Opitz [illegible] 1784.

ELEMENTA
CALCVLI DIFFERENTIALIS,
ET
INTEGRALIS.

CONSCRIPTA

A

STANISLAO WYDRA,

IN VNIVERSITATE PRAGENSI MATHESEOS PROFESSORE,
ET EXAMINATORE R. P. O.

PRAGAE ET VIENNAE,
apud Ioan. Ferd. Nob. a Schönfeld.
1783.

1784.

ELEMENTA
CALCVLI DIFFERENTIALIS,
ET
INTEGRALIS.

CONSCRIPTA

A

STANISLAO WYDRA,
IN VNIVERSITATE PRAGENSI MATHESEOS PROFESSORE,
ET EXAMINATORE R. P. O.

PRAGAE ET VIENNAE,
apud Ioan. Ferd. Nob. a Schönfeld.
1783.

No 24 a.

CLARISSIMI VIRI

IOANNIS BERNOVLLI

IN

LECTIONIBVS MATHEMATICIS

DE

METHODO INTEGRALIVM

MONITVM.

Id annotaſſe ſufficiat, ſi dixerimus, quod ab integralium inventione illuſtriora quæque Matheſeos Problemata & Theoremata dependeant, tum ea, quæ jam inventa ſunt, tum quæ adhuc inveniri deſiderantur; qualia ſunt quadraturæ ſpatiorum, rectificationes curvarum, cubificationes ſolidorum, methodus tangentium inverſa, vel inuentiones naturæ curvarum ex proprietatibus tangentium datis &c. non minus quam ea, quæ ad mechanica ſpectant, ut ſunt: modus inveniendi centri gravitatis, percuſſionis, oſcillationis &c. Habentur quoque per inventionem integralium evolutiones curvarum, modusque earum naturas determinandi, & evolutionis ope ipſas curvas rectificandi. Sed, ut tam facile eſt cujuscunque quantitatis propoſitæ reperire differentiale, ita e contrario tam difficile eſt aſſignare integrale cujuscunque differentialis, adeo ut interdum nequidem certo aſſerere poſſimus, an quantitatis propoſitæ integrale poſſit ſumi, nec ne.

MONITVM AVTHORIS.

Romanæ eloquentiæ parens Tullius L. 2. de Oratore narrat: *C. Lucilium hominem doctum, & perurbanum dicere solitum: ea, quæ scriberet, neque ab indoctissimis, neque a doctissimis legi velle: quod alteri nihil intelligerent, alteri plus fortasse, quam ipse de se.*

Equidem cum Lucilio facio. Hancce lucubratiunculam meam, lapsis proxime autumnalibus feriis natam, neque pervolvat velim in Matheseos elementis minus versatus, atque me magistro discere potuerit; neque is, qui tyronis mei conditione discendo jam superata, forte doctissimus sibi videatur.

Hæc enim una e scrinio in lucem plagulas istas protraxit ratio: ut vestro compendio carissimi discipuli consulerem; quibus arduum esset explicantem me assequi scribendo, & præcepta auribus duntaxat haurire minus proficuum: nam *segnius irritant animos demissa per aurem, quam quæ sunt oculis subjecta fidelibus.*

Non tamen constitui perfectam differentialis, & integralis calculi imaginem contemplandam vobis proponere; istam in notissimis Auctorum argumentum hoc copiose tractantium libris quærite. A me rudia solum lineamenta sunt ducta, quorum tamen ipsorum pulchritudine ad altius enitendum incitari facile possitis, & merito debeatis.

Pulchri-

Pulchritudo hæc me meditantem, ſcribentemque inexplicabili affecit voluptate; avide legentes haud minori afficiet.

Vix occurret, quod negotium ſua obſcuritate vel tardioribus faceſſat; ſi occurrerit, me promptum, paratumque experiemini, ad difficultatem omnem tollendam, iterque planum, atque expeditum in honeſtiſſimo divinæ Matheſeos ſtudio vobis ſternendum.

Pluribus non agerem: niſi excuſanda hic loci ſe offerret divi Auguſtini ſententia: ita ille L. de ordine: *Mathematicas diſciplinas multi Sancti ignorant quidem, & qui etiam ſciunt eas, ſancti non ſunt.* Ergo ſanctitatis ſocietatem excludentes continuo abjiciamus! at niſi magnopere fallor, morum integritatem, & religionem adjuvant illæ potius, quam impediant. Certe modeſtiam & taciturnitatem alunt; ſentiendi libertatem, & quidquid libuerit, pro vero jactandi confidentiam cohibent; a rebus ſenſus blande demulcentibus avocant; veritatibus divinis reverentiam exhibere ſectatores ſuos docent: oſtendunt nempe multa, etſi intra limites naturæ conſtituta, humano tamen intellectui eſſe impervia.

Divus Auguſtinus eas methematicas diſciplinas intellexit, de quarum cultoribus in corpore

Juris

Iuris civilis L. 2. Cod. titulus subinde prodiit: *De maleficis & mathematicis*, *ubi artem mathematicam damnabilem esse & interdictam omnino* pronuntiat Iustinianus.

Futili ejusmodi arte imbutum vivis depingit coloribus Ioannes Barclaius *in Argenide L.* 2. *Quidam ex Assyria hospes specie quærendæ in diversis gentibus sapientiæ errabat revera, ut suam jactaret. Is tunc in Sicilia erat, & in Mathematicorum cœlo versatus, vendebat suæ artis ludibria; si quis ex syderibus quæ nascenti affuerant, volebat de fortuna, quæ viventi, quæ morituro debebatur, vanissima credulitate cognoscere.* Equidem miror admodum: tam nobile nomen impostoribus dari aliquando potuisse.

Talem vos artem hoc libello non docebimini, sed eam, quæ primum subtili Leibnitii ingenio reperta, deinde Clariss. Bernoulliorum & Euleri, aliorumque primi subsellii inter mathematicos Virorum studio est promota.

Cæterum insontem Geometriam etiam veteribus SS. PP. fuisse probatam, docet ipse maximus Ecclesiæ Doctor Hieronymus, scribens: præceptorem suum Didymum tametsi cæcum, pueros Geometriæ elementis imbuisse.

Hæc in defensionem Matheseos, & aliquam præsentis opusculi commendationem scripta habete.

ELE-

ELEMENTA
CALCULI DIFFERENTIALIS.

I.

Quia differentialia sunt species infinite parvarum quantitatum; ideo primum de his, & infinito agemus.

2. Quantitas infinite parva est illa, quæ ultra quoscunque limites imminuta concipitur, seu cujus parvitas nullo certo continetur limite. Nam quæ inter limites determinatos est, vocatur finita. Dicitur etiam *infinitesima*, *omni assignabili minor*.

Cum enim quantitas mathematica continua sit in infinitum divisibilis; habentur in ea partes, quavis data, vel quæ dari & designari possit minores; hoc est quam minimæ, seu infinitesimæ.

3. Hæc vero in infinitum divisibilitas ita demonstratur; sit *ac* perpendicularis ad *bm* indefinitam. Fig. 1.

Certum

Certum eſt centris n, e, g, b &c., infinitis ſucceſſive deſcribi poſſe arcus per b transeuntes, qui inter ſe non habebunt punctum aliud commune, quam b. Conſequenter rectam $a\,o$ ſemper in novis punctis ſecabunt. Si igitur concipiantur hi arcus infinite multi, in infinite multas partes ſecabunt rectam $a\,o$; quæ inter hos arcus comprehenſæ partes erunt hoc ipſo *infiniteſimæ*.

Et quivis angulus $a\,b\,x$, vel $a\,b\,z$ qui fit a latere minimo, in qualia infinita concipi poteſt diviſa peripheria, contiguo ipſi puncto contactus, eſt *infiniteſima*.

Siquidem peripheria non eſſet curva continua, ſed interrupta, ſi duo ejus elementaria latera angulum comprehenderent quantitate finita a duobus rectis differentem.

4. Quantitas *infinita* eſt, quæ ultra quosvis limites aucta cogitatur; ſeu omni aſſignabili major. Exprimimus autem quantitatem infinitam ſigno: ∞.

Exemplum quantitatis infinitæ habemus in Trigonometria. Nam quia ſinus totus, ſeu ſinus
Fig. 2. anguli recti c eſt radius $a\,c$; et tangens illius eſt recta $m\,d$ ad $c\,d$ perpendicularis, tam diu prolongata, usque dum cum $a\,c$ concurrat. Quia vero $a\,c$, & $d\,m$ ſunt parallelæ; patet eas etiam in infinitum prolongatas, non concurrere. Quare tangens anguli recti eſt infinita $= \infty$.

5. Vt tyrones germanam infiniti notionem animo efforment. *Concipiant rationem minoris in-*
Fig. 3. *æqualitatis* L O, *ad* L R *ſemper continuari. Devenietur tandem ad quantitatem omni data majorem. Sed quantitas omni data major eſt infinita; ergo ad infinitam devenietur.*

Demonst.

DEMONST. Sit $LO : LR = LR : LQ$. Erit invertendo $LR : LO = LQ : LR$. Dividendo $LR - LO : LO = LQ - LR : LR$. Hoc eſt $RO : LO = RQ : LR$. Alternando $RO : RQ = LO : LR$. Atqui $LR > LO$; ergo etiam $RQ > RO$. Quare ſi hæc ratio LO, ad LR ſemper continuetur, ad primam LO perpetuo adjungentur partes OR, RQ, QI &c. continuo creſcentes; atque ideo venietur ad quantitatem quavis data majorem. Q. E. D.

6. Notio genuina *infinite parvæ* quantitatis hinc eſt repetenda nimirum: *ſi ratio quæcunque majoris inæqualitatis* AB *ad* CB *ſemper continuetur; ad quantitatem devenietur quavis data minorem, hoc eſt infinite parvam.* Fig. 3. & 4.

DEMONST. Sit data LO quantumvis parva. Fiat ut $BC : BA = LO : LR$. Poterit ratio $LO : LR$ toties continuari, ut aliquis terminus habeatur; puta LI major quam AB (per præcedentem.) Quoties vero continuata jam eſt ratio $LO : LR$; per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio $AB : CB$; erit FB minor, quam OL.

Nam ex hypotheſi IL, QL, RL, OL; ſunt proportionales ipſis AB, CB, EB, FB.

Nempe eſt $IL : QL = AB : CB$.

Et $QL : RL = CB : EB$.

Ergo ex æquo ordinato directe; $IL : RL = AB : EB$.

Eſt vero etiam $RL : OL = EB : FB$.

Ergo rurſus ex æquo ordinato directe; $IL : OL = AB : FB$.

Et

Et alternando $IL : AB = OL : FB$. Sed $IL > AB$. Igitur etiam $OL > FB$. Q. E. D.

7. Si finita quantitas consideretur ut unitas; *infinitesima* erit ejus fractio infinite parva. Est autem fractio eo minor; quo stante eodem numeratore denominator est major. Itaque, vt fractio sit minima, nempe infinitesima; denominator debebit esse omni assignabili major, nempe respectu numeratoris infinitus $= \infty$. Quare exprimetur una infinitesima signo $\frac{1}{\infty}$; duæ infinitesimæ: $\frac{2}{\infty}$. $\frac{a}{\infty}$ legetur: quantitatis a pars infinite parva.

8. *Infinitum per infinitesimam primi ordinis multiplicatum; productum dat finitum, seu quod idem est: in quantitate finita continetur infinitesima infinities.*

Demonst. $\frac{1}{\infty} \times \infty =$ ex lege multiplicationis integri per fractum $\frac{\infty}{\infty}$; sed fractio æqualem habens numeratorem denominatori, æquatur unitati, hoc est finito; igitur $\frac{\infty}{\infty} = 1$, factum nempe infinitesimæ in infinitum, æquale est finitæ quantitati.

9. Veritatem hanc duobus illustrabimus exemplis: altero e Geometria; e Trigonometria altero petito.

Primum notissimum istud est: in omni, quotcunque laterum illud sit polygono, summam omnium angulorum externorum esse finitam constantem,

ſtantem, nempe quatuor rectorum. Iam circulus eſt polygonum regulare infinitorum, et infinite parvorum laterum; & quivis angulus externus ſcilicet qui fit ab uno perimetri circuli infinite parvo latere producto, & altero contiguo (per n. 3.) eſt infinite parvus. Sunt autem tales anguli infiniti, ob infinite multa perimetri latera; igitur $\frac{1}{\infty} \times \infty =$ finitæ quantitati: ſcilicet iſthic quatuor rectis.

Deinde ſit angulus x; ejus ſinus AG; cofinus CG, tangens DB, radius CD. Ob triangula CAG, CBD ſimilia habebimus $CG : AG = CD : BD$, ſeu ob CD radium $= 1$. Erit coſinus x : ſinum $x = 1$: tangent x. Hinc coſ. $x \times$ tang. $x =$ ſin. x. Concipiatur angulus x eſſe rectus. Erit ejus coſinus infinite parvus; & tangens infinita, unde pro hoc caſu coſinus $x = \frac{1}{\infty}$; tangens $x = \infty$. Et ſinus $x =$ radio $= 1$. Hinc ſubſtitutis his valoribus erit $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$; nempe factum ex infinite parva quantitate in infinitam, eſt finitum. Fig. 5.

10. *Tertia proportionalis ad infiniteſimam & finitam; eſt infinita quantitas.*

Demonst. Sit hæc invenienda $= x$; erit ex hypotheſi $\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : x$ unde; $\frac{x}{\infty} = 1$. Et $x = \infty$. Q. E. D.

11. Cum itaque ſit $\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$.

Patet: prout conſequens ſecundæ rationis infinities major eſt finito, nempe antecedente ſuo; ita etiam finitum, nempe conſequentem primæ rationis infinities majorem eſſe ſuo antecedente, id eſt infinite parva quantitate. Ergo *infinite parva quantitas evaneſcit reſpectu finitæ, hoc eſt, nec auget, nec minuit finitam, ac proinde in calculo negligitur.*

12. Cum infiniteſimæ non ſint indiviſibiles, ſed quantitates continuæ, quæ ex homogeneis et nullis terminis inter ſe diſcretis partibus componuntur; ſunt adeo diviſibiles in infinitum, ſeu in partes non tot, quin plures. Secus enim deveniretur ad indiuidua, nec meris partibus homogeneis mathematicum continuum conſtaret.

Ex quo ſequitur *diverſos ut infinite parvorum, ſic etiam infinitorum eſſe ordines, & quidem infinitos.*

13. Si quæratur ad 1, & $\frac{1}{\infty}$ tertia proportionalis; erit $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$. Itaque eſt tertia hæc proportionalis, infiniteſima ſecundi ordinis, unde ſequitur.

I. *Infiniteſimam ſecundi ordinis prodire; ſi infiniteſima primi ordinis in ſe ipſam ducatur.*

II. *Prout infiniteſima primi ordinis evaneſcit reſpectu unitatis, finitæ nempe quantitatis. Ita quoque evaneſcere infiniteſimam ſecundi ordinis reſpectu infiniteſimæ primi ordinis.* Id eſt: prout in prima ratio-

ne

ne $1 > \frac{1}{\infty}$ eſt infinities. Ita $\frac{1}{\infty} > \frac{1}{\infty^2}$ infinities eſſe.

III. *Idem tenendum de infiniteſima tertii ordinis, reſpectu infiniteſimæ ſecundi ordinis, item de infinitis.* Sic $\infty^2 > \infty$ infinities &c.

