gamma_{\min}$ ,  $\gamma_{\min}$  je normovaný vlastní vektor matice  $\mathbf{J}(\beta)$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_{\min}(\mathbf{J}(\beta))$ . Navíc z Markovovy nerovnosti pro každé  $t > 0$  platí

$$\mathbb{P} \left\{ \|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|^2 < t \right\} \geq 1 - \eta,$$

kde  $\eta = \mathbb{E}(\|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|^2)/t$ . Z věty 4.18, str 69, v [1] s užitím důsledku 3.9 je ale

$$\mathbb{E} \left( \|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|^2 \right) = \text{Tr} \left( \mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{J}(\beta_0) \right) = \text{Tr}(\mathbf{I}_p) = p.$$

Zvolme libovolné pevné  $\eta > 0$  a položíme  $t = \eta/p$ . Pak při  $\delta > 0$  takovém, že  $\delta^2 = \frac{4t}{c^2}$ , a  $n \geq n_1$  platí  $t = \delta^2 c^2 / 4 < \delta^2 \lambda_{\min}^2(\mathbf{V}(\beta^*)) / 4$  a tedy

$$\mathbb{P} \left\{ \|\mathbf{J}^{-1/2}(\beta_0) \mathbf{U}(\beta_0)\|^2 < \frac{\delta^2}{4} \lambda_{\min}^2 \mathbf{V}(\beta^*) \right\} \geq 1 - \eta.$$

Odtud platí (3.14) a tím je dokázána existence posloupnosti  $\{\widehat{\beta}_n\}$  s vlastnostmi (V1) a (V2).

**Věta 3.16** Necht'  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z})$ ,  $r(\mathbf{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a existují třetí parciální derivace funkce  $b$  podle  $\boldsymbol{\theta}$ . Necht' je množina  $\mathbf{B}$  otevřená a konvexní a navíc  $\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta}))$ ,  $i = 1, \dots, n$  pro všechny  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ . Dále necht'

$$(P1) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)) = \infty,$$

$$(P3) \text{ pro matici } \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0), \text{ pro každé } \delta > 0 \text{ platí}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)} \|\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_p\| = 0.$$

Pak

(V3) existuje posloupnost  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$  maximálně věrohodných odhadů parametru  $\boldsymbol{\beta}_0$ , která je asymptoticky normální, tj.

$$\mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0) \stackrel{\text{as}}{\approx} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

(V4) skórový vektor  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$  je asymptoticky normální

$$\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0) \stackrel{\text{as}}{\approx} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

**Důkaz.** Nejprve odvodíme asymptotickou normalitu skórového vektoru  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$  příslušného hustotě náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$ . Tedy dokážeme

$$\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0) \stackrel{\text{as}}{\approx} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p). \quad (3.18)$$

Pro libovolné  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^p$  takové, že  $\|\boldsymbol{\gamma}\| = 1$ , uvažujme momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny  $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{U}$ . Označme  $M(\delta) = E \exp\{\delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{U}\}$ . Stačí ukázat, že  $M(\delta)$  konverguje k momentové vytvořující funkci standardního normálního rozdělení  $N(0, 1)$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Pak, vzhledem k tomu, že  $\boldsymbol{\gamma}$  je libovolný vektor, pro který  $\|\boldsymbol{\gamma}\| = 1$ , platí (3.18).

Zvolme libovolné pevné  $\delta > 0$  a libovolné  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^p$  takové, že  $\|\boldsymbol{\gamma}\| = 1$ . Body posloupnosti  $\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\beta}_0 + \delta \mathbf{J}^{-1/2} \boldsymbol{\gamma}$ ,  $i = 1, \dots$  leží na hranici  $\partial \overline{\mathcal{O}}(\delta)$ . Hodnotu logaritmické věrohodnostní funkce v bodě  $\boldsymbol{\beta}_n$  aproximujeme pomocí Taylorova polynomu (3.16). Po úpravě lze (3.16) zapsat ve tvaru

$$\frac{\delta^2}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}_n^*) \boldsymbol{\gamma} + l(\boldsymbol{\beta}_n) = \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0) + l(\boldsymbol{\beta}_0),$$

kde  $\boldsymbol{\beta}_n^* = \alpha \boldsymbol{\beta}_0 + (1 - \alpha) \boldsymbol{\beta}_n$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Odkud pomocí exponenciální funkce dostáváme

$$\exp\{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}_n^*) \boldsymbol{\gamma} / 2\} f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_n) = \exp\{\delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0)\} f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_0). \quad (3.19)$$

Levá strana rovnice (3.19) je Lebesgueovskiy integrabilní, neboť  $\exp\{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\gamma} / 2\}$  je spojitá funkce v bodě  $\boldsymbol{\beta}$ , a je proto ohraničená na kompaktní množině

$\{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}, \boldsymbol{\beta} = (1 - \alpha)\boldsymbol{\beta}_n + \alpha\boldsymbol{\beta}_0, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ . Integrací obou stran (3.19) vzhledem k dominující míře  $\mu$  dostáváme

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\beta}_n} \exp\{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}_n^*) \boldsymbol{\gamma} / 2\} = \mathbb{E} \exp\{\delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0)\}. \quad (3.20)$$

Protože platí předpoklad (P3) a  $\boldsymbol{\beta}_n^* \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$ , platí, že pro každé  $\delta > 0$  a každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_2$ , tak že pro všechna  $n \geq n_2$

$$\|\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}_n^*) - \mathbf{I}_p\| \leq \varepsilon.$$

Navíc exponenciální funkce je spojitá, tedy existuje číslo  $n_3$  takové, že pro všechna  $n \geq n_3$  platí

$$|\exp\{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}_n^*) \boldsymbol{\gamma} / 2\} - \exp\{\delta^2 / 2\}| \leq \varepsilon.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost, přičemž využijeme vlastnosti Lebesgueova integrálu  $|f \cdot| \leq f \cdot|$ , zjistíme, že levá strana rovnice (3.20) konverguje k momentové vytvořující funkci  $\exp\{\delta^2 / 2\}$  standardního normálního rozdělení. Tím je dokázána asymptotická normalita skórového vektoru (3.18).

Ukážeme, že z předpokladu (P3) plyne předpoklad (P2). Předpoklad (P3) je totiž shodný s podmínkou, že pro každé  $\delta > 0$  a  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_1$  takové, že pro všechna  $n \geq n_1$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^p$ ,  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$

$$|\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma}.$$

Z toho ovšem plyne

$$(1 - \varepsilon) \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma} \leq \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\gamma}.$$

Volíme-li  $\varepsilon \in (0, 1)$ , pak při označení  $c = 1 - \varepsilon$  dostáváme předpoklad (P2).

Podle věty 3.15 tedy existuje posloupnost maximálně věrohodných odhadů  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ , která je konzistentní a pro kterou při  $n \rightarrow \infty$  s pravděpodobností 1 platí  $\mathcal{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \mathbf{0}$ . Dokažme nyní vlastnost (V3) takové posloupnosti  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ . Budeme vycházet z Taylorova polynomu skórového vektoru  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$  v bodě  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0) = \mathcal{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) - \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_n^{**})(\boldsymbol{\beta}_0 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n), \quad (3.21)$$

kde  $\boldsymbol{\beta}_n^{**} = \alpha \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n + (1 - \alpha)\boldsymbol{\beta}_0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Vynásobíme-li systém rovnic (3.21) zleva maticí  $\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)$ , pak, protože  $\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)$ , dostaneme

$$\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0) = \mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}^*) \mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0). \quad (3.22)$$

Nyní stačí ukázat, že norma rozdílu matic  $\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}_n^{**}) - \mathbf{I}_p$  konverguje v pravděpodobnosti k 0. Pak totiž z lemmatu 5.2, str. 465, v [26] konverguje náhodný vektor  $\mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0)$  v pravděpodobnosti k náhodnému vektoru  $\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathcal{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$ , který je, jak bylo ukázáno, asymptoticky normální. Asymptotická normalita  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$  potom plyne z lemmat A.2 a A.4.

Podle (3.15) z důkazu věty 3.15 pro každé  $\eta > 0$  existuje  $\delta > 0$  a  $n_1$  tak, že pro všechna  $n \geq n_1$

$$\mathbb{P}\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n \in \mathcal{O}(\delta)\} \geq 1 - \eta,$$

tedy i

$$\mathbb{P}\{\boldsymbol{\beta}_n^{**} \in \mathcal{O}(\delta)\} \geq 1 - \eta,$$

Z předpokladu (P3) plyne, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_4$  tak, že pro všechna  $n \geq n_4$

$$\max_{\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}(\delta)}} \|\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_p\| \leq \varepsilon.$$

Odtud pro všechna  $n \geq \max\{n_1, n_4\}$

$$\mathbb{P}\{\|\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}_n^{**}) - \mathbf{I}_p\| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \eta.$$

Tím je dokázána i asymptotická normalita posloupnosti  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ .

**Důsledek 3.17** Nechť  $\mathbb{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbb{Z}), r(\mathbb{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a existují druhé parciální derivace funkce  $b$  vzhledem k  $\boldsymbol{\theta}$ . Nechť je množina  $\mathbf{B}$  otevřená a konvexní a navíc  $\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta})), i = 1, \dots, n$  pro všechny  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ . Dále necht'

$$(P1) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)) = \infty$$

$$(P4) \text{ pro každé } \delta > 0 \text{ platí}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}(\delta)}} \|\mathbf{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{J}^{1/2}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_p\| = 0.$$

Pak

(V3') existuje posloupnost  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$  maximálně věrohodných odhadů parametru  $\boldsymbol{\beta}_0$ , která je asymptoticky normální, tj.

$$\mathbf{J}^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0) \overset{\text{as}}{\approx} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

(V4') skórový vektor  $\mathbb{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$  je asymptoticky normální

$$\mathbf{J}^{-1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) \mathbb{U}(\boldsymbol{\beta}_0) \overset{\text{as}}{\approx} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

**Důkaz.** Tvrzení plyne z věty 3.16, splnění předpokladu (P3) plyne z předpokladu (P4).

**Poznámka 3.18** Při výpočtu matic  $\mathbf{J}^{1/2}, \mathbf{J}^{-1/2}$  ve větách 3.16 a 3.15 je užito spektrálního rozkladu matice  $\mathbf{J}$ . V článku [9] je navrhován výpočet matic  $\mathbf{J}^{1/2}, \mathbf{J}^{-1/2}$  pomocí LU rozkladu (Choleského rozkladu). Výhodou volby Choleského rozkladu je z praktického pohledu nižší výpočetní náročnost, z teoretického pohledu pak ekvivalence podmínek (P3) a (P4), viz. [9].

**Důsledek 3.19** Nechť  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z}), r(\mathbf{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a funkce  $b$  má spojité třetí parciální derivace vzhledem k  $\boldsymbol{\theta}$ . Nechť je množina  $\mathbf{B}$  otevřená a konvexní a navíc

(P5) posloupnost  $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^{\infty}$  leží v kompaktní množině  $\mathcal{Z}$  všech reálných matic typu  $q \times p$  tak, že pro každé  $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$  platí  $\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} \in \Theta$ .

(P6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{Z}) = \infty$ , kde  $\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{\phi} \text{diag}(\omega_1 \mathbf{I}_q, \dots, \omega_n \mathbf{I}_q)$ .

Pak platí tvrzení vět 3.15 a 3.16.

**Důkaz.** Protože jsou funkce  $\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $b''_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}$  a vlastní číslo matice spojitými funkcemi, jejich složení zobrazuje kompaktní množinu  $\mathcal{Z}$  na kompaktní množinu, tedy existují konstanty  $c_1$  a  $c_2$  takové, že

$$0 < c_1 \leq \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}_0)) \leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}_0)) \leq c_2 < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Proto pro libovolný vektor  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^p$  užitím důsledku 3.11 platí

$$\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\Delta} \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma} \geq c_1 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.24)$$

Užitím tvrzení o minimalizaci kvadratické formy na str. 87 v [38] dostaneme z nerovnosti (3.24) nerovnost

$$\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma} \geq c_1 \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{Z}).$$

Zvolíme-li za  $\boldsymbol{\gamma}$  normovaný vlastní vektor příslušný nejmenšímu vlastnímu číslu  $\lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0))$  matice  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)$  získáme

$$\lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)) \geq c_1 \lambda_{\min}(\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{Z}).$$

Odtud je užitím věty 6, str. 328 v [39] zřejmé, že z předpokladu (P6) plyne předpoklad (P1).

Nyní je třeba ukázat platnost předpokladu (P3). Poznamenejme, že (P3) je ekvivalentní s předpokladem, že pro každé  $\delta > 0$  a každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_1$  takové, že pro všechna  $n \geq n_1$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^p$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)$  platí

$$|\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.25)$$

Z předpokladu (P5), ze stejných argumentů jako v úvodním odstavci důkazu plyne, že též derivace  $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\lambda}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  podle  $\boldsymbol{\beta}$  jsou ohraničené stejnoměrně vzhledem k  $n \in \mathbf{N}$  a  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^q$ , když  $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$ . Odtud vzhledem k (3.23) odvodíme, že pro každé  $\delta > 0$  a  $\varepsilon > 0$  existuje  $N$  takové, že

$$|\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}$$

pro všechna  $n \geq N$ ,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^q$ ,  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_n(\delta)$ , kde  $\overline{\mathcal{O}}_n(\delta) = \{\boldsymbol{\beta} : \|\mathbf{J}_n^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\| \leq \delta\}$ , přičemž  $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\beta}_0)$  je Fisherova informační matice příslušná sdružené hustotě  $n$  vysvětlovaných náhodných vektorů a dle důsledku 3.11 platí

$$\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\beta}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{\phi^2} \mathbf{Z}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{Z}_i,$$

a  $\mathbf{Z}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{Z}_i \omega_i^2 / \phi^2 > 0$ . Odtud, je-li  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_{n+1}(\delta)$ , pak platí  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_n(\delta)$ , tj.  $\overline{\mathcal{O}}_n(\delta) \supseteq \overline{\mathcal{O}}_{n+1}(\delta) \supseteq \dots$ . Proto zřejmě

$$|\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}, \quad i = N, \dots, n,$$

pro všechna  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^q$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_n(\delta)$ . Dále zvolme  $i < N$ . Protože jsou prvky matice  $\boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta})$  spojitě, existuje  $\delta'$  tak, že pro každé  $\boldsymbol{\beta}$  takové, že  $\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0\| < \delta'$ , a každé  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^q$  platí

$$|\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda},$$

Z podmínky (P1) navíc odvodíme, že existuje  $n_i$  takové, že pro všechna  $\boldsymbol{\beta}$  takové, že  $\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0\| < \delta'$ , platí  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_{n_i}(\delta)$ . Zvolíme-li  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_{N-1}, N\}$  dostáváme, že pro všechna  $n \geq n_0$ ,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^q$ ,  $\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_n(\delta)$

$$|\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}| \leq \varepsilon \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\beta}_0) \boldsymbol{\lambda}, \quad i = 1, \dots, n,$$

z čehož při dosazení  $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\omega_i}{\phi} \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\gamma}$  a součtu přes všechna  $i = 1, \dots, n$  dostaneme užitím trojúhelníkové nerovnosti předpoklad (P3) ve tvaru (3.25).

**Poznámka 3.20** Dle článku [9] lze platnost tvrzení vět 3.15 a 3.16 zajistit i následujícími předpoklady. Nechť  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z}), r(\mathbf{Z}) = p$ ,  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce a existují druhé parciální derivace funkce  $b$  vzhledem k  $\boldsymbol{\theta}$ . Nechť je množina  $\mathbf{B}$  otevřená a konvexní a platí  $\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dále nechť platí

$$(P1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_0)) = \infty$$

$$(P7) \quad \text{množina } M = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbf{R}^q, f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) > 0\} \text{ je omezená,}$$

$$(P8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}(\mathbf{Z} \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_0) \mathbf{Z}^T) = 0.$$

**Poznámka 3.21** V případě modelu s jiným než kanonickým linkem není možné až na speciální případy, viz. [47], zajistit jednoznačnost řešení systému věrohodnostních rovnic pro odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}$  jako v případě MGLM s kanonickým linkem, protože logaritmická věrohodnostní funkce není v tomto případě obecně konkávní na  $\mathbf{B}$ . Proto nemusí být lokální maximum maximem globálním a lze tedy pouze určovat asymptotickou existenci, konzistenci a asymptotickou normalitu posloupnosti  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$  řešení věrohodnostních rovnic.

Předpoklady (P2) a (P3) ve větách 3.15 a 3.16 je třeba pro zachování platnosti tvrzení v modelu s nekanonickým linkem dle [9] modifikovat na

(P2\*) pro každé  $\delta > 0$  existuje  $c > 0$  tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}) - c\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}_0) \geq 0, \boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)\} = 1$$

(P3\*) pro každé  $\delta > 0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\boldsymbol{\beta} \in \overline{\mathcal{O}}(\delta)} \|\mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_p\| = 0,$$

$$\text{kde } \mathbb{W}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta})\mathcal{J}^{-1/2}(\boldsymbol{\beta}_0),$$

**Poznámka 3.22** Podle článku [9] je možné upravit i tvrzení důsledku 3.19 a poznámky 3.20 pro případ MGLM s jiným než kanonickým linkem. Předpokládejme, že  $\mathbf{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z})$ ,  $r(\mathbf{Z}) = p$ , linkovací funkce  $\mathbf{g}$  má spojité druhé derivace a existují druhé parciální derivace funkce  $b$  vzhledem k  $\boldsymbol{\theta}$ , množina  $\mathbf{B}$  je otevřená a konvexní a navíc  $\mathbf{Z}_i\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta}))$ ,  $i = 1, \dots, n$  pro všechny  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ .

Označme předpoklady

(P5\*) posloupnost  $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^\infty$  leží v kompaktní množině  $\mathcal{Z}$  všech přípustných reálných matic typu  $q \times g$  tak, že pro každé  $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$  platí  $\mathbf{u}(\mathbf{Z})\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Theta}$ .

$$(P9) \sum_{i=1}^n \text{Tr}(\mathbf{Z}_i\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{Z}_i^T) \leq c < \infty$$

(P10) derivace  $\partial\mathbf{u}/\partial\boldsymbol{\eta}$  jsou ohraničené a  $\partial^2\mathbf{u}/\partial\boldsymbol{\eta}^2$  jsou ohraničené a stejnoměrně spojité

Pak dle [9] z předpokladů (P5\*) a (P6), str. 46, nebo (P1), str. 40, (P7), str. 47, a (P8), str. 47, plyne vlastnost (V4), str. 43. Dále, jsou-li splněny předpoklady (P5\*) a (P6), str. 46, nebo (P1), str. 40, (P7), str. 47, (P8), str. 47, (P9), str. 48, a (P10), str. 48, pak existuje posloupnost  $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$  s vlastnostmi (V1), str. 40, (V2), str. 40, a (V3), str. 43.

**Příklad 3.23** V MGLM plné hodnosti s vysvětlovanými vektory sdruženými podle poznámky 3.5 je dle [9] platnost předpokladů (P5\*) a (P6) zajištěna splněním  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_i/n = \lambda_i > 0$ .

**Věta 3.24** Nechť jsou splněny předpoklady důsledku 3.17. Označme  $\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ . Uvažujme vektor  $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$  lineárních kombinací vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$ , přičemž  $\mathbf{A}$  je matice typu  $k \times p$ , hodnosti  $r(\mathbf{A}) = k$  a platí  $\{\mathbf{A}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\mathbf{A}^T\}_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ , pak lze při  $n \rightarrow \infty$  psát

$$(B) \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left[ \{\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\}_i \in \left( \{\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i - u_{1-\frac{\alpha}{2k}}s_{ii}, \{\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i + u_{1-\frac{\alpha}{2k}}s_{ii} \right) \right] \right\} \geq 1 - \alpha$$

$$(M) \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left[ \{\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\}_i \in \left( \{\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i - u_p s_{ii}, \{\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i + u_p s_{ii} \right) \right] \right\} = 1 - \alpha$$



$$(S) \text{ P } \left\{ |\mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}^T \boldsymbol{\beta}| \leq \sqrt{\chi_{1-\alpha}^2(k) \mathbf{a}^T \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{a}} \quad \text{pro všechny } \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathbf{A}^T) \right\} = 1 - \alpha$$

kde  $s_{ii} = \sqrt{\{\mathbf{A} \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{A}^T\}_{ii}}$  a  $p = (\sqrt[k]{1 - \alpha} + 1)/2$ .

**Důkaz.** Odvození intervalů spolehlivosti lze dle [24], str. 181 založit na Bonferroniho nerovnosti, metodě maximálního modulu nebo Scheffeho metodě. Dle Bonferroniho nerovnosti (viz. [50], str. 23) pro náhodné jevy  $A_1, \dots, A_k$  platí

$$\text{P} \left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^k (1 - \text{P}(A_i)).$$

Navíc z důsledku 3.17 dostáváme  $\{\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i \stackrel{\text{as}}{\sim} N(\{\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}\}_i, s_{ii}^2)$ , a proto při  $n \rightarrow \infty$  je

$$\text{P} \left\{ |\{\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i - \{\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}\}_i| < u_{1-\frac{\alpha}{2k}} s_{ii} \right\} = 1 - \alpha/k.$$

Odtud plyne tvrzení (B).

Z podmínky  $\{\mathbf{A} \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{A}^T\}_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ , plyne asymptotická nezávislost složek vektoru  $\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}$ . Necht'  $Z_i \sim N(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, k$  jsou nezávislé, pak zřejmě

$$\text{P} \left\{ \max_{i=1, \dots, k} |Z_i| \leq z \right\} = \text{P} \{ |Z_i| \leq z, i = 1, \dots, k \}, \quad (3.26)$$

a přitom

$$\text{P} \left\{ \max_{i=1, \dots, k} |Z_i| \leq z \right\} = \prod_{i=1}^k \text{P} \{ |Z_i| \leq z \} = (2F(z) - 1)^k, \quad (3.27)$$

kde  $F$  je distribuční funkce standardního normálního rozdělení. Aby platilo

$$\text{P} \left\{ |\{\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}}\}_i - \{\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}\}_i| / s_{ii} < \eta \quad i = 1, \dots, k \right\} = 1 - \alpha$$

při  $n \rightarrow \infty$  musí proto dle (3.26) a (3.27) být

$$(2F(\eta) - 1)^k = 1 - \alpha,$$

z čehož úpravou dostáváme  $\eta = u_p$ , kde  $p = (\sqrt[k]{1 - \alpha} + 1)/2$ , podobně jako v [7].

Na závěr, z důsledku 3.17 užitím lemmatu A.9 dostáváme při  $n \rightarrow \infty$

$$\text{P} \left\{ (\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A} \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{A} \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}) \leq \chi_{1-\alpha}^2(k) \right\} = 1 - \alpha,$$

z čehož dle lemmatu 10.1, str. 10 v [1] plyne

$$\text{P} \left\{ [\mathbf{h}^T (\mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A} \boldsymbol{\beta})]^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(k) \mathbf{h}^T \mathbf{A} \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{h} \quad \text{pro všechna } \mathbf{h} \in \mathbf{R}^k \right\} = 1 - \alpha.$$

Odtud plyne tvrzení (S), neboť  $\mathbf{a} = \mathbf{A}^T \mathbf{h} \in \mathcal{M}(\mathbf{A}^T)$  pro všechna  $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^k$ .

### 3.5 Testy hypotéz o parametrech modelu

**Definice 3.25** Maximálním mnohorozměrným zobecněným lineárním modelem budeme nazývat model s regulární maticí plánu. V tomto modelu je  $p = qn$ .

Zkoumaný model (MGLM<sub>1</sub>) s hustotou  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi, \omega)$ , linkovací funkcí  $\mathbf{g}$ , vektorovým parametrem  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^p$  a maticí plánu  $\mathbf{Z}$  nazýváme základní model.

Rěkneme, že MGLM<sub>0</sub> je submodelem modelu MGLM<sub>1</sub>, jestliže má stejnou hustotu  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi, \omega)$  a linkovací funkci  $\mathbf{g}$  a má vektorový parametr  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^r, r < p$  a maticí plánu  $\mathbf{Q}$  takovou, že existuje  $p \times r$  matice  $\mathbf{T}$  taková, že  $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{T}$ .

**Poznámka 3.26** Test lineární hypotézy  $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}$  proti  $A: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\xi}$ , kde  $\mathbf{C}$  je matice typu  $s \times p$ , plné řádkové hodnosti  $r(\mathbf{C}) = s$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^s$ , lze v mnohorozměrném zobecněném lineárním modelu založit na testových statistikách užívaných v teorii maximální věrohodnosti. Označme  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ , resp.  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ , MLE na  $\mathbf{B}$ , resp. na  $\{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}; \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}\}$ . Pak možné statistiky pro testování  $H_0$  jsou

Deviance

$$\Delta D = -2 \sum_{i=1}^n [l_i(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) - l_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}})] = \quad (3.28)$$

$$= \frac{2}{\phi} \sum_{i=1}^n \omega_i [y_i^T \mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}}) - b(\mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}})) - y_i^T \mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \widetilde{\boldsymbol{\beta}}) + b(\mathbf{u}(\mathbf{Z}_i \widetilde{\boldsymbol{\beta}}))] \quad (3.29)$$

Waldova statistika

$$W = (\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\xi})^T [\mathbf{C}\mathbf{J}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{C}^T]^{-1} (\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\xi}), \quad (3.30)$$

Skórová statistika

$$S = \mathbf{U}^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{J}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{U}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}). \quad (3.31)$$

Reparametrizací navrženou v článku [8] lze převést test  $H_0$  proti  $A$  na test o subvektoru vhodného vektorového parametru  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $H_0 : \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_{2H}$  proti  $A: \boldsymbol{\alpha}_2 \neq \boldsymbol{\alpha}_{2H}$ . Přesněji, matice  $\mathbf{C}$  může být zapsána jako

$$\mathbf{C} = [\mathbf{0}, (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{1/2}]\mathbf{Q},$$

kde  $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1^T, \mathbf{Q}_2^T]^T$ , řádky matice  $\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1/2}\mathbf{C}$  tvoří ortonormální bázi prostoru  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^T)$  a řádky matice  $\mathbf{Q}_1$  tvoří ortonormální bázi ortogonálního doplňku k  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^T)$ . Po reparametrizaci  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta}$  je proto systém rovnic  $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}$  ekvivalentní s  $[\mathbf{0}, (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{1/2}]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\xi}$ , což lze při označení  $\boldsymbol{\alpha}_{2H} = (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1/2}\boldsymbol{\xi}$  psát ve tvaru  $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_{2H}$ . Proto, jsou-li splněny předpoklady věty 4.4, viz. dále, a platí-li hypotéza  $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}$ , z důsledku C.19 plyne, že statistiky  $\Delta D, W, S$  mají asymptoticky  $\chi^2(p - s)$  rozdělení. V kapitolách 4 a 5 disertace je věnována pozornost asymptotickým rozdělením testových statistik  $\Delta D, W, S$  pro testování hypotéz o subvektoru vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$  za platnosti alternativy.

Poznamenejme, že statistiky pro testování lineárních hypotéz lze při vhodné volbě matice  $\mathbf{C}$  a vektoru  $\boldsymbol{\xi}$  užít k testování submodelů.

**Poznámka 3.27** Stejně jako v zobecněném lineárním modelu (viz. [6]) lze v souladu s monografií [10] založit test vhodnosti základního modelu  $\text{MGLM}_1$  na statistice Pearsonově

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{-1} (\mathbf{y}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_i),$$

Devianci

$$D = -2 \sum_{i=1}^n \left[ l_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - l_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\max}) \right],$$

kde  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i$ , resp.  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ , je maximálně věrohodný odhad parametru  $\boldsymbol{\mu}_i$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ , v základním modelu a  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\max}$  je MLE parametru  $\boldsymbol{\beta}_{\max}$  maximálního modelu (viz. lemma 5.1).

Poznamenejme, že při vhodném doplnění matice plánu  $\mathbb{Z}$ , je-li  $r(\mathbb{Z}) = p$ , na regulární matici maximálního modelu a doplnění vektorového parametru  $\boldsymbol{\beta}$  na parametr  $\boldsymbol{\beta}_{\max} = [\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\beta}_2^T]^T$ , lze testování vhodnosti základního modelu vyjádřit jako testování hypotézy  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$  proti alternativě  $A: \boldsymbol{\beta}_2 \neq \mathbf{0}$ . Proto, jsou-li splněny předpoklady věty 4.4 a řídí-li se náhodné vektory  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  testovaným  $\text{MGLM}_1$ , z důsledku C.19 plyne  $D \stackrel{\text{as}}{\approx} \chi^2(nq - p)$ . V [10], str. 99, jsou zmíněny podmínky, při kterých má testovací statistika  $\chi^2$  asymptotické rozdělení  $\chi^2(nq - p)$ .

**Příklad 3.28** Testové statistiky  $D$  a  $\chi^2$ , resp.  $\Delta D$ , pro testování vhodnosti  $\text{MGLM}$  s multinomickým rozdělením, resp. pro testování lineární hypotézy o jeho parametru, lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} D &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{q+1} N_i Y_{ij} \ln \frac{Y_{ij}}{\hat{\pi}_{ij}}, \\ \chi^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{q+1} N_i \frac{(Y_{ij} - \hat{\pi}_{ij})^2}{\hat{\pi}_{ij}}, \\ \Delta D &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{q+1} N_i Y_{ij} \ln \frac{\hat{\pi}_{ij}}{\tilde{\pi}_{ij}}, \end{aligned}$$

kde  $\hat{\pi}_{ij}$ , resp.  $\tilde{\pi}_{ij}$ , je maximálně věrohodný odhad parametru  $\pi_{ij}$  za platnosti alternativy  $A$ , resp. hypotézy  $H_0$ .

**Příklad 3.29** Ve Fakultní nemocnici Brno byla v rámci grantu Grantové Agentury České Republiky (grant Č. 301/03/D196) Genetická predikce rizika sepse u dětských pacientů studována imunitní odezva dětských pacientů v závislosti na variantách polymorfismů genů. Snahou bylo nalézt kombinace variant polymorfismů, které způsobují náchylnost dětských pacientů k vyšším stupňům sepse. Tento přístup by měl vést k predikci pacientů s vyšším rizikem sepse, čímž by mohla být potřebná léčba započata dříve.

Z předchozích analýz vyplývá, že riziko sepse významně ovlivňují varianty polymorfismů BPI Tag, TLR 399. Tabulka 3.2 ukazuje pozorované četnosti pacientů

Polymorfismus		Sepse				Celkem
BPI-Taq ( <i>i</i> )	TLR 399 ( <i>j</i> )	0	1	2	3	$N_{ij}$
2	2	343	43	127	55	568
2	3	32	6	15	4	57
3	2	190	9	46	10	255
3	3	25	4	3	1	33

Tabulka 3.2: Pozorované četnosti pacientů s různým stupněm sepse a variantami polymorfismů BPI-Taq a TLR 399.

$s$	$\alpha$	$\gamma_3$	$\delta_3$
1	-2.1095	-0.7900	0.6311
2	-0.9713	-0.5078	0.0026
3	-1.8283	-1.1175	-0.2713

Tabulka 3.3: Odhady parametrů modelu MGLM<sub>1</sub>.

s různými kombinacemi variant polymorfismů a stupňů sepse mezi  $N = 913$  pacienty.

Pro popis rozdělení četností  $Y_{ijs}$  různých stupňů sepse  $s = 0, \dots, 3$  v závislosti na kombinaci variant polymorfismů BPI-Taq  $i = 2, 3$  a TLR 399  $j = 2, 3$ , byl zvolen MGLM s kanonickým linkem typu dvojně třídění s multinomickým rozdělením  $\mathbf{Y}_{ij} = [Y_{ij1}, Y_{ij2}, Y_{ij3}, Y_{ij0}]^T \sim \text{Mn}_4(N_{ij}, \boldsymbol{\pi}_{ij})$ ,  $i = 2, 3, j = 2, 3$ . Za referenční třídu byla zvolena třída zdravých pacientů (stupeň sepse 0). V modelu dvojněho třídění lze tedy psát

$$\text{MGLM}_1 : \quad \ln \frac{\pi_{ijs}}{\pi_{ij0}} = \alpha_s + \gamma_{is} + \delta_{js}, \quad i = 2, 3, j = 2, 3, s = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

Hodnoty  $\ln \pi_{ijs}/\pi_{ij0}$  jsou často v literatuře označovány jako logaritmičké šance třídy  $s$  vzhledem k třídě 0, viz. např. [32]. V tabulce 3.3 jsou uvedeny maximálně věrohodné odhady parametrů MGLM<sub>1</sub> získané iterační metodou vážených nejmenších čtverců. Poznamenejme, že pro získání modelu plné hodnosti byla volena vedlejší podmínka  $\gamma_2 = \boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{0}$ . V tabulce 3.4, resp. 3.5, lze pak nalézt odhady pravděpodobností z modelu MGLM<sub>1</sub>, resp. odhady logaritmičkových šancí tříd vzhledem k třídě zdravých pacientů.

