24. června 2014, studijní program Matematika, učitelské obory

Část A

A1. (4 body) Definujte násobnost kořene $\alpha \in \mathbb{C}$ polynomu $f \in \mathbb{C}[x]$.

A2. (8 bodů) Jestliže vektor w má v bázi $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$ souřadnice $(a,\, b,\, c)$, jaké souřadnice má v bázi

$$(u_1 + u_2,\;\; u_1 + u_3,\;\; u_2 + u_3)\,?$$

A3. (10 bodů) V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ (se standardním skalárním součinem) jsou dány body $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, -2, 2]$, $C = [1, 1, 1]$, $D = [-1, -1, 0]$. Nalezněte bod X na přímce AB a bod Y na přímce CD tak, aby přímka XY byla kolmá na obě přímky AB i CD.

A4. (8 bodů) Pro která $a \in \mathbb{C}$ je jeden kořen polynomu $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 4$ součinem zbylých dvou kořenů?

Část B

B1. (8 bodů) Přímo z definice vypočtěte $f'(2)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$.

B2. (8 bodů) Určete tu funkci F primitivní k funkci $f(x) = x \ln x$, jež splňuje podmínku $F(1) = 1$.

B3. (8 bodů) Vypočtěte obsah rovinného útvaru ohraničeného částmi křivek $y = x^2$ a $y = x^3$.

B4. (10 bodů) Určete reálné číslo a tak, aby funkce $y = e^{2x}$ byla řešením diferenciální rovnice $y'' + ay' - 6y = 0$, a pak zapište její obecné řešení.

B5. (12 bodů) Pro která reálná čísla p konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^{2p} + 2}\ ?$$

Část C

C1. (8 bodů) Kolik různých lichých čtyřciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer $1, 2, 3, 4, 5$?

C2. (8 bodů) Množina X s alespoň dvěma prvky má čtyřikrát více tříprvkových podmnožin nežli dvouprvkových. Kolik má množina X prvků?

C3. (8 bodů) Hodíme současně třemi kostkami, na kterých se stejnou pravděpodobností padá každé z čísel $1, 2, \ldots, 6$. Rozhodněte, který z následujících jevů má větší pravděpodobnost:

- na každé kostce padne jiné číslo;
- na alespoň dvou kostkách padne stejné číslo.

Své rozhodnutí zdůvodněte výpočtem příslušných pravděpodobností.