14. Vt tyrones ſtatum evaneſcentiæ rite animo ſuo efforment. Sit figura mixti linea $aABb$. Fig. 6. In qua rectam Bb, a recta Aa differre quantitate ak (poſita kb parallela ad AB) manifeſtum. Iam ſi concipiatur recta Bb conſtanter accedere ad rectam aA, ita ut punctum b maneat in arcu ab. Minuetur diſtantia harum rectarum AB; Et quia recta Bb porro creſcet, etiam minuetur differentia harum rectarum, nempe ak. Status igitur *evaneſcentiæ* nempe in quo differentia inter rectam bB, & Aa erit infinite parva; neque erit quando Bb adhuc diſtabit a recta aA; neque quando jam ipſi rectæ aA congruet; ſed *quando conjungi incipiet.* Hinc reſponderi poteſt ad hanc quæſtionem: *an infinite parva quantitas ſit nihilum?*

Scilicet duo ſtatus infinite parvæ quantitatis ſunt concipiendi: unus *evaneſcentiæ;* alter *quo jam evanuit.* In primo ſtatu, cum recta bB, rectæ aA *conjungi incipit;* infinite parva quantitas non eſt *nihilum.* In altero ſtatu, cum recta bB, rectæ aA *jam congruit;* ſeu cum differentia illarum jam evanuit; *eſt nihilum.*

15. Quantitas, quæ continenter creſcere, vel decreſcere concipi poteſt, *variabilis* vocatur. Quæ vero eadem manet, nulla admittens incrementa vel decrementa momentanea: *conſtans* appellatur. *Variabiles*

riabiles quantitates litteris alphabeti ultimis x. y. z. exprimimus. *Constantes* vero primis a, b, c, &c.

Fig. 7. Sic in circulo diameter, np, vel radius nc, ſunt *conſtantes*. *Variabiles* vero ſunt chordæ df, gh, vel illarum dimidiæ de, gi; quas per y, z propterea exprimimus; & abſciſſæ ne, ni, quas per x, u, denotamus, conſtat enim creſcentibus diametri ſegmentis, ſeu abſciſſis creſcere chordas, ſeu ordinatas usque ad centrum; & decreſcentibus illis, has decreſcere.

16. Incrementum vel decrementum momentaneum, ſeu infinite parvum quantitatis variabilis dicitur *differentiale*. Exprimitur vero per præfixam variabili litteram d. Sic dx, legitur *differentiale* x; & eſt incrementum infinite parvum variabilis x; at $-dx$; eſt ejusdem decrementum.

17. *Functio* eſt quantitas, cujus magnitudo ab una vel pluribus variabilibus dependet. Sic ax, $a \pm x$, x^2, $\sqrt{x}$; ſunt functiones variabilis x; quo enim hæc major fuerit vel minor; eo magis illæ augebuntur, vel minuentur. Ita etiam xy, eſt functio variabilium x & y, ab harum enim magnitudine, rectanguli xy magnitudo dependet.

18. *Calculus differentialis:* eſt methodus functiones differentiandi; ſeu incrementa vel decrementa momentanea variabilium in functione exiſtentium determinandi.

19. *Calculus fluxionum* vocatur ab Anglis, qui

Fig. 8. nobis eſt *differentialis*. Concipiunt illi punctum A fluere, motuque ſuo rectam quandam AC deſcribere. *Celeritatem* puncti, quam in quouis lineæ

loco

loco ex. gr. in C habet, vocant *fluxionem.* Et *rectam* motu puncti descriptam AC appellant *quantitatem fluentem.* *Fluxionem* puncto supra variabilem scripto designant. Sic $\dot{x}$ est fluxio variabilis x; quæ variabilis est ipsa *quantitas fluens.*

20. *Differentio-differentiale* dicitur differentiale primum differentialis primi. Ex. gr. dx sit porro differentiandum. Istud faciendum esse sic designabitur: $d(dx)$. Et actuale differentiale obtinebitur præfixa immediate littera d ipsi differentiali, nempe $d(dx) = ddx$, vel $= d^2x$; verum dx^2 prodit, si dx in dx ducatur; in isto enim casu tantum x ducendum est in x & d, *quod non obit munus quantitatis algebraicæ, sed nudum signum est quantitatis infinite parvæ,* facto præfigitur. Ergo $dx \times dx = dx^2$. Iam seu d^2x, seu dx^2 assumas; utrobique habes infinitesimam secundi ordinis, hoc est tam $d^2x = \frac{1}{\infty^2}$ quam $dx^2 = \frac{1}{\infty^2}$.

21. Quoniam $dx = \frac{1}{\infty}$; & d^2x, vel $dx^2 = \frac{1}{\infty^2}$; tam dx respectu finitæ quantitatis; quam dx^2, vel $dx\,dy$ respectu infinite parvæ primi ordinis dx, vel $a\,dx$ evanescit. (per n. 13.)

22. Concipiatur linea $AC = x$ crescere infinite parva quantitate, quæ erit illius differentiale; sit hæc infinite parva quantitas Cn; sed per hypothesim differentiale simplicis variabilis x, obtinetur præfixa littera d, erit igitur $Cn = dx$. Fig. 8.

Hinc

Hinc recta x hoc incremento momentaneo aucta erit $x + dx$, a qua summa si subtrahatur ipsa variabilis x, liquet prodire $x + dx - x = dx$. Atque istud generalem legem suppeditat functiones quascunque differentiandi, nempe: *Quavis in functione variabilis suo differentiali augeatur, si crescat; minuatur si decrescat; summæ vel differentiæ sic invicem alligentur, ut alligatæ sunt in functione variabiles. Demum functio inde data subtrahatur. Residuum erit differentiale quæsitum.*

23. Regulam inde eruimus assumendo lineam variabilem x; cujus idem obtineatur differentiale secundum hanc legem; quod alioquin ex hypothesi notum sit. Quoniam vero *duo rectangula sunt ut lineæ rectæ; & quavis superficies ad rectangulum reduci potest; nec non mutationes corporum per lineas rectas repræsentari possunt; patet hinc eadem allata lege differentialia quarumcunque functionum posse inveniri.*

Dictis fidem adstruet DEMONSTRATIO.

Fig. 9. Sit rectangulum mn, cujus latus $ms = a$; $mg = b$. Quod in aliud mo auctis lateribus sit mutatum, nempe ms augeatur quantitate $sp = e$; & mg quantitate $gh = f$ crescat. Igitur $mn = ab$, & $mo = (a+e)(b+f)$. Vnde $mn : mo = ab : (a+e)(b+f)$. Debeant nunc duæ rectæ L & t eam ad se rationem dicere; quam ipsa rectangula, erit $L : t = ab : (a+e)(b+f)$, hinc $tab = L(a+e)(b+f)$. Et $t = L \frac{(a+e)(b+f)}{ab}$. Igitur $a : a+e = b+f : \frac{(a+e)(b+f)}{a}$, quam quartam proportionalem

dicamus

dicamus c. Quare $t = \frac{Lc}{b}$. Vnde $bt = Lc$. Consequenter $L : t \doteq b : c$. Sed etiam est $L : t = mn : mo$. Ergo $mn : mo = b : c$. Scilicet duo rectangula, sunt ut duae rectae.

Porro cuivis solido aequale prisma rectangulare construi potest. Iam prismata rectangularia sunt vt facta ex rectangulari basi in altitudinem. Sed rectangula ex nunc demonstratis sunt ut rectae; ergo solida duo erunt in ratione composita istarum rectarum & altitudinum; hoc est rursus ut rectangula; consequenter ut rectae.

24. Calculi differentialis cognitio in eo sita est; ut quamcunque functionem propositam differentiare sciamus. Atque istud sequentia docebunt problemata.

25. *Invenire differentiale* a x.

Formula $d(ax) = a\,dx$.

Demonst. Quoniam a est constans, nullum differentiale habet. Ideo tantum variabilis x suo differentiali augeatur. Erit $x + dx$; quia vero per a variabilis x in functione multiplicata est, etiam $x + dx$ per a multiplicetur: habebimus $ax + adx$; inde subtrahamus functionem datam; erit $ax + adx - ax = adx$. Q. E. D. Si variabilis x decresceret, functionis ax differentiale esset $= -adx$.

26. *Invenire differentiale functionis* x y.

Formula $d(xy) = x\,dy + y\,dx$.

Demonst. Augeatur x suo differentiali, & y etiam. Erit $x + dx$, & $y + dy$. Sunt autem in functione variabiles invicem multiplicatæ; igitur & summæ hæ invicem ducantur. Obtinebimus factum $= xy + xdy + ydx + dxdy$. Inde subtracta functione ipsa xy; manebit $xdy + ydx + dxdy$. Sed $dxdy$ est infinitesima secundi ordinis; ergo respectu infinitesimarum primi ordinis evanescit (per n. 21.) Quare quæsitum differentiale erit $= xdy + ydx$. Q. E. D.

Ex attentione ad differentiale hoc inventum, eruitur regula generalis factum duarum variabilium differentiandi, nempe: *Variabilis prima multiplicetur per differentiale alterius; huic facto addatur*, (si creverit variabilis prima). *Subtrahatur* (si decreverit) *factum ex variabili altera in differentiale primæ.*

Itaque differentiale zu, utraque existente variabili, & z decrescente erit: $zdu - udz$.

27. *Differentiare* xyz.

Formula $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

Demonst. Quævis functio composita potest poni æqualis simplici; quia respectu magis compositæ semper pro simplici potest considerari. Itaque sit $xy = u$. Erit $xyz = uz$, & $d(xyz) = udz + zdu$; sed $xdy + ydx = du$. Substitutis jam valoribus loco u & du; prodibit: $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$. Q. E. D.

Hinc patet differentiale facti trium variabilium obtineri: si *facta ex singulis duabus in differentiale tertiæ sibi addantur; illud factum erit negativum, quod ingreditur differentiale decrescentis variabilis: si sit factum quatuor variabilium; vel plurium; haud absimili modo ejus differentiale invenietur.*

28. *Differentiare quantitatem* x^2.

Formula $d\,(x^2) = 2\,x\,d\,x$.

DEMONST. $x^2 = x\,x$; igitur $d\,(x^2) = x\,d\,x + x\,d\,x$, actu addendo $= 2\,x\,d\,x$. Q. E. D.

Pari ratione $d\,(x^3) = 3\,x^2\,d\,x$. Nam $x^3 = x\,x\,x$. Sed $d\,(x\,x\,x) = x\,x\,d\,x + x\,x\,d\,x + x\,x\,d\,x = 3\,x\,x\,d\,x, = 3\,x^2\,d\,x$.

Sic etiam $d\,(x^4) = 4\,x^3\,d\,x$.

Habemus igitur *Regulam* generalem, variabiles exponente affectas differentiandi, nempe: *Exponens variabilis fiat coefficiens; ipsa vero variabilis exponentem unitate minorem acquirens per differentiale variabilis multiplicetur.*

Ergo in genere $d\,(x^m) = m\,x^{m-1}\,d\,x$.

Et $d\,(x^m\,y^n) = m\,y^n\,x^{m-1}\,d\,x + n\,x^m\,y^{n-1}\,d\,y$.

29. LEMMA. *Quævis quantitas exponente negativo affecta, est æqualis fractioni, cujus numerator est unitas, denominator vero ipsa quantitas data exponentem hunc positivum habens.* Ex. gr. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

DEMONST. Quantitas negativa oritur, si positiva ex nihilo subtrahatur. Igitur $-m = 0 - m$; hinc $x^{-m} = x^{0-m}$; sed ubi est exponentium subtractio, ibi est potentiarum ejusdem radicis divisio; ergo $x^{0-m} = \frac{x^0}{x^m}$. Consequenter: $x^{-m} = \frac{x^0}{x^m}$; atqui $x^0 = 1$. Ergo $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Q. E. D.

Ne assumptum $x^0 \doteq 1$; negotium facessat tyronibus. Sic demonstrabitur: $\frac{x}{x} = 1$; nam fractio numeratorem æqualem habens denominatori, æquatur unitati. Præterea etiam $\frac{x}{x} = x^0$. Nam si potentia per potentiam ejusdem radicis sit dividenda, quotus est radix exponentem habens æqualem differentiæ exponentium divisoris a dividendo. Sed $\frac{x}{x} = \frac{x^1}{x^1}$. Et $1 - 1 = 0$. Igitur $\frac{x}{x} = x^0$. Cum vero sit etiam $\frac{x}{x} = 1$. Erit $x^0 = 1$. Q. E. D.

Iam si $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Et m est exponens indeterminatus; potest illius loco etiam fractio poni. Sit ex. gr. $m = \frac{1}{2}$. Erit $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{1}{\sqrt{x}}$.

30. *Differentiare* $\sqrt{x}$.

Formula $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Demonst. Quævis radix ex quantitate extrahenda, exprimi potest per exponentem fractum; si exponens potentiæ sit numerator, exponens vero radicis agat denominatorem. Igitur $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Iam (per num. 28.) $d(x^{\frac{1}{2}})$ $= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$. Atqui $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

Ergo

Ergo $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Q. E. D.

ALITER: Sit $x^{\frac{1}{2}} = z$; erit $x = z^2$; & $dx = 2z\,dz$; unde $\frac{dx}{2z} = dz$. Sed $z = x^{\frac{1}{2}}$; Igitur $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz = d(\sqrt{x})$. Vt ante.

31. *Differentiare* $\sqrt{(xy + y^2)}$.

Formula: $d(\sqrt{(xy + y^2)})$
$$= \frac{x\,dy + y\,dx + 2y\,dy}{2\sqrt{(xy+y^2)}}.$$

DEMONST. $\sqrt{(xy+y^2)} = (xy+y^2)^{\frac{1}{2}}$ hujus vero differentiale eſt (per præc.) $\frac{1}{2}(xy+y^2)^{-\frac{1}{2}} \times (x\,dy + y\,dx + 2y\,dy)$. Sed $(xy+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(xy+y^2)^{\frac{1}{2}}}$. Ergo differentiale quæſitum
$$= \frac{x\,dy + y\,dx + 2y\,dy}{2(xy+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x\,dy + y\,dx + 2y\,dy}{2\sqrt{(xy+y^2)}}.$$

ALITER. Ponatur $\sqrt{(xy + y^2)} = z$. Erit $d(\sqrt{(xy + y^2)}) = dz$. Et primam æquationem quadrando: $xy + y^2 = z^2$. Hanc differentiando: $x\,dy + y\,dx + 2y\,dy = 2z\,dz$. Vnde $\frac{x\,dy + y\,dx + 2y\,dy}{2z} = dz$. Subſtituendo valores æquales. Erit $\frac{x\,dy + y\,dx + 2y\,dy}{2\sqrt{(xy+y^2)}} = d(\sqrt{(xy + y^2)})$. Q. E. D.

Hinc

Hinc exiſtit *Regula* functionem tam complexam quam incomplexam, ſigno *radicis quadraticæ* affectam, differentiandi; *Inveniatur differentiale quantitatis ſub ſigno radicali poſitæ; hoc per duplam irrationalem quantitatem datam dividatur.*

32. *Differentiare* $\sqrt[3]{x}$.

Formula: $d(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Demonst. Sit $\sqrt[3]{x} = z$. Erit $d(\sqrt[3]{x}) = dz$, & $x = z^3$; hanc æquationem differentiando habebimus: $dx = 3z^2 dz$. Vnde $\dfrac{dx}{3z^2} = dz$; ſubſtitutis valoribus æqualibus, prodibit: $\dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = d(\sqrt[3]{x})$. Q. E. D.

Pari ratione invenietur $d(\sqrt[4]{x}) = \dfrac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

$$d(\sqrt[5]{x}) = \frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}};\ d(\sqrt[6]{x}) = \frac{dx}{6\sqrt[6]{x^5}}.$$

Itaque tenemus *Regulam* differentiandi radices quadratica altiores extrahendas e variabili primi gradus: *Differentiale variabilis dividatur per factum ex exponente radicis in radicalem datam, elevatam ad potentiam exponentis unitate minoris, quam ſit exponens radicis.*

33. *Differentiare* $\sqrt[n]{x^m}$.

Formula: $d(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$.

Demonst. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$; hujus vero differentiale eſt: $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$. Q. E. D.

34. *Differentiare* $\frac{y}{a}$.

Formula $d\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{dy}{a}$.

Demonst. Fiat primo $y + dy$. Et quia y per a diviſum eſt, etiam hæc ſumma dividatur. Erit $\frac{y+dy}{a}$; inde ſubtrahendo functionem datam habebimus $\frac{y+dy-y}{a} = \frac{dy}{a}$ (per n. 22.) Q. E. D.