Z příkladu 3.23 plyne, že pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{ij}/N = \lambda_{ij} > 0$ , jsou odhady parametrů MGLM<sub>1</sub> asymptoticky normální. Užitím věty 3.24 dostáváme 95% oblasti spolehlivosti pro logaritmičké šance sepsí stupně 1,2,3, např. ve třídě  $i = 2, j = 3$

$$(B) \quad \langle -2.3302, -0.6267 \rangle \times \langle -1.6355, -0.3019 \rangle \times \langle -3.2355, -0.9637 \rangle$$

$$(M) \quad \langle -2.3280, -0.6290 \rangle \times \langle -1.6338, -0.3037 \rangle \times \langle -3.2325, -0.9667 \rangle$$

Polymorfismus		Sepse			
BPI-Taq ( <i>i</i> )	TLR 399 ( <i>j</i> )	0	1	2	3
2	2	0.6022	0.0730	0.2280	0.0968
2	3	0.5780	0.1318	0.2194	0.0708
3	2	0.7488	0.0412	0.1706	0.0394
3	3	0.7289	0.0754	0.1665	0.0292

Tabulka 3.4: Odhady pravděpodobností různých stupňů sepse v závislosti na variantách polymorfismů BPI-Taq a TLR 399.

Polymorfismus		Sepse		
BPI-Taq ( <i>i</i> )	TLR 399 ( <i>j</i> )	1	2	3
2	2	-2.1095	-0.9713	-1.8283
2	3	-1.4785	-0.9687	-2.0996
3	2	-2.8995	-1.4791	-2.9458
3	3	-2.2685	-1.4765	-3.2171

Tabulka 3.5: Odhady logaritmičeských šancí různých stupňů sepse vzhledem ke zdravým pacientům v závislosti na variantách polymorfismů BPI-Taq a TLR 399.

$$(S) \langle -2.4731, -0.4839 \rangle \times \langle -1.7474, -0.1901 \rangle \times \langle -3.4260, -0.7732 \rangle$$

Při testu vlivu jednotlivých polymorfismů, tj. testu submodelů jednoduchého třídění

$$\text{MGLM}_2 : \quad \ln \frac{\pi_{ijs}}{\pi_{ij0}} = \alpha_s + \gamma_{is}, \quad s = 1, \dots, 5$$

a

$$\text{MGLM}_3 : \quad \ln \frac{\pi_{ijs}}{\pi_{ij0}} = \alpha_s + \delta_{js}, \quad s = 1, \dots, 5$$

získáme tabulku analýzy deviance 3.6, podle které zamítáme vhodnost submodelu  $\text{MGLM}_3$  na rozdíl od submodelu  $\text{MGLM}_2$ . Uveďme pro úplnost, že Pearsonova

Model	Deviance	$\Delta D$	$df$	$\chi_{0.95}^2(\Delta df)$
$\text{MGLM}_1$	3.4712		3	7.8147
$\text{MGLM}_2$	6.619	3.1479	3	7.8147
$\text{MGLM}_3$	25.8185	22.3473	3	7.8147

Tabulka 3.6: Analýza deviance.

statistika  $\chi^2$  pro test vhodnosti  $\text{MGLM}_1$ , resp.  $\text{MGLM}_2$ , resp.  $\text{MGLM}_3$ , nabývala postupně hodnot 3.3890, 7.7002, 23.9440. Dále pro test možnosti redukce  $\text{MGLM}_1$  na  $\text{MGLM}_2$  bylo vypočteno  $W = 3.4610$ ,  $S = 3.5705$ . Podobně pro test možnosti

redukce  $MGLM_1$  na  $MGLM_3$  bylo stanoveno  $W = 20.2534$  a  $S = 21.0522$ . Rozhodnutí o zamítnutí testovaných hypotéz by tedy byla stejná pokud bychom test založili na libovolné z možných statistik, tj. na  $D$  nebo  $\chi^2$  pro test vhodnosti modelu a na  $\Delta D$ ,  $W$  nebo  $S$  pro test možnosti redukce základního modelu.

Výsledky uvedené v tomto příkladu byly získány pomocí programů `confreg.m`, `fact.m`, `iwlsm_Mn.m`, `statistics_Mn.m` sepsaných pro Matlab, které lze nalézt v adresáři `priklad_geny` na přiloženém CD.

# Kapitola 4

## Síla testů v MGLM

Předpokládejme, že  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_n^T]^T \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbf{Z})$ ,  $r(\mathbf{Z}) = p$ , existují třetí derivace věrohodnostní funkce náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  a níže definované pole  $\mathcal{K}_{\dots}$  má konečné prvky. Dále uvažujme rozdělení parametru modelu  $\boldsymbol{\beta}$  na dva subvektory  $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T]^T$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbf{R}^r$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbf{R}^{p-r}$ . Vektor  $\boldsymbol{\beta}_1$  budeme nazývat rušivým parametrem.

Tato kapitola je věnována silám testů hypotéz o parametru  $\boldsymbol{\beta}_2$ . Jak bylo uvedeno v poznámce 3.26, lze libovolný test lineární hypotézy  $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}$  převést na test o subvektoru vhodného vektorového parametru. Dále je dle poznámky 3.26 možné takový test založit na Devianci, Waldově nebo skórové statistice. Pro srovnání jejich sil je v této kapitole zvolen Pitmanův přístup (viz [40], kapitola 10.2), při kterém je hypotéza  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H}$  testována proti posloupnosti jednoduchých alternativ  $A_n : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H} + \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\beta}_{2A}$ , přičemž  $\boldsymbol{\varepsilon}_n = O(n^{-1/2})$ .

Asymptotickým rozdělením deviance, skórové a Waldovy statistiky spolu s asymptotickou aproximací síly testů založených na těchto statistikách v jednorozměrném zobecněném lineárním modelu se zabývá článek [5], který vychází z článků [15, 36, 14] věnovaných vlastnostem testových statistik užívaných v teorii maximální věrohodnosti. Cílem této kapitoly je obdobným postupem stanovit asymptotické síly testů v MGLM s využitím dodatku C. K tomu je především potřeba vyjádřit příslušné tvary polí kumulantů  $\mathcal{K}_{\dots}$ ,  $\mathcal{K}_{\dots}$ ,  $\mathcal{K}_{\dots}$ , jejichž značení je zavedeno v poznámce 4.1. Odvozené aproximace sil jsou poté užity při výpočtu sil testů dvojného třídění a jsou srovnány se simulovanými silami.

V článku [8] jsou uvedena asymptotická rozdělení výše zmíněných testových statistik při jinak specifikované posloupnosti alternativ. Odvozené aproximace rozdělení testových statistik vychází z aproximací statistik řádu  $o(1)$  a odpovídají důsledku C.19. Jsou tedy pro všechny testové statistiky asymptoticky ekvivalentní. Nicméně, protože asymptotická rozdělení statistik navržená v této kapitole vychází z aproximací statistik řádu  $o(n^{-1/2})$ , umožňují na rozdíl od důsledku článku [8] rozlišovat mezi jednotlivými aproximacemi sil testů založených na výše zmíněných statistikách.

## 4.1 Odvození sil testů

**Poznámka 4.1** Pro přehlednost zde uvedeme značení použitá v této kapitole. Rozdělení Fisherovy informační matice  $\mathbf{J}$  na submatice  $\mathbf{J}_{12}$ ,  $\mathbf{J}_{11}$ ,  $\mathbf{J}_{21}$ ,  $\mathbf{J}_{22}$  odpovídá rozdělení vektoru  $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T]^T$ . Stejně je tomu i u jiných matic a polí. Dále značíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{-1} \mathbf{J}_{12} \\ -\mathbf{I}_{p-r} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_{\dots} = \left[ \frac{\partial^3 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right]_{i,j,k=1,\dots,p}, \quad \mathbb{K}_{\dots} = \left[ \mathbb{E} \left( \frac{\partial^3 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right) \right]_{i,j,k=1,\dots,p},$$

a  $\mathbb{K}_{\dots} = [\mathbb{E}(U_i \{ \mathcal{J} \}_{jk})]_{i,j,k=1,\dots,p}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots} = [\mathbb{E}(U_i U_j U_k)]_{i,j,k=1,\dots,p}$ . Povšimněme si, že z definice pole  $\mathbb{K}_{\dots}$  plyne  $\mathbb{K}_{i,jk} = \mathbb{K}_{i,kj}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, p$ .

Odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}$  při alternativě A budeme značit stříškou  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = [\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^T, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T]^T$ . Dále značíme  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{2H}^T]^T$ , kde  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T$  je odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}_1$  při hypotéze  $H_0$ . Navíc budeme značit  $\boldsymbol{\beta}_A = [\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2A}^T]^T$ , kde  $\boldsymbol{\beta}_{1A}$  je skutečná hodnota parametru  $\boldsymbol{\beta}_1$ .

Hodnoty funkcí v bodě  $[\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2H}^T]^T$ , resp.  $\boldsymbol{\beta}_A$  jsou pro přehlednost označeny přidáním trojúhelníku (např.  $\widehat{\mathcal{J}}$ ), resp. oblouku (např.  $\widetilde{\mathcal{J}}$ ). Podobně hodnoty funkcí v bodech odhadů  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ , resp.  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$  jsou pro přehlednost označeny přidáním stříšky (např.  $\widehat{\mathcal{J}}$ ), resp. vlnky (např.  $\widetilde{\mathcal{J}}$ ).

Značení uvedené v této poznámce bude dále používáno bez dalšího upozornění.

**Věta 4.2** Prvky trojdimenzionálních polí kumulantů  $\mathbb{K}_{\dots}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots}$  a  $\mathbb{K}_{\dots}$  odpovídajících skórovému vektoru  $\mathcal{U}$  a empirické Fisherově informační matici  $\mathcal{J}$  lze zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{rst} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\phi} \left( \sum_{l=1}^q \frac{\partial^2 \theta_{il}}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \circ \mathbf{Z}_{i(r)} \circ \mathbf{Z}_{i(s)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Sigma}_i^{jk} \frac{\partial^2 \mu_{ik}}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right) \circ \mathbf{Z}_{i(r)} \circ \mathbf{Z}_{i(s)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \frac{\partial^2 \mu_{ij}}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Sigma}_i^{jk} \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \circ \mathbf{Z}_{i(r)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)} \circ \mathbf{Z}_{i(s)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\phi}{\omega_i} \left( \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Sigma}_i^{jk} \frac{\partial^2 \mu_{ik}}{\partial \theta_{im} \partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Sigma}_i^{ml} \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \circ \mathbf{Z}_{i(r)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)} \circ \mathbf{Z}_{i(s)} \\ \mathbb{K}_{r,st} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\phi} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \circ (D_i^T \mathbf{Z}_{i(r)}) \circ \mathbf{Z}_{i(s)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)} \\ \mathbb{K}_{r,s,t} &= \mathbb{K}_{r,st} + \mathbb{K}_{s,rt} + \mathbb{K}_{t,rs} - \mathbb{K}_{rst}, \quad r, s, t = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

přičemž  $\mathbf{Z}_{i(r)}$  je  $r$ -tý sloupec matice  $\mathbf{Z}_i$  a  $\boldsymbol{\Sigma}_i^{jk} = \{\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\}_{jk}$ ,  $j, k = 1, \dots, q$ .



**Důkaz.** Podle věty 3.8 je možné zapsat empirickou Fisherovu informační matici příslušnou náhodnému vektoru  $\mathbf{Y}_i$  ve tvaru

$$\mathcal{J}_i = -\frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_i^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_i (Y_{il} - \mu_{il}) + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_i.$$

Vyjádříme její  $rs$ -tý prvek

$$\{\mathcal{J}_i\}_{rs} = -\frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_{i(s)} (Y_{il} - \mu_{il}) + \mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(s)}. \quad (4.1)$$

Protože má trojdimenzionální pole třetích derivací  $\mathcal{K}_{\dots}$  prvky

$$\mathcal{K}_{rst} = \sum_{i=1}^n \sum_{o=1}^q \{\mathbf{Z}_i\}_{ot} \frac{\partial \{\mathcal{J}_i\}_{rs}}{\partial \eta_o}, \quad (4.2)$$

vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\mathcal{J}_i\}_{rs}}{\partial \eta_o} &= -\frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial^3 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta} \partial \eta_o} \mathbf{Z}_{i(s)} (Y_{il} - \mu_{il}) + \\ &+ \frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_{i(s)} \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \eta_o} + \\ &+ \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial \eta_o} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(s)} + \mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}_i^T}{\partial \eta_o} \mathbf{Z}_{i(s)} - \\ &- \frac{\phi}{\omega_i} \sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{E}_{mn} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(s)} \frac{\partial^2 \mu_{im}}{\partial \theta_n \partial \eta_o}. \end{aligned}$$

Ze vztahu (4.2) plyne  $\mathcal{K}_{rst} = \sum_{i=1}^n \sum_{o=1}^q \{\mathbf{Z}_i\}_{ot} \mathbb{E}(\partial \{\mathcal{J}_i\}_{rs} / \partial \eta_o)$ . Pro odvození první části tvrzení tedy již pouze stačí vypočíst střední hodnotu  $\partial \{\mathcal{J}_i\}_{rs} / \partial \eta_o$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\partial \{\mathcal{J}_i\}_{rs} / \partial \eta_o) &= \frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_{i(s)} \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \eta_o} \\ &+ \mathbf{Z}_{i(r)}^T \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial \eta_o} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(s)} + \mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}_i^T}{\partial \eta_o} \mathbf{Z}_{i(s)} \\ &- \frac{\phi}{\omega_i} \sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^q \mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{E}_{mn} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(s)} \frac{\partial^2 \mu_{im}}{\partial \theta_n \partial \eta_o}. \end{aligned}$$

Dále z vyjádření (4.1) a (3.7) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r,st} &= \mathbb{E}(U_{ir} \{\mathcal{J}_i\}_{st}) = \\ &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{Z}_{i(r)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( -\frac{\omega_i}{\phi} \sum_{l=1}^q \mathbf{Z}_{i(s)}^T \frac{\partial^2 u_l}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{Z}_{i(t)} (Y_{il} - \mu_{il}) + \mathbf{Z}_{i(s)}^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{Z}_{i(t)} \right) \right], \end{aligned}$$

z čehož při zápisu  $\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}_i)$  plyne druhá část tvrzení. Třetí část tvrzení plyne z důkazu lemmatu C.14.

**Důsledek 4.3** Necht'  $\mathbf{g}$  je kanonická linkovací funkce, pak prvky trojdimenzionálních polí kumulantů  $\mathbb{K}_{\dots}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots}$  a  $\mathbb{K}_{\dots}$  odpovídajících příslušnému náhodnému vektoru  $\mathcal{U}$  a empirické Fisherově informační matici  $\mathcal{J}$  jsou tvaru

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{rst} &= -\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\phi} \frac{\partial^3 b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \circ \mathbf{Z}_{i(r)} \circ \mathbf{Z}_{i(s)} \circ \mathbf{Z}_{i(t)}, \\ \mathbb{K}_{r,st} &= 0, \\ \mathbb{K}_{r,s,t} &= -\mathbb{K}_{rst}, \quad r, s, t = 1, \dots, p.\end{aligned}$$

**Důkaz.** V modelu s kanonickou linkovací funkcí dle poznámky 3.3 platí  $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\eta}_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , z čehož přímo plyne

$$\frac{\partial^2 \theta_{il}}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial^2 \theta_{il}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad i, l = 1, \dots, q. \quad (4.3)$$

Dále, vektor  $\partial \mu_{ij} / \partial \boldsymbol{\eta}$  lze psát jako  $\partial \mu_{ij} / \partial \boldsymbol{\theta}$ , který dle vztahu (2.1) odpovídá  $\frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \theta_j \partial \boldsymbol{\theta}}$ .

Protože ze vztahu (2.2) navíc plyne  $\boldsymbol{\Sigma}_i = \frac{\phi}{\omega_i} \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}$ , dostáváme

$$\sum_{j=1}^q \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Sigma}_i^{jk} = \frac{\omega_i}{\phi} \mathbf{I}_{(k)}, \quad i, k = 1, \dots, q, \quad (4.4)$$

kde  $\mathbf{I}_{(k)}$  je  $k$ -tý sloupec jednotkové matice  $\mathbf{I}_q$ . Navíc lze také psát

$$\frac{\partial^2 \mu_{ij}}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial^3 b(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \theta_j \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (4.5)$$

Užitím vztahů (4.3), (4.4) a (4.5) ve větě 4.2 dostáváme tvrzení.

**Věta 4.4** Necht'  $\beta_A$  je skutečná hodnota parametru  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbb{Y} \sim MGLM(f, \mathbf{g}, \mathbb{Z})$ . Necht' jsou splněny předpoklady věty 3.16, nebo důsledku 3.19, nebo poznámky 3.20, je-li  $\mathbf{g}$  kanonická linkovací funkce a v ostatních případech (v modelu s jiným než kanonickým linkem), necht' jsou splněny předpoklady uvedené v poznámce 3.21, nebo předpoklady v poznámce 3.22 pro splnění vlastností (V1) a (V3) a příslušná empirická Fisherova informační matice je pozitivně definitní. Pak lze distribuční funkci  $F_{\Delta D}$  statistiky  $\Delta D$ , resp.  $F_W$  statistiky  $W$ , resp.  $F_S$  statistiky  $S$ , asymptoticky aproximovat

$$F_{\Delta D}(t) = G_{p-r,\lambda}(t) + \sum_{j=0}^2 b_j^{\Delta D} G_{p-r+2j,\lambda}(t) + o(n^{-1/2}), \quad (4.6)$$

$$F_W(t) = G_{p-r,\lambda}(t) + \sum_{j=0}^3 b_j^W G_{p-r+2j,\lambda}(t) + o(n^{-1/2}), \quad (4.7)$$

$$F_S(t) = G_{p-r,\lambda}(t) + \sum_{j=0}^3 b_j^S G_{p-r+2j,\lambda}(t) + o(n^{-1/2}), \quad (4.8)$$

kde  $G_{p-r,\lambda}(t)$  je distribuční funkce rozdělení  $\chi^2(p-r, \lambda)$ ,  $\lambda = \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n$  a

$$\begin{aligned}
b_0^{\Delta D} &= -(b_1^{\Delta D} + b_2^{\Delta D}) \\
b_1^{\Delta D} &= -A/2 + B - C/2 + D - E/2 + F/2 \\
b_2^{\Delta D} &= A/6 - B/2 \\
b_0^W &= -(b_1^W + b_2^W + b_3^W) \\
b_1^W &= -A/2 + B + D - E/2 + F/2 - G/2 \\
b_2^W &= -B/2 - C/2 + G/2 \\
b_3^W &= A/6 \\
b_0^S &= -(b_1^S + b_2^S + b_3^S) \\
b_1^S &= -A/2 + B - C/2 + D - E/2 + F/2 + I/2 - J/2 \\
b_2^S &= -I/2 + J/2 \\
b_3^S &= A/6 - B/2
\end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned}
A &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
B &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
C &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
D &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
E &= \widehat{\mathcal{K}}_{2\dots} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
F &= \widehat{\mathcal{K}}_{2\dots} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
G &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
H &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
I &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} \\
J &= \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}
\end{aligned}$$

s trojdimenzionálními poli kumulantů dle věty 4.2. Přidáním trojúhelníku (např.  $\widehat{\mathcal{J}}$ ) jsou v souladu s poznámkou 4.1 značeny hodnoty funkcí v bodě  $[\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2H}^T]^T$ .

**Důkaz.** Tvrzení plyne z vět C.15, C.16, C.17 a poznámky C.18, neboť jsou splněny předpoklady uvedené v úvodu dodatku C. Sdružená hustota nezávislých náhodných vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  je totiž dle důsledku 3.9 regulární, existují její třetí parciální derivace vzhledem k parametru  $\boldsymbol{\beta}$ , podle důsledku 3.10 platí podmínka (1.1) na str. 18 a z věty 5.8 na str. 27 v [26] plyne platnost podmínky (C.1) na str. 105. Z předpokladů věty v případě modelu s kanonickým linkem plyne jednoznačnost maximálně věrohodných odhadů. V modelu s jiným než kanonickým linkem je dle lemmatu 1.11 jednoznačnost odhadu zajištěna vlastností (V1) na str. 40 a pozitivní definitností empirické Fisherovy informační matice. Navíc z vlastnosti (V3) na str. 43, tj. z asymptotické normality odhadů  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$  a  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ , dle lemmatu A.5 odvodíme  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ .

**Důsledek 4.5** Necht' jsou splněny předpoklady věty 4.4 a linkovací funkce  $\mathbf{g}$  je kanonická. Pak lze distribuční funkci  $F_{\Delta D}$  statistiky  $\Delta D$ , resp.  $F_W$  statistiky  $W$ , resp.  $F_S$  statistiky  $S$ , aproximovat jako (4.6), resp. (4.7), resp. (4.8) s koeficienty

$$\begin{aligned} b_0^{\Delta D} &= -(b_1^{\Delta D} + b_2^{\Delta D}) \\ b_1^{\Delta D} &= -A/2 - C/2 - E/2 \\ b_2^{\Delta D} &= A/6 \\ b_0^W &= b_0^S = -(b_1^W + b_2^W + b_3^W) \\ b_1^W &= b_1^S = -A/2 - E/2 - G/2 \\ b_2^W &= b_2^S = -C/2 + G/2 \\ b_3^W &= b_3^S = A/6 \end{aligned}$$

Označení  $A, C, E, G$  jsou shodná s označeními ve větě 4.4 při polích kumulantů z věty 4.3.

**Důkaz.** Tvrzení plyne z věty 4.4 a důsledku 4.3.

**Poznámka 4.6** Jsou-li splněny předpoklady věty 4.4, pak při  $n \rightarrow \infty$  lze podle důsledku C.19 aproximovat sílu testu  $\beta_{\Delta D}$  (resp.  $\beta_W$ , resp.  $\beta_S$ ) hypotézy  $H_0 : \beta_2 = \beta_{2H}$  proti alternativě  $A : \beta_2 = \beta_{2A}$  založeného na statistice  $\Delta D$  (resp. statistice  $W$ , resp. statistice  $S$ ) v bodě  $\beta_A$  při hladině významnosti  $\alpha$  jako

$$\beta_{\Delta D}(\alpha) = 1 - F_{\Delta D}(\chi_{1-\alpha}^2(p-r)), \quad (4.9)$$

$$\beta_W(\alpha) = 1 - F_W(\chi_{1-\alpha}^2(p-r)), \quad (4.10)$$

$$\beta_S(\alpha) = 1 - F_S(\chi_{1-\alpha}^2(p-r)), \quad (4.11)$$

kde za distribuční funkce  $F_{\Delta D}$ , resp.  $F_W$ , resp.  $F_S$  dosazujeme příslušné aproximace řádu  $o(n^{-1/2})$  z důsledku 4.5 nebo věty 4.4 podle toho, zda uvažujeme model s kanonickým linkem nebo nikoliv. Navíc z důsledku C.19 plyne, že po dosazení distribuční funkce  $\chi_{p-r, \lambda}^2$  rozdělení s  $\lambda = \varepsilon_n^T \widehat{\mathbb{J}}_{22.1} \varepsilon_n$  za distribuční funkci  $F_{\Delta D}$ , resp.  $F_W$ , resp.  $F_S$ , obdržíme aproximaci výše zmíněných sil řádu  $o(1)$ .

**Poznámka 4.7** Uvažujme dvě pevné alternativy  $A_1$  a  $A_2$  takové, že

$$A_1 : \beta_2 = \beta_{20} + \varepsilon \quad \text{a} \quad A_2 : \beta_2 = \beta_{20} + c\varepsilon.$$

Označíme-li  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, \lambda$  koeficienty aproximací distribučních funkcí z věty 4.4 nebo důsledku 4.5 příslušných alternativ  $A_1$ , lze koeficienty aproximací distribučních funkcí příslušné alternativě  $A_2$  psát jako  $c^3 A, c^3 B, cC, cD, c^3 E, c^3 F, cG, cH, cI, cJ, c^2 \lambda$ . Této vlastnosti lze s výhodou užít při vykreslování aproximace síly testů založených na statistikách  $\Delta D, W$  nebo  $S$ .

## 4.2 Příklady

**Příklad 4.8** Uvažujme MGLM typu vyváženého dvojného třídění s kanonickou linkovací funkcí s multinomickým rozdělením popsany v příkladu 3.29 s parametry odvozenými z odhadů parametrů modelu v tomto příkladu, které jsou uvedeny v tabulce 4.1.

$s$	$\alpha$	$\gamma_3$	$\delta_3$
1	-2.1	-0.8	0.6
2	-1.0	-0.5	0.003
3	-1.8	-1.1	-0.3

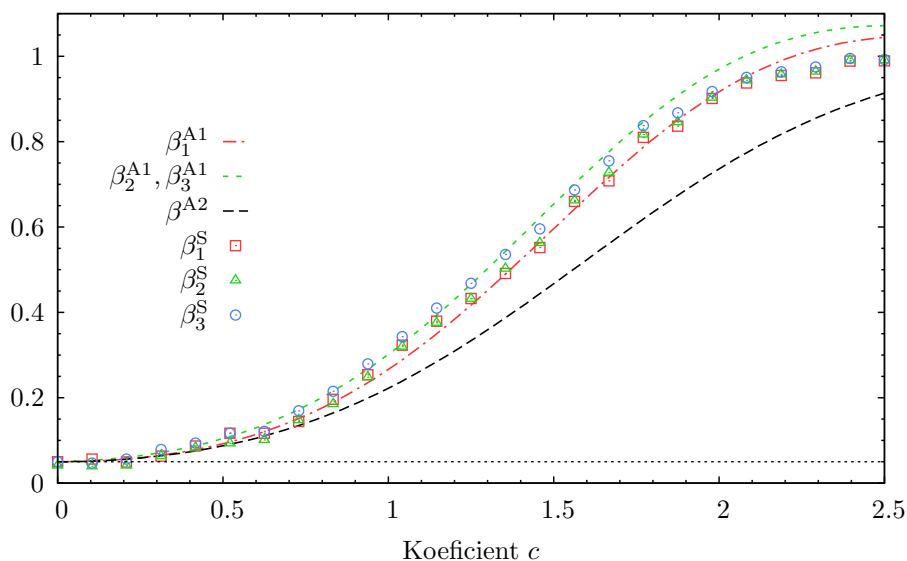
Tabulka 4.1: Parametry v MGLM s multinomickým rozdělením (3.32)

Porovnejme simulované a asymptotické síly testů hypotézy  $H_0 : \beta_2 = \delta_3 = \mathbf{0}$ , kde  $\beta_1 = [\alpha^T, \gamma_3^T]^T$  a  $\varepsilon = \delta_3$  proti alternativě  $A : \beta_2 = c\varepsilon$ , které jsou založeny postupně na statistice  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$ . Výpočet asymptotických aproximací vychází z poznámek 4.6 a 4.7. Pro stanovení simulovaných sil bylo pro každou zvolenou alternativu v Matlabu pomocí programu `multrnd` [45] provedeno 1000 simulací multinomického rozdělení s příslušnými parametry. Poté byla spočtena relativní četnost zamítnutí  $H_0$  pomocí testu založeného na statistice  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$ . Simulace, při kterých iterační proces odhadu parametrů modelu divergoval, byly z výpočtu relativních četností zamítnutí vyloučeny. Obrázek 4.1 znázorňuje simulované a asymptotické aproximace sil testů řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  při hladině významnosti 0.05 a pozorovaných četnostech pacientů v jednotlivých třídách  $\mathbf{N} = [568, 57, 255, 33]^T$ . Pro posouzení vhodnosti asymptotické aproximace při nižším počtu pozorování je v obrázku 4.2 uvedeno srovnání simulované a asymptotické aproximace sil testů řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  při četnostech  $\mathbf{N} = [50, 50, 50, 50]^T$  a hladině významnosti 0.05.

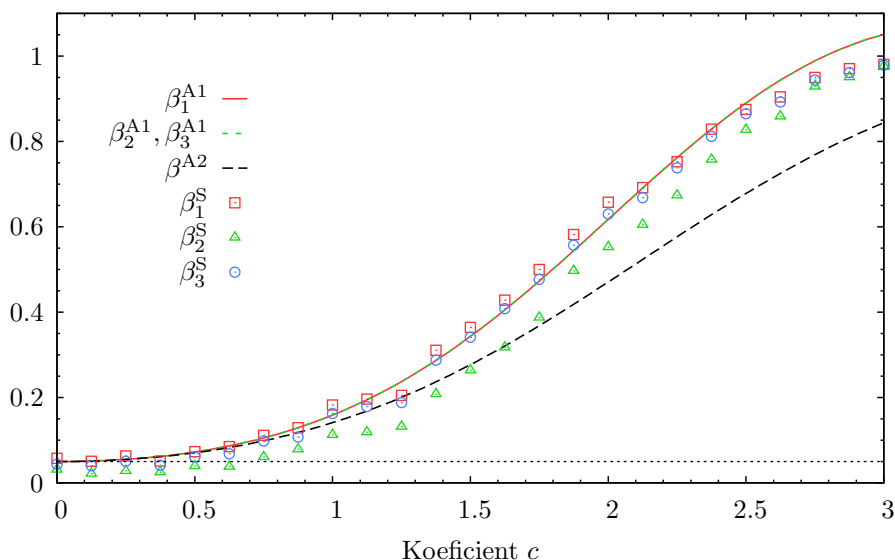
V obou obrázcích 4.1 i 4.2 překročila aproximace síly testů řádu  $o(n^{-1/2})$  hodnotu 1, což plyne z tvaru aproximací ve větě 4.4. Asymptoticky je ale zřejmě tato nepříjemná vlastnost aproximací vyloučena. Aproximace řádu  $o(1)$  naopak nabývá hodnot v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Jak je ale vidět z obrázků, je aproximace řádu  $o(1)$  méně vhodná zejména v alternativách odpovídajících větší hodnotě  $c$ . Poznamenejme dále, že pro menší počty pozorování při simulacích často síla testu založeného na Waldově statistice  $W$  nabývá nižších hodnot než-li síly testů založených na statistikách  $\Delta D$  a  $S$ .

Výsledky uvedené v tomto příkladu byly získány pomocí programů `iwlsm_Mn.m`, `asym_power_Mn.m`, `power_Mn_example1.m`, `sim_power_Mn.m`, `statistics_Mn.m`, `multrnd.m` v Matlabu, které lze nalézt v adresáři `priklad1_Mn` na přiloženém CD.

**Příklad 4.9** Věnujme pozornost MGLM typu jednoduchého třídění s kanonickou linkovací funkcí s dvourozměrným transformovaným Dirichletovým rozdělením. Přes-



Obrázek 4.1: Simulovaná síla ( $S$ ), asymptotická aproximace síly řádu  $o(n^{-1/2})$  ( $A1$ ) a asymptotická aproximace síly řádu  $o(1)$  ( $A2$ ) testů v MGLM typu dvojného třídění s multinomickým rozdělením, při  $N = [568, 57, 255, 33]$ , hodnotách parametrů z tabulky 4.1 a hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . V grafu jsou značeny  $\beta_1$ , resp.  $\beta_2$ , resp.  $\beta_3$  síly testu založeného na statistice  $\Delta D$ , resp.  $W$ , resp.  $S$ .



Obrázek 4.2: Simulovaná síla ( $S$ ), asymptotická aproximace síly řádu  $o(n^{-1/2})$  ( $A1$ ) a asymptotická aproximace síly řádu  $o(1)$  ( $A2$ ) testů v MGLM typu dvojného třídění s multinomickým rozdělením, při  $N = [50, 50, 50, 50]$ , hodnotách parametrů z tabulky 4.1 a při hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . V grafu jsou značeny  $\beta_1$ , resp.  $\beta_2$ , resp.  $\beta_3$  síly testu založeného na statistice  $\Delta D$ , resp.  $W$ , resp.  $S$ .

něji předpokládejme, že  $\mathbf{Y}_i = [Y_{i1}, Y_{i2}]^T \sim \text{TD}(\boldsymbol{\alpha}_i, 15)$ ,  $i = 1, 2$  při parametrech

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}$$

kde  $\boldsymbol{\gamma} = [4, 5]^T$ ,  $\boldsymbol{\delta} = [0.5, 1]^T$ . Počet pozorování v jednotlivých třídách je zvolen asymetricky  $\mathbf{N} = [20, 10]^T$ . V obrázcích 4.3 a 4.4 jsou pro představu vykresleny hustoty průměrů v jednotlivých třídách v souladu s poznámkou 3.5.

