

Studijní program **Matematika se zaměřením na vzdělávání**
Státní závěrečná zkouška
Písemná zkouška z matematiky, 29. června 2021

1. (10 bodů) V oboru reálných čísel řešte následující rovnici s neznámou x

$$x^{\log x} = \sqrt{1000x},$$

kde \log znamená logaritmus o základu 10.

2. (10 bodů) Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je definována funkce

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2},$$

a nalezněte globální extrémy funkce $g(x)$ na této množině.

3. (10 bodů) Graf funkce $y = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ rotuje kolem osy x . Určete objem vzniklého rotačního tělesa.

4. (10 bodů) Určete všechna komplexní čísla a , pro které jeden kořen polynomu

$$f = x^3 + ax^2 + 4x - 4$$

je součinem zbylých dvou. Pro tato a nalezněte všechny kořeny polynomu f .

5. (10 bodů) Nalezněte všechny dvojice (u, v) reálných čísel takové, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4 \\2x + uy + 2z &= 6 \\4x + 3y + vz &= 14\end{aligned}$$

s neznámými x, y, z má v oboru reálných čísel nekonečně mnoho řešení.

6. (10 bodů) Kulečnickový stůl má tvar obdélníku $ABCD$, délky jeho stran jsou $|AB| = 240$ cm, $|AD| = 120$ cm. Bod K je těžiště trojúhelníka ABD . Kouli, která leží v bodě K , má hráč pomocí odrazu o stranu AB a následného odrazu o stranu BC odehrát do otvoru, který je ve vrcholu D .

V měřítku 1:40 narýsujte dráhu koule v obdélníku $ABCD$. Dále vypočítejte:

- délku dráhy koule,
- vzdálenost bodů odrazu X, Y od bodu B .

Rozměry koule i rozměry otvoru zanedbejte, kouli i otvor považujte za body.