Aliter. Sit $\frac{y}{a} = z$; erit $y = az$. Differentiando utrumque membrum obtinebimus: $dy = adz$. Hinc $\frac{dy}{a} = dz$. Vt ante.

35. *Differentiare* $\frac{y}{x}$.

Formula:

Formula: $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$.

Demonst. (per num. 22.) Erit $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x}$, reducendo ad communem denominatorem fractiones, habebimus $\frac{xy + x\,dy - xy - y\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + x\,dx}$. Sed $x\,dx$ infinitesima evanescit respectu x^2 finitæ quantitatis. Igitur $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$. Q. E. D.

Formula hæc sufficit *Regulam* variabilis per variabilem divisæ differentiandæ: *multiplicetur divisor per differentiale dividendæ; ex facto subtrahatur factum dividendæ in differentiale divisoris ductæ; & differentia per quadratum divisoris dividatur.*

Aliter: $\frac{y}{x} = y\,x^{-1}$. Igitur $d\left(\frac{y}{x}\right) = x^{-1}\,dy - y\,x^{-2}\,dx = \frac{dy}{x} - \frac{y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$. Vt ante.

36. *Differentiare* $\frac{a}{x}$.

Formula: $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{-a\,dx}{x^2}$.

Demonst.

DEMONST. Ponatur $\frac{a}{x} = y$. Erit $d\left(\frac{a}{x}\right) = dy$. Et $a = xy$; quia a constans est, ejus differentiale erit nullum. Hinc $o = x\,dy + y\,dx$; & $-y\,dx = x\,dy$. Demum $-\frac{y\,dx}{x} = dy$. Substitutis valoribus æqualibus erit $-\frac{a\,dx}{x^2} = d\left(\frac{a}{x}\right)$. Q. E. D.

ALITER. Ex præcedenti paragrapho idem eruitur; ponendo $y = a$, consequenter $dy = o$. Hinc formula $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{-a\,dx}{x^2}$.

37. *Differentiare* $\frac{x^2}{y^3}$.

Formula: $d\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$

$$= \frac{2y^3\,x\,dx - 3x^2\,y^2\,dy}{y^6}.$$

DEMONST. Sit $\frac{x^2}{y^3} = z$. Erit $d\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = dz$. Et $x^2 = y^3 z$; unde $2x\,dx = 3zy^2\,dy + y^3\,dz$. Porro $2x\,dx - 3zy^2\,dy = y^3\,dz$. Loco z ponendo valorem æqualem, erit

$$2x\,dx - \frac{3x^2\,y^2\,dy}{y^3} = y^3\,dz.$$

Seu: $\frac{2y^3\,x\,dx - 3x^2\,y^2\,dy}{y^3} = y^3\,dz$.

Vnde $\frac{2y^3\,x\,dx - 3x^2\,y^2\,dy}{y^6} = dz = d\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$.

Attendentem minime fugiet: isthic quoque regulam (numero 35. datam) observari.

38. *Differentiare* $a\sqrt{\left(\frac{b^2+x^2}{x}\right)}$.

Formula: $d\left(\frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}}{x}\right)$
$= \frac{a\,dx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} - \frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}\,dx}{x^2}$.

Demonst. Ponatur $\frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}}{x} = y$.

Hinc erit $\sqrt{(b^2+x^2)} = \frac{xy}{a}$; differentiando utrumque membrum habebimus $\frac{2x\,dx}{2\sqrt{(b^2+x^2)}}$
$= \frac{x\,dy + y\,dx}{a}$ & $\frac{2ax\,dx}{2\sqrt{(b^2+x^2)}} - y\,dx$
$= x\,dy$. Loco y ponendo valorem æqualem:
$\frac{2ax\,dx}{2\sqrt{(b^2+x^2)}} - \frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}}{x}\,dx = x\,dy$.
Quare $\frac{2ax\,dx}{2x\sqrt{(b^2+x^2)}} - \frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}\,dx}{x^2}$
$= dy$. Seu $\frac{a\,dx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} - \frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}\,dx}{x^2}$
$= dy = d\left(\frac{a\sqrt{(b^2+x^2)}}{x}\right)$. Q. E. D.

39. *Differentiare* $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Formula:

Formula: $d\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Demonst. Sit $\sqrt{\frac{x}{y}} = z$. Erit $\frac{x}{y} = z^2$, & (per n. 35.) $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 2z\,dz$. Hinc

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} = dz = d\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$ Q. E. D.

40. Formulæ hucusque pertractatæ, etiam valent in calculo *differentio - differentiali*, ſeu in differentiis ſecundis inveniendis; modo *differentiæ ſecundæ* (idem ſentiendum de aliis ordinibus) per exponentes *notæ differentialis* d exprimantur. Sic ddx, ſeu d^2x eſt differentia ſecunda variabilis x; d^3x eſt tertia. Sed differentialia altiorum quam ſecundi ordinis, raro adhibentur. Dabimus unum, atque alterum hujus calculi exemplum.

41. *Invenire functionis* x y *differentiale ſecundum.*

Formula: $d^2(xy) = 2\,dy\,dx + x\,d^2y + y\,d^2x$.

Demonst. Nam differentiale primum functionis xy, eſt $x\,dy + y\,dx$. Et hoc rurſus (per n. 26.) differentiando habebimus $x\,d^2y + dy\,dx + y\,d^2x + dy\,dx = 2\,dy\,dx + x\,d^2y + y\,d^2x$. Q. E. D.

42. *Invenire differentiale ſecundum functionis* x^2.

Formula: $d^2(x^2) = 2x\,d^2x + 2\,dx^2$.

De-

DEMONST. $d(x^2) = 2x\,dx$. Igitur porro differentiando hoc differentiale (per n. 26.) habebimus $d^2(x^2) = 2x\,d^2x + 2\,dx\,dx = 2x\,d^2x + 2\,dx^2$.

43. OBSERV. Dum differentiatur aliquod differentiale, plerumque differentiale unius variabilis primum haberi pro constante. Quod ipsum calculum facit breviorem.

VSVS CALCVLI DIFFERENTIALIS.

IN SVBNORMALIVM ET SVBTANGENTIVM, NORMALIVM ET TANGENTIVM INVESTIGATIONE.

Fig. 10. 44. Sit curva quaecunque SM; ejus axis SN, *tangens* TM in puncto M, semiordinata MP; huic infinite vicina mp. Ducatur Mr parallela axi, quae erit $= Pp$. Sed $SP = x$; igitur $Pp = Mr = dx$; & $MP = rp = y$. Ergo mr differentia infinite parva inter MP & mp erit $= dy$. Sit MN perpendicularis ad TM. Erit MN *normalis*; PN vero *subnormalis*. TP *subtangens*.

Iam ob similitudinem triangulorum Mrm, MPT (est enim Mr parallela ad TP) habemus $mr\,(dy) : Mr\,(dx) = MP\,(y) : TP\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$.

Et quia MP est perpendicularis ex vertice anguli TMN recti ad hypothenusam TN demissa;

missa; est eo ipso media proportionalis inter segmenta hypothenusæ TP, PN.

Igitur $TP\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) : MP(y) = PM(y) : PN\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)$. Et ob angulum TPM rectum

est $TM = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2}\right)}$
$= \sqrt{\left(\frac{y^2\,dy^2 + y^2\,dx^2}{dy^2}\right)}$ extrahendo actu radicem $= \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

Pari ratione in triangulo MPN ad P rectangulo; erit $MN = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2}\right)}$
$= \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Itaque pro subtangente cujuscunque curvæ etiam si TN non sit axis; modo Mr sit parallela diametro TN; habebimus formulam differentialem,

Nempe *subtangens* $TP = \frac{y\,dx}{dy}$.

Subnormalis in axe: $PN = \frac{y\,dy}{dx}$.

Normalis in axe terminata $MN = \frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Tangens in axe prolongato terminata $TM = \frac{y}{dy} \times \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

Vſus harum formularum in eo conſiſtit; ut æquatio ad curvam data differentietur; & differentiata ſic tractetur, ut in uno membro una ex allatis formulis compareat; hoc ipſo in membro altero ejus determinatus valor pro curva data exhibebitur. Exemplis doctrinam illuſtrabimus.

45. *Invenire in circulo* I. *ſubtangentem;* II. *ſubnormalem;* III. *normalem;* IV. *tangentem.*

Fig. 11. Resol. Sit circuli diameter $SN = a$. $SP = x$, erit $PN = a - x$. $MP = y$. Et ex natura circuli $y^2 = ax - x^2$. Differentiando hanc æquationem habebimus $2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$. Igitur I. Quia formula differentialis pro ſubtangente eſt $\frac{y\,dx}{dy}$, ut maneat in proxima æquatione in uno membro dx ſolum. Dividamus utrumque membrum per $a - 2x$. Erit $\frac{2y\,dy}{a - 2x} = dx$; multiplicemus utrumque membrum per y, & dividamus per dy; erit $\frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{y\,dx}{dy}$. Dividendo numeratorem & denominatorem primi membri per 2. Erit $\frac{y^2}{\frac{a}{2} - x} = \frac{y\,dx}{dy}$. Eſt igitur in circulo ſubtangens tertia proportionalis ad differentiam inter radium & abſciſſum; & ad ſemi-

miordinatam ex puncto contactus ductam. Obtinetur vero geometrice hæc tertia proportionalis, si ducto ad M punctum contactus radio CM, excitetur ad eum perpendicularis indefinita, diametro enim, usque dum ei occurrat, prolongata habebitur PT subtangens: siquidem est

$$PC : MP = MP : PT \text{ hoc est } \frac{a}{2} - x : y = y : \frac{y^2}{\frac{a-x}{2}} = PT.$$

II. Pro subnormali differentialis formula est $\frac{y\,dy}{dx}$. Et æquatio ad circulum differentiata est $2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$. Igitur $y\,dy = \frac{a\,dx - 2x\,dx}{2}$ & $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{a}{2} - x = PC$, nempe subnormalis in circulo est differentia inter radium & abscissam.

III. Normalis expressio differentialis est $\frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Et in circulo $dy = \frac{a\,dx - 2x\,dx}{2y}$, hinc $dy^2 = \frac{dx^2(a-2x)^2}{4y^2}$. substituto hoc valore in formula generali; habebimus pro circulo normalem $= \frac{y}{dx} \times$

$$\sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2\,(a-2x)^2}{4y^2}\right)} = \frac{y\,dx}{dx} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{4y^2 + (a-2x)^2}{4y^2}\right)} = \frac{y\,dx}{2y\,dx} \times$$

$\sqrt{(4y^2 + (a - 2x)^2)}$. Sed $4y^2 = 4ax - 4x^2$; & $(a - 2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$. Igitur in circulo normalis $= \frac{ydx}{2ydx} \times$

$$\sqrt{(4ax - 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2)} = \frac{aydx}{2ydx}$$

$= \frac{a}{2}$. Scilicet normalis in circulo eſt radius.

IV. Haud abſimili ratione invenitur tangens circuli; nam differentialis expreſſio tangentis eſt $\frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Et æquatio differentiata ad circulum $2ydy = adx - 2xdx$. Hinc $\frac{2ydy}{a - 2x} = dx$. Quare $\frac{4y^2dy^2}{(a-2x)^2} = dx^2$; addendo utrique membro dy^2. Erit $dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{(a-2x)^2} = dy^2 + dx^2$. Seu

$$\frac{dy^2(a - 2x)^2 + 4y^2dy^2}{(a - 2x)^2} = dy^2 + dx^2$$

extrahendo radicem: $\frac{dy}{a-2x}\sqrt{((a-2x)^2+4y^2)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$; multiplicando utrumque membrum per $\frac{y}{dy}$ erit: $\frac{y}{a-2x} \times$

$$\sqrt{((a - 2x)^2 + 4y^2)} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$$

ſeu $\frac{ay}{a-2x}$ =tangenti. Igitur $a - 2x$: $a = y$: tangentem; dividendo primæ rationis terminos

minos per 2; erit $\frac{a}{2} - x : \frac{a}{2} = y$: tangentem: nempe tangens est quarta proportionalis ad subnormalem, radium & semiordinatam.

46. *Invenire* I. *subtangentem*; II. *subnormalem in parabola.*

RESOL. I. Si parameter parabolæ dicatur a, erit æquatio ad parabolam $y^2 = ax$; differentiata erit $2ydy = adx$; hinc $\frac{2ydy}{a} = dx$; & $\frac{2y^2dy}{a} = ydx$; denique $\frac{2y^2dy}{ady} = \frac{ydx}{dy}$: seu $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy}$. Sed $y^2 = ax$. Igitur $\frac{2ax}{a} = \frac{ydx}{dy}$; seu $2x = \frac{ydx}{dy}$: nempe in parabola subtangens est æqualis duplo abscissæ.

Quare per punctum M in parabola datum, ducemus tangentem, si ex M demissa semiordinata, axem AS prolongemus usque in T ita, ut sit AT, $= AP$. Recta enim TM erit tangens desiderata; quia $TP = 2AP = 2x$ est subtangens. Fig. 12.

II. Cum sit $2ydy = adx$ in parabola. Erit $ydy = \frac{adx}{2}$, & $\frac{ydy}{dx} = \frac{adx}{2dx} = \frac{a}{2}$. Ergo subnormalis PN in parabola æquatur dimidio parametri, nempe est constans.

Quia $Af = \frac{1}{4}a$ (per elem. Sect. Conic.), erit $Tf = x + \frac{1}{4}a$. Et $AP = x$, igitur $fP = x - \frac{1}{4}a$. Consequenter $fN = x - \frac{1}{4}a$

C +

$+ \frac{1}{2} a = x + \frac{1}{4} a$; fM eſt etiam $= x + \frac{1}{4} a$. Itaque $Tf = fM = fN$; nempe puncta T, M, N, ſunt in peripheria circuli centro f, radio fM deſcripti. Ergo circulus dicto centro & radio deſcribatur; & axis parabolæ ultra verticem prolongatus indefinite ſupponatur. Obtinentur puncta T & N, quæ conjuncta cum M, dant TM tangentem, & NM normalem.

Porro ob $fT = fM$, eſt angulus $fMT = fTM$. Et ſi eſt ML axi, AS parallela, eſt etiam $LMG = fTM$. Ergo quoque $LMG = fMT$. Quare ſi LM eſt radius luminoſus axi parallelus, in ſpeculum parabolicum cavum (quod rotatione arcus parabolici AM, circa punctum fixum A generatur) incidens, LMG eſt angulus incidentiæ, & fMT cum illi ſit æqualis, eſt angulus reflexionis. Itaque quilibet radius luminoſus ſic in ſpeculum incidens, reflectitur in punctum f, in quo quia omnes conjuncti uſtionem procurare poſſunt; ideo puncto huic *foci* nomen eſt datum.

47. *Invenire* I. *ſubtangentem*; II. *ſubnormalem in ellipſi.*

Fig. 13. Resol. I. Sit in ellipſi axis major $= a$, parameter $= b$. Erit æquatio ad ellipſim $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, ſeu $ay^2 = abx - bx^2$; differentiata: $2aydy = abdx - 2bxdx$, & $\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$. Vnde $\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}$. Sed $ay^2 = abx - bx^2$; ergo

$$\frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx} = \frac{y\,dx}{dy}$$ = ſubtangenti, dividendo numeratorem & denominatorem primi membri per $2b$: erit $\dfrac{ax - x^2}{\frac{a-x}{2}}$ = ſubtangenti; hinc

$$\frac{a}{2} - x : x = a - x : TP.$$

Iam ſi $\dfrac{ax - x^2}{\frac{a-x}{2}} = PT$. Et $x = AP$.

Erit $\dfrac{ax - x^2}{\frac{a-x}{2}} - x = PT - AP = AT$;

hoc eſt reductione ad communem denominatorem inſtituta: $\dfrac{ax - x^2 - \frac{ax}{2} + x^2}{\frac{a-x}{2}} = AT$

$= \dfrac{\frac{ax}{2}}{\frac{a-x}{2}}$. Vnde eſt $\dfrac{a}{2} - x : \dfrac{a}{2} = x : AT$.