Grafické srovnání simulovaných sil a asymptotických aproximací řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  sil testů hypotézy  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ , při  $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}^T$  a  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\delta}$  proti alternativě  $A : \boldsymbol{\beta}_2 = c\boldsymbol{\varepsilon}$  založených postupně na statistice  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$  je uvedeno v obrázku 4.5. Výpočet asymptotických aproximací vychází z poznámek 4.6 a 4.7. Simulované síly byly stanoveny stejným postupem jako v příkladu 4.8.

Z grafického srovnání na obrázku 4.5 vyplývá, že aproximace sil řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  jsou shodné a simulované síly testů založené na testových statistikách  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$  jsou téměř identické. Příčinou je zřejmě tvar hustot transformovaného Dirichletova rozdělení. Dále si lze povšimnout, že simulovaná hladina významnosti testu je vyšší než předepsaná hladina  $\alpha = 0.05$ .

Výsledky uvedené v tomto příkladu byly získány pomocí programů `diripdf.m`, `asym_power_Diri.m`, `inv_mu_Diri.m`, `sim_power_Diri.m`, `statistics_Diri.m`, `iwlsm_Diri.m`, `dif_Diri.m`, `power_Diri_example1.m`, v Matlabu, které lze nalézt v adresáři `priklad2_Diri` na přiloženém CD.

**Příklad 4.10** Uvažujme MGLM s kanonickým linkem typu vyváženého dvojného třídění s Wishartovým rozdělením, přesněji

$$\text{MGLM}_1 : \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\delta}_j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

kde  $\mathbf{g}$  je příslušná kanonická linkovací funkce z tabulky 3.1. Tento příklad je věnován síle testů vhodnosti modelu  $\text{MGLM}_1$  proti submodelu

$$\text{MGLM}_2 : \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i = 1, 2,$$

tj. síle testů hypotézy  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = [\boldsymbol{\delta}_2^T, \boldsymbol{\delta}_3^T]^T = \mathbf{0}$ , při  $\boldsymbol{\beta}_1 = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\gamma}_2^T]^T$  a  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\delta}_2^T, \boldsymbol{\delta}_3^T]^T$  proti alternativě  $A : \boldsymbol{\beta}_2 = c\boldsymbol{\varepsilon}$ , založených postupně na statistice  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$ . Pro grafické porovnání simulovaných sil testů s jejich asymptotickými aproximacemi byly zvoleny hodnoty parametrů z tabulky 4.2, stupeň volnosti Wishartova rozdělení 3 a počet pozorování v jednotlivých třídách  $N = 20$ . Pro získání modelu plné hodnosti byly na parametry kladeny vedlejší podmínky  $\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\delta}_3 = \mathbf{0}$ .

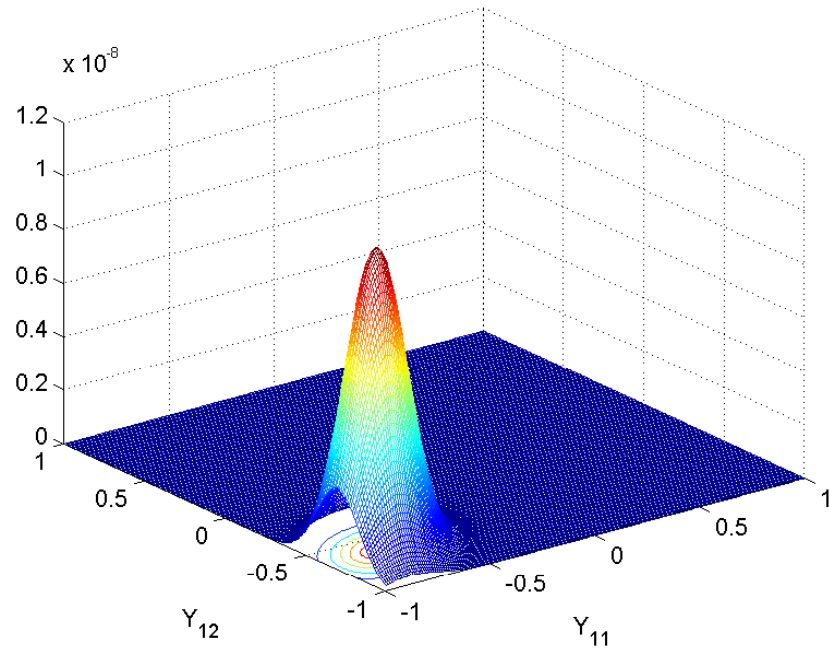
V obrázku 4.6 jsou znázorněny simulované síly testů založených na  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$  spolu s jejich asymptotickými aproximacemi řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  získané stejným postupem jako v příkladu 4.8. Simulovaná síla testu založeného na Waldově statistice byla ve většině alternativ určených hodnotou  $c$  nejmenší, naopak pro některá  $c$  dosahoval nejvyšších hodnot simulované síly test založený na skórové statistice  $S$ . Aproximace sil řádu  $o(n^{-1/2})$  a  $o(1)$  odpovídají simulacím spíše při nižších hodnotách  $c$ .

$s$	$\alpha$	$\gamma_2$	$\delta_2$	$\delta_3$
1	-2	-0.5	0.2	0.4
2	-2	-0.5	0.2	0.4
3	-2	-0.5	0.2	0.4

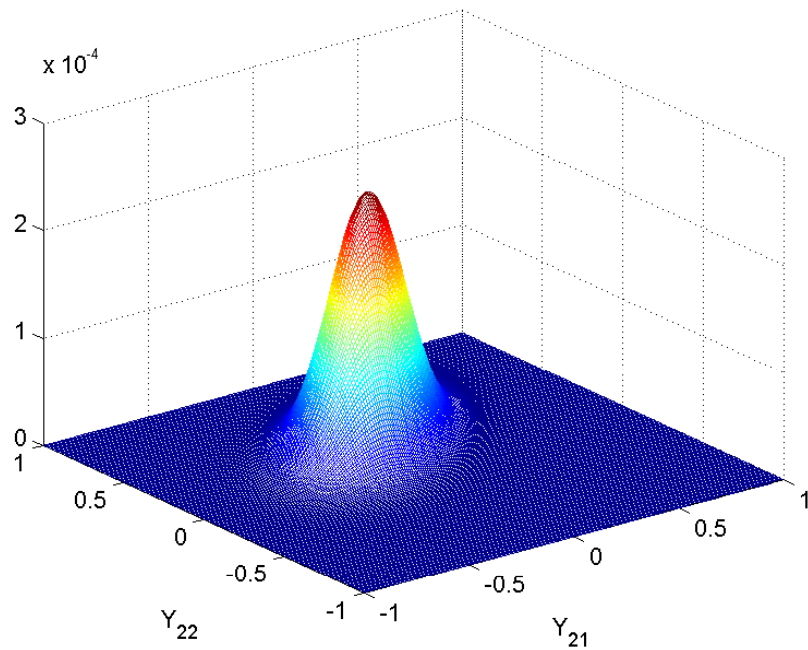
Tabulka 4.2: Hodnoty parametrů modelu  $MGLM_1$ .

Výsledky uvedené v tomto příkladu byly získány pomocí programů `det_mu_Ws.m`, `asym_power_Ws.m`, `iwlsm_Ws.m`, `itriu.m`, `power_Ws_example1.m`, `sim_power_Ws.m`, `inv_mu_Ws.m`, `statistics_Ws.m` v Matlabu, které lze nalézt v adresáři `priklad3_Ws` na příloženém CD.

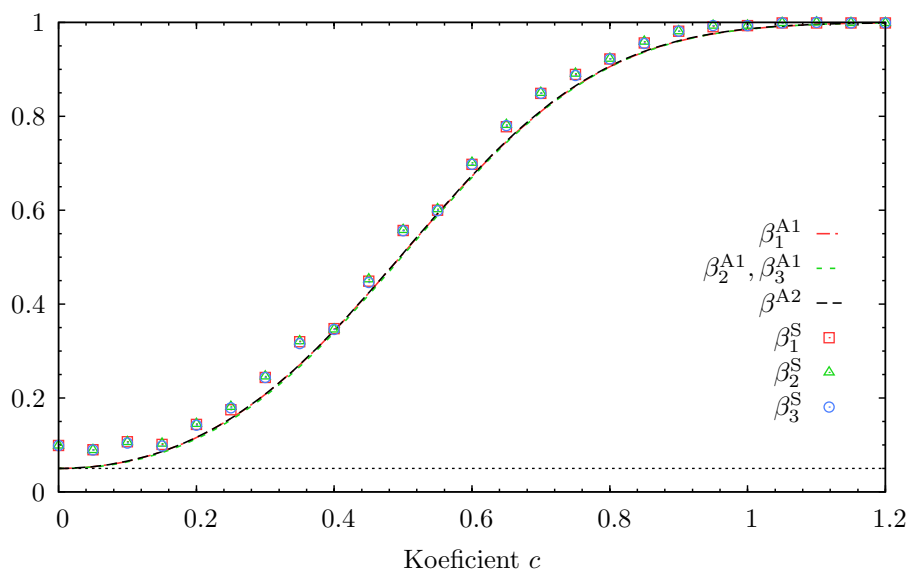




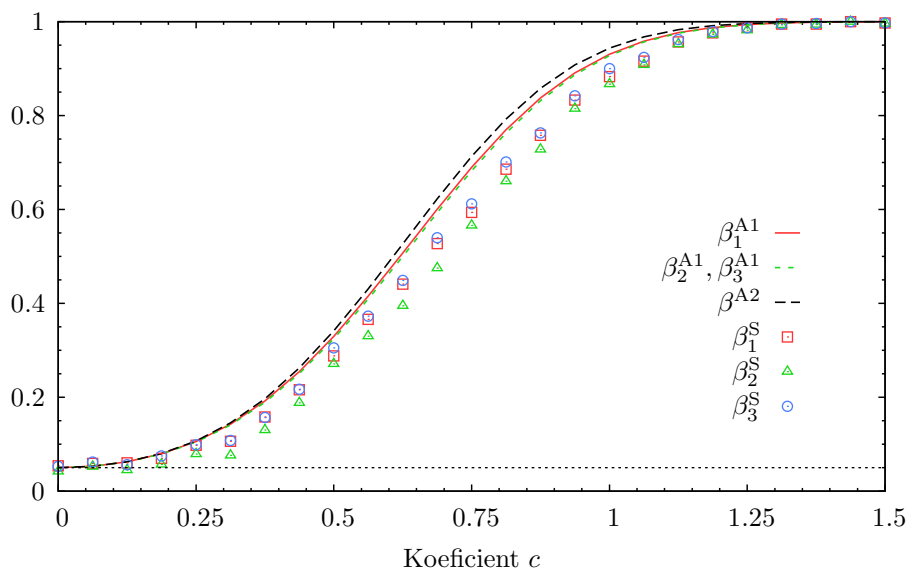
Obrázek 4.3: Hustota průměru v první třídě jednoduchého třídění s transformovaným Dirichletovým rozdělením,  $\alpha_1 = [3.5, 4]^T$ ,  $\alpha_T = 15$ ,  $N = 20$ .



Obrázek 4.4: Hustota průměru v první třídě jednoduchého třídění s transformovaným Dirichletovým rozdělením,  $\alpha_1 = [4.5, 6]^T$ ,  $\alpha_T = 15$ ,  $N = 10$ .



Obrázek 4.5: Simulovaná síla ( $S$ ), asymptotická aproximace síly řádu  $o(n^{-1/2})$  ( $A1$ ) a asymptotická aproximace síly řádu  $o(1)$  ( $A2$ ) testů v MGLM typu jednoduchého třídění s transformovaným Dirichletovým rozdělením při  $N = [20, 10]^T$ , hodnotách parametrů z úvodu příkladu 4.9 a hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . V grafu jsou značeny  $\beta_1$ , resp.  $\beta_2$ , resp.  $\beta_3$  síly testu založeného na statistice  $\Delta D$ , resp.  $W$ , resp.  $S$ .



Obrázek 4.6: Simulovaná síla ( $S$ ), asymptotická aproximace síly řádu  $o(n^{-1/2})$  ( $A1$ ) a asymptotická aproximace síly řádu  $o(1)$  ( $A2$ ) testů v MGLM typu dvojného třídění s Wishartovým rozdělením při  $N = 20$ , hodnotách parametrů z tabulky 4.2 a hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . V grafu jsou značeny  $\beta_1$ , resp.  $\beta_2$ , resp.  $\beta_3$  síly testu založeného na statistice  $\Delta D$ , resp.  $W$ , resp.  $S$ .

# Kapitola 5

## Síla testů v MGLM typu jednoduché třídění

V kapitole 4 jsou odvozeny aproximace sil testů lineárních hypotéz o parametrech MGLM založených na statistikách  $\Delta D$  a  $S$  pro Pitmanovy alternativy. V této kapitole se budeme věnovat alternativnímu přístupu k aproximaci síly testů založených na  $\Delta D$  a  $S$ . Postup aproximace vychází z asymptotického srovnání Deviance, Pearsonovy a Freeman-Tukeyho statistiky v kapitole 14.9, str. 513 v [4], kde jsou tyto statistiky použity k testování shody dat s modelem.

Aproximace, kterou se budeme zabývat v této kapitole, není na rozdíl od aproximací uvedených v kapitole 4 založena na Pitmanově přístupu. Navíc přestože jde o aproximace řádu  $o(1)$ , mohou být asymptotická rozdělení testových statistik odlišná. Aproximace odvozené v této kapitole jsou zobecněním článků autora dizertace [17, 18, 19].

### 5.1 Popis modelu a odhady jeho parametrů

**Lemma 5.1** Nechť se náhodný vektor  $\mathbb{Y}$  řídí maximálním mnohorozměrným zobecněným lineárním modelem plné hodnosti s linkovací funkcí  $\mathbf{g}$  a maticí plánu  $\mathbf{Z}$ . Pak je maximálně věrohodný odhad parametru modelu  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{g}(\mathbb{Y})$ , kde  $\mathbf{g}(\mathbb{Y}) = [\mathbf{g}^T(\mathbf{Y}_1), \dots, \mathbf{g}^T(\mathbf{Y}_n)]^T$  a příslušný odhad vektoru středních hodnot je  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbb{Y}$ , tedy nezávisí na volbě linkovací funkce.

**Důkaz.** Odhad  $\boldsymbol{\beta}$  je dle poznámky 1.10 a věty 3.7 řešením věrohodnostních rovnic tvaru

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{0}.$$

Protože matice  $\mathbf{Z}$  je v maximální modelu regulární, regularita matice  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})$  plyne z regularity funkce  $\mathbf{g}$  a matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta})$  je regulární díky regularitě hustot vektorů  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  pro libovolné  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B}$ , platí pro maximálně věrohodný odhad v tomto

případě

$$\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}.$$

Proto lze také psát

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta},$$

neboť  $\mathbf{g}$  je regulární a prostá funkce a platí vztah (3.1) v poznámce 3.2. Odtud plyne tvrzení.

**Poznámka 5.2** Mnohorozměrný zobecněný lineární model s linkovací funkcí  $\mathbf{g}$  s vysvětlovanými proměnnými sdruženými dle poznámky 3.5, ve kterém je vektor vysvětlujících proměnných  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  jednorozměrný a odpovídá jedné z  $n$  úrovní vysvětlujícího faktoru, nazýváme mnohorozměrným zobecněným lineárním modelem jednoduchého třídění. Pro takový model lze psát

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Položíme-li vedlejší podmínku  $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$ , dostáváme model plné hodnosti s vektorovým parametrem  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^{qn}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\alpha}^\top, \boldsymbol{\beta}_2^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^\top]^\top$ , tedy model maximální. Jsou-li počty  $n_i$  náhodných vektorů vysvětlovaných shodným vektorem  $\mathbf{x}_i$  z poznámky 3.5 stejné (označme  $\omega_i = N$ ), mluvíme o tzv. MGLM vyváženého jednoduchého třídění.

Dále budeme uvažovat submodel MGLM jednoduchého třídění, ve kterém

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\alpha}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Po sdružení dat dle poznámky 3.5 dostáváme maximální model pro  $\bar{\mathbf{Y}}$  s vektorovým parametrem  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^q$  a maticí plánu  $\mathbf{I}_q$ .

V obou modelech lze proto parametry modelu i střední hodnoty vysvětlovaných proměnných odhadnout s užitím lemmatu 5.1.

**Lemma 5.3** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s linkovací funkcí  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak

$$\mathbf{Y}_i \stackrel{\text{as}}{\sim} N_q \left( \boldsymbol{\mu}_i, \frac{1}{N} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_i) \right), \quad i = 1, \dots, n$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_i) = \phi b''(\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i))$ .

**Důkaz.** Tvrzení plyne z mnohorozměrné centrální limitní věty a z věty 2.4.

## 5.2 Aproximace rozdělení deviance

**Lemma 5.4** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak deviance pro

testování hypotézy  $H_0 : [\beta_2^T, \dots, \beta_n^T] = \mathbf{0}$  (vektor  $\mathbf{Y}$  se řídí submodelem) proti alternativě A:  $[\beta_2^T, \dots, \beta_n^T] \neq \mathbf{0}$  (vektor  $\mathbf{Y}$  se řídí základním modelem) je tvaru

$$\Delta D = \frac{2N}{\phi} \sum_{i=1}^n [\mathbf{Y}_i^T \mathbf{g}(\mathbf{Y}_i) - b(\mathbf{g}(\mathbf{Y}_i)) - \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}) + b(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}))],$$

kde  $\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i$ .

**Důkaz.** Tvrzení plyne z poznámek 3.26, 3.3 a z lemmatu 5.1.

**Věta 5.5** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak pro Devianci  $\Delta D$  z lemmatu 5.4 pro test  $H_0 : [\beta_2^T, \dots, \beta_n^T] = \mathbf{0}$  proti A:  $[\beta_2^T, \dots, \beta_n^T] \neq \mathbf{0}$  lze psát  $\Delta D = \Delta D^* + o_p(1)$ , kde

$$\Delta D^* = \Delta D(\boldsymbol{\mu}) + 2N\mathbf{a}^T(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + N(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}),$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\phi} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g}(\mathbf{1}_n \otimes \bar{\boldsymbol{\mu}})], \\ \mathbf{A} &= \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1), \dots, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_n)) - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}), \\ \bar{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\mu}_i. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Tvrzení vychází z Taylorova rozvoje funkce  $f(\mathbf{y}) = \Delta D(\mathbf{y})/N$  v bodě  $\boldsymbol{\mu}$ , skutečné střední hodnotě vektoru  $\mathbf{Y}$ . Vyjádřeme postupně první a druhé parciální derivace funkce

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \frac{2}{\phi} \sum_{i=1}^n [\mathbf{y}_i^T \mathbf{g}(\mathbf{y}_i) - b(\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)) - \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}) + b(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}))],$$

kde  $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$ . Z pravidel maticového derivování dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_i} &= \frac{2}{\phi} \left[ \mathbf{g}(\mathbf{y}_i) + [b''(\mathbf{g}(\mathbf{y}_i))]^{-1} \mathbf{y}_i - [b''(\mathbf{g}(\mathbf{y}_i))]^{-1} b'(\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{n} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}) - \frac{n}{n} [b''(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}))]^{-1} \bar{\mathbf{y}} + \frac{n}{n} [b''(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}))]^{-1} b'(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})) \right] = \\ &= \frac{2}{\phi} (\mathbf{g}(\mathbf{y}_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})). \end{aligned}$$

Dále také, pro druhé derivace platí

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_i \partial \mathbf{y}_j} = \begin{cases} \frac{2}{\phi} [b''(\mathbf{g}(\mathbf{y}_i))]^{-1} - \frac{2}{n\phi} [b''(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}))]^{-1} & i = j, \\ -\frac{2}{n\phi} [b''(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}))]^{-1} & i \neq j, \end{cases}$$

to jest při značení z lemmatu 5.3

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_i \partial \mathbf{y}_j} = \begin{cases} 2\Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i) - \frac{2}{n}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{y}}) & i = j, \\ -\frac{2}{n}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{y}}) & i \neq j. \end{cases}$$

Celkem dostáváme Taylorův polynom druhého stupně funkce  $f(\mathbf{y})$  v bodě  $\boldsymbol{\mu}$  ve tvaru

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &= f(\boldsymbol{\mu}) + \\ &+ \frac{2}{\phi} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g}(\mathbf{1}_n \otimes \bar{\boldsymbol{\mu}})]^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) + \\ &+ (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \left[ \text{diag}(\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1), \dots, \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_n)) - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \otimes \Sigma^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) + \\ &+ o(\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2). \end{aligned}$$

Z asymptotické normality vektoru  $\sqrt{N}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})$  ve větě 5.3 dle lemmatu A.5 plyne  $\|\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}\| = O_p(N^{-1/2})$ . Z lemmatu A.8 a vztahu (A.6) po znásobení  $N$  obdržíme

$$\Delta D = \Delta D^* + o_p(1).$$

Tím je tvrzení věty dokázáno.

**Důsledek 5.6** Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.5 a  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ , kde

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\phi} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g}(\mathbf{1}_n \otimes \bar{\boldsymbol{\mu}})], \\ \mathbf{A} &= \text{diag}(\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1), \dots, \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_n)) - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \otimes \Sigma^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}). \end{aligned}$$

pak

$$\Delta D - \Delta D(\boldsymbol{\mu}) + N\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} \stackrel{\text{as}}{\approx} \sum_{i=1}^{qn} \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i),$$

přičemž  $\delta_i = N(\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a})^2$ , kde  $\mathbf{c}_i$  je  $i$ -tý vlastní vektor odpovídající  $i$ -tému vlastnímu číslu  $\Lambda_{ii}$  matice  $\mathbf{A}\Sigma$ , přičemž platí  $\mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{c}_j = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{c}_i = 1$ ,  $i, j = 1, \dots, qn$ .

**Důkaz.** Podle věty 5.5 konverguje statistika  $\Delta D$  v pravděpodobnosti k  $\Delta D^*$ , jejíž rozdělení lze určit z lemmat B.1 a 5.3. Proto má podle lemmatu A.4 statistika  $\Delta D$  v tvrzení uvedené rozdělení.

**Poznámka 5.7** Tvrzení věty 5.5, resp. důsledku 5.6 lze s užitím poznámky 3.2 upravit i pro modely s jiným než s kanonickým linkem. Stačí pouze funkce  $\mathbf{g}$  a  $\mathbf{g}$  v tvrzeních nahradit složenými funkcemi  $\mathbf{u} \circ \mathbf{g}$  a  $\mathbf{u} \circ \mathbf{g}$ , kde  $\mathbf{u}([\boldsymbol{\eta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_n^T]^T) = [\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}_1^T), \dots, \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}_n^T)]^T$ .

### 5.3 Aproximace rozdělení skórové statistiky

**Lemma 5.8** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak je skórová statistika pro testování  $H_0 : [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] = \mathbf{0}$  proti A:  $[\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] \neq \mathbf{0}$  tvaru

$$S = N \mathbf{Y}^T \left[ (\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) \right] \mathbf{Y},$$

**Důkaz.** Tvrzení získáme dosazením příslušných hodnot odhadů parametru do tvaru skórové statistiky v (3.31). Protože pro získání modelu plné hodnosti klademe  $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$  je matice plánu tvaru  $[\mathbf{1}_n; \mathbf{I}_n]_{[2]} \otimes \mathbf{I}_q$ , kde index [2] u matice  $[\mathbf{1}_n; \mathbf{I}_n]$  značí vynechání druhého sloupce této matice. Z důsledku 3.11 dostáváme vyjádření skórového vektoru

$$\mathcal{U} = \frac{N}{\phi} \left[ \begin{array}{c} n\bar{\mathbf{Y}} - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_i) \\ \mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_n) \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \\ \vdots \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \\ \\ \mathcal{U}_2 \end{array}$$

a Fisherovy informační matice

$$\mathcal{J} = \frac{N}{\phi^2} \left[ \begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_i) & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_2) & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_3) & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_n) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_2) & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_2) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_3) & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_3) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_n) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_n) \end{array} \right]$$

Protože je odhad parametrů při platnosti  $H_0$  roven  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}})$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , a tedy  $\widehat{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_i)} = \bar{\mathbf{Y}}$ , je subvektor  $\mathcal{U}_1$  skórového vektoru  $\mathcal{U}$  příslušný parametru  $\boldsymbol{\alpha}$  nulový. Odtud

$$S = \mathcal{U}_2^T(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \mathcal{J}_{22.1}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \mathcal{U}_2(\tilde{\boldsymbol{\beta}}), \quad (5.2)$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{22.1}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) &= \frac{N}{\phi^2} (\mathbf{I}_{n-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{Y}})) - \frac{N}{n\phi^2} (\mathbf{1}_{n-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{Y}})) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{1}_{n-1}^T \otimes \boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{Y}})) \\ &= \frac{N}{\phi^2} (\mathbf{I}_{n-1} - \frac{1}{n} \mathbf{1}_{n-1} \mathbf{1}_{n-1}^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{Y}}). \end{aligned}$$

Odtud užitím vztahu pro inverzi součtu matic dostáváme

$$\mathcal{J}_{22.1}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{\phi^2}{N} (\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{1}_{n-1} \mathbf{1}_{n-1}^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}).$$

Po dosazení do vztahu (5.2) celkem obdržíme

$$S = N \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}),$$

z čehož lze úpravou odvodit vyjádření  $S$  ve tvaru

$$N \mathbf{Y}^T \left( \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_N - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_N \right) \left( \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) \right) \left( \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_N - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_N \right) \mathbf{Y}.$$

Odtud s využitím vlastností Kroneckerova součinu plyne tvrzení.

**Věta 5.9** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak pro skórovou statistiku z lemmatu 5.8 pro test hypotézy  $H_0 : [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] = \mathbf{0}$  proti alternativě  $A: [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] \neq \mathbf{0}$  lze psát  $S = S^* + o_p(1)$ , kde

$$S^* = N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y}.$$

**Důkaz.** Důkaz spočívá v aproximaci varianční matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}})$ . Z lemmatu 5.3 plyne  $\sqrt{N}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}) \stackrel{\text{as}}{\approx} N_q \left( \mathbf{0}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}_i) \right)$ , z čehož podle lemmatu A.5 vyplývá  $\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\boldsymbol{\mu}} = O_p(N^{-1/2})$  a dle lemmatu A.7 pak  $\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\boldsymbol{\mu}} + o_p(1)$ . Nyní tedy dle lemmatu A.9 lze psát

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) + o_p(1).$$

Tedy

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}}) \boldsymbol{\Sigma}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{I}_p + o_p(1).$$

Po dosazení do skórové statistiky dostáváme

$$\begin{aligned} S &= N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes (\mathbf{I}_p + o_p(1)) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y} \\ &= N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y} + \\ &\quad + N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y} o_p(1). \end{aligned}$$

Protože dle důkazu důsledku 5.10 má kvadratická forma

$$N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y}$$

asymptotické rozdělení lineární kombinace nezávislých necentrálních  $\chi^2$  rozdělení, lze dle lemmatu A.5 psát

$$S = N \mathbf{Y}^T \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right] \mathbf{Y} + O_p(1) o_p(1).$$

Odtud užitím vztahu (A.3) plyne tvrzení.



**Důsledek 5.10** Jsou-li splněny předpoklady věty 5.9, pak

$$S \stackrel{\text{as}}{\approx} \sum_{i=1}^{qn} \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i),$$

přičemž  $\delta_i = N(\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\mu})^2$ , kde  $\mathbf{c}_i$  je  $i$ -tý vlastní vektor odpovídající  $i$ -tému vlastnímu číslu  $\Lambda_{ii}$  matice  $[(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}})] \boldsymbol{\Sigma}$ , přičemž platí  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_j = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i = 1$ ,  $i, j = 1, \dots, qn$ .

**Důkaz.** Podle věty 5.9 konverguje statistika  $S$  v pravděpodobnosti k  $S^*$ , jejíž rozdělení určíme dle lemmatu B.1. Označme  $\mathbf{A} = [(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}})]$ . Náhodnou veličinu  $S^*$  lze psát ve tvaru

$$S^* = N(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + 2N\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) - N\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}.$$

Protože  $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$  z lemmatu B.1 a 5.3 obdržíme

$$S^* + N\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} + N\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \stackrel{\text{as}}{\approx} \sum_{i=1}^{nq} \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i),$$

kde  $\delta_i = N(\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})^2$ , kde  $\mathbf{c}_i$  je  $i$ -tý vlastní vektor odpovídající  $i$ -tému vlastnímu číslu  $\Lambda_{ii}$  matice  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$ , přičemž platí  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_j = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i = 1$ ,  $i, j = 1, \dots, qn$ . Nejprve, z definice pseudoinverzní matice víme, že  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}$ . Dále, protože je  $\mathbf{c}_i$  vlastní vektor matice  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  musí platit

$$\Lambda_{ii} \mathbf{c}_i = \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i. \quad (5.3)$$

Po znásobení obou stran rovnice maticí  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$  dostáváme

$$\Lambda_{ii} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}_i = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i = \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i,$$

což díky (5.3) znamená

$$\Lambda_{ii} \mathbf{c}_i = \Lambda_{ii} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}_i.$$

Tedy je-li  $\Lambda_{ii} \neq 0$  lze příslušný parametr necentrality počítat přímo jako  $\delta_i = N(\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\mu})^2$ . V opačném případě, kdy  $\Lambda_{ii} = 0$ , parametr  $\delta_i$  rozdělení statistiky  $S^*$  neovlivní, můžeme tedy položit  $\delta_i = N(\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\mu})^2$ . Celkem má podle lemmatu A.4 statistika  $S$  v tvrzení uvedené rozdělení.

## 5.4 Aproximace sil testů založených na $\Delta D$ a $S$

**Věta 5.11** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2, pak pro testovací statistiky  $\Delta D$ ,  $S$  pro test  $H_0 : [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] = \mathbf{0}$  proti  $A : [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] \neq \mathbf{0}$  lze při platnosti hypotézy  $H_0$  psát  $S = S^* + o_p(1)$ ,  $\Delta D = S^* + o_p(1)$ , přičemž

$$S^* = N \mathbf{Y}^T \left[ (\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}) \right] \mathbf{Y},$$

kde  $\boldsymbol{\mu}$  je  $q$ -rozměrný vektor rovný  $\mathbf{g}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$ . Navíc asymptotická rozdělení testovacích statistik jsou shodná  $\Delta D \stackrel{\text{as}}{\approx} \chi^2((n-1)N)$ ,  $S \stackrel{\text{as}}{\approx} \chi^2((n-1)N)$ .

**Důkaz.** Tvrzení  $S = S^* + o_p(1)$  plyne přímo z věty 5.9. Pro aproximaci deviance při platnosti hypotézy využijme větu 5.5

$$\Delta D^* = \Delta D(\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2N\mathbf{a}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}) + N(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}).$$

Přitom platí  $\Delta D(\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  a

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}).$$

Protože z vlastností Kroneckerova součinu plyne

$$\left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}) \right] [\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}] = \mathbf{0},$$

odvodíme

$$N(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}) = N\mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{Y}. \quad (5.4)$$

Odtud plyne  $\Delta D = S^* + o_p(1)$ .

Navíc, protože dle lemmatu 5.3 platí  $\mathbf{Y} \stackrel{\text{as}}{\approx} N_{nq}(\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{N} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}))$  a matice

$$N\mathbf{A} \left( \mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{N} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}) \right) = \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \mathbf{I}_q$$

je symetrická a idempotentní, užitím věty 4.16 v [1] odvodíme

$$S \stackrel{\text{as}}{\approx} \chi^2(\text{Tr} \left( \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \mathbf{I}_N \right)).$$

Přitom zřejmě

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \otimes \mathbf{I}_N \right) &= \text{Tr} \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) \text{Tr}(\mathbf{I}_N) = \\ &= r \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) N = (n-1)N. \end{aligned}$$

**Důsledek 5.12** Nechť se náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  řídí MGLM vyváženého jednoduchého třídění plné hodnosti s kanonickým linkem  $\mathbf{g}$  dle poznámky 5.2. Pak při  $n \rightarrow \infty$  lze aproximovat sílu testu  $\beta_{\Delta D}$  (resp.  $\beta_S$ ) hypotézy  $H_0 : [\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] = \mathbf{0}$  proti alternativě A:  $[\boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n^T] \neq \mathbf{0}$ , založeného na statistice  $\Delta D$  (resp.  $S$ ), v bodě  $\boldsymbol{\beta}_A \in \mathbf{B} \subset \mathbf{R}^{n-1}$  při hladině významnosti  $\alpha$  jako

$$\beta_{\Delta D}(\alpha) = 1 - F_{\Delta D}(\chi_{1-\alpha}^2((n-1)N)), \quad (5.5)$$

$$\beta_S(\alpha) = 1 - F_S(\chi_{1-\alpha}^2((n-1)N)), \quad (5.6)$$

kde za distribuční funkci  $F_{\Delta D}$ , resp.  $F_S$ , dosazujeme příslušné distribuční funkce asymptotických aproximací rozdělení statistik z důsledků 5.6, resp. 5.10.

