# Požadavky k SZZ – specializace Diferenciální rovnice a jejich aplikace

Státní závěrečná zkouška sestává z obhajoby diplomové práce a z ústní zkoušky.

## Charakteristika závěrečné práce a její obhajoba

Zpracováním diplomové práce student prokazuje orientaci v problematice dané tématem práce a schopnost odborné práce pod vedením vedoucího. U obhajoby diplomové práce se hodnotí porozumění tématu a úroveň prezentace.

## Charakteristika ústní zkoušky

Účelem zkoušky je prověřit, že absolvent je schopen vést debatu na odborné úrovni. Cílem ústní zkoušky není opakovat zkoušky z jednotlivých předmětů a zkoušet detailní znalost teorie a důkazů. Smyslem je prokázat všeobecný přehled o základních pojmech a výsledcích z jednotlivých oborů a širších souvislostech mezi nimi a o jejich možných aplikacích.

## Technická realizace

U ústní zkoušky student obdrží tři otázky, jednu z okruhu A společných oblastí znalostí programu Aplikovaná matematika a dvě ze znalostí své specializace, které jsou uvedeny v okruhu B.

## Vymezení rozsahu otázek k ústní zkoušce

## A. Společný okruh – základy matematiky

1. **Základy časových řad**
   vlastnosti a charakteristiky náhodných posloupností a časových řad, odhady charakteristik stacionárních časových řad a modelování deterministických složek (regrese, vyhlazování a dekompozice)
2. **ARMA modely**
   *v*lastnosti ARMA modelů, korelační struktura ARMA procesů, predikce a odhad parametrů v ARMA modelech, rozšíření pro sezonní řady a nestacionární řady s jednotkovými kořeny (SARIMA modely)
3. **Stochastická analýza**
   Wienerův proces a jeho vlastnosti, stochastický integrál, Itôovo lemma, řešení stochastických diferenciálních rovnic, martingaly, Girsanovova věta
4. **Stochastické modely**
   modelování pomocí stochastických diferenciálních rovnic, Wienerův proces s driftem, geometrický Brownův pohyb, Ornsteinův-Uhlenbeckův proces, difuze
5. **Maticové numerické metody**
   blokové operace s maticemi, rozklady matic a jejich použití, výpočet vlastních hodnot a vlastních vektorů; metoda nejmenších čtverců – klasický přístup a přístup pomocí pseudoinverze
6. **Optimalizační numerické metody**
   Newtonova-Raphsonova metoda, Fisherova skóringová metoda, Nelderova-Meadova metoda, metoda bisekce, metoda zlatého řezu, Brentova-Dekkerova metoda; metoda nejmenších čtverců – obyčejná, pomocí pseudoinverze, nelineární

**B. Okruh specializace Diferenciální rovnice a jejich aplikace**

1. **Lineární diferenční rovnice**
   Množina řešení homogenních a nehomogenních rovnic a systémů, metoda variace konstant, transformace diferenčních systémů, lineární diferenční rovnice vyšších řádů, srovnání s diferenciálními rovnicemi a systémy.
2. **Obecná teorie diferenčních rovnic**
   Dynamika diferenčních rovnic prvního řádu, stabilita lineárních diferenčních systémů, Sturmova-Liouvilleova diferenční rovnice 2. řádu, metody diskrétní oscilační teorie, symplektické diferenční systémy, ortogonální polynomy.
3. **Variační počet**
   Funkcionály, prostory funkcí, první a druhá variace, slabý a silný extrém a jejich vzájemný vztah, nutné a postačující podmínky pro extrém, Eulerova rovnice, pevné a proměnné okrajové podmínky, aplikace.
4. **Obecná teorie ODR**
   Carathéodoryho třída funkcí, existence a jednoznačnost řešení rovnic s nespojitou pravou stranou, Carathéodoryho věta pro rovnice vyšších řádů, prodloužitelnost řešení, globální řešení, dolní a horní řešení, Wintnerova věta, Kneserova věta, Fukuharovy věty.
5. **Autonomní rovnice**

Typy singulárních bodů dvojrozměrných systémů, klasifikace singulárních bodů lineárních a perturbovaných lineárních systémů, struktura limitní množiny v R^2, Dulacovo kritérium, Poincarého-Bendixsonova věta, charakteristické směry.

6. **Spojité matematické modely**
   Pojetí dynamického systému, klasifikace modelů, konstrukce matematického modelu, dimenzionální a matematická analýza matematických modelů, příklady matematických modelů v přírodních vědách.
7. **Diskrétní matematické modely**
   Projekční matice, stacionární struktura, její existence a stabilita, Perronova-Frobeniova věta, identifikace parametrů modelu z pozorovaných dat, příklady matematických modelů v přírodních vědách.
8. **Numerické metody řešení ODR**
   Řešení počátečních úloh (jednokrokové a vícekrokové metody), řešení okrajových úloh (metoda střelby, diferenční metody, variační metody), stabilita a konvergence metod.
9. **Numerické metody řešení PDR**
   Diferenční metody, variační metody, časově závislé rovnice, stabilita a konvergence metod.
10. **Lineární PDR 2. řádu**
    Klasifikace rovnic, principy řešení významných rovnic (Laplaceovy a Poissonovy rovnice, rovnice vedení tepla, vlnové rovnice), harmonické funkce, Greenova teorie, principy maxima, srovnání PDR a ODR, variační metody.
11. **Konvexní analýza**
    Konvexní množiny, konvexní obaly, teorie oddělitelnosti, konvexní funkce, kritéria konvexnosti pro diferencovatelné funkce, subgradient a subdiferenciál, Fenchelova transformace, řešení systémů lineárních a konvexních nerovností.
12. **Matematické programování**
    Metody nepodmíněné minimalizace (Fibonacciho metoda, metoda zlatého řezu, Newtonova metoda atd.), Langrangeův princip, podmínky optimality, Kuhnovy-Tuckerovy podmínky, konvexní programování, slabá a silná dualita, sedlové body, stínová cena.