Sed $\dfrac{a}{2} - x = PC$, $\dfrac{a}{2} = AC$, $x = AP$.

Igitur $PC : AC = AP : AT$. Quia vero ſumma antecedentium, eſt ad ſummam conſequentium, ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem. Ideo habemus etiam $PC + AP : AC + AT = PC : AC$. Hoc eſt $AC : TC$

$= PC : AC$. Alternando $AC : PC = TC : AC$. Invertendo $PC : AC = AC : TC$.

Quare, si detur punctum M, per quod ducenda sit tangens, demittatur ex eo semiordinata MP, & quaeratur tertia proportionalis ad PC distantiam semiordinatae a centro, & AC dimidium axem majorem; demum prolongetur axis usque in T ita, ut sit CT aequalis huic tertiae proportionali inventae; habebitur aggregatum ex TP & PC. Proinde habita subtangente TP, junctis punctis T & M, habebitur tangens TM desiderata.

Ducantur ex utroque foco ad punctum contactus rectae FM, fM; prolongetur fM usque dum fiat $GM = FM$. Dico angulum $TMF = TMG$, nam si hi anguli non aequarentur, recta TM non esset tangens; constat enim per bisectionem anguli GMF etiam tangentem determinari. Porro $fMS = TMG$ cum sint verticales. Ergo $TMF = fMS$.

Quapropter si fM (idem sentiendum de aliis ex f ad quodcunque punctum ellipseos ductis rectis) est radius luminosus, vel sonorus ex uno foco in speculum, vel fornicem ellipticum incidens, reflectetur per MF in focum alterum. Hinc liquet quare puncta F, & f foci vocentur.

II. Ob $2aydy = abdx - 2bxdx$. Habemus $ydy = \frac{abdx - 2bxdx}{2a}$, & $\frac{ydy}{dx} = \frac{ab - 2bx}{2a}$ = subnormali PN. Inde $2az$

$b = a - 2x : PN$. Seu antecedentes per 2 dividendo $a : b = \frac{a}{2} - x : PN$.

48. *Invenire ſubtangentem in hyperbola.*

Resol. Sit AB axis transverſus $= a$, parameter $= b$, erit æquatio ad hyperbolam Fig. 14.
$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, ſeu $ay^2 = abx + bx^2$. Illius differentiale: $2aydy = abdx + 2bxdx$, hinc $\frac{2aydy}{ab + 2bx} = dx$, & $\frac{2ay^2}{ab + 2bx} = \frac{ydx}{dy}$, ſeu $\frac{2abx + 2bx^2}{ab + 2bx} =$ ſubtan. PT; concinnius $\frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}} = PT$. Inde eſt $\frac{a}{2} + x : x = a + x : PT$.

Iam ſi $\frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}} = PT$, & $x = AP$; erit
$\frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}} - x = PT - AP = AT$, ſeu
$$\frac{\frac{ax}{2}}{\frac{a+x}{2}} = AT.$$

Quare

Quare $\frac{a}{2} + x : \frac{a}{2} = x : AT$; hoc eſt $CP : CA = AP : AT$. Quia vero eſt differentia antecedentium, ad differentiam conſequentium, ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem. Igitur eſt $CP - AP : CA - AT = CP : CA$. Hoc eſt $CA : CT = CP : CA$. Alternando $CA : CP = CT : CA$. Invertendo $CP : CA = CA : CT$.

Itaque, ut per punctum M datum tangens ducatur, quærenda eſt ad CP, & CA tertia proportionalis; huic inventæ fiat æqualis CT, punctum T, cum M conjunctum dabit tangentem.

Hinc etiam elegantiſſimam hanc veritatem diſcimus: omnes tangentes occurrere axi transverſo infra centrum C. Nulla enim tangens ad centrum hoc pertingere poteſt præter aſymptotum. Ponatur MC eſſe tangens; erit ob triangulum ad P rectangulum; $MC^2 = MP^2 + CP^2$, ſeu loco CP valorem æqualem ponendo; $MC^2 = MP^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$. Deinde MC^2 quadratum nempe tangentis, eſt æquale quadratis ſemiordinatæ, & ſubtangentis: $MC^2 = MP^2 + \left(\frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}}\right)^2$. Quare $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}}\right)^2$. Extrahendo radicem quadraticam erit $\frac{a}{2} + x = \frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}}$, multipli-cando per $\frac{a}{2} + x$, erit $\frac{a^2}{4} + ax + x^2$ $= ax + x^2$. Denique $\frac{a^2}{4} = 0$. Quod est impossibile.

Cum sit subtangens in hyperbola $= \frac{ax + x^2}{\frac{a+x}{2}}$.

Si ponatur $x = 0$, subtangens evadet $= \frac{0}{\frac{a}{2}}$ $= \frac{0}{a} = 0$. Nam est divisor ad dividendum ut unitas ad quotum. Igitur $a : 0 = 1 : \frac{0}{a}$. Ergo $\frac{0}{a} = 0$. Itaque subtangens nulla est, si abscissa nulla. Consequenter tangens verticem hyperbolæ transit. Quare crescente abscissa crescit subtangens, & tangens in puncto magis ad centrum accedente occurrit axi. Iam vertex hyperbolæ maxime ab *asymptoto* per centrum ducta distat, ergo puncta hyperbolæ a vertice remotiora, crescentibus abscissis respondentia, magis semper accedent ad asymptotum, prout eorum tangentium cum axe concursus magis accedunt ad centrum.

VSVS

VSVS CALCVLI DIFFERENTIALIS IN MAXIMIS, ET MINIMIS INVENIENDIS.

49. Si quantitas quædam, vel ejus functio ad certum usque terminum crescat, a quo porro descendens perpetuo decrescat. Quæri primum potest locus ille, in quo maxima evasit; deinde ipsius valor. Tum etiam locus, in quo est minima, ejusque valor. Atque hæc dum fiunt, *maxima* vel *minima* quæri dicuntur.

Illud imprimis manifestum est: quod, ubi quantitas evasit *maxima*, ejus incrementum momentaneum, seu *differentiale* in eo termino fuerit nullum; sic etiam ubi evasit *minima*.

Quare facta differentiatione quantitatis, de qua quæritur; ejus variabilis differentiale ponendum est $= o$. Quodsi hac methodo æquatio differentialis reducatur ad terminos finitos, *maximum*, vel *minimum* exhibebit.

Accidit subinde, ut differentiale variabilis, dum ex crescente incipit decrescere, evadat respective infinitum. Ex quo infertur, non semper differentiale variabilis, cujus *maximum* vel *minimum* quæritur, ponendum esse $= o$. Sed si posito hoc differentiali æquali nihilo, nihil ex æquatione pro maximo vel minimo elici possit, poni illud debere æquale infinito $= \infty$.

Fig. 15. n. 1. n. 2. Sit enim curva ATM (n. 1.) axi AM cavitatem, & curva gtp axi AM (n. 2.) convexitatem obvertens. In figura (n. 1.) liquet maximam semiordinatam esse TC. In figura (n. 2.) mi-

minimam esse tc; utrobique vero tangentem RS esse axi AM parallelam. In casu vero tangentis axi parallelæ, subtangens est infinita. Igitur $\frac{y\,dx}{dy} = \infty$. Iam fractio infinito æqualis denominatorem habeat nullum, est necesse. Ergo $dy = o$, & quia y est $= TC = tc$ finitæ quantitati, erit $dx = \infty$ respective.

In casu tangentis axi parallelæ, est quoque subnormalis nulla; quare $\frac{y\,dy}{dx} = o$. Sed fractio nihilo æqualis, denominatorem infinitum habere debet; ergo $dx = \infty$ respective. Et quia dy non est finita quantitas, debebit esse $dy = o$.

Consequenter, cum *maximum* vel *minimum* alicujus quantitatis quæritur, ejus *differentiale* modo *infinito*, modo *nihilo* æquale est. Et hic quidem differentiale semiordinatæ est nullum, abscissæ infinitum.

Dictis exempla lucem afferent.

50. *Invenire maximam semiordinatam in ellipsi.*

Resol. Aequatio ad ellipsim est $ay^2 = abx - bx^2$. Ejus differentiale $2ay\,dy = ab\,dx - 2bx\,dx$ sed in casu minimæ, vel maximæ semiordinatæ $dy = o$. Igitur $o = ab\,dx - 2bx\,dx$, unde $2bx\,dx = ab\,dx$, per dx dividendo. Erit $2bx = ab$ per $2b$ dividendo, erit $x = \frac{a}{2}$. Fig. 13.

Itaque

Itaque locus in quo maxima est ſemiordinata, eſt centrum: nam abſciſſa $\frac{a}{2}$, eſt diſtantia centri ellipſeos a vertice AC. Si jam velimus valorem maximæ ſemiordinatæ reſcire, in æquatione ad ellipſim loco x ponamus valorem ejus inventum $\frac{a}{2}$. Erit $ay^2 = \frac{a^2 b}{2} - \frac{a^2 b}{4} = \frac{2a^2b - a^2b}{4}$ $= \frac{a^2 b}{4}$. Ergo $y^2 = \frac{ab}{4}$; & $y = \sqrt{\frac{ab}{4}}$.

Sed (per element. ſect. con.) $\sqrt{\frac{ab}{4}}$ eſt dimidius axis conjugatus ellipſeos CD. Conſequenter maxima ſemiordinata in ellipſi eſt dimidius axis conjugatus.

Aliter. Quia $2aydy = abdx - 2bxdx$. Erit etiam $\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$. In caſu vero maximi vel minimi, (per præc. §.) $dx = \infty$. Igitur $\frac{2aydy}{ab - 2bx} = \infty$. Quare $ab - 2bx = 0$. Hinc $\frac{a}{2} = x$. Vt ante.

Eodem modo invenietur in circulo *maxima* ſemiordinata æqualis radio. In *hyperbola* vero minima ſemiordinata æqualis dimidio axeos conjugati; ejus enim locus deprehendetur $\frac{a}{2} = -x$. Linea abſciſſarum exiſtente axe transverſo, & vertice hyperbolæ, earum origine. Quod ſignum abſciſſæ

ſciſſæ negativum oſtendit, eam ultra verticem in plaga nempe huic oppoſita, in qua abſciſſæ erant poſitivæ ſumendam eſſe. *Minimam* autem hoc loco ſemiordinatam haberi dixi: quia inter duas hyperbolas conjugatas axem conjugatum dati a, pro transverſo habentes, majores in infinitum ſunt poſſibiles.

51. *Datam rectam* mn = a, *ita ſecare, ut rectangulum ex ſegmentis ſit omnium maximum.* Fig. 16.

Resol. Secetur quomodocunque recta mn, in C ſit $Cn = x$; erit $mC = a - x$. Et rectangulum ex his ſegmentis erit $ax - x^2$; ponamus hoc rectangulum æquale quadrato ſemiordinatæ alicujus, quam maximam quæri concipiamus; atque idem in reſolutione ſequentium problematum nobis ex uſu erit. Habebimus igitur: $ax - x^2 = y^2$, differentiando: $adx - 2xdx = 2ydy$. Sed ſi ponatur hoc eſſe maximum rectangulum, vel maximam ſemiordinatam, cujus quadratum rectangulo noſtro aſſumpſimus æquale, erit $dy = o$, unde $adx - 2xdx = o$, & $adx = 2xdx$. Denique $\frac{a}{2} = x$.

Vt igitur rectangulum ex ſegmentis rectæ datæ obtineatur *maximum*, debet recta ſecari *biſariam*. Et rectangulum hoc ex ſegmentis æqualibus erit *quadratum*, *maximum* inquam non *minimum*; quia rectangulum hoc quadrato minus eſt poſſibile, nempe ſi ponatur unum ſegmentum eſſe *finitum* alterum *infinite parvum*; rectangulum tum erit *infinite parvum*; atque ideo noſtro quadrato finito minus.

Hinc

Hinc ſequitur: inter rectangula iſoperimetra capaciſſimum eſſe quadratum. Nam ſi recta data quomodocunque ſecetur, rectangula ex ejus ſegmentis ſingula habebunt perimetrum duplo ejusdem rectæ æqualem; ergo iſoperimetra erunt.

Quoniam vero ex elementis Geometriæ conſtat: circulum capaciorem eſſe quadrato iſoperimetro; multo capacior erit circulus quovis rectangulo iſoperimetro.

Denique tyrones inde diſcant: malé pronuntiari de magnitudine areæ, ex magnitudine perimetri; ſiquidem rectangula e ſegmentis ejusdem rectæ orta æqualem omnia habent perimetrum, minime vero eandem aream, cum maximæ areæ inter illa ſit quadratum. Quod ipſis belli Imperatoribus ſcitu neceſſarium monet Polybius lib. 9. ne videlicet ex ambitu hoſtilium caſtrorum de magnitudine illorum, hoſtiumque numero concludant.

52. *Datum numerum reſolvere in factores, vel dati rectanguli invenire latera, quorum ſumma ſit minima.*

Resol. Sit datus numerus $= a$, unus ejus factor $= x$. Erit alter factor $= \frac{a}{x}$. Summa illorum ponatur æqualis ſemiordinatæ y; habebimus $x + \frac{a}{x} = y$; & differentiando æquationem: $dx - \frac{a\,dx}{x^2} = dy$. Si hæc ſumma eſt

minima;

minima; igitur $dy = o$; & $dx - \frac{a\,dx}{x^2} = o$.

Consequenter $dx = \frac{a\,dx}{x^2}$. Et $x^2\,dx = a\,dx$.

Hinc $x^2 = a$. Denique $x = \sqrt{a}$. Et alter factor $= \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Ergo e numero dato radix extrahenda est quadratica, habebuntur factores numeri æquales, quorum summa erit minima.

EXEMP. Sit $a = 36$. Erit $\sqrt{a} = 6$. Et $6 \times 6 = 36$. Iam $6 + 6 = 12$. Sunt autem omnes factores possibiles, numeri propositi, isti: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Et $4 + 9 = 13$. $3 + 12 = 15$. $2 + 18 = 20$. $1 + 36 = 37$. Igitur manifestum est: factorum summam prodire minimam, si sint æquales.

Porro istud quoque liquet: inter rectangula ejusdem areæ minimam habere perimetrum quadratum.

53. *E puncto n extra circulum dato ducere rectam ad peripheriam ejus cavam, quæ sit omnium ducibilium minima.*

RESOL. Quoniam recta ex n per centrum ad cavam circuli peripheriam ducta est constans, & rectangulum ex nd in ny, est æquale rectangulo ex quacunque alia secante, in segmentum ejus inter punctum extra circulum datum, & peripheriam interceptum; sequitur: invenienda esse rectanguli dato æqualis latera, quorum summa sit minima. Fig. 17.

Sit

Sit igitur quæsita recta $nl = z$. Sit $nd = b$, $dg = a$. Erit $ng = b + a$; & $nd \times ng = b^2 + ba$. Consequenter latus alterum rectanguli huic æqualis erit $\frac{b^2 + ba}{z} = np$. Ponatur horum laterum summa æqualis y. Habebimus æquationem $z + \frac{b^2 + ba}{z} = y$. Cujus differentiale $dz - \frac{b^2 dz - badz}{z^2} = dy$. Sed $dy = 0$. Itaque $dz = \frac{b^2 dz + badz}{z^2}$. $z^2 dz = b^2 dz + badz$. Et $z^2 = b^2 + ba$. Adeoque est, $b : z = z : b + a$. Nempe *minima* e puncto n recta ad peripheriam circuli cavam ducta est media proportionalis inter nd, & ng; seu est tangens circuli.

Minima inquam: nam sit nf tangens, ducto radio fc, erunt $nc + fc > nf$. Sed $fc = cg$. Ergo $nc + cg > nf$. Quapropter, cum ng major quam nf debet nf esse *minima*. *Maximam* vero esse ng, sic conficitur, est enim major quavis alia ns; cum sit $nc + cs > ns$. Igitur & $nc + cg > ns$.