**Důkaz.** Tvrzení plyne z důsledku 5.10 a 5.6 a věty 5.11.

## Kapitola 6

# Porovnání aproximací sil testů v MGLM

Snahou této kapitoly je porovnat aproximace sil testů o parametrech mnohorozměrného zobecněného lineárního modelu vyváženého typu jednoduchého třídění z poznámky 5.2 (dále jen MGLM1), které jsou odvozeny v kapitolách 5 a 4. Stejně jako v kapitole 5 se zaměříme na síly testů hypotézy  $H_0 : \beta_i = \mathbf{0}, i = 2, \dots, n$ . Protože je v kapitole 5 odvozena síla testů založených na statistikách  $\Delta D$  a  $S$  bude pozornost věnována těmto dvěma statistikám.

Povšimněme si nejdříve několika základních rozdílů mezi aproximacemi řádu  $o(n^{-1/2})$  z kapitoly 4 (v dalším označeny A1), aproximacemi řádu  $o(1)$  z kapitoly 4 (v dalším označeny A2) a aproximacemi řádu  $o(1)$  z kapitoly 5 (v dalším označeny A3). Na rozdíl od aproximace sil A3 jsou aproximace A1 a A2 založeny na Pitmanově přístupu, při kterém je uvažována posloupnost jednoduchých alternativ  $A_N : [\beta_2^T, \dots, \beta_n^T]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_N$ , přičemž  $\boldsymbol{\varepsilon}_N = O(N^{-1/2})$ . Z tvarů aproximací tedy vyplývá, že by aproximace A3 měly odpovídat simulovaným silám více než aproximace A1 a A2 zejména v alternativách odpovídajících větším hodnotám  $c$ , viz. poznámka 4.7.

Navíc je třeba zdůraznit, že z tvaru aproximací sil A1 je zřejmé, že jejich oborem hodnot není nutně interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . Nicméně, protože zmiňované aproximace vychází z asymptotických aproximací distribučních funkcí, lze tento nevhodný rys aproximace očekávat zejména při nižších rozsazích výběrů.

Následující ukázky srovnání navržených aproximací se simulovanými silami v modelu MGLM1 s rozdělením multinomickým, transformovaným Dirichletovým, Wishartovým, binomickým, Poissonovým, gama a negativně binomickým. V modelech s jednorozměrným rozdělením byly parametry modelu voleny tak, aby bylo možné sledovat vliv rušivých parametrů ( $\boldsymbol{\alpha}$ ) na síly a vlastnosti aproximací. Ve všech modelech byly voleny rozsahy výběru postupně 10, 50 a 150, výjimkou byl pouze MGLM1 s multinomickým rozdělením, kde byly simulace provedeny pro rozsahy 20, 50 a 150. Pro každou zvolenou alternativu byla z 500 simulací, popř. z 1000 simulací pro MGLM1 s multinomickým, transformovaným Dirichletovým, Wishartovým rozděle-

ním, spočtena relativní četnost zamítnutí hypotézy  $H_0$  užitím testu založeného na statistice  $\Delta D$  a  $S$ . Případy, ve kterých iterační proces odhadu parametrů divergoval, byly z výpočtu relativní četnosti zamítnutí hypotézy vyloučeny.

V grafech jsou srovnávány simulované síly (označeno indexem  $S$ ) s aproximacemi řádu  $o(n^{-1/2})$  (označeno indexem  $A1$ ) a řádu  $o(1)$  (označeno indexem  $A2$ ) vycházejícími z poznámky 4.6 a aproximacemi řádu  $o(1)$  dle kapitoly 5 (označeno indexem  $A3$ ). Zápis  $\beta_1$  označuje sílu testu založeného na Devianci  $\Delta D$ , naopak zápis  $\beta_3$  představuje sílu testu založeného na skórové statistice  $S$ .

Obrázky uvedené v této kapitole byly získány pomocí programů v Matlabu, které lze nalézt v adresářích `srovnani_1dim`, `srovnani_diri`, `srovnani_Mn`, `srovnani_Ws` na přiloženém CD.

## 6.1 Multinomické rozdělení

V obrázcích v 6.1 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s multinomickým rozdělením

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

kde  $\boldsymbol{\alpha} = [1, 2, 1, 2]^T/10$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = [2, 1, 1, 1]^T$  a  $\boldsymbol{\beta}_3 = [1, 1, 1, 2]^T$ . Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $c$  dle poznámky 4.7. Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 1000.

## 6.2 Transformované Dirichletovo rozdělení

V obrázcích v 6.2 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s transformovaným Dirichletovým rozdělením z příkladu 2.8

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.2)$$

kde  $\boldsymbol{\alpha} = [2, 4]^T$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = [1, 3]^T$ , při  $\alpha_T = 20$ . Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $c$  dle poznámky 4.7. Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 1000.

## 6.3 Wishartovo rozdělení

V obrázcích v 6.3 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s Wishartovým rozdělením se stupněm volnosti 3 z příkladu 2.9

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_i) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.3)$$

kde  $\boldsymbol{\alpha} = [-1, -1, -1]^T$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = [-0.5, -0.5, -0.5]^T$ . Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $c$  dle poznámky 4.7. Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 1000.

## 6.4 Binomické rozdělení

V obrázcích v 6.4, 6.5, 6.6 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s binomickým rozdělením  $\text{Bi}(10\mu_i, 10)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\mu_i = \mu_1 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.4)$$

kde za hodnoty  $\mu_1$  jsou postupně voleny 0.1, 0.4, a 0.6. Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $h$ . Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 500.

## 6.5 Gama rozdělení

V obrázcích v 6.7, 6.8, 6.9 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s gama rozdělením  $G(3.5, \mu_i/3.5)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\mu_i = \mu_1 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.5)$$

kde za hodnoty  $\mu_1$  jsou postupně voleny 1, 5, a 10. Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $h$ . Rozsah simulací byl stejně jako v modelech s jinými rozděleními v každé zvolené alternativě 500.

## 6.6 Poissonovo rozdělení

V obrázcích v 6.10, 6.11, 6.12 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s Poissonovým rozdělením  $\text{Po}(\mu_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\mu_i = \mu_1 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.6)$$

kde za hodnoty  $\mu_1$  jsou postupně voleny 1, 5, a 10. Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $h$ . Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 500.

## 6.7 Negativně binomické rozdělení

V obrázcích v 6.13, 6.14, 6.15 jsou uvedena srovnání sil testů založených na Devianci a skórové statistice v MGLM1 s negativně binomickým rozdělením  $\text{NB}(3, \frac{3}{\mu_i+3})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

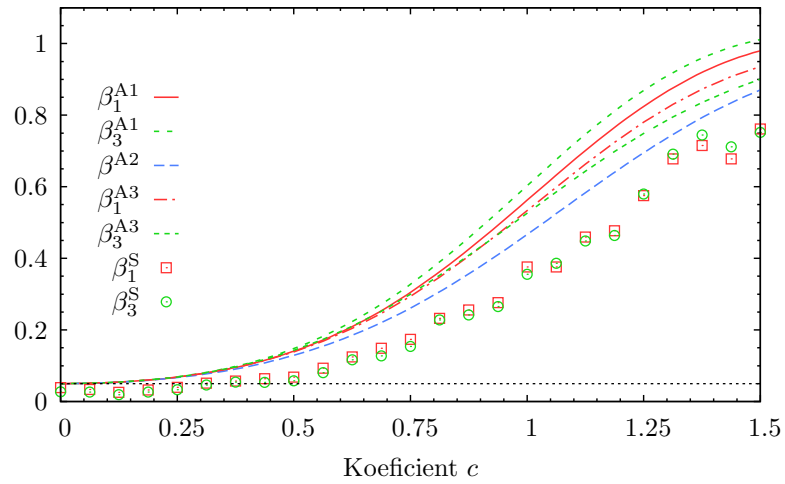
$$\mu_i = \mu_1 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.7)$$

kde za hodnoty  $\mu_1$  jsou postupně voleny 1, 5, a 10. Síly jsou vyneseny v závislosti na koeficientu  $h$ . Rozsah simulací byl v každé zvolené alternativě 500.

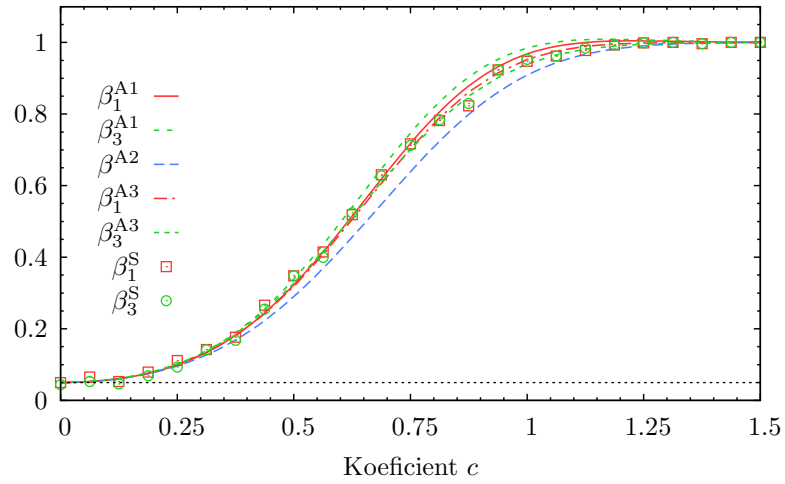
## 6.8 Závěry

V mnoha případech v obrázcích 6.1 – 6.15 je možné pozorovat značný rozdíl v aproximacích  $A1$ ,  $A2$  a  $A3$ . Při nižších počtech pozorování se v některých případech projevila nepříjemná vlastnost aproximace  $A1$  totiž, že nabývá hodnot vyšších než 1, viz. např. obrázek 6.1(a), 6.4(a), 6.7(a), 6.10(a), 6.13(a). Často se také ukazovala aproximace  $A2$  jako nejvíce odpovídající simulovaným silám a to zejména pro vyšší hodnoty  $c$ , viz. např. obrázek 6.4(a), 6.8(a), 6.10(a), 6.13(a). V některých případech se aproximace  $A2$  jevila jako nejméně vhodná, viz. např. obrázek 6.1(b), 6.2(c), 6.4(a), 6.8(a), 6.10(a), 6.13(a). V obrázcích lze též pozorovat, že rušivý parametr  $\alpha$  má vliv na kvalitu aproximací. Poznamenejme také, že rozdíly mezi aproximacemi se s rostoucím počtem pozorování  $N$  zmenšují.

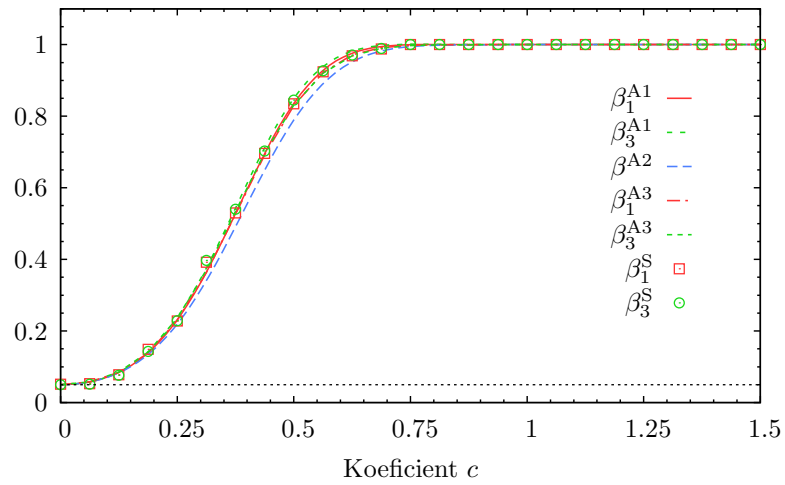
Z této simulační studie tedy vyplývá, že v případě testů hypotézy  $H_0$  v MGLM1 založených na  $\Delta D$  nebo  $S$  je pro aproximaci jejich sil nejvhodnější volit aproximaci  $A3$  z kapitoly 5. Další navrhované aproximace  $A1$  a  $A2$  jsou vhodné spíše v „bližších“ alternativách odpovídajících nižším hodnotám  $c$ , popř.  $h$ . S rostoucím počtem pozorování  $N$  se ovšem i tyto aproximace přibližují simulovaným silám testů.



(a) 20 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

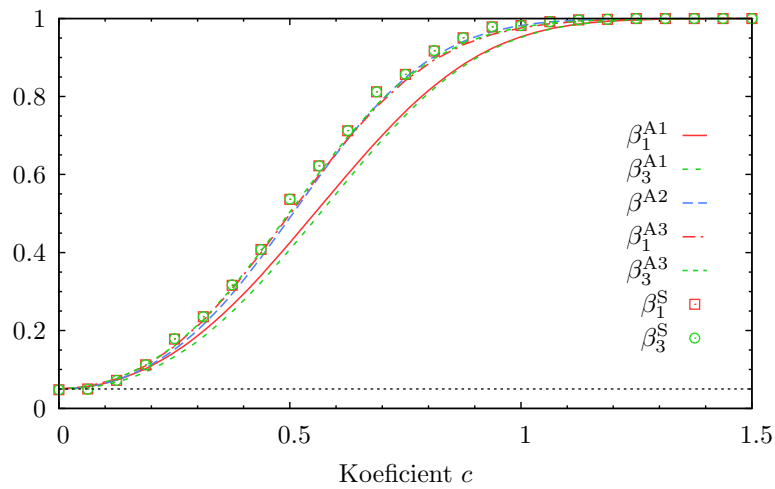


(b) 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

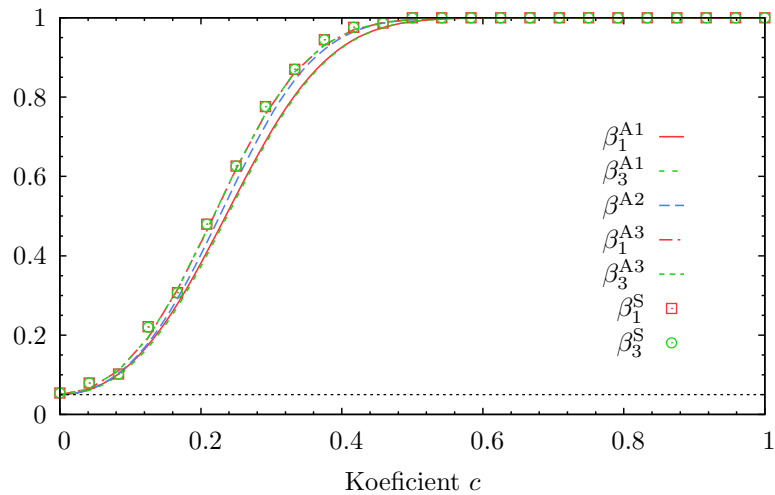


(c) 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

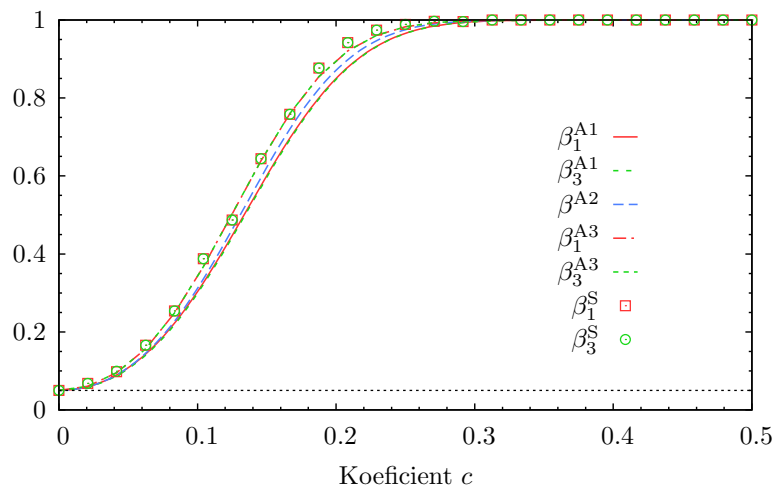
Obrázek 6.1: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s multinomickým rozdělením z 6.1.



(a) 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



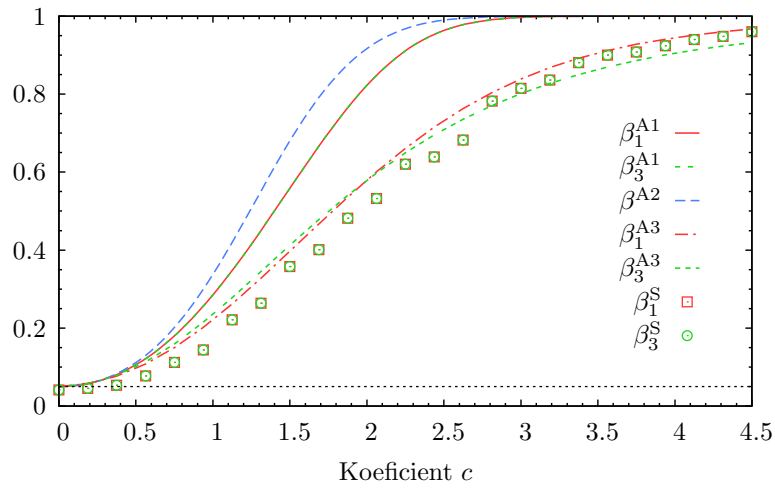
(b) 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



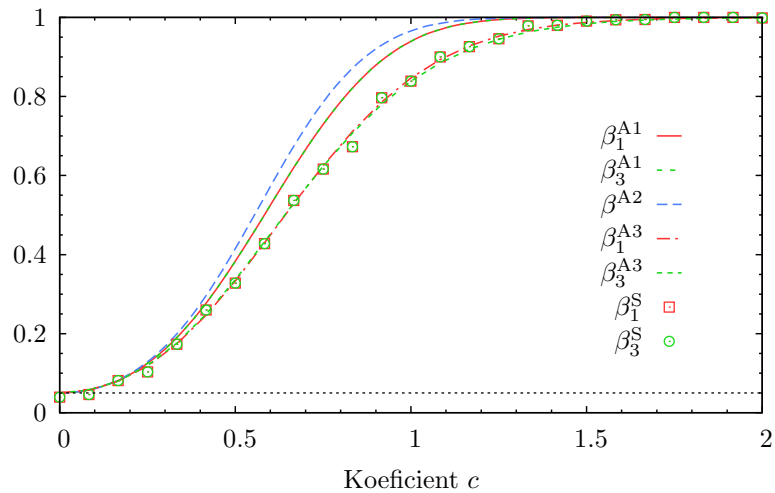
(c) 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

Obrázek 6.2: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s transformovaným Dirichletovým rozdělením z 6.2.

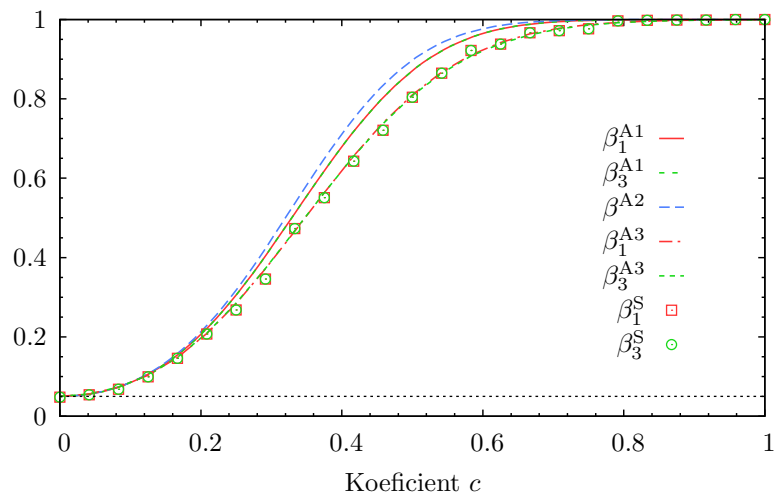




(a) 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

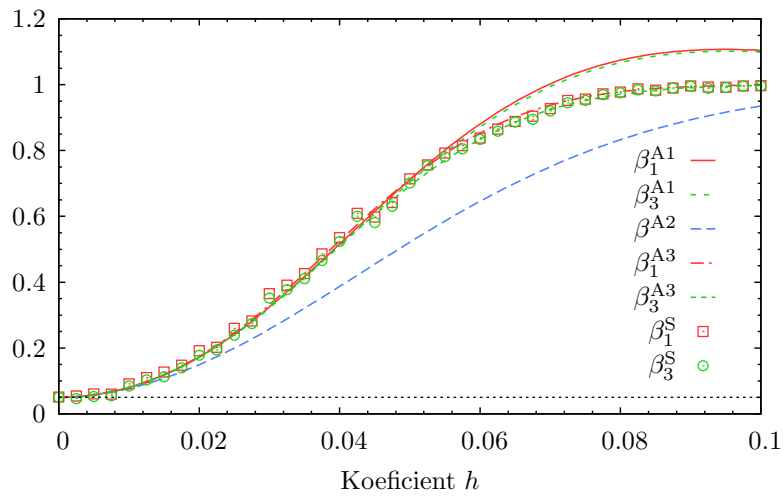


(b) 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

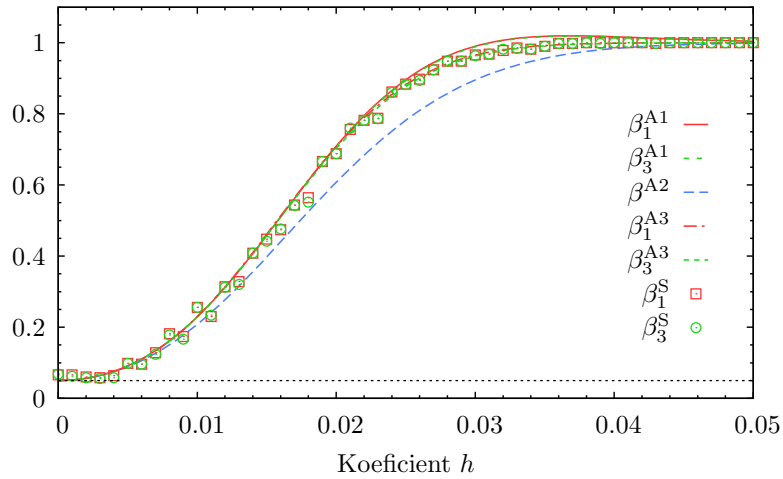


(c) 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

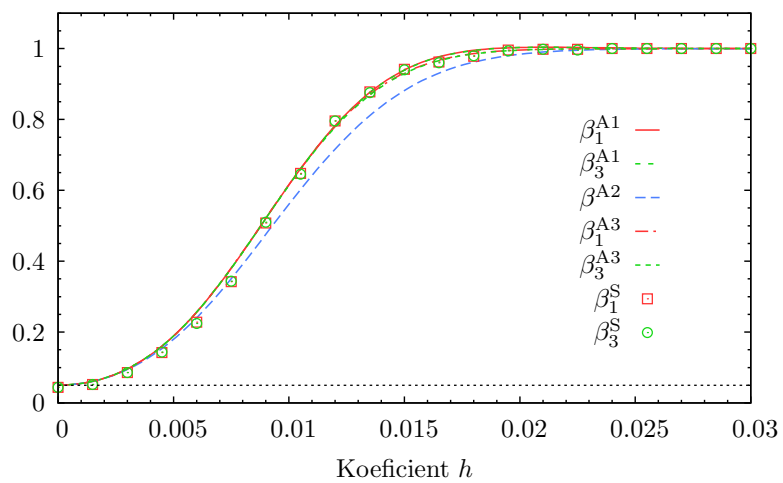
Obrázek 6.3: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s Wishartovým rozdělením z 6.3.



(a)  $\mu_1 = 0.1$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

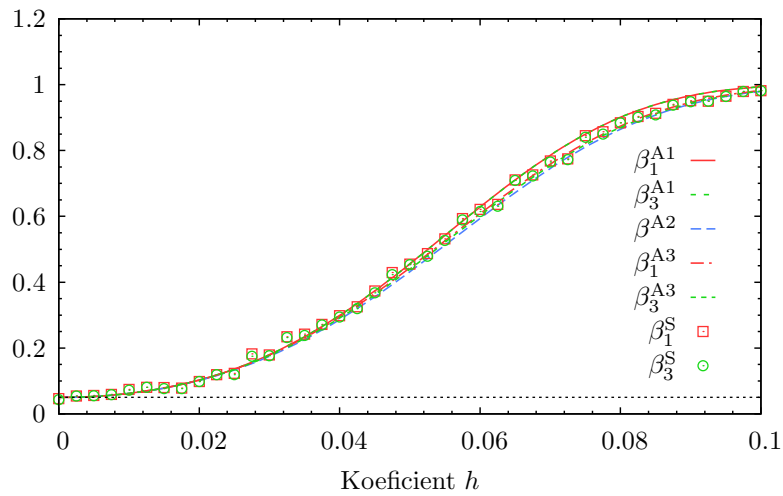


(b)  $\mu_1 = 0.1$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

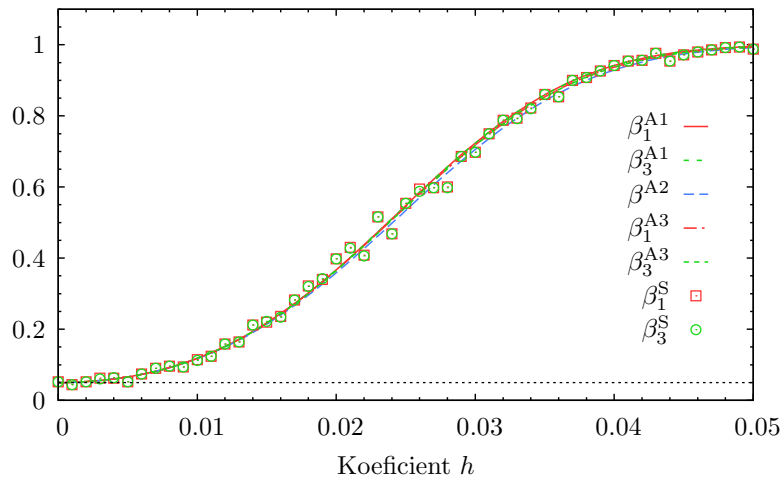


(c)  $\mu_1 = 0.1$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

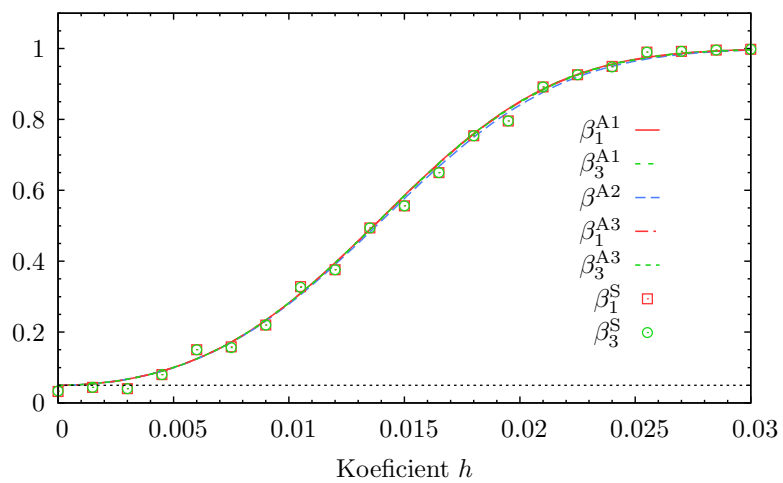
Obrázek 6.4: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s binomickým rozdělením z 6.4.



(a)  $\mu_1 = 0.4$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

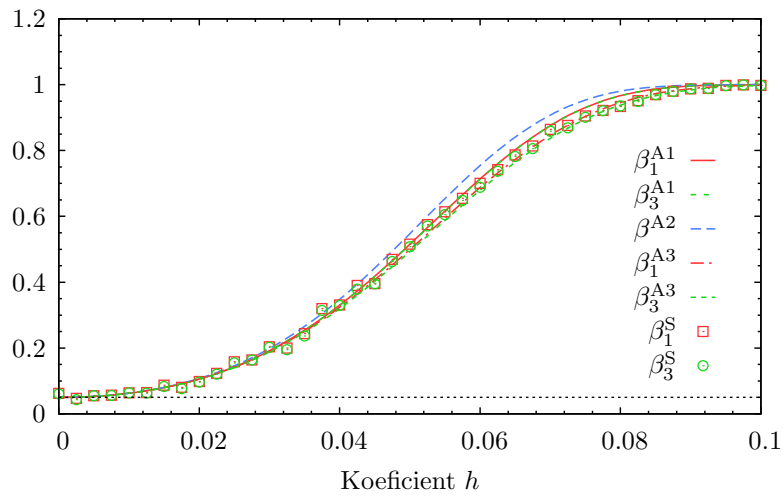


(b)  $\mu_1 = 0.4$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

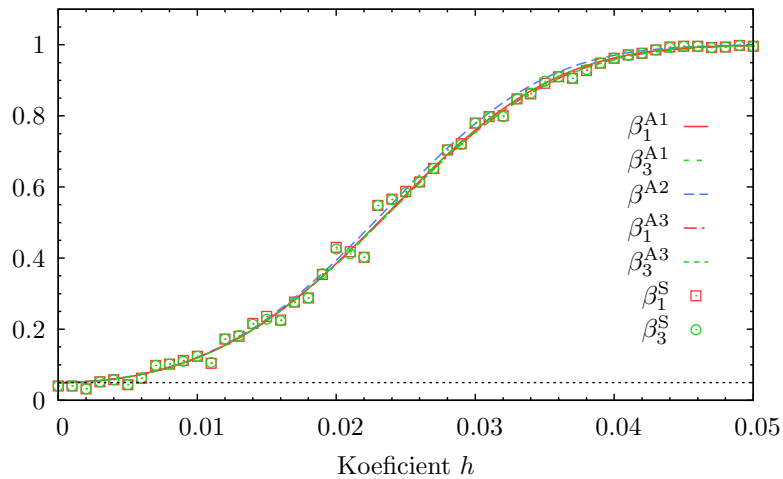


(c)  $\mu_1 = 0.4$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

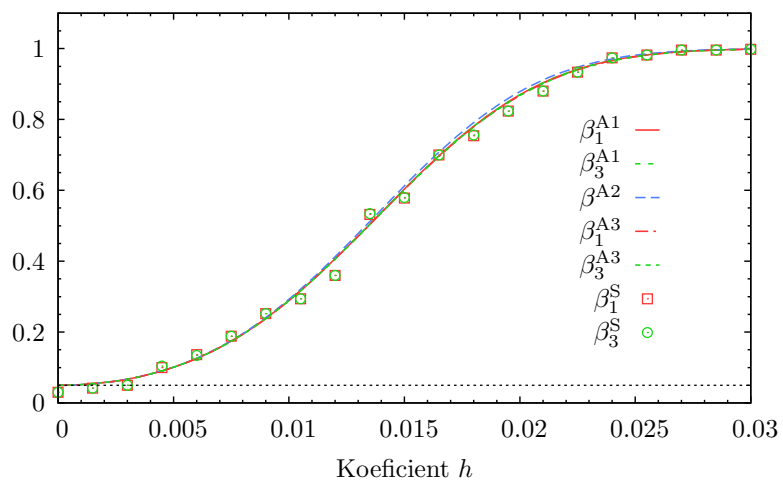
Obrázek 6.5: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s binomickým rozdělením z 6.4



(a)  $\mu_1 = 0.6$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

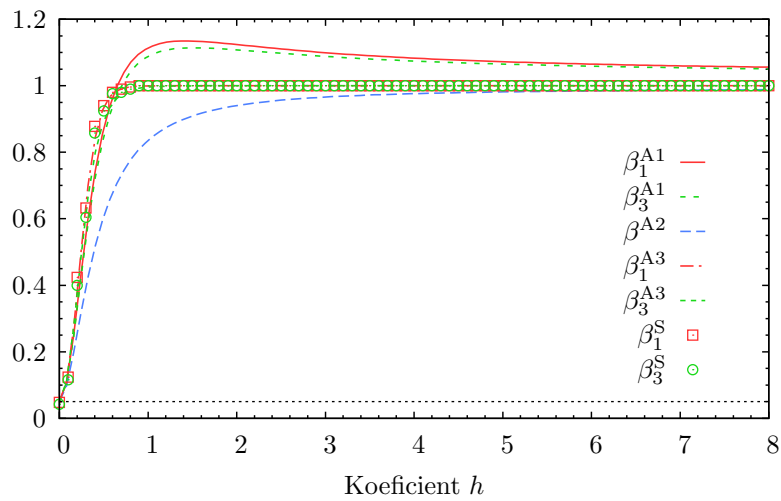


(b)  $\mu_1 = 0.6$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

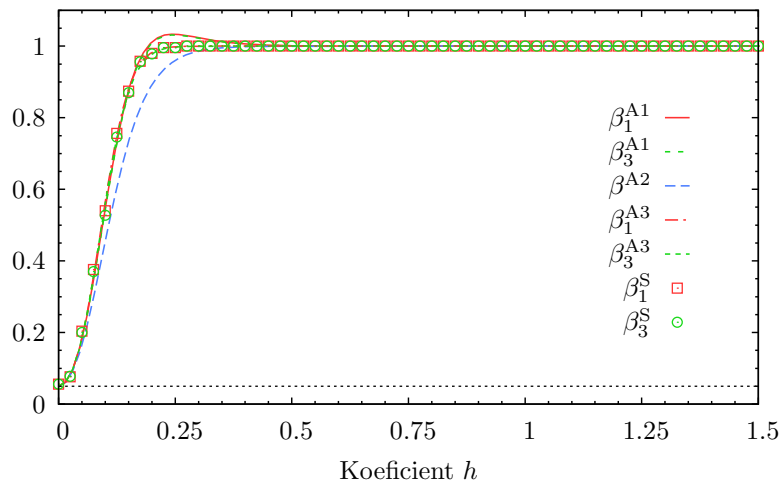


(c)  $\mu_1 = 0.6$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

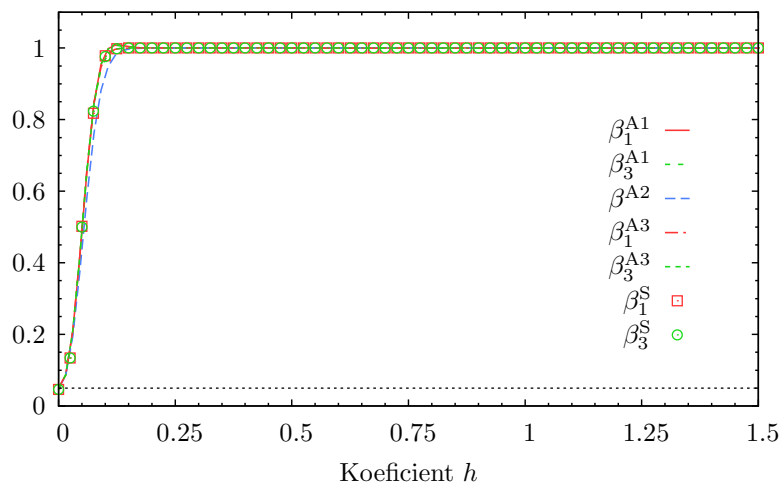
Obrázek 6.6: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s binomickým rozdělením z 6.4.



