24. června 2014, studijní program Matematika, neučitelské obory

Část A

A1. (6 bodů) Napište definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ ve vektorovém prostoru U nad $\mathbb{R}$.

A2. (7 bodů) Jestliže vektor u má v bázi (u_1, u_2, u_3) souřadnice (a, b, c), jaké souřadnice má v bázi $(u_2 + u_3, u_1, u_1 - u_3)$?

A3. (12 bodů) Uvažujte lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je kolmou projekcí (skalárním součin na $\mathbb{R}^3$ je standardní) na rovinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Najděte matici B tvaru 3×3 takovou, že $\psi(x) = Bx$, kde x je sloupcový vektor standardních souřadnic v $\mathbb{R}^3$.

Část B

B1. (8 bodů) Napište definici metrického prostoru. Dále definujte pojem spojitého zobrazení mezi dvěma metrickými prostory.

B2. (8 bodů) Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v bodě s x-ovou souřadnicí $x = 1$.

B3. (12 bodů) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

na množině zadané nerovnostmi $0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$.

B4. (10 bodů) Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x}{1 + x^2} y$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.

B5. (12 bodů) Určete objem tělesa

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}.$$

Část C

C1. (9 bodů) Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte zdola pravděpodobnost, že při 120 hodech kostkou padne šestka alespoň 11 krát a nejvýše 29 krát.

C2. (9 bodů) Pravděpodobnost, že náhodně zvolený student složí úspěšně zkoušku z matematické analýzy, je 80%, pravděpodobnost, že složí zkoušku z algebry je 60%. V daný den se zkoušky z analýzy zúčastnilo 40 studentů, zkoušky z algebry 20 studentů. Vypočtěte pravděpodobnost, že student, který u zkoušky uspěl, ji skládal z algebry?

C3. (7 bodů) Náhodná veličina X má rovnoměrné spojité rozložení na intervalu $(0, 3)$. Spočtěte rozptyl transformované náhodné veličiny $Y = 3X + 1$.