At ducto radio pc ostendetur nd esse mininam omnium ex puncto n ducibilium ad peripheriam convexam; quia $np + pc > nd + dc$, auferendo utrinque radium, erit $no > nd$; eodem modo $nf > nd$. Igitur nd est minima.

54. *Per punctum* m, *quod non sit centrum, intra circulum datum, ducere chordam omnium ducibilium minimam.*

Resol.

Resol. Quia segmenta diametri dm, me data sunt, sit $dm = b$, $me = c$; sit recta quaesita gh, & $mh = z$; cum sit $dm \times me = gm \times mh$, erit $gm = \frac{bc}{z}$. Consequenter $gh = z + \frac{bc}{z}$. Ponamus hanc summam aequalem y, ut in superioribus problematis. Habebimus $z + \frac{bc}{z} = y$. Ejus differentiale $dz - \frac{bcdz}{z^2} = dy$. Est vero ex hypothesi $dy = 0$. Ergo $dz = \frac{bcdz}{z^2}$; unde $z^2 = bc$, & $z = \sqrt{bc}$. Fig. 18.

Itaque mh debet esse media proportionalis inter segmenta diametri dm & me, nempe perpendicularis ad diametrum, uti est ms. Proinde minima chorda per m ducta est sf, quae bisecatur a diametro; *minima* inquam, nam diameter de est chordarum maxima, ut constat ex elementis Geometriae.

Porro, quia minima chorda per m ducta bisecatur, illa majores per idem punctum ductae necessario in partes eo magis inaequales secantur, quo magis excedunt minimam: sed plurimum excedit minimam maxima de; igitur ejus segmenta dm, & me maximam inter se differentiam habent, nempe dm est minima rectarum ex puncto m ad peripheriam ducibilium, me vero maxima. Quod cum Geometria elementari apprime consentit.

Haec

Hæc commemorare isthic placuit: quod in elementis Geometriæ, quæ tyronibus meis ex usu sunt, non comparent.

55. *E puncto in axe parabolæ dato ducere rectam ad parabolam, omnium ducibilium minimam.*

Fig. 12. RESOL. Sit punctum datum N in axe AS parabolæ; sit AN data $= b$. Assumamus minimam esse NM; demissa ex M perpendiculari erit $AP = x$, $PN = b - x$. Consequenter $NM^2 = ax + b^2 - 2bx + x^2$. Sit igitur $ax + b^2 - 2bx + x^2 = z^2$; erit $adx - 2bdx + 2xdx = 2zdz$. Hinc, quia $dz = o$, $adx + 2xdx = 2bdx$. Et $a + 2x = 2b$. Quare $x = b - \frac{a}{2}$. Itaque si e recta data auferatur dimidia parameter, habebitur abscissa, cui respondens semiordinata determinabit punctum M, ad quod ex N ducta recta erit *minima;* nam hac majores sunt infinitæ possibiles ob arcum parabolæ constanter ab axe recedentem.

Fig. 19. 56. *Dati rectanguli* n c *latera* n p, n m *prolongare ita, ut per extrema prolongatorum puncta, & verticem* c *ducta recta* f g *sit minima.*

RESOL. Sit desiderata recta fg; $np = a$ $pc = b$. Et quoniam pf ignoratur, sit $= x$. Erit $fc = \sqrt{(x^2 + b^2)}$. Ob triangula pfc, nfg similia, $pf : fc = nf : fg$. Hoc est: $x : \sqrt{(x^2 + b^2)} = a + x : fg$. Sit $fg = y$.

Erit $y = \frac{a\sqrt{(x^2 + b^2)}}{x} + \sqrt{(x^2 + b^2)}$.

Ejus

Ejus differentiale (per n. 38 & 31.)

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}} - \frac{a\sqrt{(x^2+b^2)}\,dx}{x^2}$$

$$+ \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}};$$ sed ex hypothesi $dy = 0$.

Hinc $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}} = \frac{a\sqrt{(x^2+b^2)}\,dx}{x^2}$ multiplicando per $\sqrt{(x^2+b^2)}$, & dividendo per dx, erit $a + x = \frac{a\,x^2 + a\,b^2}{x^2}$. Multiplicando per x^2; erit $a\,x^2 + x^3 = a\,x^2 + a\,b^2$, denique $x^3 = a\,b^2$, & $x = \sqrt[3]{a\,b^2}$.

Constr. Quia $a\,b^2$ est parallelepipedum, cujus basis b^2, altitudo a; inveniendum est latus cubi huic parallelepipedo æqualis; nempe inter b & a inveniendæ sunt duæ mediæ continue proportionales, quarum prima erit x latus quæsitum. Nam sit $\div\div\; b, x, z, a$. Erit $b : a = b^3 : x^3$. Vnde $b\,x^3 = a\,b^3$, & $x^3 = a\,b^2$, $x = \sqrt[3]{a\,b^2}$.

Constructio igitur hujus æquationis per elementarem Geometriam perfici nequit.

57. *Super data hypothenusa construere triangulum rectangulum maximum.*

Resol. Sit triangulum quæsitum DCE. Fig. 20. $DC = x$. $DE = a$. Ob angulum ad C rectum erit $CE = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Hinc area trianguli $\frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}$, quæ ponatur $= y^2$.

Elevando utrumque membrum ad quadratum, erit $\frac{a^2 x^2 - x^4}{4} = y^4$. Differentiando: $\frac{2a^2 x dx - 4x^3 dx}{4} = 4y^3 dy$. Ob $dy = 0$. Erit $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 0$. Et $2a^2 x dx = 4x^3 dx$. Tandem $2a^2 x = 4x^3$. $2a^2 = 4x^2$. Denique $\frac{2a^2}{4} = x^2$, seu $\frac{a^2}{2} = x^2$, & $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = x$. Quare $CE = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

Ergo triangulum rectangulum maximum est isosceles.

Constr. Super DE describatur semicirculus, ex centro M erigatur radius perpendicularis ad DE. Erunt DC, CE latera quaesita.

Nam propter $DM = CM = \frac{a}{2}$. Erit $DC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$. Hinc $DC = CE = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

Patet vero *maximum* esse hoc triangulum ex eo, quia ductis Dg, & Eg triangulum DgE etiam rectangulum est, & quoniam cum DCE eandem habet basim; erit triangulum DgE ad triangu-

lum

lum DCE, ſicut pg ad CM. Sed $gp < CM$. Ergo triangulum DgE minus eſt triangulo DCE. Eodem modo oſtendetur, omnia reliqua triangula ſuper eadem hypothenuſa eſſe minora.

58. *Dato triangulo rectangulo inſcribere parallelogrammum rectangulum maximum.*

Resol. Sit quæſitum rectangulum CE, data $AB = a$. $BF = b$. $AC = x$. Erit $CB = a - x$. Et ob triangula ABF, ACD ſimilia, erit $AB : BF = AC : CD$; ſeu $a : b = x : CD$. Ergo $CD = \frac{bx}{a}$. Fig. 21.

Hinc rectangulum $CB \times CD = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2$. Differentiando: $bdx - \frac{2bxdx}{a} = 2ydy$. Sed $dy = o$. Ergo $bdx = \frac{2bxdx}{a}$. Et $ab = 2bx$. Dividendo per $2b$: $\frac{a}{2} = x$.

Eſt igitur altitudo a ſecanda biſariam, & per punctum biſectionis ducenda baſi parallela, quæ determinabit punctum in hypothenuſa, ex quo ducta parallela altitudini complebit rectangulum *maximum*: nam *minimum* eſſet, ſi ejus unum latus foret infinite parvum.

59. *Datæ ellipſi inſcribere rectangulum maximum.*

Resol. Sit quæſitum rectangulum mo. Cum $gh = x$, & ob $mn = po$. Latera rectanguli oppoſita, etiam $gh = ik$. Nam in ellipſi Fig. 22.

est $mn^2 : po^2 = gh \times hk : gi \times ik$. Sed $mn^2 = po^2$.. Ergo $gh \times hk = gi \times ik$. Hinc $gh : ik = gi : hk$, hoc est $gh : ik = gh + hi : ik + hi$. Vnde $gh \times ik + gh \times hi = ik \times gh + ik \times hi$. Auferendo utrinque idem $gh \times ik$. Manebit $gh \times hi = ik \times hi$. Ergo $gh = ik$. Quare si axis ellipseos sit $gk = a$. Erit $hi = no = a - 2x$. Et $hn^2 = y^2$

$$= \frac{abx - bx^2}{a}, \; hn \text{ vero} = \sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}.$$

Consequenter rectangulum quæsiti dimidium ho

$$= a \sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}$$

$$- 2x \sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)} = z^2.$$ Cujus differentiale :

$$\frac{abdx - 2bxdx}{2\sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}}$$

$$- \frac{12abx^2dx - 16bx^3dx}{4ax\sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}} = 2zdz.$$

Quoniam ex hypothesi $dz = 0$. Erit

$$\frac{abdx - 2bxdx}{2\sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}} = \frac{12abx^2dx + 16bx^3dx}{4ax\sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}}$$

multiplicando omnia per $\sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)}$,

& dividendo per dx, manebit $\frac{ab - 2bx}{2}$

=

$= \frac{12abx^2 + 16bx^3}{4ax}$, seu actu per $4x$ dividendo $\frac{ab - 2bx}{2} = \frac{3abx + 4bx^2}{a}$. Hinc $a^2b - 2abx = 6abx + 8bx^2$. Simplicius: $a^2 = 8ax + 8x^2$; dividendo per 8 $\frac{a^2}{8} = ax + x^2$. Ordinando & complendo æquationem quadraticam, $\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$. Hinc extracta radix est $\sqrt{\frac{3}{8}a^2} = x + \frac{a}{2}$. Denique $\sqrt{\frac{3}{8}a^2} - \frac{a}{2} = x$.

CONSTR. Inter $\frac{3}{4}a$, & $\frac{a}{2}$ quæratur media proportionalis, ex hac auferatur $\frac{a}{2}$; residuum erit abscissa gh, cui æqualis fiat ik, quibus respondentes ordinatæ ducantur, punctis no, mp conjunctis habebitur rectangulum mo *maximum*; *minimum* enim est infinite parvum.

60. *Dato uno parallelepipedi latere, invenire reliqua ita, ut parallelepipedum dato cubo æquale, habeat superficiem minimam.*

RESOL. Sit cubus datus $= a^3$, unum latus parallelepipedi datum $ng = b$, alterum invenien- Fig. 23.

niendum $ns = x$, tertium un erit $= \frac{a^3}{bx}$. Quare superficies $no = \frac{a^3}{b}$. Superficies $nl = bx$. Superficies $mn = \frac{a^3}{x}$. Hinc integra parallelepipedi superficies $= \frac{2a^3}{b} + 2bx + \frac{2a^3}{x}$. Ejus differentiale: $2bdx - \frac{2a^3 dx}{x^2} = o$, quia minima supponitur hæc superficies. Porro erit $bdx = \frac{a^3 dx}{x^2}$, & $x^2 = \frac{a^3}{b}$, $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Ergo alterum quæsitum latus $\frac{a^3}{bx} = \frac{a^3}{b} : \sqrt{\frac{a^3}{b}} = \frac{a^3}{b} \times \sqrt{\frac{b}{a^3}} = \frac{a^3}{b} \sqrt{\frac{b}{a^3}}$. Liberando a rationali coëfficiente $= \sqrt{\frac{a^6 b}{b^2 a^3}} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Quapropter latera duo quæsita sunt æqualia, cum superficies parallelepipedi est minima. *Minima* inquam, quia *maxima* hic inventa non est; siquidem posita eadem area baseos no, seu facto laterum ns, un, (cum sit rectangulum) perimeter ejus evaderet major, & inde crescerent superficies laterales, si latera essent inæqualia (per. num. 52.)

Fig. 24. 61. *Corpus perfecte elasticum impingat oblique ex* D *in planum* H k *perfecte durum, vel elasticum; quæritur ratio inter angulum incidentiæ & reflexionis, ut*

ut reflexum a plano Hk, *conficiat viam breviſſimam ex* D *in* G.

Resol. Demittantur perpendiculares e punctis datis ad planum poſitione datum $DH = a$, $Gk = b$. Sit $Hk = C$.

Aſſumamus directionem incidentis corporis eſſe DO, reflexi eſſe OG. Quia ignoratur HO, ſit $= x$. Erit $Ok = c - x$.

Conſequenter $DO = \sqrt{(a^2 + x^2)}$, $OG = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$. Et $DO + OG = \sqrt{(a^2 + x^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$. Quæ via cum eſſe debeat breviſſima; ejus differentiale erit æquale nihilo, nempe: $\frac{2xdx}{2\sqrt{(a^2 + x^2)}} - \frac{2cdx + 2xdx}{2\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}} = 0$. Seu irrationalium loco ponendo ipſas rectas, quas deſignant, & actu per 2 dividendo, habebimus: $\frac{xdx}{DO} - \frac{cdx + xdx}{OG} = 0$. Diviſione per dx inſtituta, $\frac{x}{DO} - \frac{c + x}{OG} = 0$. Hinc $\frac{x}{DO} = \frac{c - x}{OG}$. Sed $x = HO$, & $c - x = Ok$.

Igitur $\frac{HO}{DO} = \frac{Ok}{OG}$. Vnde $HO \times OG = Ok \times DO$, & reſolvendo in proportionem: $HO : Ok = DO : OG$. Ergo triangula DOH, GOk cum habeant præter duo latera duobus proporportionalia unum angulum homologis lateribus oppositum rectum, sunt similia, igitur mutuo æquiangula. Ergo anguli homologi DOH, & GOk æquales. Quare ratio anguli incidentiæ DOH, ad angulum reflexionis GOk est æqualitatis, seu angulus reflexionis, est æqualis angulo incidentiæ.

Vicissim, quoque e Geometria elementari ostenditur, corpus elasticum viam brevissimam conficere ex D in G, si reflectatur sub angulo GOk, angulo incidentiæ HOD æquali. Nam incidat sub angulo DmH, cui Gmk reflexionis non sit æqualis. Dico $Dm + mG > DO + OG$.

Demonst. Prolongetur DH in p ita, ut sit $DH = Hp$. Ducantur pO, & pm; triangula DHO, pHO æqualia, & similia sunt. Consequenter $pO = DO$, $x = y$; & ex hypothesi $x = z$, quare $y = z$. Sed $x + u + z = 180$. Ergo etiam $x + u + y = 180$. Ergo recta pO, jacet in directum ipsi OG. Sed ob triangula pHm, DHm etiam æqualia, & similia $pm = Dm$, & $pm + mG > pO + OG$. Itaque $Dm + mG > DO + OG$. Q. E. D.

62. *Legem refractionis luminis invenire.*

Resol. Quoniam lumen in diversis mediis, quæ recta HI distinguuntur, eadem celeritate moveri nequit; sit ratio celeritatis luminis incidentis AB, ad celeritatem refracti $BC = m : n$. Erunt tempora, quibus rectæ AB, BC percurruntur in ratione $nBA : mBC$ (nempe composita directa spatiorum, & inversa celeritatum). Demittantur perpendiculares AQ, & CP ad HI; fiat $AQ = a$, $CP = b$, $PQ = c$, $PB = x$. Erit $BQ = c - x$, consequenter $BC = \sqrt{(b^2 + x^2)}$,

Fig. 25.

&

& $AB = \sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$. Adeoque tempus, quo percurritur $AB + BC = m\sqrt{(b^2 + x^2)} + n\sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$, quod erit aliquod minimum, si natura semper compendio agit; igitur lumen ex A in C tempore minimo pervenire debet. Habemus adeo differentiale temporis expressi æquale nihilo scilicet

$$\frac{2mxdx}{2\sqrt{(b^2 + x^2)}} - \frac{2cndx + 2nxdx}{2\sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}} = 0.$$

seu $\dfrac{mxdx}{\sqrt{(b^2 + x^2)}} = \dfrac{cndx - nxdx}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}}$.