(a)  $\mu_1 = 1$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

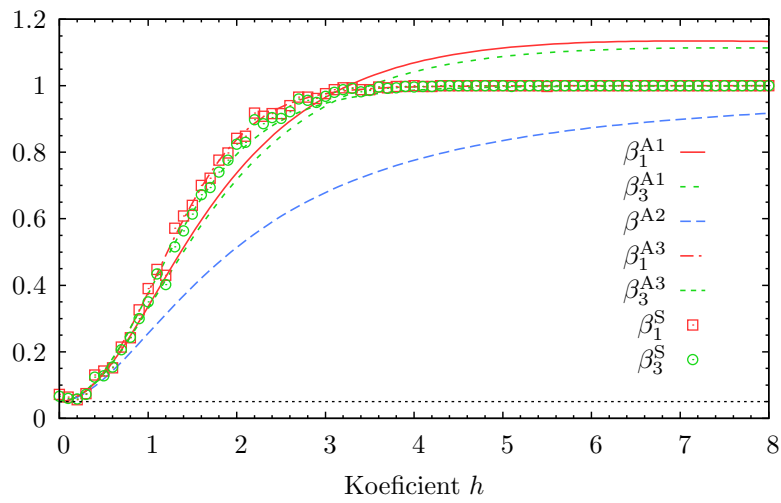


(b)  $\mu_1 = 1$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

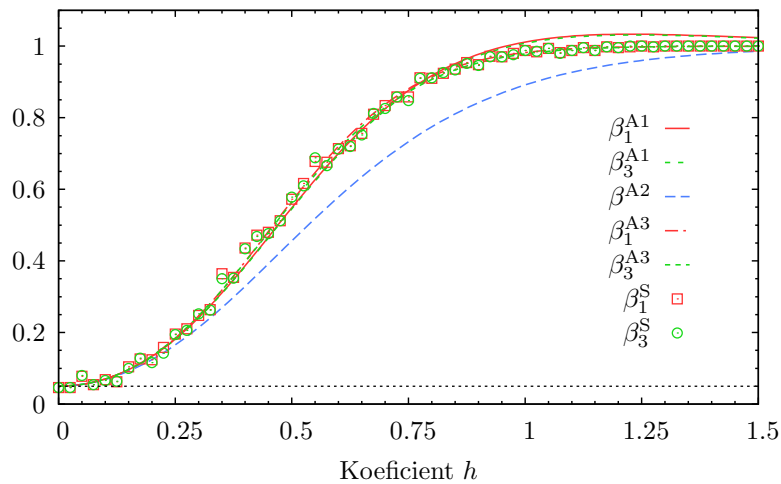


(c)  $\mu_1 = 1$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

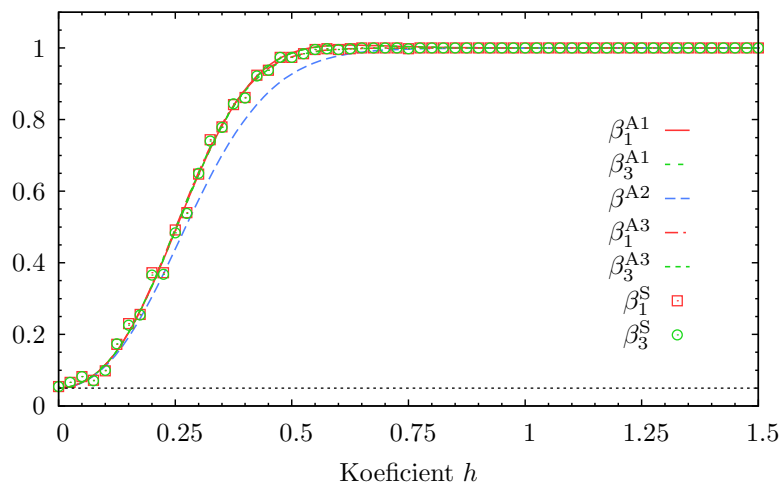
Obrázek 6.7: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s gamma rozdělením z 6.5.



(a)  $\mu_1 = 5$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

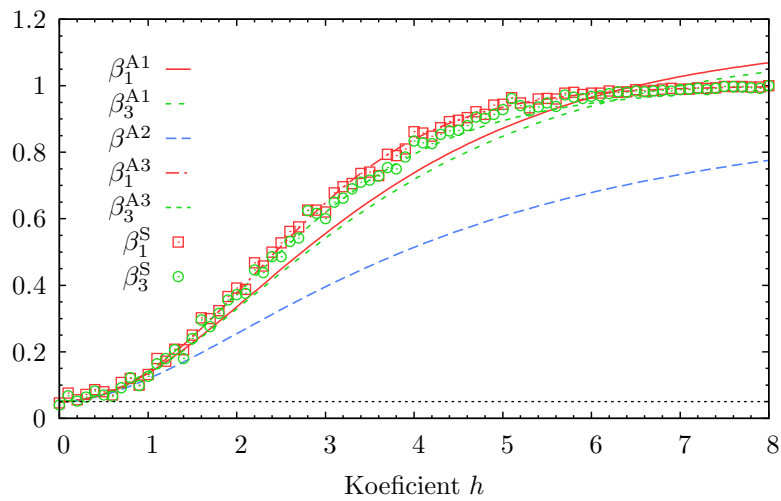


(b)  $\mu_1 = 5$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

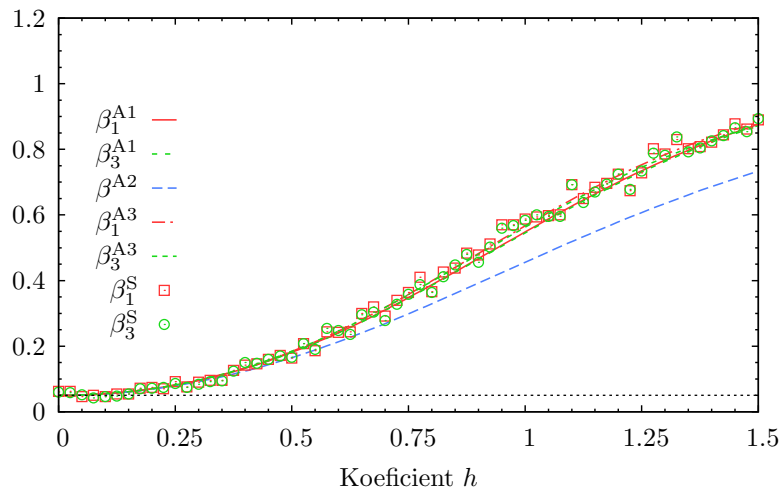


(c)  $\mu_1 = 5$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

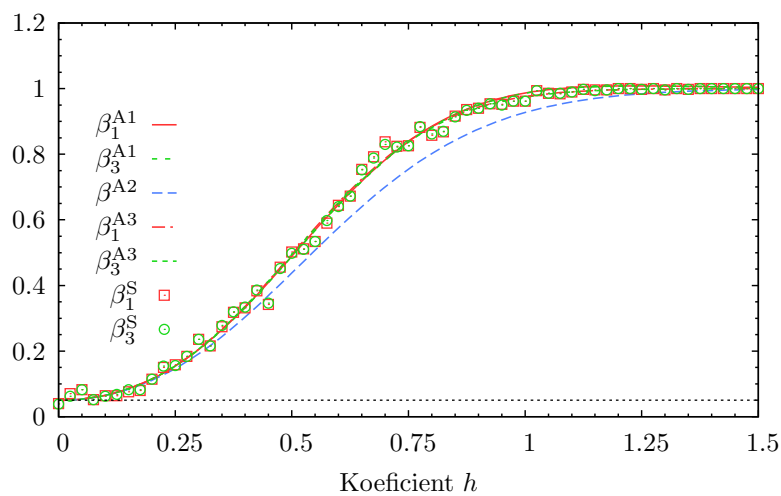
Obrázek 6.8: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s gamma rozdělením z 6.5.



(a)  $\mu_1 = 10$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

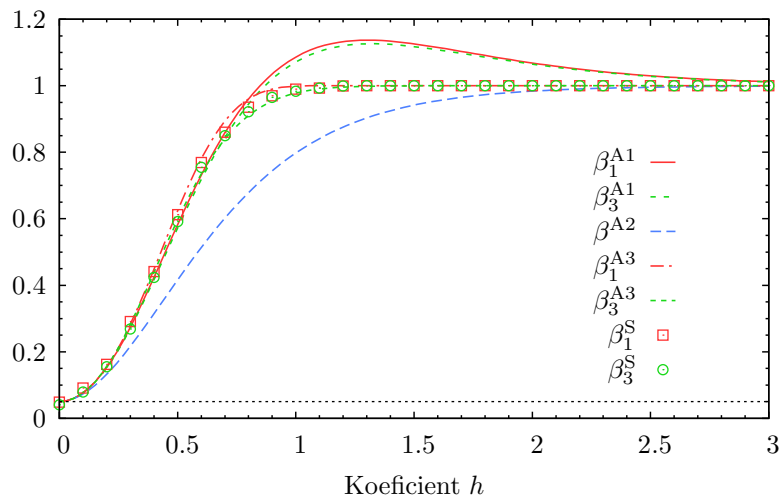


(b)  $\mu_1 = 10$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

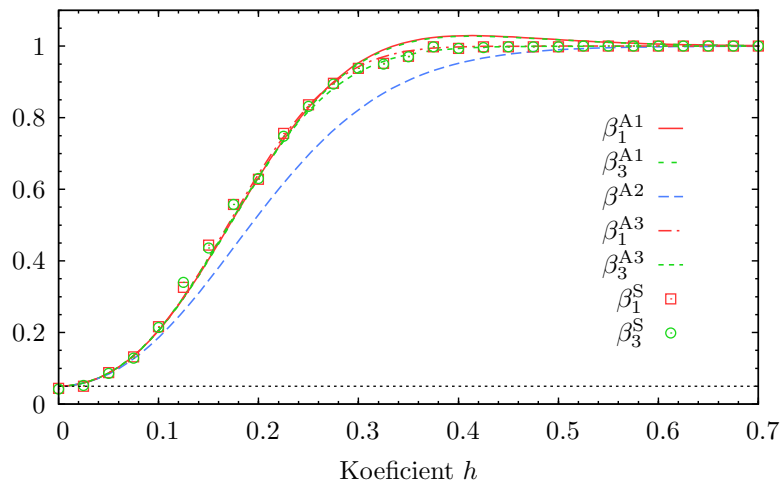


(c)  $\mu_1 = 10$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

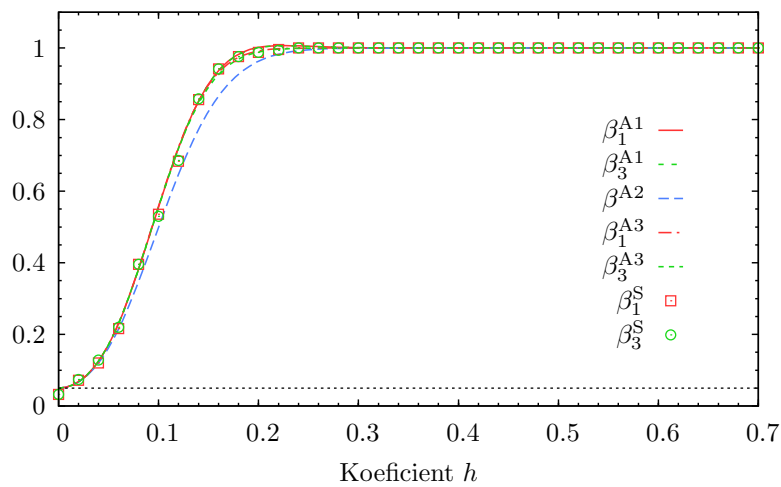
Obrázek 6.9: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s gamma rozdělením z 6.5.



(a)  $\mu_1 = 1$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



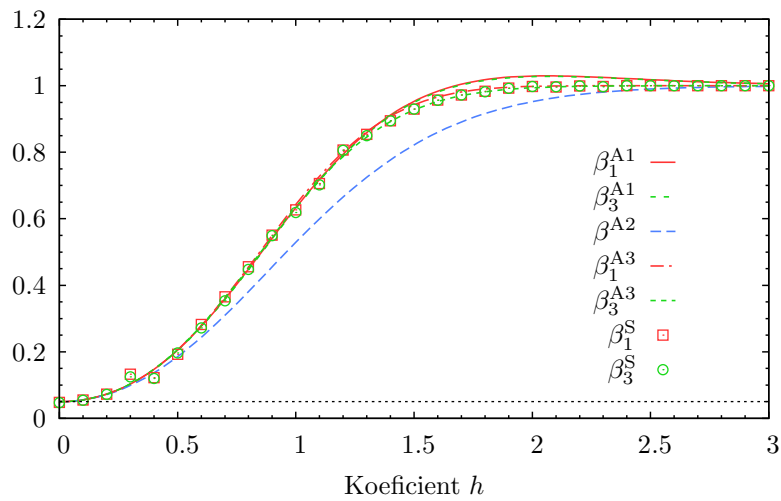
(b)  $\mu_1 = 1$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



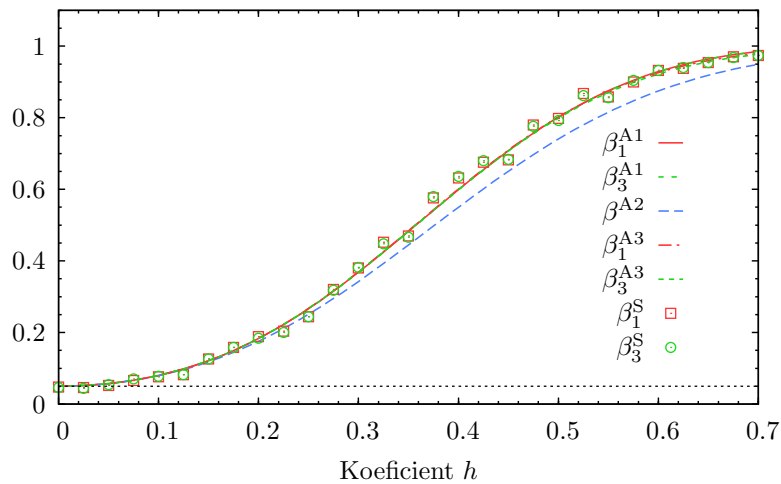
(c)  $\mu_1 = 1$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

Obrázek 6.10: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s Poissonovým rozdělením z 6.6.

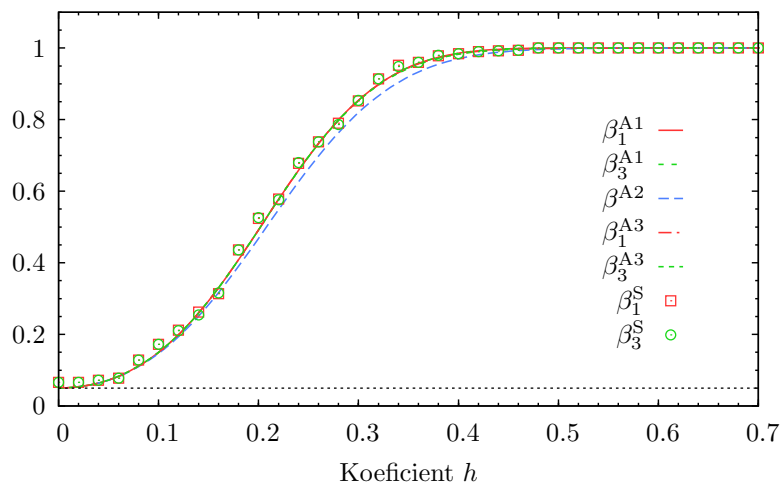




(a)  $\mu_1 = 5, 10$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

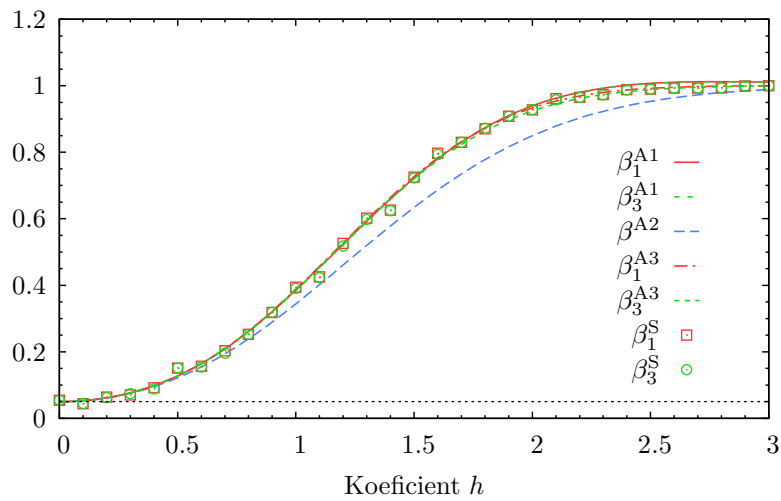


(b)  $\mu_1 = 5, 50$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

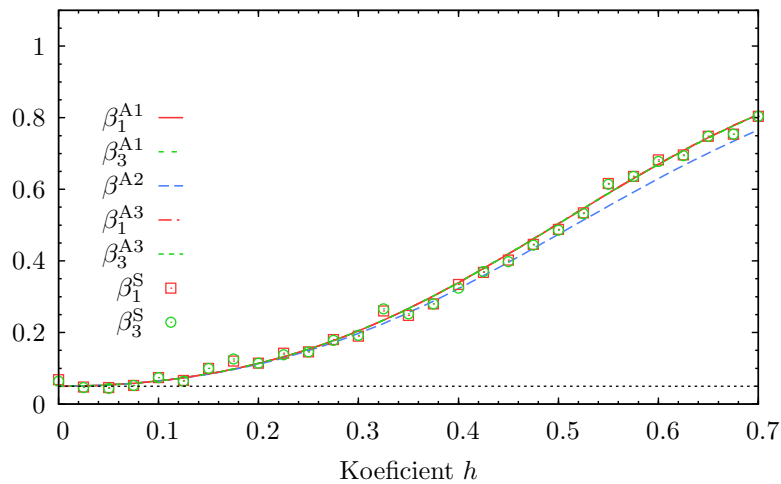


(c)  $\mu_1 = 5, 150$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

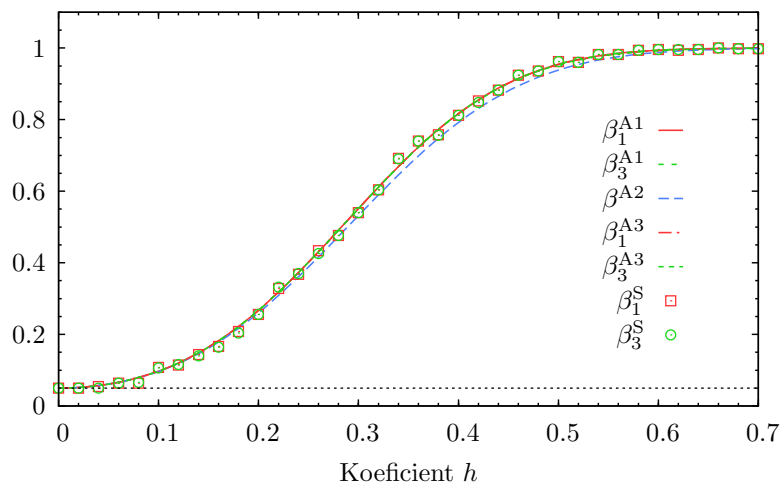
Obrázek 6.11: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s Poissonovým rozdělením z 6.6.



(a)  $\mu_1 = 10$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

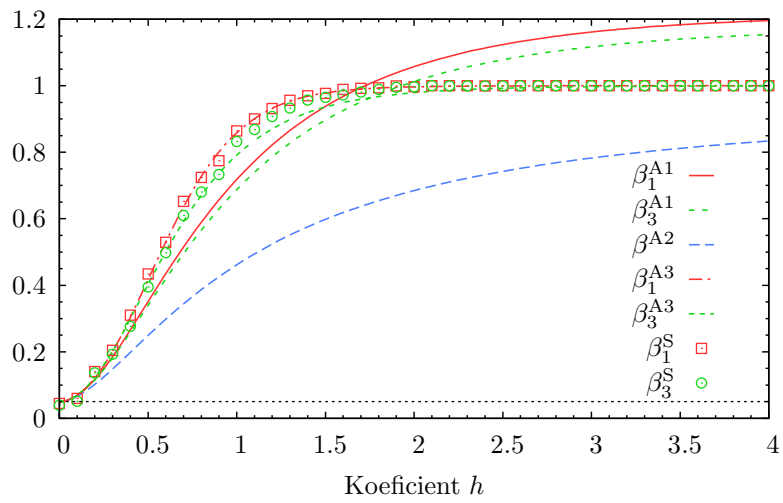


(b)  $\mu_1 = 10$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

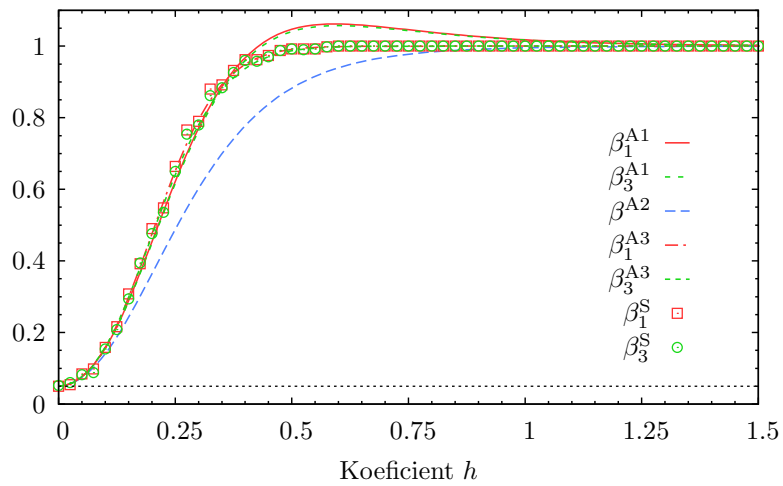


(c)  $\mu_1 = 10$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

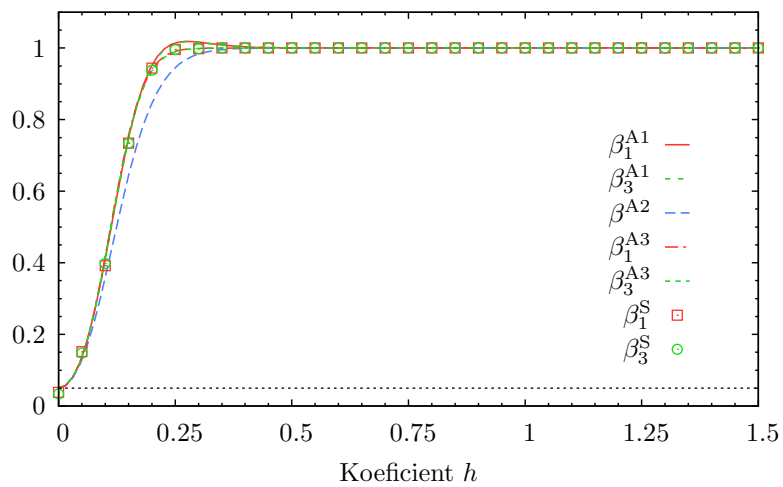
Obrázek 6.12: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 s Poissonovým rozdělením z 6.6.



(a)  $\mu_1 = 1$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

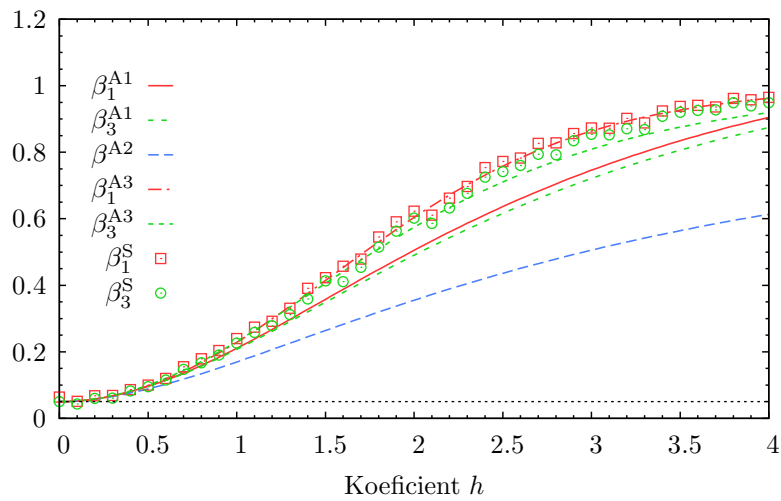


(b)  $\mu_1 = 1$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

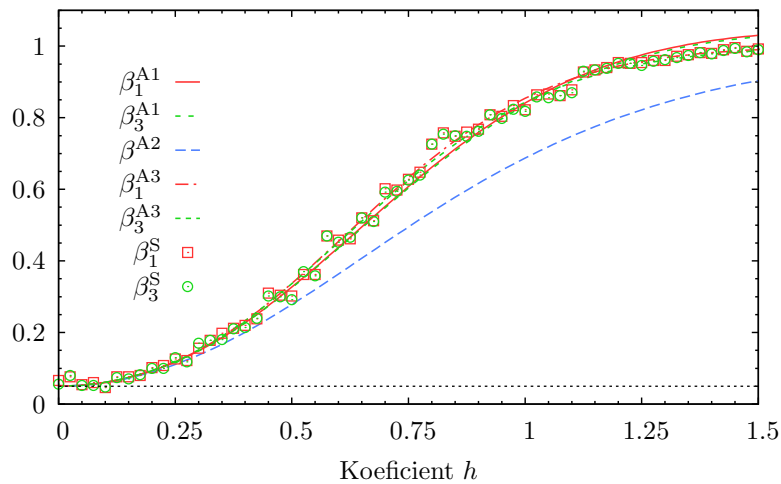


(c)  $\mu_1 = 1$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

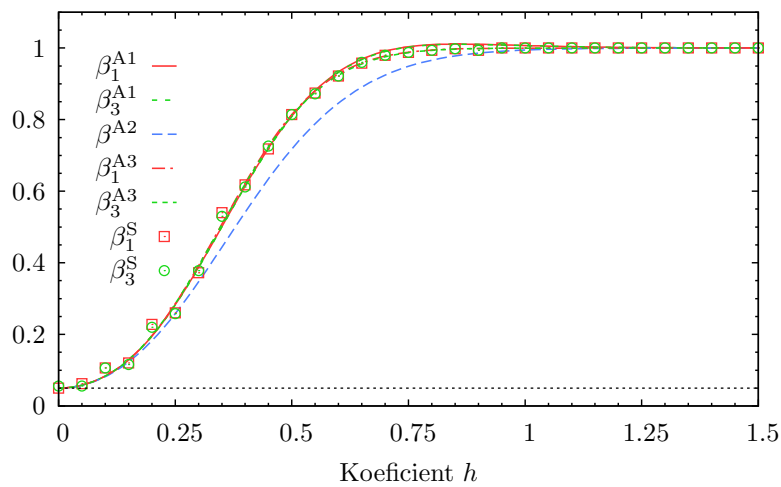
Obrázek 6.13: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 se negativně binomickým rozdělením z 6.7.



(a)  $\mu_1 = 5, 10$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

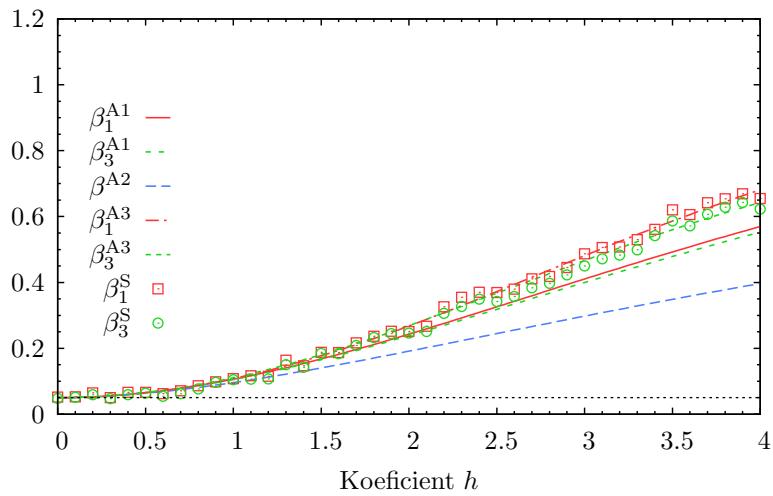


(b)  $\mu_1 = 5, 50$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

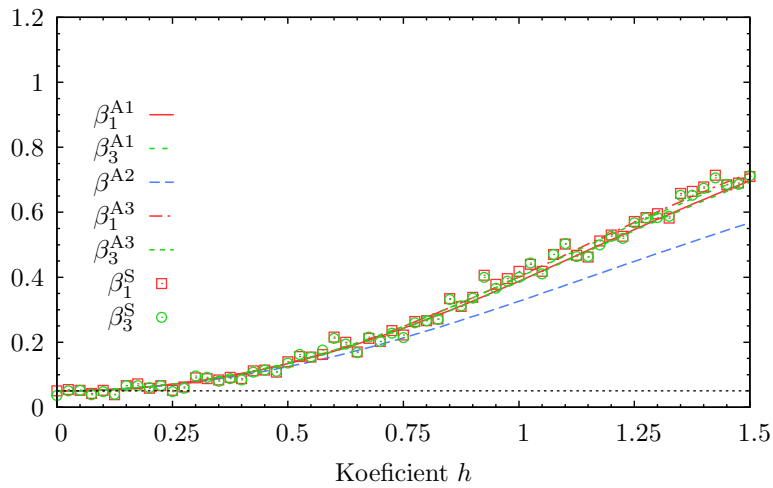


(c)  $\mu_1 = 5, 150$  pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

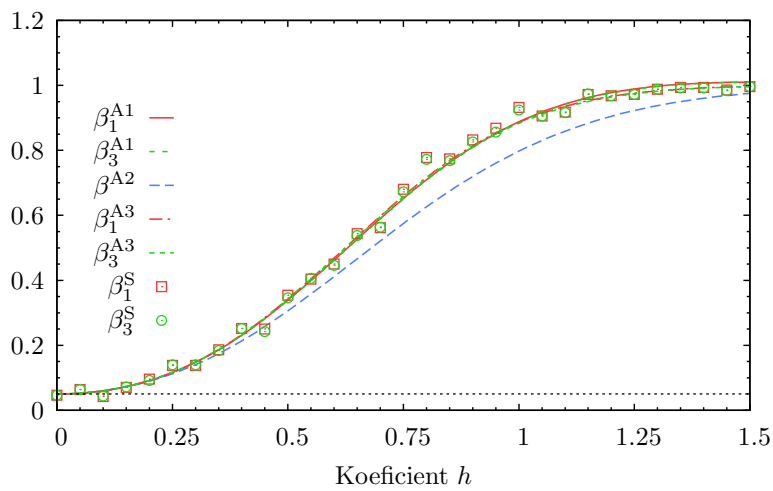
Obrázek 6.14: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 se negativně binomickým rozdělením z 6.7.