Hinc $\dfrac{mx}{\sqrt{(b^2 + x^2)}} = \dfrac{n(c - x)}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}}$,

seu rectas valoribus algebraicis substituendo: $\dfrac{m \times PB}{BC} = \dfrac{n \times BQ}{AB}$; seu: $m \times PB \times AB = n \times BQ \times BC$. Vnde $m \times PB : n \times BQ = BC : AB$. Fiat $BC = AB$. Erit $m \times PB = n \times BQ$. Quare $m : n = BQ : PB$. Sumatur BA vel BC pro sinu toto, erit BQ sinus anguli A, & PB sinus anguli C. Hoc est, ob rectas AQ, PC, catheto incidentiæ DE parallelas, & hoc ipso angulum $A = DBA$, & angulum $C = CBE$; BQ est sinus anguli inclinationis DBA, & PB sinus anguli CBE. Adeoque patet: sinum anguli inclinationis esse ad sinum anguli refracti in ratione constante, ea nempe, quæ est celeritatis luminis ante refractionem, ad celeritatem ejusdem post refractionem.

63. *Data vi p, pondere P altitudine plani inclinati $DM = a$; invenire longitudinem plani inclinati $DF = x$, per quam pondus P a linea horizon-* Fig. 26.

tali

tali MF ad altitudinem datam intra breviſſimum tempus elevetur.

RESOL. Inveniatur primum longitudo plani inclinati $DG = c$, in quo pondus P a potentia p in æquilibrio ſuſtentetur. Invenietur vero, ſi fiat $p : P = a : c$.

Iam eſt etiam gravitas abſoluta ad reſpectivam, ut plani inclinati longitudo $DF = x$, ad altitudinem; ſit gravitas reſpectiva $= v$. Itaque erit $P : v = x : a$. Conſequenter ob $p : P = a : c$. Erit ex æquo perturbato inverſe $p : v = x : c$. Et dividendo $p - v : p = x - c : x$. Ergo $p - v = \frac{px - pc}{x}$, Sed $p - v$ eſt exceſſus potentiæ ſupra gravitatem reſpectivam ponderis, qua deſcendere nititur, igitur vis acceleratrix; & ſpatium in motu uniformiter accelerato eſt in ratione compoſita vis acceleratricis, & duplicata temporis; ſeu ſpatium, quod hic eſt $= x$, & poſito tempore $= t$; erit inquam $x = (p - v) t^2$. Vnde $t^2 = \frac{x}{p - v}$. Eſt autem $p - v = \frac{px - pc}{x}$. Vnde $t^2 = \frac{x^2}{px - pc}$. Debet vero tempus t eſſe minimum; unde ejus differentiale $(px - pc)\, 2x\,dx - x^2 p\,dx = o$. Seu $(px - pc)\, 2x = x^2 p$. Seu $2x^2 - 2cx = x^2$. Seu $x^2 = 2cx$. Denique $x = 2c$. Ergo planum deſideratum DF duplam longitudinem habeat plani $DG = c$, eſt neceſſe.

CALCVLVS

CALCVLVS INTEGRALIS
SEV
DIFFERENTIALIS INVERSVS,
SEV
SVMMATORIVS.

64. Cum calculus integralis difficilior ſit, quam ut hic compendio ad captum tyronum accommodari poſſit; ideo quædam duntaxat ex eo, minus negotium facientia, quæ tamen inſignem habeant uſum, delibabimus.

Neque omnino differentialium omnium integralia reperiri poſſunt; quia dantur ſubinde tales integrandæ formulæ, quæ non ſunt perfecta functionum differentialia.

65. Littera $\int$. prima ſcilicet vocis *ſummæ* integrationis adhibetur nota. Ex. gr. $\int a\,dx$ indicat, quantitatem $a\,dx$ integrandam, ſeu ſummandam eſſe.

66. Quoniam calculi integralis operationes inverſæ ſunt earum, quæ in differentiali obtinent; formularum integralium vices agere poterunt omnes eæ quantitates, quas (n. 25. & ſequentibus) differentiandas propoſuimus.

Nempe per calculum integralem *quæritur illa quantitas, quæ differentiata dedit illud differentiale, quod integrandum proponitur.*

$$\text{Quare } \int dx = x.$$
$$\int a\,dx = ax.$$
$$\int (x\,dy + y\,dx) = xy.$$

67. At

67. At cum differentiatur functio *complexa* e variabili & constante, constans in differentiatione omittitur; quæ, ut integrale completum habeatur, debet rursus restitui. Sic $d(a+x) = dx$.

Quare $\int dx$ non erit solum x, sed ei constans a interdum addi vel subtrahi debebit, ut sit integrale completum: $a+x$. *Quod ex solis problematis conditionibus colligi potest.*

68. Si in expressione differentiali unica habeatur variabilis, aut si ejus generis expressio unico constet termino; difficile non est (ex n. 28.) quantitatem integralem reperire.

Nam, quia $d(x^2) = 2x\,dx$. Erit
$\int 2x\,dx = x^2$.
Sic etiam $\int 3x^2\,dx = x^3$. &c.

Videamus jam an lex inde generalis, pro ejusmodi quantitatibus uno termino, & una variabili constantibus integrandis elici nequeat? certe ita elicitur: ex $\int 2x\,dx$ prodit x^2, si dx omittatur, exponens vero variabilis x, qui hic intelligitur unitas, unitate augeatur, & per sic auctum quantitas residua $2x^2$ dividatur. Fiet enim obsequendo huic legi $\frac{2x^{1+1}}{1+1} = \frac{2x^2}{2} = x^2$.

Eadem ratione ex $\int 3x^2\,dx$ evadet x^3. Si nempe omisso dx, fiat $\frac{3x^{2+1}}{2+1} = \frac{3x^3}{3} = x^3$.

In genere si sit integranda quantitas $ax^m\,dx$.
Erit $\int ax^m\,dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$.

Itaque

Itaque probe notetur pro talibus quantitatibus integrandis hæc regula : *Deleatur differentiale, augeatur exponens variabilis unitate, & per exponentem hunc auctum quantitas tota dividatur.* Excipitur casus : si $m = -1$, tunc enim recurrendum est ad seriem infinitam vel logarithmicam.

Totum vero artificium calculi integralis in eo versatur, ut hæc regula differentialibus datis applicetur, atque illa ita præparentur, ac disponantur, ut ope hujus regulæ possint integrari. *En exempla.*

69. *Integrare expressionem:* $dx\sqrt{x}$.

Resol. Quia $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; erit $dx\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\,dx$. Hinc per *Regulam* nunc allatam

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^{3}}.$$

70. Invenire integrale expressionis: $\dfrac{dr}{r^{\frac{1}{2}}}$.

Resol. $\dfrac{dr}{r^{\frac{1}{2}}} = r^{-\frac{1}{2}}\,dr$ (per n. 29. Ergo $\int r^{-\frac{1}{2}}\,dr = \dfrac{r^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = r^{\frac{1}{2}} : \tfrac{1}{2} = 2\,r^{\frac{1}{2}}$ $= 2\sqrt{r}$.

71. *Integrare expressionem* $\dfrac{dx\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}$.

Resol.

RESOL. $\frac{dx\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} dx}{2}$, reducendo exponentes fractos ad communem denominatorem, & actu multiplicando potentias ejusdem radicis, erit $\frac{x^{-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} \times dx}{2} = \frac{x^{-\frac{1}{6}} \times dx.}{2}$ Iam

$$\int \frac{x^{-\frac{1}{6}}\, dx}{2} = \left(\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{2}\right) : \left(-\tfrac{1}{6}+1\right)$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{6}}}{2} : \tfrac{5}{6} = \frac{6\, x^{\frac{5}{6}}}{10} = \tfrac{3}{5} \sqrt[6]{x^5}.$$

72. *Integranda sit expressio* $dx\sqrt{(a-x)}$.

RESOL. Quia quantitas proposita pluribus terminis constat, reducenda est ad aliam unius termini cui regula integrationis possit applicari. Igitur ponamus $\sqrt{(a-x)} = z$, erit $a-x=z^2$, & $a-z^2=x$. Differentiando utrumque membrum erit $-2z\,dz = dx$. Vt prodeat in uno membro quantitas data, primum membrum per z, alterum per illi æqualem quantitatem $\sqrt{(a-x)}$ multiplicemus; prodibit $-2z^2\,dz = dx \times \sqrt{(a-x)}$.

Iam primum membrum ope regulæ nostræ est integrabile. Nempe: $\int -2z^2\,dz = \frac{2}{3}z^3 = \int dx\sqrt{(a-x)}$. Sed $-\frac{2}{3}z^3 = -\frac{2}{3}z^2 \cdot z = -\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(a-x)}$. Consequenter $\int dx\sqrt{(a-x)} = -\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(a-x)}$. Si est hoc integrale completum; posito $x=o$, debebit totum evanescere; nam integrale istud consideſiderari poteſt ut ſuperficies quædam curva, & ordinata terminata, ſi vero abſciſſa nulla eſt, evaneſcit quoque ſuperficies. Verum ſi $x = o$, manet tamen $-\frac{2}{3}a\sqrt{a}$. Quare hoc reſiduum cum ſigno contrario invento integrali adjiciendum, & erit integrale completum $\frac{2}{3}a\sqrt{a} - \frac{2}{3}(a-x) \times \sqrt{(a-x)}$, liberando a rationalibus coëfficientibus irrationales $= \frac{2}{3}\sqrt{a^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(a-x)^3}$.

73. *Sit integranda expreſſio:* $\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}}$.

Resol. $\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{m}}\,dx}{x^{\frac{1}{n}}}$

$= x^{\frac{1}{m}}\,x^{-\frac{1}{n}}\,dx = x^{\frac{n-m}{nm}}\,dx$. Iam $\int x^{\frac{n-m}{nm}}\,dx$

$$= \frac{x^{\frac{n-m+nm}{nm}}}{\frac{n-m+nm}{nm}} = \frac{nm\,x^{\frac{n-m+nm}{nm}}}{n-m+nm}$$

$$= \frac{nm\sqrt[nm]{x^{n-m+nm}}}{n-m+nm}.$$

Sit $m = 3$; $n = 2$; erit $nm = 6$; & $n - m + nm = 5$. Igitur integrale expreſſionis $\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ in hoc caſu $= \frac{dx\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$, erit

=

$= \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5}$. Et si esset propositum $\frac{\int dx \sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}$.

Ejus integrale foret $= \frac{6}{10} \sqrt[6]{x^5} = \frac{3}{5} \sqrt[6]{x^5}$. Vt n. 71.

Omissis difficilioribus integralibus, ad usum nobilissimi hujus calculi tyronibus exhibendum properamus.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN QVADRANDIS SVPERFICIEBVS PLANIS, ET EXPLANANDIS SOLIDORVM SVPERFICIEBVS.

74. Perspicuum est, quadraturam spatii *AMOR*, curva *MO*, & rectis *MA*, *AR*, *OR* clausi, obtineri per summam omnium rectangulorum, quale unum est *neqp*, infinite parvæ baseos *pq*. Nam licet elementum spatii dati sit *spqe* trapezium, quia vero $sn = \frac{1}{\infty}$, $ne = \frac{1}{\infty}$, triangulum *sne* est infinite parvum secundi ordinis, adeoque evanescens respectu *npqe* rectanguli infinite parvi primi ordinis ob $pq = \frac{1}{\infty}$, & *eq* finitam quantitatem; potest enim talibus rectangulis infinite parvis, & infinite multis constrata concipi tota area; igitur eorum summa erit area ipsa. Quia vero *eq* semiordinata $= y$; *Rq* abscissa

Fig. 27.

ſciſſa $= x$; erit incrementum ejus momentaneum $qp = dx$. Conſequenter rectangulum elementare $nq = y\,dx$, & ſumma illorum, ſeu quadratura ſpatii $AMOR = \int y\,dx$. Itaque, dum ſuperficies plana eſt quadranda, debet inveniri integrale elementi $y\,dx$, quod invenietur, ſi ex natura ſpatii quadrandi loco y valor, quem x ingrediatur, fuerit ſubſtitutus.

75. *Invenire aream trianguli.*

Resol. Sit baſis $MS = b$, altitudo $NG = a$. Areæ trianguli quoque elementum eſt rectangulum $rqpt$ infinite parvæ altitudinis ob, nempe ob $rt = y$, & $No = x$, eſt $ob = dx$, & $rqpt = y\,dx$. Sunt vero triangula rNt MNS ſimilia; igitur $NG : No = MS : rt$. Hoc eſt $a : x = b : y$. Ergo $y = \frac{bx}{a}$. Quare $y\,dx = \frac{bx\,dx}{a}$. Et $\int y\,dx = \frac{bx^2}{2a}$. Quæ eſt area trianguli rNt cujus altitudo eſt $No = x$. Vt habeatur area trianguli dati MNS, ponatur $x = a$, & erit $\frac{ba^2}{2a} = \frac{ba}{2}$, ut in Geometria elementari. Fig. 28.

76. *Invenire aream ſpatii arcu parabolæ* B E, *ſemiordinata* M E, *&* *abſciſſa* B M (*parte axis*) *clauſi.*

Resol. Aequatio ad parabolam, cujus parameter $= 1$, eſt $y^2 = x$. Hinc $y = x^{\frac{1}{2}}$; itaque Fig. 29.

que $\int y\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = x^{\frac{1}{2}+1} : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}+1}$ $= \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3} y x$. Nempe ſpatii MBE area æquatur duabus tertiis rectanguli $BMEC$. Et area ſpatii dupli DBE æquatur duabus tertiis rectanguli $DACE$. Conſequenter area ſpatii $DBECAD$ æquatur uni tertiæ rectanguli $DACE$.

77. *Invenire aream circuli.*

Fig. 30. Resol. Sit ſector circuli ACB finitus, ejus arcus $AB = x$, radius $AC = r$. Sit incrementum infinite parvum BD, arcus AB; erit $BD = dx$. Ducto radio DC. Sector BCD haberi poterit pro triangulo rectilineo; conſequenter area $BDC = \frac{r\,dx}{2}$, & $\frac{\int r\,dx}{2} = \frac{r\,x}{2}$, quæ eſt area ſectoris ABC. Abeat hic ſector in circulum; evadet x = peripheriæ $= p$. Vnde area circuli prodibit $= \frac{rp}{2}$. Vt in *Geometria elementari.*

Fig. 32. Aliter. Intra circulum DMN deſcribantur infiniti circuli concentrici radiis co, cm, cn &c. æquali infiniteſima inter ſe differentibus.

Summa illorum peripheriarum (concedendo iis infinite parvam latitudinem) erit area circuli dati. Iam, quia peripheriæ ſunt ut radii, & radii ex hypotheſi ſunt in progreſſione arithmetica; etiam hæ peripheriæ in eadem progreſſione erunt. Ergo pro obtinenda area circuli, debebit ſumma harum peripheriarum inveniri. Eſt vero peripheria centro proxima $= \frac{1}{\infty}$, & peripheria circuli dati ti ponatur $= p$. Numerus harum peripheriarum est $dc = r$. Itaque summa omnium (*per element. Algebræ*) nempe area circuli $= \left(p + \frac{1}{\infty}\right)\frac{r}{2}$ $= \frac{rp}{2}$. Vt ante.