(a)  $\mu_1 = 10$ , 10 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



(b)  $\mu_1 = 10$ , 50 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění



(c)  $\mu_1 = 10$ , 150 pozorování v každé třídě jednoduchého třídění

Obrázek 6.15: Srovnání simulovaných sil ( $S$ ) s aproximacemi dle kapitoly 4 ( $A1$ ), dle důsledku C.19 ( $A2$ ) a dle kapitoly 5 ( $A3$ ) v MGLM1 se negativně binomickým rozdělením z 6.7.



# Závěr

Dizertační práce je zaměřena na vlastnosti mnohorozměrných zobecněných lineárních modelů, především pak na síly testů o parametrech MGLM.

Protože je v literatuře z mnohorozměrných rozdělání, které lze popsat pomocí MGLM, zmiňováno pouze mnohorozměrné normální a multinomické rozdělání, bylo snahou určit další mnohorozměrná regulární rozdělání exponenciálního typu. Ve větě 2.2 jsou proto uvedeny předpoklady, při kterých je hustota exponenciálního typu regulární. Byly nalezeny další dva příklady mnohorozměrných rozdělání exponenciálního typu – Transformované Dirichletovo a Wishartovo – u kterých byla ověřena regularita na základě věty 2.2. Dále byly odvozeny maximálně věrohodné odhady přirozeného parametru hustoty exponenciálního typu založené na náhodném výběru ze zvoleného rozdělání.

V kapitole 3 byl popsán mnohorozměrný zobecněný lineární model. Větší pozornost byla věnována tvrzení z článku [9] týkající se asymptotických vlastností odhadů parametru modelu, jejichž důkazy byly pro snažší čitelnost detailněji rozpracovány. Dále byly odvozeny asymptotické oblasti spolehlivosti pro vektor kontrastů parametrů modelu vycházející z Bonferroniho nerovnosti, metody maximálního modulu a z Scheffeho metody. Na závěr jsou uvedeny testové statistiky – deviance  $\Delta D$ , Waldova statistika  $W$  a skórová statistika  $S$  – užívané v MGLM pro test lineárních hypotéz o parametrech modelu. Kapitola 3 uzavírá ukázkou užití modelu při genetické predikci rizik sepse u dětských pacientů.

Kapitola 4 je věnována aproximacím sil testů hypotézy o subvektoru vektorového parametru modelu, které jsou zobecněním přístupu v článku [5]. Aproximace v tomto článku jsou založeny na tzv. Pitmanově přístupu, při kterém uvažujeme test hypotézy  $H_0$  proti posloupnosti alternativ  $A_n$  konvergujících k hypotéze  $H_0$ . Ke stanovení aproximací v MGLM bylo třeba především odvodit tvary příslušných polí kumulantů  $\mathbb{K}_{\dots}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots}$  a  $\mathbb{K}_{\dots}$ . Aproximace v [5] vychází z aproximací sil testů v obecné teorii maximální věrohodnosti v článcích [15, 36, 14], které jsou značně výpočetně náročné. Protože jsou v některých článcích postupy výpočtu pouze naznačené, je detailnímu odvození těchto aproximací věnován dodatek C. V kapitole 4 jsou uvedeny jak aproximace sil řádu  $o(1)$  tak aproximace řádu  $o(n^{-1/2})$ . Aproximace řádu  $o(n^{-1/2})$  bylo třeba odvodit, aby bylo možné stanovit rozdíly mezi aproximacemi sil pro jednotlivé statistiky. Aproximace řádu  $o(1)$  jsou totiž pro všechny statistiky shodné. Teoretické výsledky kapitoly jsou doplněny simulacemi v MGLM s multinomickým, Wishartovým a transformovaným Dirichletovým rozděláním založenými

na matlabovských programech, které lze nalézt na příloženém CD.

Na rozdíl od předchozí kapitoly je kapitola 5 zaměřena na síly testů založených na  $\Delta D$  a  $S$  o parametrech MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění. V takovém modelu je totiž možné odvodit aproximaci sil, která nevychází z Pitmanova přístupu. Navíc stačí stanovit pouze aproximace řádu  $o(1)$ , protože ty již mohou rozlišovat mezi silami testů založených na  $\Delta D$  a  $S$ . V důkazech tvrzení v kapitole 5 bylo třeba stanovit rozdělení kvadratické formy náhodného vektoru s normálním rozdělením, proto je dodatek B věnován rozdělení kvadratických forem a numerické aproximaci jejich distribučních funkcí.

Na závěr byla provedena simulační studie pro srovnání možných aproximací sil testů v MGLM typu vyváženého jednoduchého třídění. Ukázalo se, aproximace z kapitoly 5 jsou v takovém případě nejbližší simulovaným silám, naopak aproximace řádu  $o(1)$  vycházející z kapitoly 4 se často jeví jako nejméně vhodné. Navíc se v některých případech projevila nepříjemná vlastnost aproximací řádu  $o(n^{-1/2})$  z kapitoly 4 totiž, že při nízkých počtech pozorování může aproximace síly nabývat hodnot mimo interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . Pro simulační studii byly sepsány programy v Matlabu, které lze nalézt na příloženém CD.

Simulované síly testů založených na testových statistikách  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$  nabývaly často velmi blízkých hodnot, nicméně obecně nelze stanovit statistiku, která by ve všech modelech dosahovala nejvyšší síly.



# Dodatek A

## Poznámky o symbolech $o_p$ a $O_p$

Tvrzení týkající se konvergence posloupnosti náhodných veličin a náhodných vektorů lze nalézt například v monografiích [46, 40, 4]. V tomto odstavci jsou pro úplnost uvedena v práci užitá tvrzení.

**Definice A.1** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů a  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost kladných reálných čísel. Píšeme  $\mathbf{X}_n = o_p(b_n)$ , jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$ , platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\mathbf{X}_n\|/b_n \leq \varepsilon) = 1.$$

V takovém případě říkáme, že posloupnost  $\{\mathbf{X}_n/b_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje v pravděpodobnosti k nule.

Dále také značíme  $\mathbf{X}_n = O_p(b_n)$ , jestliže pro každé  $\eta > 0$  existuje konstanta  $K(\eta)$  a přirozené číslo  $n(\eta)$  tak, že pro každé  $n \geq n(\eta)$  platí

$$P(\|\mathbf{X}_n\|/b_n \leq K(\eta)) \geq 1 - \eta.$$

V takovém případě říkáme, že posloupnost  $\{\mathbf{X}_n/b_n\}_{n=1}^\infty$  je omezená v pravděpodobnosti.

**Lemma A.2** Pro konvergenci v pravděpodobnosti a omezenost v pravděpodobnosti při  $b_n > 0$  platí

$$o_p(1) + o_p(1) = o_p(1) \tag{A.1}$$

$$o_p(1) + O_p(1) = O_p(1) \tag{A.2}$$

$$o_p(1)O_p(1) = o_p(1) \tag{A.3}$$

$$o_p(b_n) = b_n o_p(1) \tag{A.4}$$

$$O_p(b_n) = b_n O_p(1) \tag{A.5}$$

$$o_p(O_p(1)) = o_p(1) \tag{A.6}$$

**Důkaz.** Myšlenku důkazu lze nalézt např. v [46].

**Lemma A.3** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů a existuje  $\mathbf{X}$  tak, že  $\mathbf{X}_n = \mathbf{X} + o_p(1)$ , pak  $\mathbf{X}_n$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{X}$ .

**Důkaz.** Důkaz tvrzení lze nalézt na str. 10 v [46].

**Lemma A.4** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  a  $\{\mathbf{Y}_n\}_{n=1}^\infty$  jsou posloupnosti náhodných vektorů takových, že  $\mathbf{X}_n$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n + o_p(1)$ , pak  $\mathbf{Y}_n$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{X}$ .

**Důkaz.** Důkaz tvrzení lze nalézt na str. 10 v [46].

**Lemma A.5** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů a existuje  $\mathbf{X}$  tak, že  $\mathbf{X}_n$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{X}$ , pak  $\mathbf{X}_n = O_p(1)$ .

**Důkaz.** Důkaz tvrzení lze nalézt na str. 8 v [46].

**Lemma A.6** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů, pro kterou  $\mathbf{X}_n = \mathbf{X} + o_p(1)$ , pak  $\mathbf{X}_n = \mathbf{X} + O_p(1)$ .

**Důkaz.** Dle lemmatu A.3  $\mathbf{X}_n$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{X}$ . To tedy dle lemmatu 2.8 (i), str 11 v [46] znamená, že  $\mathbf{X}_n - \mathbf{X}$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{0}$  a odtud s užitím lemmatu A.5 plyne tvrzení.

**Lemma A.7** Necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů, pro kterou  $\mathbf{X}_n = O_p(b_n)$ , přičemž  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , pak  $\mathbf{X}_n = o_p(1)$ .

**Důkaz.** Důkaz provedeme přímo z definice. Je třeba ukázat, že pro každé  $\varepsilon$  a každé  $\eta$  existuje  $n_1$  tak, že pro všechna  $n \geq n_1$  platí

$$P(\|\mathbf{X}_n\| \leq \varepsilon) \geq 1 - \eta.$$

Zvolme tedy libovolné pevné  $\varepsilon_0$ . Z předpokladů plyne, že pro každé  $\eta$ , existuje  $K$  a  $n_2$  tak, že pro všechna  $n \geq n_2$  platí

$$P(\|\mathbf{X}_n\| \leq b_n K) \geq 1 - \eta.$$

Dále, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , existuje  $n_3$  tak, že pro všechna  $n \geq n_3$  platí  $b_n K < \varepsilon_0$ . Volbou  $n_1 = \max\{n_2, n_3\}$  tedy dostáváme tvrzení.

**Lemma A.8** Necht'  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^q$  a pro funkce  $g(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}$  a  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}$  pro každé  $r > 0$  platí  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^r)$ , při  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow \mathbf{0}$ . Dále necht'  $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných vektorů s výběrovým prostorem, který leží v definičním oboru funkcí  $f$  a  $g$ , pro kterou  $\mathbf{X}_n = \mathbf{y} + o_p(b_n)$ , pak  $f(\mathbf{X}_n) = g(\mathbf{X}_n) + o_p(b_n^r)$ .

**Důkaz.** Z lemmatu 2.12, str. 13 v [46] plyne  $f(\mathbf{X}_n) = g(\mathbf{X}_n) + o_p(\|\mathbf{X}_n - \mathbf{y}\|^r)$ . Protože  $\mathbf{X}_n = \mathbf{y} + o_p(b_n)$ , z čehož je dle lemmat A.6 a A.2 plyne  $\mathbf{X}_n = \mathbf{y} + O_p(b_n)$ , a navíc platí  $o_p(O_p(1)) = o_p(1)$ , lze psát  $f(\mathbf{X}_n) = g(\mathbf{X}_n) + o_p(b_n^r)$ .

**Lemma A.9** Necht  $\mathbf{g} : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m$  je spojitá funkce v každém bodě množiny  $C$  takové, že  $P(\mathbf{X} \in C) = 1$ .

1. Konverguje-li náhodný vektor  $\mathbf{X}_n$  v distribuci k  $\mathbf{X}$ , pak konverguje  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n)$  v distribuci k  $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ .
2. Pokud  $\mathbf{X}_n = \mathbf{X} + o_p(1)$ , pak konverguje  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) + o_p(1)$ .

**Důkaz.** Důkaz tvrzení lze nalézt v [46] na str. 7.



## Dodatek B

### Poznámky o rozdělení kvadratických forem

**Lemma B.1** Nechť náhodný vektor  $\mathbf{Y} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  je regulární, matice  $\mathbf{A}$  typu  $q \times q$  je symetrická, vektor  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^q$ , takový, že  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$  a konstanta  $a \in \mathbf{R}$ . Pak pro náhodnou veličinu

$$Z = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + 2\mathbf{a}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + a$$

platí

$$Z + \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} - a \sim \sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$$

s parametry necentrality  $\delta_i = (\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a})^2$ , kde  $\mathbf{c}_i$  je  $i$ -tý vlastní vektor odpovídající  $i$ -tému vlastnímu číslu  $\Lambda_{ii}$  matice  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ , přičemž platí  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_j = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

**Důkaz.** Ztransformujme náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  na  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}$ . Potom lze náhodnou veličinu  $Z$  zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} Z &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} - \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} + a = \\ &= (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + 2\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} + a, \end{aligned}$$

neboť

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{a}, \quad (\text{B.1})$$

kde existence  $\mathbf{u}$  plyne z podmínky  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ . Přitom z předpokladů plyne, že  $\mathbf{Z} \sim N_q(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Vektor  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{Z}$  má tudíž jednotkovou varianční matici. Nyní lze psát

$$Z + \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} - a = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{V}.$$

Ze spektrálního rozkladu symetrické matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$  (viz. [38], str. 62) na  $\mathbf{D} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}^T$  dostáváme

$$Z + \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} - a = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}^T \mathbf{V}.$$

Poznamenejme, že při spektrálním rozkladu volíme matici  $\mathbf{D}$  tak, aby  $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}_q$ . Protože  $\mathbf{D}^T \mathbf{V} \sim N_q(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{A}^- \mathbf{a}, \mathbf{I}_q)$ , je kvadratická forma  $\mathbf{V}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}^T \mathbf{V}$  lineární kombinací nezávislých necentrálních  $\chi^2$  rozdělených náhodných veličin s jedním stupněm volnosti a parametrem necentrality  $\delta_i = (\mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{A}^- \mathbf{a})^2$ , kde  $\mathbf{d}_i$  je  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{D}$ , tedy  $i$ -tý vlastní vektor matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ . Pro vlastní vektory matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$  ale platí

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{d}_i = \Lambda_{ii} \mathbf{d}_i,$$

tedy kvůli regularitě varianční matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  lze také psát

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{d}_i &= \Lambda_{ii} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{d}_i &= \Lambda_{ii} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{d}_i. \end{aligned}$$

Pro určení parametrů necentrality proto stačí nalézt vlastní vektory  $\mathbf{c}_i = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{d}_i$  a vlastní čísla  $\Lambda_{ii}$  matice  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$ . Je ale třeba volit takové vlastní vektory, aby  $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}_q$ , tj.  $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C} = \mathbf{I}_q$ . Odtud plyne tvrzení.

Na závěr tohoto důkazu ukažme, že parametry rozdělení jsou určeny jednoznačně. Nejprve, rozdělení náhodné veličiny  $Z$  nezávisí na volbě pseudoinverzní matice  $\mathbf{A}^-$ . Předně hodnota  $\mathbf{a}^T \mathbf{A}^- \mathbf{a}$  nezávisí podle věty A.25, str. 326 v [1], na  $\mathbf{A}^-$ , protože platí vztah (B.1). Pseudoinverze  $\mathbf{A}^-$  vystupuje také v parametrech necentrality  $\chi^2$  rozdělení. Předpokládejme, že vlastní číslo  $\Lambda_{ii}$  je nenulové. V opačném případě  $i$ -tý sčítanec nepřispívá do rozdělení a proto není třeba sledovat závislost jeho parametru necentrality na volbě pseudoinverze  $\mathbf{A}^-$ . Protože pro  $i$ -tý vlastní vektor matice  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  platí

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}_i = \Lambda_{ii} \mathbf{c}_i,$$

tedy

$$\frac{1}{\Lambda_{ii}} \mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} = \mathbf{c}_i^T,$$

lze vyjádřit odmocninu z parametru necentrality s užitím vztahu (B.1) jako

$$\sqrt{\delta_i} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^- \mathbf{a} = \frac{1}{\Lambda_{ii}} \mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{a} = \frac{1}{\Lambda_{ii}} \mathbf{c}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}.$$

To znamená, že parametr necentrality  $\delta_i$ , a tedy celé rozdělení náhodné veličiny  $Z$ , nezávisí na volbě pseudoinverzní matice  $\mathbf{A}^-$ .

Rozdělení náhodné veličiny  $Z$  také nezávisí na volbě ortonormální báze vlastních vektorů ve vlastním podprostoru příslušné vícenásobnému vlastnímu číslu, která není jednoznačně určena. Označme  $J \subset \{1, \dots, q\}$  množinu všech indexů vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu  $\Lambda_{jj}$ , které tvoří sloupce matice  $\mathbf{C}_{(J)}$ . Nechť  $\mathbf{T}$  je ortogonální matice ( $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}_q$ ) rotace báze na  $\widetilde{\mathbf{C}}_{(J)} = \mathbf{C}_{(J)} \mathbf{T}$ . Pak člen v součtu  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  odpovídající vícenásobnému vlastnímu číslu  $\Lambda_{kk}$  lze zapsat

jako  $\Lambda_{kk} \sum_{i \in J} \chi^2(1, \delta_i)$ , což díky nezávislosti jednotlivých složek součtu z definice necentrálního  $\chi^2$  rozdělení odpovídá  $\Lambda_{kk} \chi^2(\sum_{i \in J} 1, \sum_{i \in J} \delta_i)$ . Přitom ale

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \delta_i &= \sum_{i \in J} \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_{(J)} \mathbf{C}_{(J)}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_{(J)} \mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_{(J)}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{(J)} \tilde{\mathbf{C}}_{(J)}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Proto rozdělení nezávisí na volbě báze vlastního prostoru příslušného vícenásobnému vlastnímu číslu.

**Poznámka B.2** Charakteristická funkce rozdělení  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  je dle [43], str. 278, tvaru

$$\psi_Q(t) = \psi_1(l_1 t) \cdots \psi_{p-1}(l_{p-1} t) = \prod_{i=1}^{p-1} (1 - 2itl_i)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{itl_i \delta_i^2}{1 - 2itl_i} \right\},$$

kde  $\psi_i(t)$  je charakteristická funkce rozdělení  $\chi^{2'}(1, \delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ . Distribuční funkce  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  pak může být odvozena pomocí inverzní Gil-Pelaezovy formule, viz. [13],

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left( \frac{\exp\{-itx\} \psi_Q(t)}{t} \right) dt.$$

Distribuční funkci  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  však nelze vyjádřit analyticky. Jednou z možností její aproximace je využití numerické integrace lichoběžníkovou metodou. Výpočet aproximace distribuční funkce  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  založený právě na této metodě, který v Matlabu zprogramoval RNDr. Viktor Witkovský, CSc., viz. [48], byl užit při simulačních studiích v této dizertační práci. Článek [49] se zabývá aproximací distribuční funkce  $F(x)$  založenou na numerické integraci, mimo jiné je zde využita ke stanovení sil testů v klasické ANOVĚ dvojného třídění.

Dále je také možné distribuční funkci  $\sum_{i=1}^q \Lambda_{ii} \chi^2(1, \delta_i)$  aproximovat distribuční funkcí lineární transformace náhodné veličiny s rozdělením  $\chi^2(\nu)$ , stanovené tak, aby její první tři momenty byly shodné s prvními třemi momenty aproximované náhodné veličiny. Srovnání této aproximace s výše popsanou aproximací lze nalézt v [20].





## Dodatek C

# Síla asymptotických testů založených na věrohodnostní funkci

V následujícím dodatku předpokládáme, že náhodné vektory  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  jsou nezávislé s regulárními hustotami  $f_i(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\beta}), i = 1, \dots, n, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^p$ , pro které existují druhé a třetí parciální derivace vzhledem k parametru  $\boldsymbol{\beta}$  a přitom hustota náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_n^T]^T$  splňuje podmínky (1.1) a

$$\int_M \frac{\partial^3 f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}} d\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \dots \quad (\text{C.1})$$

Dále předpokládáme, že existuje matice  $\mathbf{L}$  z poznámky C.1 a pole  $\mathbf{K} \dots$  z poznámky 4.1 má konečné prvky.

Uvažujme rozdělení parametru  $\boldsymbol{\beta}$  na dva subvektory  $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T]^T$ , rušivý parametr  $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbf{R}^r$  a cílový parametr  $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbf{R}^{p-r}$ . V následujícím budeme věnovat pozornost silám testů hypotézy  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H}$  proti Pitmanově posloupnosti jednoduchých alternativ  $A_n : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H} + \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\beta}_{2A}$ , kde  $\boldsymbol{\varepsilon}_n = O(n^{-1/2})$ , přičemž předpokládáme, že maximálně věrohodné odhady parametru  $\boldsymbol{\beta}$  při  $H_0$  i  $A_n$  existují a jsou jednoznačně určeny pro  $n \geq n_0$ .

Testy hypotézy  $H_0$  proti posloupnosti alternativ  $A_n$  je možné založit na statistikách užívaných v teorii maximální věrohodnosti, tj. Devianci, Waldově statistice a skórové statistice, které jsou uvedeny v poznámce 3.26. Protože ve většině případů nemohou být síly studovaných testů vyjádřeny analyticky, je pozornost věnována jejich asymptotické aproximaci. Navíc, abychom byli schopni rozlišit síly testů založené na jednotlivých statistikách, je třeba odvodit aproximaci statistik řádu  $o_p(n^{-1/2})$ , neboť aproximace řádu  $o_p(1)$  jsou u všech výše zmíněných statistik shodné.

Cílem tohoto dodatku je souhrnně uvést odvození asymptotických aproximací sil uvažovaných testů. Této problematice jsou věnovány články [14, 15, 36]. V článku [36] je uvedena aproximace sil testů hypotéz bez rušivých parametrů ( $r = 0$ ), přičemž pozornost je především věnována statistice  $\Delta D$ . Článek [15] již studuje síly testů

hypotéz s rušivými parametry založených na  $\Delta D$  a  $W$  a je v něm naznačen postup odvození s uvedenými mezivýsledky. Nakonec, v článku [14] lze nalézt aproximaci síly testu hypotéz s rušivými parametry založeného na skórové statistice bez detailního odvození. Proto v tomto dodatku postupně odvodíme asymptotické aproximace statistik  $\Delta D$ ,  $W$  a  $S$  pro test hypotézy  $H_0$  proti  $A_n$  a stanovíme asymptotická rozdělení těchto aproximací, z nichž pak vyjádříme asymptotické aproximace sil uvažovaných testů.

**Poznámka C.1** Kromě označení z poznámky 4.1 budeme v této kapitole užívat následující značení

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11}^{-1} \mathcal{J}_{12} \\ -\mathbf{I}_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}_{\dots} = \left[ \frac{\partial \{\mathcal{J}\}_{ij}}{\partial \beta_k} \right]_{i,j,k=1,\dots,p}$$

a  $\mathbb{K}_{\dots}^{(n)} = n^{1/2} \mathbb{K}_{\dots}$ ,  $\mathbb{L}_{\dots}^{(n)} = n^{1/2} \mathbb{L}_{\dots}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots}^{(n)} = n^{1/2} \mathbb{K}_{\dots}$ ,  $\mathbb{K}_{\dots}^{(n)} = n^{1/2} \mathbb{K}_{\dots}$ . Povšimněme si, že z definice pole  $\mathbb{L}_{\dots}$  plyne  $\mathbb{L}_{ijk} = \mathbb{L}_{jik}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, p$ .

Dále značíme

$$\widehat{\mathbf{V}} = n^{1/2} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta}_{1A} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2A} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{V}} = n^{1/2} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta}_{1A} \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2A} \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ , resp.  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ , značí odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}$  při alternativě  $A_n$ , resp. při hypotéze  $H_0$ , a proto z tvaru hypotézy  $H_0$  a alternativy  $A_n$  plyne

$$\widetilde{\mathbf{V}} = n^{1/2} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta}_{1A} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{pmatrix}.$$

Navíc pro přehlednost zkrátíme symbolické zápisy

$$\int \cdots \int \cdots \prod_{j,k=1}^p d\mathcal{J}_{jk} = \int \cdots d\mathcal{J},$$

$$\int \cdots \int \cdots \prod_{i=1}^p d\mathbf{u}_i = \int \cdots d\mathbf{u}.$$

Na závěr uvedme značení

$$\begin{aligned} A &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ B &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ C &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ D &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ E &= \widehat{\mathbb{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ F &= \widehat{\mathbb{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ G &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ I &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ J &= \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbb{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned}$$

## C.1 Aproximace testových statistik

**Lemma C.2** Pro trojdimenzionální pole třetích derivací věrohodnostní funkce při alternativě platí

$$n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} = n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} + o_p(n^{-1/2}).$$

**Důkaz.** Protože jsou všechny momenty  $n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}$  řádu  $O_p(n^{-1})$  až na první, plyne tvrzení z Čebyševovy věty v [40] str. 27, věta C.

**Lemma C.3** Je-li  $\beta_A$  skutečná hodnota parametru  $\beta$  a platí-li  $\widehat{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$ ,  $\widetilde{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$ , pak

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{V}} &= n^{1/2}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + \\ &+ \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{V}} &= n^{1/2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2}\widehat{\mathcal{M}}\varepsilon_n + \\ &+ \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\varepsilon_n) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

**Důkaz.** Odvození aproximací založíme na lemmatu A.8. Podobně jako v důkazu věty 5.5 je proto v první řadě třeba aproximovat příslušné funkce vektorového parametru  $\beta$ , ve kterých jsou náhodné vektory, matice a pole nahrazeny svými pevnými realizacemi. Pro zjednodušení zápisu budeme aproximace náhodných vektorů a vektorových funkcí rozlišovat pouze v symbolech  $o_p$  a  $o$ . Proto v aproximaci se symbolem  $o$  chápeme všechny náhodné vektory, matice a pole jako jejich pevné realizace. Toto značení budeme užívat i nadále bez dalšího upozornění.

Aproximujme  $n^{-1}\widehat{\mathbf{U}}$  Taylorovým rozvojem druhého stupně v bodě  $\beta_A$

$$n^{-1}\widehat{\mathbf{U}} = n^{-1}\widehat{\mathbf{U}} - n^{-3/2}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}n^{-2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathbf{V}} \circ \widehat{\mathbf{V}} + o(\|\widehat{\beta} - \beta_A\|^2),$$

Protože je  $\widehat{\beta}$  maximálně věrohodným odhadem parametru  $\beta_A$  při alternativě, musí platit  $\widehat{\mathbf{U}} = 0$ . Navíc ze vztahu (A.6) a z předpokladů věty plyne

$$\mathbf{0} = n^{-1/2}\widehat{\mathbf{U}} - n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathbf{V}} \circ \widehat{\mathbf{V}} + o_p(n^{-1/2}).$$

Odtud rekurzivním vyjádřením a užitím lemmatu C.2 dostáváme dokazovaný vztah (C.2).

Podobně pro důkaz druhé části tvrzení vycházíme z aproximace  $n^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_1$  Taylorovým rozvojem druhého stupně v bodě  $\beta_A$  tvaru

$$n^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_1 = n^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_1 - n^{-3/2}\widehat{\mathcal{J}}_{11}\widetilde{\mathbf{V}}_1 - n^{-3/2}\widehat{\mathcal{J}}_{12}\widetilde{\mathbf{V}}_2 + \frac{1}{2}n^{-2}\widehat{\mathcal{K}}_{1..} \circ \widetilde{\mathbf{V}} \circ \widetilde{\mathbf{V}} + o(\|\widetilde{\beta} - \beta_A\|^2).$$

Protože  $\widetilde{\mathbf{V}}_2 = -n^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ ,  $\widetilde{\mathbf{U}}_1 = 0$  a dle předpokladů  $\|\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_A\| = O_p(n^{-1/2})$  lze psát

$$\mathbf{0} = n^{-1/2}\widetilde{\mathbf{U}}_1 - n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}_{11}\widetilde{\mathbf{V}}_1 + n^{-1/2}\widehat{\mathcal{J}}_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_n + \frac{1}{2}n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{1..} \circ \widetilde{\mathbf{V}} \circ \widetilde{\mathbf{V}} + o_p(n^{-1/2}).$$

Rekurzivním vyjádřením dostáváme aproximaci náhodného vektoru  $\widetilde{\mathbf{V}}_1$  ve tvaru

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{V}}_1 &= n^{1/2}\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2}\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}\widehat{\mathcal{J}}_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_n + \\ &+ \frac{1}{2}n^{1/2}\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{1..} \circ (\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Odtud již s užitím lemmatu C.2 plyne dokazovaný vztah (C.3).

**Lemma C.4** Je-li  $\boldsymbol{\beta}_A$  skutečná hodnota parametru  $\boldsymbol{\beta}$  a platí-li  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ , pak

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{V}} &= n^{1/2}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(1), \\ \widetilde{\mathbf{V}} &= n^{1/2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p(1). \end{aligned}$$

**Důkaz.** Tvrzení lze dokázat obdobně jako v lemmatu C.3.

**Věta C.5** Je-li  $\boldsymbol{\beta}_A$  skutečná hodnota parametru  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ , pak pro statistiku  $\Delta D$  z (3.28) pro test hypotézy  $H_0$  proti alternativě A při platnosti A platí  $\Delta D = \Delta D^* + o_p(n^{-1/2})$ , kde

$$\begin{aligned} \Delta D^* &= ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \widehat{\mathcal{J}} ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) - \\ &- n^{-1/2}\widehat{\mathcal{K}}_{...}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} - \\ &- \frac{1}{3}n^{-1/2}\widehat{\mathcal{K}}_{...}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \\ &\circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n), \end{aligned}$$

**Důkaz.** Pro aproximaci deviance řádu  $o_p(n^{-1/2})$  je v prvním kroku třeba aproximovat  $n^{-1}l(\widetilde{\boldsymbol{\beta}})$  Taylorovým polynomem stupně 3 v bodě  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\begin{aligned} n^{-1}l(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) &= n^{-1}l(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) + n^{-1}\widehat{\mathbf{U}}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{1}{2}n^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})^T \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) + \\ &+ \frac{1}{6}n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{...} \circ (\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \circ (\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \circ (\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) + o(\|\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^3). \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Protože je  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$  maximálně věrohodným odhadem parametru  $\boldsymbol{\beta}$  při alternativě, musí platit  $\widehat{\mathbf{U}} = 0$ . Užitím Taylorova rozvoje prvního stupně matice  $n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}$  v bodě  $\boldsymbol{\beta}_A$  dostáváme

$$n^{-1}\widehat{\mathcal{J}} = n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}_1 - n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{...} \circ \widehat{\mathbf{V}} + o(\|\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_A\|),$$

což při  $\|\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_A\| = O_p(n^{-1/2})$  a vztahu (A.6) je

$$n^{-1}\widehat{\mathcal{J}} = n^{-1}\widehat{\mathcal{J}} - n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widehat{\mathbf{V}} + o_p(n^{-1/2}).$$

Obdobně dostáváme

$$n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} = n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} + o(1),$$

proto

$$n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} = n^{-3/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots} + o_p(n^{-1/2}).$$

Z předpokladů věty a trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pro náhodný vektor  $\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})$ , který lze zapsat ve tvaru

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}},$$

platí  $\|\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\| = O_p(n^{-1/2})$ , tj.  $\|\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^3 = O_p(n^{-3/2})$ . Celkem z (C.4) s užitím lemmatu C.2 a vztahu (A.6) dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta D &= n^{-1}(\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})^T \widehat{\mathcal{J}} (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) + \\ &\quad - n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ \widehat{\mathbf{V}} + \\ &\quad - \frac{1}{3}n^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Označme pro přehlednost  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}} = (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ . Podle lemmatu C.3 lze rozdíl  $\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}$  aproximovat jako

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n + \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n) - \\ - \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

z čehož postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}} &= n^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}) \circ (\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}) = \\ &= n^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Proto lze první sčítanec  $n^{-1}(\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})^T \widehat{\mathcal{J}} (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})$  ze vztahu (C.5) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\zeta}}^T \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\boldsymbol{\zeta}} + n^{-1/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \circ \widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + 2n^{-1/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + \\ + n^{-1/2}\widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}} + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Protože ale  $\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\zeta} = \mathbf{0}$ , lze předchozí vyjádření člene  $n^{-1}(\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})^T\widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})$  zjednodušit na

$$\widehat{\zeta}^T\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\zeta} + n^{-1/2}\widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\zeta} + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.7})$$

Druhý sčítanec  $-n^{-1}\widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ \widehat{\mathbf{V}}$  ve vzorci (C.5) lze při užití vztahu (C.6) a lemmatu C.4 aproximovat jako

$$-n^{-1/2}\widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\zeta} \circ \widehat{\zeta} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.8})$$

Nakonec, třetí sčítanec  $-\frac{1}{3}n^{-1}\widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}}) \circ (\widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathbf{V}})$  v aproximaci (C.5) je možné zapsat jako

$$-\frac{1}{3}n^{-1/2}\widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\zeta} \circ \widehat{\zeta} \circ \widehat{\zeta} + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.9})$$

Součtem aproximací všech tří sčítanců (C.7), (C.8), (C.9) dostaneme tvrzení.