Aliter. Inventitur area circuli per *calculum integralem* hoc modo: sit diameter circuli $SN = f$, abscissa a centro computata $PC = x$. Erit $SP = \frac{f}{2} - x$; $PN = \frac{f}{2} + x$. Igitur ex natura circuli $y^2 = \frac{f^2}{4} - x^2 = \frac{f^2 - 4x^2}{4}$, unde Fig. 11.

$$y = \sqrt{\left(\frac{f^2 - 4x^2}{4}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(f^2 - 4x^2)}.$$

Hunc valorem semiordinatæ substituendo in formula $\int y\,dx$ habebimus $\int y\,dx = \int dx\,\tfrac{1}{2}\sqrt{(f^2 - 4x^2)}$. Pro integrali hujus formulæ inveniendo, debebit $\sqrt{(f^2 - 4x^2)}$ in seriem infinitam resolvi; illud vero ope formulæ Cl. Newtoni præstabimus, quæ est:

$$P^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} AQ \pm \frac{(m-n)}{2n} BQ$$
$$\pm \frac{(m-2n)}{3n} CQ \pm \frac{(m-3n)}{4n} DQ, \text{ \&c.}$$

In nostro casu $m = 1$, $n = 2$, cum sit $\sqrt{(f^2 - 4x^2)} = (f^2 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}$; $P = f^2$; $P^{\frac{m}{n}} = f^{\frac{2}{2}} = f$. $Q = -\frac{4x^2}{f^2}$. Valores quantitatum A, B, C, D, &c. in ipsa formulæ ad præsentem casum applicatione determinabimus, nempe:

$$p^{\frac{m}{n}} = f = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} f \times - \frac{4x^2}{f^2} = - \frac{2x^2}{f} = B.$$

$$\left(\frac{m-n}{2n}\right) BQ = - \tfrac{1}{4} \times - \frac{2x^2}{f}$$

$$\times - \frac{4x^2}{f^2} = - \frac{2x^4}{f^3} = C.$$

$$\left(\frac{m-2n}{3n}\right) CQ = - \tfrac{1}{2} \times - \frac{2x^4}{f^3}$$

$$\times - \frac{4x^2}{f^2} = - \frac{4x^6}{f^5} = D.$$

$$\left(\frac{m-3n}{4n}\right) DQ = - \tfrac{5}{8} \times - \frac{4x^6}{f^5}$$

$$\times - \frac{4x^2}{f^2} = - \frac{10x^8}{f^7} \text{ \&c.}$$

Sistendo in his terminis habemus:

$$\sqrt{(f^2 - 4x^2)} = f - \frac{2x^2}{f} - \frac{2x^4}{f^3} - \frac{4x^6}{f^5}$$

$- \frac{10x^8}{f^7}$ &c. Quare $dx \, \tfrac{1}{2} \sqrt{(f^2 - 4x^2)}$

$$= \frac{f\,dx}{2} - \frac{x^2\,dx}{f} - \frac{x^4\,dx}{f^3} - \frac{2x^6\,dx}{f^5}$$

$- \frac{5x^8\,dx}{f^7}$ &c. & $\int dx \, \tfrac{1}{2} \sqrt{(f^2 - 4x^2)}$ =

$= \frac{fx}{2} - \frac{x^3}{3f} - \frac{x^5}{5f^3} - \frac{2x^7}{7f^5} - \frac{5x^9}{9f^7}$ &c. ponendo $x = f$. Obtinebimus pro circuli, cujus diameter est f, quadratura hanc seriem $\frac{f^2}{2} - \frac{f^2}{3} - \frac{f^2}{5} - \frac{2f^2}{7} - \frac{5f^2}{9}$ &c. $= f^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2}{7} - \frac{5}{9}$ &c.)

78. *Invenire circulum areæ ellipseos æqualem.*

RESOL. Sit dimidius axis major $AC = \frac{1}{2}a$; dimidius axis conjugatus $DC = \frac{1}{2}g$; abscissa a centro computata $PC = x$; erit $AP = \frac{1}{2}a - x$; $Pa = \frac{1}{2}a + x$. Ergo (*per elementa sectionum conicarum*) $y^2 : \frac{1}{4}a^2 - x^2 = g^2 : a^2$. Hinc $y^2 = \frac{g^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, & $y = \frac{g}{2a} \times \sqrt{(a^2 - 4x^2)}$. Quare $\int y\,dx = \frac{\int g\,dx}{2a} \times \sqrt{(a^2 - 4x^2)}$. Cum vero $\sqrt{(f^2 - 4x^2)}$ priori paragrapho in seriem infinitam resoluta quantitas, ad præsentem $\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$ reducatur, ponendo $f^2 = a^2$; sequitur istam habituros nos in seriem infinitam resolutam, si in priore serie loco f^2 ponamus a^2, & loco f, substituamus a, idem de cæteris potentiis intelligendo. Itaque: Fig. 13.

$\sqrt{(a^2 - 4x^2)} = a - \frac{2x^2}{a} - \frac{2x^4}{a^3} - \frac{4x^6}{a^5} - \frac{10x^8}{a^7}$ &c. & $\frac{g\,dx}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)} = \frac{g\,dx}{2}$

—

$$-\frac{gx^2dx}{a^2}-\frac{gx^4dx}{a^4}-\frac{2gx^6dx}{a^6}$$

$$-\frac{5gx^8dx}{a^8}\text{ \&c.}\ \frac{\int g\,dx}{2a}\sqrt{(a^2-4x^2)}$$

$$=\frac{gx}{2}-\frac{gx^3}{3a^2}-\frac{gx^5}{5a^4}-\frac{2gx^7}{7a^6}-\frac{5gx^9}{9a^8}\text{ \&c.}$$

ponendo $x = a$. Erit pro quadratura ellipseos integræ series: $\frac{ga}{2}-\frac{ga}{3}-\frac{ga}{5}-\frac{2ga}{7}$

$$-\frac{5ga}{9}\text{ \&c.}=ga\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{7}-\tfrac{5}{9}\text{ \&c.}\right)$$

Sit porro circulus habens diametrum $f = C$. Ellipsis (cujus axes sunt a & g) sit $= E$. Erit (*per præced. & hunc parag.*) $C : E = f^2 : ga$. Sit $C = E$. Erit $f^2 = ga$; & $f = \sqrt{ga}$.

Ergo *ellipsis est æqualis circulo, cujus diameter est media proportionalis inter axem majorem & conjugatum ellipseos.*

Aliter. Describatur semicirculus super axe majore ellipseos $AB = a$, EQ axis minor sit $= g$; semiordinata circuli MP, correspondens illi ellipseos TP; $DC = AC$, sunt enim radii ejusdem circuli.

Fig. 31.

Ex natura circuli est $MP^2 = AP \times PB$, & $DC^2 = AC \times CB = AC^2$. Hinc $MP^2 : DC^2 = AP \times PB : AC^2$. Sed etiam in ellipsi est $TP^2 : EC^2 = AP \times PB : AC^2$. Igitur $MP^2 : DC^2 = TP^2 : EC^2$. Alternando $MP^2 : TP^2 = DC^2 : EC^2$. Extrahendo radicem

radicem quadraticam $MP : TP = DC : EC$. Seu $MP : TP = AC : EC = AB : EQ = a : g$. Eſt ergò quævis ſemiordinata in circulo, ſuper axe majore deſcripto, ad correſpondentem in ellipſi, ſicut axis major ad minorem.

Quare etiam ſumma omnium ſemiordinatarum in circulo ad ſummam omnium ſemiordinatarum in ellipſi, hoc eſt totus circulus $= C$, ad totam ellipſim $= E$, ſicut axis major ad minorem, nempe $C : E = a : g$.

Deſcribatur porro circulus ſuper axe minore ellipſeos EQ; erit quoque $KH^2 : SC^2 = EH \times HQ : EC^2$. Et in ellipſi $LH^2 : BC^2 = EH \times HQ : EC^2$. Quare rurſus $KH^2 : SC^2 = LH^2 : BC^2$. Seu $KH : SC = LH : BC$; & $KH : LH = SC : BC = EC : BC = EQ : AB = g : a$. Ergo etiam ſumma omnium ſemiordinatarum in circulo $= c$ ſuper axe minore deſcripto, ad ſummam omnium ſemiordinatarum correſpondentium in ellipſi $= E$, ſicut axis minor ad majorem nempe, $c : E = g : a$. Sed oſtendimus prius eſſe $C : E = a : g$. Igitur terminos homologos multiplicando habebimus $cC : E^2 = ga : ag$. Atqui $ga = ag$; ergo $cC = E^2$ & $\sqrt{cC} = E$.

Itaque area ellipſeos eſt æqualis circulo medio proportionali inter circulum ſuper axe majore, & circulum ſuper axe minore deſcriptum; hic vero circulus habet diametrum mediam proportionalem inter utrumque axem. Nam ſit ratio diametri ad peripheriam $d : p$; erit $d : p = a : \frac{ap}{d}$.

Conſequenter $C = \frac{a^2 p}{4d}$, & eodem modo $c = \frac{g^2 p}{4d}$.

Vnde

Vnde $cC = \frac{a^2 g^2 p^2}{16 d^2}$, & $\sqrt{cC} = \frac{a g p}{4 d} = E$.

Sit jam $a : m = m : g$. Erit $m^2 = a g$. Et $E = \frac{m^2 p}{4 d}$ = circulo cujus diameter m inter utrumque axem eſt media proportionalis; id ipſum vel inde, jam colligi poterat: quod circuli ſint, ut quadrata diametrorum.

79. *Invenire ſuperficiem lateralem coni recti.*

Resol. Conus rectus generatur rotatione trianguli rectanguli DCE circa cathetum DC; ſuperficies ejus lateralis generatur a recta DE, cujus elementum infinite parvum ſit mg, iſtius rotatione deſcribetur utique ſuperficies coni truncati infinite parvæ altitudinis $nk = mp$. Iam ſit $Dn = x$, erit $nk = mp = dx$. $nm = y$. Erit pg differentia infinite parva inter duas ſemiordinatas nm, kg ſibi infinite vicinas $= dy$; & ob triangulum mpg ad p rectangulum $mg = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Scitur autem ſuperficiem coni truncati lateralem æquari facto ex latere mg, in peripheriam circuli inter peripherias baſium mediam arithmetice proportionalem (cum hæc ſuperficies ſpectari poſſit, ut ſumma infinitarum peripheriarum parallelarum baſibus in progreſſione arithmetica exiſtentium). Itaque ſit radius hujus circuli ib, quem dico futurum $= y$. Nam $nm = y$, $kg = y + dy$. Igitur radius medius arithmetice proportionalis $ib = \frac{2y + dy}{2} = y + \frac{dy}{2}$, ob $\frac{dy}{2}$ infinite parvam quantitatem erit $ib = y$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $r : p$; erit peripheria radio y re-

(Fig. 33.)

reſpondens $= \frac{py}{r}$. Conſequenter ſuperficies coni truncati, cujus latus mg, $= \frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Quoniam vero, poſita etiam linea DE, *qualicunque curva, ejus elementum infinite parvum* m g *pro recta haberi poteſt; ideo* $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ *eſt elementum ſuperficiei, rotatione cujuſcunque plani* CDE *geniti.* Redeamus ad conum. Fig. 34.

In triangulo coni genitore CDE, ſimili triangulo nDm, ſi $CD = a$, $CE = r$, & hoc ipſo peripheria baſeos $= p$; erit $a : r = Dn : nm = x : y$. Hinc $y = \frac{rx}{a}$; & $dy = \frac{rdx}{a}$; $dy^2 = \frac{r^2dx^2}{a^2}$. Igitur $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ $= \frac{px}{a}\sqrt{\left(dx^2 + \frac{r^2dx^2}{a^2}\right)} = \frac{pxdx}{a^2} \times$ $\sqrt{(a^2+r^2)}$. Hinc $\int\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ $= \frac{px^2}{2a^2}\sqrt{(a^2+r^2)}$. Quæ eſt ſuperficies coni recti cujus altitudo $= x$. Ponatur $x = a$, erit ſuperficies coni, altitudinem DC habentis $= \frac{p}{2} \times$ $\sqrt{(a^2+r^2)}$; ſed $\sqrt{(a^2+r^2)} = DE$ lateri coni. Itaque ſuperficies coni recti lateralis, æquatur triangulo, cujus altitudo eſt latus coni, & baſis Fig. 33.

ſis peripheria baſeos coni, ut in Geometria ſolidorum docetur.

80. *Invenire ſuperficiem ſphæræ.*

Resol. Aequatio ad circulum ſphæræ genitorem cujus diameter ſit a, & abſciſſæ non a centro, ſed origine diametri computentur, eſt $y^2 = ax - x^2$. Hinc $2ydy = adx - 2xdx$, & $dy = \frac{(a - 2x)\,dx}{2y}$; quadrando

$dy^2 = \frac{(a - 2x)^2\,dx^2}{4y^2}$, addendo utrique membro dx^2, erit $dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2\,dx^2 + (a - 2x)^2\,dx^2}{4y^2}$ extrahendo radicem quadraticam: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{2y} \times \sqrt{(4y^2 + (a - 2x)^2)}$. Sed $4y^2 = 4ax - 4x^2$; & $(a - 2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$. Hinc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{2y}\sqrt{a^2} = \frac{adx}{2y}$.

Multiplicando utrumque membrum per : $\frac{py}{r}$, ut habeatur elementum ſuperficiei ſphæricæ; erit $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{apydx}{2ry} = \frac{apdx}{2r}$.

Quare $\int \frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{apx}{2r}$. Eſt itaque $\frac{apx}{2r}$ ſuperficies ſegmenti ſphæræ, cujus altitudo

tudo $= x$. Sed $\frac{ap}{2r}$ est peripheria circuli sphæræ maximi, cum sit $2r : p = a : \frac{ap}{2r}$. Quare superficies segmenti sphæræ æquatur rectangulo cujus basis est peripheria circuli sphæræ maximi, & altitudo æqualis altitudini segmenti. Ponamus $x = a$; erit superficies totius sphæræ $= \frac{a^2 p}{2r}$ $= \frac{ap}{2r} \times a =$ rectangulo ex peripheria circuli maximi in diametrum sphæræ; consequenter quadrupla est circuli maximi.

81. *Invenire superficiem paraboloidis, seu solidi, quod rotatione spatii, abscissa, arcu parabolæ, & semiordinata clausi, generatur.*

Resol. Cum sit in parabola, parametrum a habente, $y^2 = ax$: erit differentiando: $2y\,dy = a\,dx$. Hinc $dy = \frac{a\,dx}{2y}$; $dy^2 = \frac{a^2\,dx^2}{4y^2}$; addendo utrique membro dx^2, erit $dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2\,dx^2 + a^2\,dx^2}{4y^2}$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{2y}\sqrt{(4y^2 + a^2)}$; multiplicando per $\frac{py}{r}$ utrumque membrum, ut habeatur elementum superficiei desideratæ: $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{p\,dx}{2r}\sqrt{(4y^2 + a^2)}$. Sed $4y^2 = 4ax$; itaque $\int \frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int \frac{p\,dx}{2r} \times$

$\sqrt{}$

$\surd(4ax + a^2)$. Sit $\surd(4ax + a^2) = z$, erit $4ax + a^2 = z^2$, & $4adx = 2zdz$, dividendo per $4a$; erit $dx = \frac{2zdz}{4a}$, ut prodeat in uno membro expressio integranda, multiplicemus primum membrum per $\frac{p}{2r}\surd(4ax + a^2)$, & alterum per quantitatem huic æqualem $\frac{pz}{2r}$; erit

$$\frac{pdx}{2r}\surd(4ax + a^2) = \frac{pz^2 dz}{4ar}.$$ Vnde

$$\int\frac{pdx}{2r}\surd(4ax + a^2) = \frac{pz^3}{12ar} = \frac{pz^2 \times z}{12ar}$$

$$= \frac{p(4ax + a^2)\surd(4ax + a^2)}{12ar}.$$ Ponendo

$x = 0$, manebit $\frac{a^3 p}{12ar}$; consequenter integrale completum, id est superficies paraboloidis habebitur:

$$\frac{p(4ax + a^2)\surd(4ax + a^2) - a^3 p}{12ar}.$$

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN CVBANDIS SOLIDIS.

82. Si soliditas corporis propositi ope calculi integralis invenienda est; sciri initio debet hujus solidi differentiale elementum. Sic pyramidis triangularis elementum est pyramis truncata
Fig. 35. $mnrqop$ infinite parvæ altitudinis bg; quæ ob bases

bases $m n r$, & $p o q$ hoc ipso sibi infinite vicinas pro prismate triangulari potest haberi.

Iam si $E b$ perpendicularis e vertice ad $m n r$ demissa $= x$, erit $b g = d x$ altitudo hujus prismatis, & quoniam sectiones in pyramide basi parallelæ (quales hic supponuntur) sunt basi similes, erunt ut quadrata laterum homologorum. Consequenter, posito latere $p q = y$; erit basis prismatis elementaris $p o q$ in ratione y^2, quare prisma elementare erit ut $y^2 \, d x$; & summa omnium, ut $\int y^2 \, d x$.