**Lemma C.6** Nechť  $\mathring{\beta} \in \mathbf{B}$  a pro náhodnou veličinu  $\beta_n$  platí  $\beta_n - \mathring{\beta} = O_p(n^{-1/2})$ , tak, že

$$n^{1/2}(\beta_n - \mathring{\beta}) = \mathring{\mathbf{V}} + o_p(1),$$

pak

$$n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22.1}(\beta_n) = n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22.1} + n^{-2}\mathring{\mathbf{M}}^T(\mathring{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \mathring{\mathbf{V}})\mathring{\mathbf{M}} + o_p(n^{-1/2}),$$

kde symbol  $\mathring{\phantom{x}}$  značí hodnotu příslušné matice, resp. vektoru v bodě  $\mathring{\beta}$ .

**Důkaz.** Aproximujme Fisherovu informační matici  $\mathbf{J}$  v bodě  $\beta_n$  Taylorovým polynomem stupně 1 v bodě  $\mathring{\beta}$

$$n^{-1}\mathbf{J}(\beta_n) = n^{-1}\mathring{\mathbf{J}} + n^{-2}\mathring{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ n^{1/2}(\beta_n - \mathring{\beta}) + o_p(n^{-1/2}).$$

Podle předpokladů lze tedy psát

$$n^{-1}\mathbf{J}(\beta_n) = n^{-1}\mathring{\mathbf{J}} + n^{-2}\mathring{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \mathring{\mathbf{V}} + o_p(n^{-1/2}).$$

Pro přehlednější zápis označme matici  $\mathring{\mathbf{F}} = \mathring{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \mathring{\mathbf{V}}$ . Odtud odvodíme aproximaci matice  $n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22.1}(\beta_n) = n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22}(\beta_n) - n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{21}(\beta_n)\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}(\beta_n)\mathring{\mathbf{J}}_{12}(\beta_n)$  jako

$$\begin{aligned} & n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{22} - \\ & - \left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{21} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{21} + o_p(n^{-1/2}) \right) \left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{11} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2}) \right)^{-1} \times \\ & \times \left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{12} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{12} + o_p(n^{-1/2}) \right) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Užitím vzorce pro inverzi součtu matic lze matici  $\left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{11} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2}) \right)^{-1}$  vyjádřit ve tvaru

$$n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} - n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}(n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2}))(\mathbf{I}_r + n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}(n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2})))^{-1}n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1},$$

což odpovídá

$$\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} - n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}(n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2}))(\mathbf{I}_r + o_p(1))^{-1}n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}.$$

Odtud

$$(n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{11} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{11} + o_p(n^{-1/2}))^{-1} = n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} - \mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{F}}_{11}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} + o_p(n^{-1/2}).$$

Dosazením vypočtené inverze do vztahu (C.10) pro aproximaci matice  $n^{-1}\mathbf{J}_{22.1}(\boldsymbol{\beta}_n)$  dostáváme aproximaci  $n^{-1}\mathbf{J}_{22.1}(\boldsymbol{\beta}_n)$  ve tvaru

$$\begin{aligned} & n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{22} - \\ & - \left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{21} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{21} + o_p(n^{-1/2}) \right) \left( n\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} - \mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{F}}_{11}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1} + o_p(n^{-1/2}) \right) \times \\ & \times \left( n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{12} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{12} + o_p(n^{-1/2}) \right) + o_p(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

Což po úpravě odpovídá matici

$$\begin{aligned} & n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{22} + n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{22} - n^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{21}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{12} - n^{-2}\mathring{\mathbf{J}}_{21}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{F}}_{12} - n^{-2}\mathring{\mathbf{F}}_{21}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{12} - \\ & - n^{-2}\mathring{\mathbf{J}}_{21}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{F}}_{11}\mathring{\mathbf{J}}_{11}^{-1}\mathring{\mathbf{J}}_{12} + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení.

**Lemma C.7** Waldova statistika pro test hypotézy  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H}$  proti jednoduché alternativě  $A_n : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2H} + \boldsymbol{\varepsilon}_n$  je tvaru

$$W = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2H})^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2H}).$$

**Důkaz.** Tvar Waldovy statistiky získáme dosazením příslušného vektoru  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\beta}_H$  a matice  $\mathbf{C} = [\mathbf{0}_{p-r \times r} : \mathbf{I}_{p-r}]$  do vyjádření (3.30) s využitím vztahu  $[\widehat{\mathbf{J}}^{22}]^{-1} = \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}$ .

**Věta C.8** Nechť  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$ . Pro statistiku  $W$  z lemmatu C.7 pro test hypotézy  $H_0$  proti alternativě A při platnosti A platí  $W = W^* + o_p(n^{-1/2})$ , kde

$$\begin{aligned} W^* &= (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) + \\ &+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) + \\ &+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathbf{M}} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Vektor v kvadratické formě Waldovy statistiky lze psát ve tvaru

$$n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2H}) = \widehat{\mathbf{V}}_2 + n^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

Dále z předpokladu  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_A + O_p(n^{-1/2})$  a z lemmatu C.4 plyne splnění předpokladů lemmatu C.6, proto při užití vztahu (C.2) dostáváme aproximaci Waldovy statistiky ve tvaru

$$\begin{aligned} W &= \left( n^{1/2} \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}) \right)^T \times \\ &\times \left( n^{-1} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} + n^{-2} \widehat{\mathbf{M}}^T (\widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ n^{1/2} \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}}) \widehat{\mathbf{M}} + o_p(n^{-1/2}) \right) \times \\ &\times \left( n^{1/2} \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + n^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} + o_p(n^{-1/2}) \right), \end{aligned}$$

což po úpravě odpovídá tvrzení věty.

**Lemma C.9** Skórová statistika pro test hypotézy  $H_0: \beta_2 = \beta_{2H}$  proti jednoduché alternativě  $A_n: \beta_2 = \beta_{2H} + \varepsilon_n$  je tvaru

$$S = \widetilde{\mathbf{U}}_2^T \widetilde{\mathbf{J}}^{22} \widetilde{\mathbf{U}}_2. \quad (\text{C.11})$$

**Důkaz.** Protože je odhad  $\widetilde{\beta}_1$  maximálně věrohodným odhadem, platí  $\widetilde{\mathbf{U}}_1 = 0$ . Dosazením  $\widetilde{\mathbf{U}}_1 = 0$  do vyjádření (2.3) přímo dostáváme tvrzení.

**Věta C.10** Nechť  $\widetilde{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$ , pak pro skórovou statistiku  $S$  z (2.3) pro test hypotézy  $H_0$  proti alternativě  $A$  při platnosti  $A$  platí  $S = S^* + o_p(n^{-1/2})$ , kde

$$\begin{aligned} S^* &= (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n)^T \widehat{\mathbf{J}}^{22} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n) + \\ &+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) \circ \\ &\circ \widehat{\mathcal{M}} \widehat{\mathbf{J}}^{22} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n) - \\ &- n^{-1/2} \widehat{\mathcal{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{\cdot 2} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n) \circ \\ &\circ \widehat{\mathbf{J}}^{\cdot 2} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n). \end{aligned}$$

**Důkaz.** Aproximujme vektor  $n^{-1} \widetilde{\mathbf{U}}$  Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě  $\beta_A$

$$n^{-1} \widetilde{\mathbf{U}} = n^{-1} \widehat{\mathbf{U}} - n^{-3/2} \widehat{\mathcal{J}} \widetilde{\mathbf{V}} + \frac{1}{2} n^{-2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots} \circ \widetilde{\mathbf{V}} \circ \widetilde{\mathbf{V}} + o(\|\widetilde{\beta} - \beta_A\|^2).$$

Znásobením  $n^{1/2}$ , dosazením aproximace (C.3) a užitím lemmatu C.2, C.4 a vztahu (A.6) dostáváme

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \widetilde{\mathbf{U}} &= n^{-1/2} \widehat{\mathbf{U}} - n^{-1/2} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} - n^{-1/2} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n + \\ &+ \frac{1}{2} n^{-1} (\mathbf{I}_p - \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{A}}) \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Protože platí maticové vztahy

$$\widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathcal{J}}_{21} & \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \end{bmatrix},$$

je subvektor  $n^{-1/2} \widetilde{\mathbf{U}}_2$  roven

$$\begin{aligned} &-n^{-1/2} \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathbf{U}} + n^{-1/2} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n - \\ &-\frac{1}{2} n^{-1} \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \varepsilon_n) + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

Nyní odvodíme aproximaci matice  $n \widetilde{\mathbf{J}}^{22} = n \widetilde{\mathcal{J}}_{22.1}^{-1}$ . Protože  $\widetilde{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$  a platí lemma C.4 dostáváme z lemmatu C.6

$$n^{-1} \widetilde{\mathcal{J}}_{22.1} = n^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} + n^{-2} \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{M}} + o_p(n^{-1/2}),$$



kde  $\widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ (n^{1/2} \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ . Proto užitím vzorce pro inverzi součtu matic dostáváme aproximaci  $n \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1}$  ve tvaru

$$n \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1} - \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}^T \widehat{\mathbf{F}} (\mathbf{I}_p + n^{-2} \widehat{\mathbf{M}} (n \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1} + o_p(n^{-1/2})) \widehat{\mathbf{M}}^T \widehat{\mathbf{F}})^{-1} \widehat{\mathbf{M}} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1} + o_p(n^{-1/2})$$

Odtud po úpravách obdržíme

$$\begin{aligned} n \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}^{-1} &= n \widehat{\mathbf{J}}^{-22} - \widehat{\mathbf{J}}^{22} \widehat{\mathbf{M}}^T \widehat{\mathbf{F}} (\mathbf{I}_p + o_p(1))^{-1} \widehat{\mathbf{M}} \widehat{\mathbf{J}}^{22} + o_p(n^{-1/2}) = \\ &= n \widehat{\mathbf{J}}^{22} - \widehat{\mathbf{J}}^{22} \widehat{\mathbf{M}}^T \widehat{\mathbf{F}} \widehat{\mathbf{M}} \widehat{\mathbf{J}}^{22} + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Navíc, protože  $\mathbf{J}^{22} \mathbf{M}^T = -\mathbf{J}^{2\cdot}$ , lze psát

$$n \widetilde{\mathbf{J}}^{22} = n \widehat{\mathbf{J}}^{22} - n^{1/2} \widehat{\mathbf{J}}^{2\cdot} (\widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n)) \widehat{\mathbf{J}}^{\cdot 2} + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.13})$$

Dosažením aproximací (C.12) a (C.13) do vyjádření skórové statistiky (C.11) dostáváme tvrzení.

## C.2 Asymptotické rozdělení testových statistik

**Poznámka C.11** V následujících tvrzeních bude užita vlastnost Diracovy  $\delta$  funkce

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \text{ pro } a \neq 0,$$

která plyne z toho, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \frac{1}{|a|} f\left(\frac{u}{a}\right) du,$$

přičemž je pravá strana rovna  $\frac{1}{|a|} f(0)$ , což lze zapsat jako  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \frac{1}{|a|} f(x) dx$ .

**Lemma C.12** Necht'  $\mathcal{U} \stackrel{\text{as}}{\approx} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{J})$ . Pro sdruženou hustotu  $f_1$  skórového vektoru  $n^{-1/2} \mathcal{U}$  a empirické Fisherovy informační matice  $n^{-1} \mathcal{J}$  lze psát

$$\begin{aligned} f_1 &= \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{D}} \right] f_0 + O(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0(n^{-1/2} \mathbf{u}, n^{-1} \mathcal{J}) = \\ &= (2\pi)^{-p/2} n^{p^2+p/2} |\widehat{\mathbf{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}), \quad (\text{C.14}) \\ \widehat{\mathbf{D}} &= [\widehat{D}_{ij}]_{i,j=1,\dots,p}, \quad \widehat{D}_{ij} = n \frac{\delta'(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij})}{\delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij})}, \end{aligned}$$

**Důkaz.** K aproximaci sdružené hustoty  $f_1$  uijeme stejně jako [36] mnohorozměrné Edgeworthovy řady typu A. Tuto řadu lze psát ve tvaru

$$f_1(\mathbf{y}) = \left( 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r D_{(\mathbf{k}-\boldsymbol{\gamma})}^r}{r!} \right) f_0(\mathbf{y}),$$

kde  $D_{(\mathbf{k}-\boldsymbol{\gamma})}^r$  je  $r$ -tý mnohorozměrný diferenciál s koeficienty, které odpovídají rozdílu příslušných kumulantů  $r$ -tého stupně,  $\mathbf{k}$  značí kumulant aproximovaného náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  je kumulant stupně  $r$  příslušný bazické hustotě  $f_0$ . Bazická hustota  $f_0$  je hustotou normálního rozdělení se střední hodnotou a varianční maticí shodnými se střední hodnotou a varianční maticí vektoru  $\mathbf{Y}$ . Podle předpokladů lze za bazickou hustotu náhodného vektoru  $n^{-1/2}\mathbf{U}$  volit

$$f_0(n^{-1/2}\mathbf{u}) = (2\pi)^{-p/2} |n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \mathbf{u}\right\}.$$

Navíc jsou všechny kumulanty matice  $n^{-1}\mathcal{J}$  až na střední hodnotu, která je dle věty 1.4 rovna  $E(n^{-1}\mathcal{J}) = n^{-1}\mathcal{J}$ , řádu  $O(n^{-1})$ , proto za bazickou hustotu matice  $n^{-1}\mathcal{J}$  volíme funkci

$$f_0(n^{-1}\mathcal{J}) = \prod_{i,j=1}^p \delta(n^{-1}\mathcal{J}_{ij} - n^{-1}\widehat{\mathcal{J}}_{ij}) = n^{p^2} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}).$$

Celkem tedy za bazickou hustotu  $(n^{-1/2}\mathbf{U}, n^{-1}\mathcal{J})$  volíme funkci  $f_0$  ze vztahu (C.14). Kumulanty prvního stupně příslušné bazické hustotě  $f_0$  proto odpovídají kumulantům aproximovaných náhodných veličin a koeficient u prvního mnohorozměrného diferenciálu je nulový.

Protože

$$\begin{aligned} E(n^{-1}U_a U_b) &= n^{-1}\{\mathcal{J}\}_{ab} \\ E(n^{-3/2}U_a \{\mathcal{J}\}_{bc}) &= n^{-2}\mathbb{K}_{a,bc}^{(n)} \\ E(n^{-3/2}U_a U_b U_c) &= n^{-2}\mathbb{K}_{a,b,c}^{(n)} \end{aligned}$$

a ostatní kumulanty jsou řádu  $O(n^{-1})$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + n^{-1/2} \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \sum_{c=1}^p \left( \frac{2}{2!} n^{-3/2} \mathbb{K}_{a,bc}^{(n)} D_a D_{bc} - \frac{1}{3!} n^{-3/2} \mathbb{K}_{a,b,c}^{(n)} D_a D_b D_c \right) f_0 \\ &\quad + O(n^{-1/2}), \end{aligned} \tag{C.15}$$

kde

$$D_a = \frac{\partial}{\partial n^{-1/2}\mathbf{u}_a}, \quad D_{ab} = \frac{\partial}{\partial n^{-1}\mathcal{J}_{ab}}.$$

Postupným derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}
D_a f_0 &= -n^{1/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_a f_0 \\
D_{bc} D_a f_0 &= -n^{3/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_a \frac{\delta'(\mathcal{J}_{bc} - \widehat{\mathcal{J}}_{bc})}{\delta(\mathcal{J}_{bc} - \widehat{\mathcal{J}}_{bc})} f_0 \\
D_b D_a f_0 &= -n \{ \mathcal{J}^{-1} \}_a b f_0 + n \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_a \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_b f_0 \\
D_c D_b D_a f_0 &= n^{3/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_a \mathcal{J}_{bc}^{-1} f_0 + n^{3/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_b \mathcal{J}_{ac}^{-1} f_0 + \\
&\quad + n^{3/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_c \mathcal{J}_{ab}^{-1} f_0 - n^{3/2} \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_a \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_b \{ \mathcal{J}^{-1} \mathbf{u} \}_c f_0
\end{aligned}$$

Dosazením do (C.15) dostáváme tvrzení.

**Poznámka C.13** Z vlastností mnohorozměrného normálního rozdělení  $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$  lze odvodit následující rovnosti

$$\begin{aligned}
\int (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right\} \prod_{i=1}^p dz_i &= 1 \\
\int z_i (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right\} \prod_{i=1}^p dz_i &= 0 \\
\int z_i z_j (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right\} \prod_{i=1}^p dz_i &= \delta_{ij} \\
\int z_i z_j z_k (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right\} \prod_{i=1}^p dz_i &= 0
\end{aligned}$$

kde  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ .

**Lemma C.14** Pro trojdimenzionální pole  $\mathcal{K}_{\dots}$  a  $\mathcal{L}_{\dots}$  platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_3 &= 3\mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_3 - \mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_3, \\
\mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{y}_1 &= 2\mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{y}_1 + \mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{y}_1 \circ \mathbf{A} - \mathcal{K}_{\dots} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{y}_1, \\
\mathcal{L}_{ijk} &= \mathcal{K}_{k,ij} - \mathcal{K}_{ijk}.
\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \in \mathbf{R}^p$  je libovolný konečný vektor a  $\mathbf{A}$  je libovolná reálná  $p$ -rozměrná matice. Prvky  $\mathcal{K}_{ijk}$  pole  $\mathcal{K}_{\dots}$  jsou navíc shodné při libovolné permutaci jejich indexů, např.  $\mathcal{K}_{ijk} = \mathcal{K}_{ikj}$ .

**Důkaz.** Pro střední hodnotu trojdimenzionálního pole třetích derivací lze psát

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{ijk} &= \mathbb{E} \left( \frac{\partial^3 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right) = \\
&= \mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{f''_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) - f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2} \right) = \\
&= \mathbb{E} \left( \frac{f'''_{ijk}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) - f''_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{f''_{ik}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) (f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2 + f''_{jk}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) (f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^4} \right).
\end{aligned}$$

Postupným derivováním navíc dostáváme

$$\frac{f''_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})} = \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j} + \frac{f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2}. \quad (\text{C.16})$$

a z podmínky (C.1) plyne  $\mathbb{E} \left( \frac{f'''_{\beta\beta\beta}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})} \right) = 0$ . Proto

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{ijk} &= 0 + \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ij} U_k) - \mathbb{E}(U_i U_j U_k) + \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ik} U_j) - \mathbb{E}(U_i U_j U_k) + \\
&\quad + \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{jk} U_i) - \mathbb{E}(U_i U_j U_k) + 2\mathbb{E}(U_i U_j U_k),
\end{aligned}$$

z čehož po úpravě dostáváme

$$\mathbb{K}_{ijk} = \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ij} U_k) + \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ik} U_j) + \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{jk} U_i) - \mathbb{E}(U_i U_j U_k). \quad (\text{C.17})$$

Odtud vyplývá první část tvrzení.

Tvrzení o matici  $\mathbb{L}$  dokážeme obdobně. Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial \beta_k} \mathbb{E}(U_i U_j) = \frac{\partial}{\partial \beta_k} \int \frac{f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})} f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) d\mu(\mathbf{y}) = \\
&= \int \frac{f''_{ik}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) - f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f'_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{(f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}))^2} \frac{f'_j(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})} f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) d\mu(\mathbf{y}) + \\
&\quad + \int \frac{f'_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f''_{jk}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})}{f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})} f(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}) d\mu(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Užitím vztahů (C.16) a (C.17) dostáváme, že prvek  $\mathbb{L}_{ijk}$  je roven

$$-\mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ik} U_j) + \mathbb{E}(U_i U_j U_k) - \mathbb{E}(U_i U_j U_k) - \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{jk} U_i) + \mathbb{E}(U_i U_j U_k),$$

z čehož plyne  $\mathbb{L}_{ijk} = \mathbb{E}(\{\mathcal{J}\}_{ij} U_k) - \mathbb{K}_{ijk}$ .

**Věta C.15** Necht' jsou splněny předpoklady věty C.5, pak momentová vytvořující funkce statistiky  $\Delta D$  pro test hypotézy  $H_0$  proti alternativě  $A$  je tvaru

$$\begin{aligned} M_{\Delta D}(t) &= (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}(p-r)} \exp \left\{ \frac{t}{1 - 2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} \\ &\quad \left[ 1 + n^{-1/2} (A/3 - B/2 + C/2 - D + E/2 - F/2) + \right. \\ &\quad \quad + n^{-1/2} \frac{1}{1 - 2t} (-A/2 + B - C/2 + D - E/2 + F/2) + \\ &\quad \quad \left. + n^{-1/2} \frac{1}{(1 - 2t)^2} (A/6 - B/2) \right] + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

**Důkaz.** Momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny  $\Delta D$  vypočteme užitím věty C.5 jako

$$\begin{aligned} M_{\Delta D}(t) &= E(\exp\{t\Delta D^*\}) + o(n^{-1/2}) \\ &= \int \cdots \int f_1 \exp\{t\Delta D^*\} \prod_{i=1}^p dn^{-1/2} \mathbf{u}_i \prod_{j,k=1}^p dn^{-1} \mathcal{J}_{jk} + o(n^{-1/2}) \\ &= \int \int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{t\Delta D^*\} d\mathbf{u} d\mathcal{J} + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Označme pro přehlednost

$$\begin{aligned} \Delta D_1^* &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n - 2\boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{U}}^T (\widehat{\mathcal{J}}^{-1} - \widehat{\mathcal{A}}) \widehat{\mathcal{U}} \\ \Delta D_2^* &= -n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathcal{U}} - \\ &\quad - \frac{1}{3} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \\ &\quad \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{M}} &= \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \\ \widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{J}} (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) &= -\widehat{\mathcal{M}}^T \\ (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})^T \widehat{\mathcal{J}} (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) &= -(\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}), \end{aligned}$$

platí  $\Delta D^* = \Delta D_1^* + \Delta D_2^*$ .

Integrujme funkci  $n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{t\Delta D^*\}$  nejdříve vzhledem ke složkám matice  $\mathcal{J}$ . Protože z rozvoje funkce  $\exp\{t\Delta D_2^*\}$  plyne

$$\exp\{t\Delta D^*\} = \exp\{t\Delta D_1^*\} (1 + t\Delta D_2^*) + o_p(n^{-1/2}),$$

můžeme rozložit integrál  $\int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{t\Delta D^*\} d\mathcal{J}$  na součet tří členů

$$\begin{aligned}
& \int \exp\{t\Delta D_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\
& \quad \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \right] d\mathcal{J} - \\
& - \int \exp\{t\Delta D_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\
& \quad \times [n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{D}] d\mathcal{J} + \\
& + \int \exp\{t\Delta D_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\
& \quad \times [t\Delta D_2^*] d\mathcal{J} + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Užitím vlastností Diracovy  $\delta$  funkce a poznámky C.11 zintegrujeme jednotlivé sčítance integrálu. Označme  $\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}})$ , resp.  $\Delta D_2^*(\widehat{\mathcal{J}})$  náhodnou veličinou  $\Delta D_1^*$ , resp.  $\Delta D_2^*$ , ve které je náhodná matice  $\widehat{\mathcal{J}}$  nahrazena maticí  $\widehat{\mathcal{J}}$ . Po těchto úpravách lze integrál  $n^{-p^2-p/2} \int f_1 \exp\{t\Delta D^*\} d\mathcal{J}$  zapsat jako

$$\begin{aligned}
& \exp\left\{t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \times \\
& \quad \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \right] + \\
& + \exp\left\{t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \times \\
& \quad \times \left[ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ t \left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} \right] + \\
& + \exp\left\{t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} [t\Delta D_2^*(\widehat{\mathcal{J}})] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Přitom postupným derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} \right\}_{11} &= \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{21} \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{21} \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \\
&\quad + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{21} \boldsymbol{\varepsilon}_n \widehat{\mathbf{u}}_1^T \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 \widehat{\mathbf{u}}_1^T \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} - \widehat{\mathcal{J}}^{1\cdot} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{1\cdot} \\
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} \right\}_{12} &= -\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n^T - \widehat{\mathcal{J}}^{1\cdot} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} \right\}_{21} = -\varepsilon_n \varepsilon_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{12} \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} - \varepsilon_n \widehat{\mathbf{u}}_1^T \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 \varepsilon_n^T - \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 1}$$

$$\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} \right\}_{22} = \varepsilon_n \varepsilon_n^T - \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2}$$

což lze souhrnně zapsat jako

$$\left[ \frac{\partial \Delta D_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} = (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n)^T - \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{-1}.$$

Odtud je integrál  $\int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{t\Delta D^*\} d\mathcal{J}$  roven

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u} \right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \\ & \quad - n^{-1/2} t \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \\ & \quad - \frac{1}{3} n^{-1/2} t \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ ((\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \circ \\ & \quad \circ ((\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \circ ((\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) + \\ & \quad - n^{-1/2} t \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \\ & \quad \left. + n^{-1/2} t \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n) \right] + \\ & \quad + o(n^{-1/2}). \end{aligned} \tag{C.18}$$

Exponent  $t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}$  je možné díky maticovým vztahům

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{J}} - 2t\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathcal{J}})^{-1} &= \widehat{\mathcal{J}}^{-1} + 2t\widehat{\mathcal{J}}^{-1}(\widehat{\mathcal{J}}^{-1} - 2t\widehat{\mathbf{A}})^{-1}\widehat{\mathbf{A}} = \\ &= \widehat{\mathcal{J}}^{-1} + 2t(\mathbf{I}_p - 2t\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathcal{J}})^{-1}\widehat{\mathbf{A}} = \\ &= \widehat{\mathcal{J}}^{-1} + \frac{2t}{1-2t}\widehat{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{0} \tag{C.20}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{A}} \tag{C.21}$$

$$(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathbf{M}} = -\widehat{\mathbf{M}} \tag{C.22}$$

$$(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{J}}(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) = -(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \tag{C.23}$$

$$\widehat{\mathbf{M}}^T \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \tag{C.24}$$

psát ve tvaru

$$-\frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n \right)^T \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} \varepsilon_n \right) + \frac{t}{1-2t} \varepsilon_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \varepsilon_n, \tag{C.25}$$

kde

$$\widehat{\mathcal{D}} = \frac{1}{1-2t}\widehat{\mathcal{J}} - \frac{2t}{1-2t}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{J}}. \quad (\text{C.26})$$

Transformujme nyní vektor  $\widehat{\mathbf{u}}$  na vektor  $\widehat{\mathbf{z}}$  předpisem

$$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} - 2t\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{\mathcal{J}}^{-1} - \widehat{\mathcal{A}})\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

což odpovídá

$$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} - \frac{2t}{1-2t}\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (\text{C.27})$$

Jednoduchými úpravami s užitím vztahu (C.20) dostáváme

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathcal{D}}| &= (1-2t)^{-p}|\widehat{\mathcal{J}}|\|\mathbf{I}_p - 2t\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{J}}\| = \\ &= (1-2t)^{-(p-r)}|\widehat{\mathcal{J}}| \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} - \frac{2t}{1-2t}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (\text{C.29})$$

$$(\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} + \frac{1}{1-2t}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (\text{C.30})$$

$$\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n = \widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (\text{C.31})$$

a proto lze momentovou vytvořující funkci  $M_{\Delta D}(t)$  náhodné veličiny  $\Delta D$  vyjádřit jako

$$\begin{aligned} M_{\Delta D}(t) &= \int \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} (2\pi)^{-p/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{z}}^T \widehat{\mathbf{z}} \right\} \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \right. \\ &\quad \left. - t n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \frac{t}{3} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 + \right. \\ &\quad \left. - t n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 + t n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \right] d\mathbf{u} \\ &+ o(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}}_1 &= \left( \widehat{\mathcal{J}}^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} - \frac{2t}{1-2t}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \\ \widehat{\mathbf{a}}_2 &= \left( (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1})\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} + \frac{1}{1-2t}\widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \\ \widehat{\mathbf{a}}_3 &= \left( \widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{D}}^{1/2}\widehat{\mathbf{z}} + \widehat{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \end{aligned}$$



Postupným integrováním dle poznámky C.13 dostaneme  $M_{\Delta D}(t)$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \times \\
& \times \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^3 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2t}{1-2t} \right) n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
& \quad + t \frac{2t}{(1-2t)^2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - \frac{t}{3} \frac{1}{(1-2t)^3} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
& \quad + t \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^3 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - \frac{3}{6} \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
& \quad + t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad - \frac{3t}{3} \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
& \quad + 2t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
& \quad + t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} + \\
& \quad + 2t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
& \quad \left. - t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{A}} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Protože platí lemma C.14 a maticové vztahy

$$\widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{1}{1-2t} (\widehat{\mathbf{J}}^{-1} - 2t \widehat{\mathbf{A}}) \quad (\text{C.32})$$

$$\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} = \widehat{\mathbf{A}} \quad (\text{C.33})$$

$$(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{1}{1-2t} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \quad (\text{C.34})$$

$$(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) = -\frac{1}{1-2t}(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \quad (\text{C.35})$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{D}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{A}} \quad (\text{C.36})$$

$$(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1})\widehat{\mathbf{D}}\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.37})$$

lze po úpravě psát

$$\begin{aligned} M_{\Delta D}(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\ &\quad \times \left[ 1 - n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{1}{6} \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^2 - \right. \\ &\quad - \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{1}{6} \frac{2t}{1-2t} - \\ &\quad - n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{1}{2} \frac{2t}{1-2t} + \\ &\quad \left. + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} \right] + o(n^{-1/2}). \quad (\text{C.38}) \end{aligned}$$

Dále, aproximujme kumulanty  $\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}$  a  $\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}$  v bodě  $\boldsymbol{\beta}_A$  jejich hodnotou v bodě  $[\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2H}^T]^T$

$$n^{-3/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} = n^{-3/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} + o(1) \quad (\text{C.39})$$

$$n^{-3/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} = n^{-3/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} + o(1). \quad (\text{C.40})$$

Protože  $[\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2A}^T]^T - [\boldsymbol{\beta}_{1A}^T, \boldsymbol{\beta}_{2H}^T]^T = [\mathbf{0}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T]^T = O(n^{-1/2})$  a zároveň  $\sqrt{n}[\mathbf{0}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T]^T$  lze triviálně chápat jako  $\sqrt{n}[\mathbf{0}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T]^T + o(1)$ , jsou splněny předpoklady lemmatu C.6 podle něhož lze pro matici  $n^{-1} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1}$  psát

$$n^{-1} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} = n^{-1} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} + n^{-3/2} \widehat{\mathbf{M}}^T (\widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \widehat{\mathbf{M}} + o(n^{-1/2}).$$

Odtud užitím lemmatu C.14 plyne

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\ &\quad - n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p(n^{-1/2}). \quad (\text{C.41}) \end{aligned}$$

Dosažením aproximací do vztahu (C.38) obdržíme

$$\begin{aligned}
M_{\Delta D}(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\
&\times \left[ 1 - \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^2 - \right. \\
&\quad - \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} - \\
&\quad - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} + \\
&\quad + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} + \\
&\quad + \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Úpravou na parciální zlomky a užitím lemmatu C.14 pak dostáváme tvrzení.

**Věta C.16** Necht' jsou splněny předpoklady věty C.8, pak momentová vytvořující funkce statistiky  $W$  pro test  $H_0$  proti  $A$  je tvaru

$$\begin{aligned}
M_W(t) &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}(p-r)} \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} \\
&\left[ 1 + n^{-1/2} (A/3 - B/2 + C/2 - D + E/2 - F/2) + \right. \\
&\quad + n^{-1/2} \frac{1}{1-2t} (-A/2 + B + D - E/2 + F/2 - G/2) + \\
&\quad + n^{-1/2} \frac{1}{(1-2t)^2} (-B/2 - C/2 + G/2) - \\
&\quad \left. + n^{-1/2} \frac{1}{(1-2t)^3} A/6 \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

**Důkaz.** Momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny  $W$  vypočteme užitím věty C.8 jako

$$\begin{aligned}
M_W(t) &= E(\exp\{tW^*\}) + o(n^{-1/2}) \\
&= \int \int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tW^*\} d\mathbf{u} d\mathcal{J} + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Označme nejprve pro přehlednost

$$\begin{aligned}
W_1^* &= (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\
W_2^* &= n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) + \\
&\quad + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathbf{M}} (\widehat{\mathcal{J}}^{2\cdot} \widehat{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{U}}.
\end{aligned}$$

Zřejmě  $W^* = W_1^* + W_2^*$ .

Integrujme výraz  $n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tW^*\}$  nejdříve, stejně jako v důkazu věty C.15, vzhledem ke složkám matice  $\mathcal{J}$ . Protože z rozvoje funkce  $\exp\{tW_2^*\}$  plyne

$$\exp\{tW^*\} = \exp\{tW_1^*\}(1 + tW_2^*) + o_p(n^{-1/2}),$$

můžeme rozložit integrál  $\int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tW^*\} d\mathcal{J}$  na součet tří členů

$$\begin{aligned} & \int \exp\{tW_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\ & \quad \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \right] d\mathcal{J} - \\ & - \int \exp\{tW_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\ & \quad \times [n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{D}] d\mathcal{J} + \\ & + \int \exp\{tW_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) [tW_2^*] d\mathcal{J} + \\ & + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Užitím vlastností Diracovy  $\delta$  funkce a poznámky C.11 zintegrujeme jednotlivé sčítance integrálu. Označme  $W_1^*(\widehat{\mathcal{J}})$ , resp.  $W_2^*(\widehat{\mathcal{J}})$  náhodnou veličinu  $W_1^*$ , resp.  $W_2^*$ , ve které je náhodná matice  $\mathcal{J}$  nahrazena maticí  $\widehat{\mathcal{J}}$ . Při integraci je třeba vyjádřit derivaci  $W_1^*$  dle prvků matice  $\widehat{\mathcal{J}}$  v bodě  $\widehat{\mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial W_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} &= -\widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \widehat{\mathcal{J}}^2 \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{-1} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \widehat{\mathcal{J}}^2 - \\ & - 2\widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \widehat{\mathcal{J}}^2. \end{aligned}$$

Protože platí maticové vztahy

$$\widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} = -\widehat{\mathcal{M}} \tag{C.42}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \widehat{\mathcal{J}}^2 = -(\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}). \tag{C.43}$$

můžeme psát

$$\left[ \frac{\partial W_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} = ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \widehat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathcal{J}}^{-1} + \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} ((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T$$

Odtud s užitím vztahů (C.42) a (C.43) dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tW^*\} d\mathcal{J} = \\
& \exp\left\{tW_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \times \\
& \times \left[1 + \frac{1}{6}n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\
& \quad - \frac{1}{2}n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \\
& \quad - tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \left((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n\right) + \\
& \quad + tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \left((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \circ \left((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} + \\
& \quad \left. + 2tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \left((\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Exponent  $(tW_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u})$  je díky vztahům (C.24) a

$$\widehat{\mathcal{M}} \widehat{\mathcal{J}}^{22} \widehat{\mathcal{M}}^T = -(\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \quad (\text{C.44})$$

shodný s exponentem  $(t\Delta D_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u})$  v (C.18) příslušným statistice  $\Delta D$  z důkazu věty C.15, který lze psát ve tvaru

$$-\frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right)^T \widehat{\mathcal{D}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) + \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

kde matice  $\widehat{\mathcal{D}}$  je určena vztahem (C.26). Proto volíme i stejnou transformaci vektoru  $\widehat{\mathbf{u}}$  na vektor  $\widehat{\mathcal{Z}}$  předpisem (C.27).

Úpravou s užitím vztahů (C.28), (C.29), (C.30) dostáváme vyjádření momentové vytvořující funkce  $M_W(t)$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
& \int \exp\left\{\frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n\right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{Z}}^T \widehat{\mathcal{Z}}\right\} \\
& \times \left[1 + \frac{1}{6}n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \frac{1}{2}n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \right. \\
& \quad - tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 + tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 + \\
& \quad \left. + 2tn^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2\right] d\mathbf{u} + o(n^{-1/2}),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{a}}_1 &= \left( \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathcal{D}}^{1/2} \widehat{\mathcal{Z}} - \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \\
\widehat{\mathbf{a}}_2 &= \left( (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathcal{D}}^{1/2} \widehat{\mathcal{Z}} + \frac{1}{1-2t} \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right).
\end{aligned}$$

Postupným integrováním s užitím poznámky C.13 a lemmatu C.14 obdržíme

$$\begin{aligned}
M_W(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \times \\
&\times \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^3 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2t}{1-2t} \right) n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad - t \frac{(2t)^4}{(1-2t)^3} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad + t \frac{2t}{(1-2t)^3} n^{-1/2} (\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} - \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^3 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - \frac{3}{6} \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad - t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad + 2t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad + t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) - \\
&\quad - 2t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} + \\
&\quad + 2t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad - 2t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - 2t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Protože platí lemma C.14 a maticové vztahy (C.32), (C.33), (C.34), dostáváme

$$\begin{aligned}
M_W(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\
&\times \left[ 1 + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-8t^3 + 6t^2}{3(1-2t)^3} - \right. \\
&- n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t^2}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t(t-1)}{(1-2t)^2} + \\
&\left. + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Stejně jako v důkaze věty C.15 nyní aproximujeme kumulanty, tj. uijeme vztahy (C.39), (C.40) a (C.41), a tímto odvodíme

$$\begin{aligned}
M_W(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\
&\times \left[ 1 + n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-8t^3 + 6t^2}{3(1-2t)^3} - \right. \\
&- n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t^2}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t(t-1)}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{1-2t} - \\
&\left. - n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{1-2t} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Úpravou na parciální zlomky pak dostáváme tvrzení.

**Věta C.17** Nechť platí předpoklady věty C.10, pak momentová vytvořující funkce statistiky  $S$  pro test  $H_0$  proti  $A$  je tvaru

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}(p-r)} \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} \\
&\left[ 1 + n^{-1/2} (A/3 - B/2 + C/2 - D + E/2 - F/2) + \right. \\
&\quad + n^{-1/2} \frac{1}{1-2t} (-A/2 + B - C/2 + D - E/2 + F/2 + I/2 - J/2) + \\
&\quad + n^{-1/2} \frac{1}{(1-2t)^2} (-I/2 + J/2) + \\
&\quad \left. + n^{-1/2} \frac{1}{(1-2t)^3} (A/6 - B/2) \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

**Důkaz.** Z věty C.10 plyne, že momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny  $S$  lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E(\exp\{tS^*\}) + o(n^{-1/2}) \\
&= \int \int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tS^*\} d\mathbf{u} d\mathcal{J} + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Při označení

$$\begin{aligned}
S_1^* &= (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \widehat{\mathcal{J}}^{22} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\
S_2^* &= n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \\
&\quad \circ \widehat{\mathcal{M}} \widehat{\mathcal{J}}^{22} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n) - \\
&\quad - n^{-1/2} \widehat{\mathcal{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \\
&\quad \circ \widehat{\mathcal{J}}^{\cdot 2} (\widehat{\mathcal{M}}^T \widehat{\mathcal{U}} - \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n),
\end{aligned}$$

zřejmě platí  $S^* = S_1^* + S_2^*$ .

Integrujme funkci  $n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tS^*\}$  v prvním kroku, stejně jako v důkazech vět C.15 a C.16, vzhledem ke složkám matice  $\mathcal{J}$ . Protože z rozvoje funkce  $\exp\{tS_2^*\}$  plyne

$$\exp\{tS^*\} = \exp\{tS_1^*\} (1 + tS_2^*) + o_p(n^{-1/2}),$$



můžeme aproximovat integrál  $\int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tS^*\} d\mathcal{J}$  součtem tří členů

$$\begin{aligned}
& \int \exp\{tS_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\
& \quad \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \right] d\mathcal{J} - \\
& - \int \exp\{tS_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) \times \\
& \quad \times [n^{-1/2} \widehat{\mathbb{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{D}] d\mathcal{J} + \\
& + \int \exp\{tS_1^*\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u}\right\} \prod_{i,j=1}^p \delta(\mathcal{J}_{ij} - \widehat{\mathcal{J}}_{ij}) [tS_2^*] d\mathcal{J} \\
& + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Užitím vlastností Diracovy  $\delta$  funkce a poznámky C.11 zintegrujeme jednotlivé sčítance integrálu. Označme  $S_1^*(\widehat{\mathcal{J}})$ , resp.  $S_2^*(\widehat{\mathcal{J}})$  náhodnou veličinou  $S_1^*$ , resp.  $S_2^*$ , ve které je náhodná matice  $\widehat{\mathcal{J}}$  nahrazena maticí  $\widehat{\mathcal{J}}$ . Při integraci je třeba vyjádřit derivaci  $S_1^*$  dle prvků matice  $\widehat{\mathcal{J}}$  v bodě  $\widehat{\mathcal{J}}$

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta S_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right\}_{11} &= ((\widehat{\mathcal{J}}^{11} - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{12} \widehat{\mathbf{u}}_2 - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \times \\
& \quad \times (\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T + \\
& \quad + (\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \times \\
& \quad \times ((\widehat{\mathcal{J}}^{11} - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{12} \widehat{\mathbf{u}}_2 - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \\
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta S_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right\}_{12} &= (\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n) (\widehat{\mathcal{J}}^{21} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{22} \widehat{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T - \\
& \quad - ((\widehat{\mathcal{J}}^{11} - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{12} \widehat{\mathbf{u}}_2 - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \\
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta S_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right\}_{21} &= (\widehat{\mathcal{J}}^{21} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{22} \widehat{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_n) (\widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T - \\
& \quad - \boldsymbol{\varepsilon}_n ((\widehat{\mathcal{J}}^{11} - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{12} \widehat{\mathbf{u}}_2 - \widehat{\mathcal{J}}_{11}^{-1} \widehat{\mathcal{J}}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T \\
\left\{ \left[ \frac{\partial \Delta S_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ij}} \right\}_{22} &= -(\widehat{\mathcal{J}}^{21} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{22} \widehat{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_n^T - \boldsymbol{\varepsilon}_n (\widehat{\mathcal{J}}^{21} \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}^{22} \widehat{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T
\end{aligned}$$

což lze v celku zapsat jako

$$\left[ \frac{\partial \Delta S_1^*}{\partial \widehat{\mathcal{J}}} \right]_{\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}} = - \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n)^\top - \\ - (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right)^\top.$$

Celkem s užitím vztahů (C.44) a

$$\widehat{\mathcal{J}}^2 \widehat{\mathbf{M}}^\top = \widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \\ - \widehat{\mathcal{J}}^2 \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} = \widehat{\mathbf{M}}$$

dostáváme aproximaci integrálu  $\int n^{-p^2-p/2} f_1 \exp\{tS^*\} d\mathcal{J}$  ve tvaru

$$\exp \left\{ tS_1^*(\widehat{\mathcal{J}}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \widehat{\mathcal{J}} \mathbf{u} \right\} (2\pi)^{-p/2} |\widehat{\mathcal{J}}|^{-1/2} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} - \right. \\ \left. - tn^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) - \right. \\ \left. - tn^{-1/2} \widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \circ \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \circ \right. \\ \left. \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) + \right. \\ \left. + 2tn^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{u}} \circ (\widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \circ \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \right] + o(n^{-1/2}).$$

Exponent je díky vztahu (C.44) shodný s exponentem v (C.18) příslušným statistice  $\Delta D$  z důkazu věty C.15, který lze psát ve tvaru

$$-\frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right)^\top \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{u}} + \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) + \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

kde

$$\widehat{\mathbf{D}} = \frac{1}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} - \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathcal{J}}.$$

Proto volíme i stejnou transformaci vektoru  $\widehat{\mathbf{u}}$  na vektor  $\widehat{\mathbf{z}}$  předpisem

$$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{D}}^{1/2} \widehat{\mathbf{z}} - \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathcal{J}} \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

Úpravou s užitím vztahů (C.28), (C.29), (C.30) a (C.31) při označení

$$\widehat{\mathbf{a}}_1 = \left( \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}}^{1/2} \widehat{\mathbf{z}} - \frac{2t}{1-2t} \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \\ \widehat{\mathbf{a}}_2 = \left( (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathcal{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}}^{1/2} \widehat{\mathbf{z}} + \frac{1}{1-2t} \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right) \\ \widehat{\mathbf{a}}_3 = \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}}^{1/2} \widehat{\mathbf{z}} + \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right)$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \int \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} (2\pi)^{-p/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \widehat{\boldsymbol{z}}^T \widehat{\boldsymbol{z}} \right\} \\
&\times \left[ 1 + \frac{1}{6} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \frac{1}{2} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 - \right. \\
&\quad - t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 - t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{L}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 + \\
&\quad \left. + 2t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{a}}_1 \circ \widehat{\mathbf{a}}_3 \circ \widehat{\mathbf{a}}_2 \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Postupným integrováním dle poznámky C.13 a lemmatu C.14 odvodíme

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \times \\
&\times \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^3 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2t}{1-2t} \right) n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + t \frac{1}{(1-2t)^2} n^{-1/2} (\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} - \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - \left( \frac{2t}{1-2t} \right)^2 n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - \frac{3}{6} \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - t \frac{1}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad - 2t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} (\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} - \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) + \\
&\quad + t n^{-1/2} (\widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} - \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)}) \circ (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} \widehat{\mathbf{A}} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n + \\
&\quad + 2t n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{J}}^{-1} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n - \\
&\quad \left. - 2t \frac{2t}{1-2t} n^{-1/2} \widehat{\mathbf{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{D}} (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{J}}^{-1}) \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Protože platí lemma C.14 a maticové vztahy (C.32) – (C.37) lze momentovou vy-

tvořící funkci statistiky  $S$  aproximovat jako

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\
&\times \left[ 1 + n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-8t^3 + 6t^2}{3(1-2t)^3} + \right. \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{4t^3 - 2t^2 - t}{(1-2t)^3} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-t}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-t}{(1-2t)^2} + \\
&\left. + n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{(1-2t)^2} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Na závěr, stejně jako v důkaze věty C.15 aproximujeme kumulanty, tj. uijeme vztahy (C.39), (C.40) a (C.41), a tímto dostáváme

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top \widehat{\mathcal{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} (1-2t)^{\frac{1}{2}(p-r)} \\
&\times \left[ 1 + n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-8t^3 + 6t^2}{3(1-2t)^3} + \right. \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{4t^3 - 2t^2 - t}{(1-2t)^3} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-t}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{2t}{1-2t} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-t}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{\dots}^{(n)} \circ \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{(1-2t)^2} + \\
&+ n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{t}{1-2t} + \\
&\left. + n^{-1/2} \widehat{\mathcal{K}}_{2,\dots}^{(n)} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \circ \widehat{\mathcal{M}} \boldsymbol{\varepsilon}_n \frac{-t}{1-2t} \right] + o(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Úpravou na parciální zlomky pak dostáváme tvrzení.

**Poznámka C.18** Momentová vytvořující funkce necentrálního  $\chi_{r,\lambda}^2$  rozdělení je dle [43], str. 278, tvaru

$$\psi(t) = (1-2t)^{-r/2} \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \lambda \right\}.$$

**Důsledek C.19** Necht'  $\beta_A$  je skutečná hodnota parametru  $\beta$ ,  $\widehat{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$ ,  $\widetilde{\beta} = \beta_A + O_p(n^{-1/2})$ . Pak statistiky  $\Delta D$ ,  $W$ , a  $S$  mají všechny asymptoticky  $\chi_{p-r,\lambda}^2$  rozdělení s  $\lambda = \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ . Navíc, je-li skutečná hodnota parametru rovna  $\beta_H$ , pak mají všechny statistiky  $\chi_{p-r}^2$  rozdělení (tj.  $\lambda = 0$ ).

**Důkaz.** Tvrzení plyne z vět C.4, C.11, C.12, neboť jejich důsledkem je, že pro momentovou vytvořující funkci libovolné ze statistik  $\Delta D$ ,  $W$ ,  $S$  platí

$$M(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}(p-r)} \exp \left\{ \frac{t}{1 - 2t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \widehat{\mathbf{J}}_{22.1} \boldsymbol{\varepsilon}_n \right\} + o(1).$$

Odtud užitím poznámky C.18 plyne tvrzení.



# Seznam matlabovských programů z příloženého CD

příklad\_geny Programy užívané pro výpočty v příkladu 3.29

confreg.m – výpočet oblastí spolehlivosti kontrastů parametrů MGLM podle věty 3.24

fact.m – převod matice doprovodných kategoriálních proměnných do příslušné matice plánu modelu

iwlsm\_Mn.m – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s multinomickým rozdělením

statistics\_Mn.m – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s multinomickým rozdělením

příklad1\_Mn Programy užívané při výpočtu příkladu 4.8

asym\_power\_Mn.m – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s multinomickým rozdělením dle poznámky 4.6

iwlsm\_Mn.m – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s multinomickým rozdělením

multrnd.m – program generující vektor s multinomickým rozdělením z [45]

power\_Mn\_example1.m – zadání parametrů simulací pro příklad 4.8

sim\_power\_Mn.m – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D$ ,  $S$ ,  $W$  v MGLM s multinomickým rozdělením

statistics\_Mn.m – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s multinomickým rozdělením

příklad2\_Diri Programy užívané při výpočtu příkladu 4.9

asym\_power\_Diri.m – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s transformovaným Dirichletovým rozdělením dle poznámky 4.6

dif\_Diri.m – pomocná funkce programu `inv_mu_Diri.m`

diripdf.m – grafické znázornění hustoty dvourozměrného transformovaného Dirichletova rozdělení

`inv_mu_Diri.m` – numerický výpočet přirozeného parametru  $\alpha$  transformovaného Dirichletova rozdělení příslušného střední hodnotě  $\mu$   
`iwlsm_Diri.m` – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s transformovaným Dirichletovým rozdělením  
`power_Diri_example1.m` – zadání parametrů simulací pro příklad 4.9  
`sim_power_Diri.m` – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D$ ,  $S$ ,  $W$  pro MGLM s transformovaným Dirichletovým rozdělením  
`statistics_Diri.m` – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s transformovaným Dirichletovým rozdělením

`priklad3_Ws` Programy užití při výpočtu příkladu 4.10

`asym_power_Ws.m` – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s Wishartovým rozdělením dle poznámky 4.6  
`det_mu_Ws.m` – výpočet determinantu  $|\Sigma(\theta)|$  maticového parametru Wishartova rozdělení  
`inv_mu_Ws.m` – výpočet přirozeného parametru  $\theta$  Wishartova rozdělení se střední hodnotou  $\mu$   
`itriu.m` – indexy prvků horního trojúhelníku čtvercové matice  
`iwlsm_Ws.m` – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s Wishartovým rozdělením  
`power_Ws_example1.m` – zadání parametrů simulací pro příklad 4.10  
`sim_power_Ws.m` – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D$ ,  $S$ ,  $W$  pro MGLM s Wishartovým rozdělením  
`statistics_Ws.m` – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s Wishartovým rozdělením

`srovnani_1dim` Programy užití při srovnání aproximovaných a simulovaných sil v MGLM1 s vybraným jednorozměrným rozdělením

`asym_power_1dim.m` – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM1 s vybraným jednorozměrným rozdělením dle poznámky 4.6 a jejich grafické srovnání se simulacemi a aproximacemi dle kapitoly 5  
`sim_asym_power_Bi.m.m` – simulace sil a výpočet asymptotické aproximace síly z kapitoly 5 v MGLM1 s binomickým rozdělením  
`sim_asym_power_G.m` – simulace sil a výpočet asymptotické aproximace síly z kapitoly 5 v MGLM1 s gama rozdělením  
`sim_asym_power_NB.m` – simulace sil a výpočet asymptotické aproximace síly z kapitoly 5 v MGLM1 s negativně binomickým rozdělením  
`sim_asym_power_Po.m` – simulace sil a výpočet asymptotické aproximace síly z kapitoly 5 v MGLM1 s Poissonovým rozdělením



`srovnani_diri` Programy užit $\acute{e}$  při srovnání aproximovaných a simulovaných sil testů v MGLM1 s transformovaným Dirichletovým rozdělením v kapitole 6

`asym_power_Diri.m` – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s transformovaným Dirichletovým rozdělením dle poznámky 4.6

`b_Diri.m` – výpočet hodnoty funkce  $b(\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}))$  střední hodnoty transformovaného Dirichletova rozdělení

`dif_Diri.m` – pomocná funkce programu `inv_mu_Diri.m`

`inv_mu_Diri.m` – numerický výpočet přirozeného parametru  $\boldsymbol{\alpha}$  transformovaného Dirichletova rozdělení příslušného střední hodnotě  $\boldsymbol{\mu}$

`iwlsm_Diri.m` – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s transformovaným Dirichletovým rozdělením

`power_Diri_example2.m` – zadání parametrů simulací pro obrázek 6.2

`sim_asym_power_Diri.m` – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D, S, W$  v MGLM1 s transformovaným Dirichletovým rozdělením a výpočet jejich asymptotických aproximací dle kapitoly 5

`statistics_Diri.m` – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s transformovaným Dirichletovým rozdělením

`var_Diri.m` – výpočet funkce  $b''(\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}))$  střední hodnoty transformovaného Dirichletova rozdělení

`srovnani_Mn` Programy užit $\acute{e}$  při srovnání aproximovaných a simulovaných sil testů v MGLM1 s multinomickým rozdělením v kapitole 6

`asym_power_Mn.m` – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s multinomickým rozdělením dle poznámky 4.6

`iwlsm_Mn.m` – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s multinomickým rozdělením

`multrnd.m` – program generující vektor s multinomickým rozdělením z [45]

`power_Mn_example2.m` – zadání parametrů simulací pro obrázek 6.1

`sim_asym_power_Mn.m` – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D, S, W$  v MGLM1 s multinomickým rozdělením a výpočet jejich asymptotických aproximací dle kapitoly 5

`statistics_Mn.m` – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s multinomickým rozdělením

`srovnani_Ws` Programy užit $\acute{e}$  při srovnání aproximovaných a simulovaných sil testů v MGLM1 s Wishartovým rozdělením v kapitole 6

`asym_power_Ws.m` – výpočet asymptotických aproximací sil testů v MGLM s Wishartovým rozdělením dle poznámky 4.6

`det_mu_Ws.m` – výpočet determinantu  $|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})|$  maticového parametru Wishartova rozdělení

`inv_mu_Ws.m` – výpočet přirozeného parametru  $\theta$  Wishartova rozdělení se střední hodnotou  $\mu$

`itriu.m` – indexy prvků horního trojúhelníku čtvercové matice

`iwlsm_Ws.m` – iterační metoda vážených nejmenších čtverců pro odhad parametrů MGLM s Wishartovým rozdělením

`power_Ws_example2.m` – zadání parametrů simulací pro obrázek 6.3

`sim_asym _power_Ws.m` – simulace sil testů založených na statistice  $\Delta D, S, W$  pro MGLM1 s Wishartovým rozdělením a výpočet jejich asymptotických aproximací dle kapitoly 5

`statistics_Ws.m` – výpočet testových statistik pro test vhodnosti submodelu s Wishartovým rozdělením

`var_Ws.m` – výpočet varianční matice vektoru s Wishartovým rozdělením

# Literatura

- [1] Anděl, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2005. 358 s. ISBN 8086732401.
- [2] Anderson, Theodore W. *Vvedenije v mnogomernyj statističeskij analiz*. Moskva: Fizmatgiz, 1963. 500 s.
- [3] Belitskii, Genrikh R., Lyubich, Yu. I. *Matrix norms and their applications*. Basel: Birkhäuser, 1988. 209 s. ISBN 3764322209.
- [4] Bishop, Yvonne M. M., Fienberg, Stephen E., Holland, Paul W. *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. Cambridge: MIT Press, 1975. 557 s. ISBN 0262021137.
- [5] Cordeiro, Gauss M., Botter, Denise A., Ferrari, Silvia L. de Paula. Nonnull Asymptotic Distributions of Three Classic Criteria in Generalised Linear Models. *Biometrika*, Dec. 1994, Vol. 81, No. 4, s. 709-720.
- [6] Dobson, Annette J. *An Introduction to Generalized Linear Models*. 1st ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1990. 174 s. ISBN 0412311100.
- [7] Dunn, Olive J., Massey, Frank J., Jr. Estimation of Multiple Contrasts Using t-Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Jun. 1965, Vol. 60, No. 310, s. 573-583.
- [8] Fahrmeir, Ludwig. Asymptotic Testing Theory for Generalized Linear Models. *Statistics*, 1987, Vol. 18, No. 1, s. 65-76.
- [9] Fahrmeir, Ludwig, Kaufmann, Heinz. Consistency and Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimator in Generalized Linear Models. *The Annals of Statistics*, Mar. 1985, Vol. 13, No. 1, s. 342-368.
- [10] Fahrmeir, Ludwig, Tutz, Gerhard. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. New York: Springer – Verlag, 1994. 425 s. ISBN 0387942335.
- [11] Fang, Kai-Tai, Anderson, Theodore W. *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions*. New York: Allenton Press, 1990. 498 s. ISBN 0898640482.

- [12] Foutz, Robert V. On the Unique Consistent Solution to the Likelihood Equations. *Journal of the American Statistical Association*, Mar. 1977, Vol. 72, No. 357, s. 147-148.
- [13] Gil-Pelaez, J. Note on the Inversion Theorem. *Biometrika*, Dec. 1951, Vol. 38, No. 3/4, s. 481-482.
- [14] Harris, P., Peers, H. W. The Local Power of the Efficient Scores Test Statistic. *Biometrika*, 1980, Vol. 67, No. 3, s. 525-529.
- [15] Hayakawa, Takesi. The Likelihood Ratio Criterion for a Composite Hypothesis Under a Local Alternative. *Biometrika*, Aug. 1975, Vol. 62, No. 2, s. 451-460.
- [16] Hrdličková, Zuzana. *Log-lineární modely s Poissonovskými proměnnými*. Brno, 2002. 71 s. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně na katedře aplikované matematiky. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.
- [17] Hrdličková, Zuzana. Power of the Test in One-Way ANOVA Type Model with Poisson Distributed Variables. In *Summer School, DATASTAT'03, Proceedings*. Editor I. Horová. 1. vyd. Brno: Masarykova Univerzita v Brně, 2004. s. 123-136. (Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianæ Brunensis, Mathematica 15, ISBN 80-210-3564-1).
- [18] Hrdličková, Zuzana. Comparison of the power of the tests in one-way ANOVA type model with Poisson distributed variables. Editor Ray Correll. *Environmetrics, Special Issue TIES Conference, 2003*, May 2006, Vol. 17, Issue 3, s. 227-237.
- [19] Hrdličková, Zuzana. Powers of Anova Tests for Variables with General Distribution from Exponential Class. In *The Joint Proceedings of Accuracy 2004 and TIES 2004, Portland Maine, USA, June 28 - July 1, 2004*. [CD-ROM]. Editor H. T. Mowrer, R. McRoberts, P. C. VanDeusen. USA: USDA, Forest Service, 2004.
- [20] Imhof, J. P. Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variables. *Biometrika*, Dec. 1961, Vol. 48, No. 3/4, s. 419-429.
- [21] Johnson, Norman L., Kotz, Samuel, Balakrishnan, N. *Discrete Multivariate Distributions*. New York: Wiley, 1997. 299 s. ISBN 0417128449.
- [22] Johnson, Richard A., Wichern Dean W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1992. 642 s. ISBN 0130418072.
- [23] Kotz, Samuel, Balakrishnan, N., Johnson, Norman L. *Continuous multivariate distributions: Volume 1, Models and applications*. 2nd ed. New York: Wiley, 2000. 722 s. ISBN 0471183873.

- [24] Lamoš, František, Potocký, Rastislav. *Pravděpodobnost a matematická statistika: statistické analýzy*. Bratislava: Alfa, 1989. 342 s. ISBN 8005001150.
- [25] Lehmann, Erich L. *Testing Statistical Hypothesis*. 2nd ed. New York: Springer, 1997. 600 s. ISBN 0387949194.
- [26] Lehmann, Erich L. *Theory of Point Estimation*. 2nd ed. New York: Springer, 1998. 589 s. ISBN 0387985026.
- [27] Lehmann, Erich L. *Elements of large-sample theory*. New York: Springer, 1998. 631 s. ISBN 0387985956.
- [28] Machek, Josef. *Teorie odhadu*. 2. přeprac. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 1980. 138 s.
- [29] Mäkeläinen, Timo, Schmidt, Klaus, Styan, George P. H. On the Existence and Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimate of a Vector-valued Parameter in Fixed-size Samples. *The Annals of Statistics*, Jul. 1981, Vol. 9, No. 4, s. 758-767.
- [30] Mañas, Miroslav: *Optimalizační metody*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1979. 257 s.
- [31] Mardia, Kantilal V., Kent, John T., Bibby, John M. *Multivariate Analysis*. London: Academic Press. 1979. 518 s. ISBN 0124712525.
- [32] McCullagh, P., Nelder, J. A. *Generalized Linear Models*. 2nd ed. London: Chapman & Hall, 1989. 511 s. ISBN 0412317605
- [33] Michálek, Jaroslav. Lineární a zobecněný lineární model. In *Sborník prací celostátního semináře ANALÝZA DAT 2003/II., Lázně Bohdaneč u Pardubice. 24. - 27. 11. 2003*. Editor K. Kupka. Pardubice: Trilobyte, 2004. s. 64-85. ISBN 8023925903.
- [34] Minka, Thomas P. *Estimating a Dirichlet distribution*. [online]. 2000, poslední revize 20.2.2003. [cit. 2005-9-24]. Dostupné z <<http://research.microsoft.com/~minka/papers/dirichlet/>>.
- [35] Narayanan, A. Maximum Likelihood Estimation of the parameters of Dirichlet Distribution. *Applied Statistics*, 1991, Vol. 40, No. 2, s. 365-374.
- [36] Peers, H. W. Likelihood Ratio and Associated Test Criteria. *Biometrika*, Dec. 1971, Vol. 58, No. 3, s. 577-587.
- [37] Pepe, Margaret S. An Interpretation for the ROC Curve nad Inference Using GLM Procedures. *Biometrics*, Jun. 2000, Vol. 56, No. 2, s. 352-359.
- [38] Rao, Radhakrishna C. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*. 1. vyd. překl. Praha: ACADEMIA, 1978. 668 s.

- [39] Rektorys, Karel, et al. *Přehled užití matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. 720 s. ISBN 8071961809.
- [40] Serfling, Robert J. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York: Wiley, 2002. 371 s. ISBN 0471219274.
- [41] Schwartz, Laurent. *Matematické metody ve fyzice*. 1. vyd. SNTL: Praha, 1972. 357 s.
- [42] Scheffe, Henry. *Dispersionnyj analiz*. 2. izd. Moskva: Nauka. 1980. 512 s.
- [43] Stuart, A., Ord, J.Keith. *Kendall's Advanced Theory of Statistics: Volume I, Distribution Theory*. 5th. ed. New York: Oxford University Press. 1987. ISBN 0195205618.
- [44] Tarone, Robert E., Gruenlage, Gary: A note on the Uniqueness of Roots of the Likelihood Equations for Vector-Valued Parameters. *Journal of the American Statistical Association*, Dec. 1975, Vol. 70, No. 352, s. 903-904.
- [45] Trujillo-Ortiz, A., Hernandez-Walls, R., Castro-Perez, A. *multnrd: Multinomial random sequence*. [MATLAB program] 26.1.2005. Dostupné z <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=6788>>
- [46] Vaart, A.W. van der: *Asymptotic Statistics*. New York: Cambridge University Press. 1998. 443 s. ISBN 0521784506.
- [47] Wedderburn, R. W. M. On the Existence and Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimates for Certain Generalized Linear Models. *Biometrika*, Apr. 1976, Vol. 63, No. 1, s. 27-32.
- [48] Witkovský, Viktor. *Cdfchi.m: Cdf of the linear combination of noncentral chi-squares, Trapezoidal method of integration* [MATLAB program] Ver. 001. 13.2.2000. [cit. 2006-4-1]. Vyžaduje Matlab ver.5 a vyšší.
- [49] Witkovský, Viktor. Výpočet niektorých exaktných rozdelení pomocou charakteristických funkcií. Editor J. Antoch, G. Dohnal. In *ROBUST 2000. Sborník prací jedenácté letní školy JČMF. 11.9.-15.9.2000, Nečtiny, ČR, JČMF*. Praha 2001. s. 368-381.
- [50] Zvára, Karel, Štěpán, Josef. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 3. vyd. Praha: Matfyzpress. 2002. 230 s. ISBN 8085863936.