Si vero solidum generetur rotatione alicujus plani, cujus elementum (n. 27.) ostendimus esse rectangulum $k n m p$; certum est, sicut rotatione plani $D E C$ circa $D C$ describitur totum solidum, ita rotatione rectanguli elementaris describi cylindrum infinite parvæ altitudinis $n k$; qui erit elementum differentiale solidi rotatione geniti. Iam si sit ratio radii ad peripheriam $r : p$, $n m = y$, $D n = x$, erit $n k = d x$, & $r : p = y : \frac{p y}{r}$. Fig. 34.

Quare basis hujus elementaris cylindri $= \frac{p y^2}{2 r}$, & ipse cylindrus $\frac{p y^2 \, d x}{2 r}$. Denique $\frac{\int p y^2 \, d x}{2 r}$ ipsum solidum rotatione genitum. Exemplis usum inventarum formularum docebimus.

83. *Invenire soliditatem pyramidis triangularis.*

Resol. Quoniam elementum pyramidis est ut $y^2 \, d x$. Altitudo pyramidis data $E S = a$, pyramidis $m E n r$ altitudo $E b = x$. Recta $A D$ Fig. 35.

data

data $= g$; recta $pq = y$. Erunt pyramidum $AEDC$, $mErn$ similium dimensiones homologæ proportionales. Itaque $a : x = g : y$, & $a^2 : x^2 = g^2 : y^2$. Hinc $y^2 = \frac{g^2 x^2}{a^2}$. Ergo

$$y^2 dx = \frac{g^2 x^2 dx}{a^2}, \ \& \int y^2 dx = \frac{g^2 x^3}{3a^2}.$$ Sit

$x = a$; erit soliditas totius pyramidis, ut $\frac{g^2 a}{3}$. Loco g^2 ponendo ipsam basim $ACD = b$; erit soliditas pyramidis propositæ $= \frac{ba}{3} = b \times \frac{a}{3}$. $=$ facto ex basi in tertiam partem altitudinis.

Porro cuivis polygono æquale triangulum construi potest; ergo pyramis cujuscunque baseos ad triangularem ejusdem cum ea altitudinis est reducibilis. Quare cujuscunque pyramidis soliditas æquatur facto ex basi in tertiam partem altitudinis.

84. *Invenire soliditatem coni recti.*

Resol. In triangulo genitore coni recti si Fig. 33. sit $DC = a$, $CE = r$; erit peripheria radio CE descripta $= p$. $Dn = x$, $nm = y$. Ob similia triangula CDE, nDm erit $a : r = x : y$. Quare $y = \frac{rx}{a}$, & $y^2 = \frac{r^2 x^2}{a^2}$, & $\frac{py^2 dx}{2r}$

$$= \frac{pr^2 x^2 dx}{2a^2 r}. \text{ Itaque } \frac{\int py^2 dx}{2r} = \frac{pr^2 x^3}{6a^2 r}$$

$$= \frac{prx^3}{6a^2}. \text{ Sit } x = a, \text{ erit } \frac{prx^3}{6a^2} = \frac{pra}{6}$$

$=$

$= \frac{pr}{2} \times \frac{a}{3}$. Atqui $\frac{pr}{2}$ eſt baſis coni; ergo ſoliditas coni recti æquatur facto ex baſi in tertiam partem altitudinis.

Eſt vero conus ſcalenus æqualis recto ejusdem baſeos & altitudinis; itaque etiam coni ſcaleni ſoliditas æquatur facto ex baſi in tertiam partem altitudinis.

85. *Invenire ſoliditatem ſphæræ.*

Resol. Sit ſphæræ diameter $= 2r$, erit pro circulo ſphæræ genitore $y^2 = 2rx - x^2$. Conſequenter $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{2prx\,dx}{2r} - \frac{px^2 dx}{2r}$. Et $\frac{\int py^2 dx}{2r} = \frac{2prx^2}{4r} - \frac{px^3}{6r} = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$ $= \frac{3rpx^2 - px^3}{6r}$. Quæ eſt ſoliditas ſegmenti ſphæræ, cujus altitudo eſt x. Sit $x = r$. Erit $\frac{3rpx^2 - px^3}{6r} = \frac{3pr^3 - pr^3}{6r} = \frac{2}{6} p r^2$ $= \frac{pr^2}{3} = pr \times \frac{r}{3}$. Ergo ſoliditas hemiſphærii æquatur pyramidi, cujus baſis eſt pr ſuperficies hemiſphærii, & altitudo radius. Quare ſphæræ totius ſoliditas erit $= \frac{2}{3} pr^2 = 2pr \times \frac{r}{3} =$ pyramidi, cujus baſis $2pr$ ſuperficies integra ſphæræ, & altitudo radius.

Sit

Fig. 36. Sit hemisphærium $APD = \frac{pr^2}{3}$. Sit $PO = x$. Erit soliditas zonæ $ABCD = \frac{pr^2}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Dico: *hanc zonæ soliditatem esse æqualem duabus tertiis cylindri, cujus basis circulus maximus sphæræ* AMD, *& altitudo eadem, cum altitudine zonæ* OI, *plus una tertia cylindri, cujus basis est circulus* BLC *minor zonam terminans, & altitudo eadem zonæ* OI.

Demonst. Nam $OI = r - x$, & basis $AMD = \frac{pr}{2}$. Quare $\frac{2}{3}$ cylindri $EAMDF = \frac{r^2 p}{3} - \frac{prx}{3}$. Cylindri vero $BLCHG$ una tertia $= \left(px - \frac{px^2}{2r}\right)\left(\frac{r-x}{3}\right) = \frac{prx}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Ergo $\frac{2}{3}$ $EAMDF + \frac{1}{3}$ $BLCHG = \frac{r^2 p}{3} - \frac{prx}{3} + \frac{prx}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r} = \frac{r^2 p}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Q. E. D.

Soliditatem sectoris sphærici $BPCI$ obtinebimus; si ad soliditatem segmenti $BPC = \frac{3prx^2 - px^3}{6r}$, addiderimus soliditatem coni, cujus basis BLC, & altitudo OI, quæ soliditas

liditas eſt æqualis $\frac{1}{3}$ cylindri $BLCHG = \frac{prx}{3}$ $- \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Quare ſectoris ſphærici ſoliditas $= \frac{prx}{3} + \frac{3prx^2 - px^3 - 3prx^2 + px^3}{6r}$ $= \frac{prx}{3} = px \times \frac{r}{3}$. Atqui px (per n. 80.) eſt ſuperficies ſegmenti ſphæræ, quæ agit baſim ſectoris ſphærici; ergo ſector ſphæricus eſt æqualis pyramidi, cujus baſis eſt ſuperficies ſegmenti ſphæræ, & altitudo radius. Quod inde etiam deducitur: quia ſphæra concipi poteſt ut aggregatum pyramidum infinite parvarum baſium & infinite multarum, quarum vertices ſint in ſphæræ centro, & communis altitudo radius.

86. *Invenire ſoliditatem paraboloidis.*

Resol. Poſita parametro $= a$, erit $y^2 = ax$. Fig. 37.
Quare $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{paxdx}{2r}$; & $\frac{\int py^2dx}{2r}$ $= \frac{pax^2}{4r} = \frac{pax}{2r} \times \frac{x}{2} = \frac{py^2}{2r} \times \frac{x}{2}$; ſed $\frac{py^2}{2r}$ eſt circulus FGH cujus radius $y = EH$; & $x = CE$. Ergo ſoliditas paraboloidis æquatur dimidio cylindri $AFGHD$.

87. *Invenire ſoliditatem ſphæroidis elliptici, ſeu ſolidi rotatione dimidiæ ellipſeos circa axem majorem geniti.*

Resol. Aequatio ad ellipſim (ex num. 78.) eſt $y^2 = \frac{g^2}{4} - \frac{g^2x^2}{a^2}$. Itaque $\frac{\int py^2dx}{2r}$

$$= \frac{\int p g^2 dx}{8r} - \frac{\int p g^2 x^2 dx}{2a^2 r} = \frac{p g^2 x}{8r} - \frac{p g^2 x^3}{6a^2 r}.$$

Sit $x = \frac{1}{2} a$; erit $x^3 = \frac{1}{8} a^3$, & $\frac{p g^2 x}{8r} - \frac{p g^2 x^3}{6a^2 r}$

$$= \frac{p g^2 a}{16 r} - \frac{p g^2 a}{48 r} = \frac{6 p g^2 a - 2 p g^2 a}{96 r}$$

$= \frac{4 p g^2 a}{96 r} = \frac{p g^2 a}{24 r}$. Et hæc eſt ſoliditas dimidii ſphæroidis elliptici; Igitur totius erit $= \frac{2 p g^2 a}{24 r} = \frac{p g^2 a}{12 r} = \frac{p g^2}{2r} \times \frac{a}{6}$, nempe ſphæroides ellipticum æquatur ſextæ parti cylindri, cujus baſeos radius eſt g axis minor, & altitudo a axis major.

88. *Invenire ſoliditatem hyperboloidis* F B G K.

Fig. 38. Resol. Si ſit in hyperbola axis transverſus $= a$, conjugatus $= g$; erit $y^2 = \frac{g^2 x}{a} + \frac{g^2 x^2}{a^2}$ abſciſſis a vertice B computatis. Hinc: $\frac{\int p y^2 dx}{2r}$

$$= \frac{\int p g^2 x dx}{2ar} + \frac{\int p g^2 x^2 dx}{2a^2 r} = \frac{p g^2 x^2}{4ar}$$

$+ \frac{p g^2 x^3}{6 a^2 r}$. Sint AC, CD aſymptoti hyperbolæ, habebimus ob ſimilitudinem triangulorum SCT, ACD, proportionem $CB : ST = CN : AD$, ſeu $\frac{1}{2} a : g = \frac{1}{2} a + x : g + \frac{2gx}{a} = AD$. Si ratio diametri

metri ad peripheriam assumatur $2r : p$, erit $2r : p$ $= g + \frac{2gx}{a} : \frac{pg}{2r} + \frac{pgx}{ar}$; hinc area circuli

$$ARD = \left(\frac{pg}{2r} + \frac{pgx}{ar}\right)\left(\frac{g}{4} + \frac{gx}{2a}\right)$$

$$= \frac{pg^2}{8r} + \frac{pg^2x}{4ar} + \frac{pg^2x}{4ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r} = \frac{pg^2}{8r}$$

$+ \frac{pg^2x}{2ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r}$, & soliditas coni inter asymptotos comprehensi, cujus basis est inventus circulus, altitudo vero CN, erit

$$= \left(\frac{pg^2}{8r} + \frac{pg^2x}{2ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r}\right)\left(\frac{a}{6} + \frac{x}{3}\right)$$

$$= \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{12r} + \frac{pg^2x^2}{12ar} + \frac{pg^2x}{24r}$$

$$+ \frac{pg^2x^2}{6ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r} = \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{8r}$$

$+ \frac{pg^2x^2}{4ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r}$, ex hoc cono auferendo cylindrum $MKLH$, cujus baseos diameter est $KL = g$, & altitudo $\frac{a}{6} + x = ON$, proinde basis ejus $= \frac{pg^2}{8r}$, & cylindrus ipse

$$= \frac{pg^2}{8r}\left(\frac{a}{6} + x\right) = \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{8r}.$$

Obtinebimus residuum $\frac{pg^2x^2}{4ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r}$ soliditatem nempe hyperboloidis inventam. *Est igitur hyperboloides*

loides æquale differentiæ inter conum ACDR, *& cylindrum* MKLH.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN METHODO INVERSA TANGENTIVM, SVBTANGENTIVM, ET SVBNORMALIVM &c.

89. *Methodus inversa* tangent. ſubtang. &c. dicitur; quia, ut calculo differentiali *directe* ex æquatione ad curvam data invenitur ejus ſubtangens, tangens &c. ita hic *viciſſim* ex data ſubtang. tangent. &c. invenitur ad curvam ipſam æquatio.

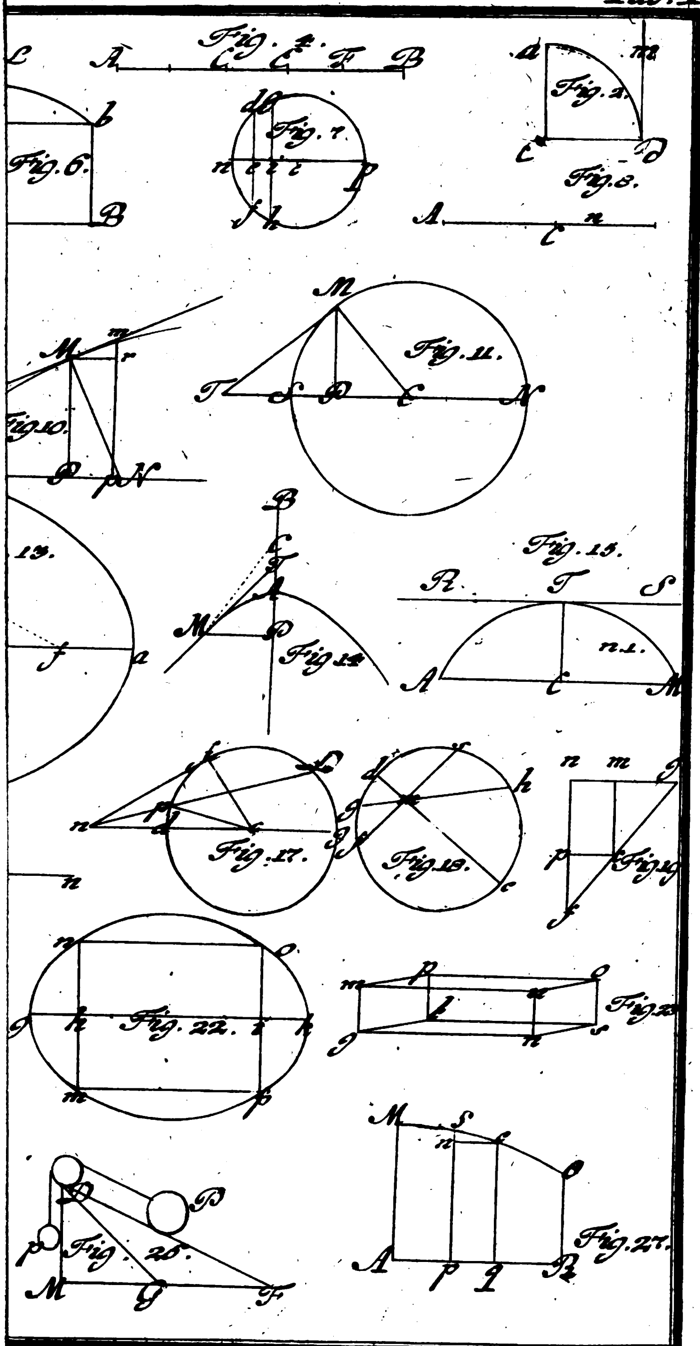
Ita autem operatio eſt inſtituenda: data expreſſio finita ſubtangentis vel ſubnormalis &c. in uno æquationis membro collocetur, in altero ejusdem rectæ expreſſio differentialis. Demum reductiones neceſſariæ fiant, ut utrumque membrum evadat integrabile. Integratione perfecta habebitur æquatio ad curvam, quæ data proprietate gaudet. Nos faciliora duntaxat methodi hujus exempla dabimus.

90. *Invenire curvam, in qua ſubnormalis* $= r - x$.

Resol. Expreſſio differentialis (per n. 44.) ſubnormalis eſt $\frac{y\,dy}{dx}$. Igitur $r - x = \frac{y\,dy}{dx}$. Et multiplicando per dx; $r\,dx - x\,dx = y\,dy$. Integrando: $rx - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Multiplicando

per

Tab. I.



J. Berka sc. Pragæ.

loides æquale differentiæ inter conum ACDR, *& cylindrum* MKLH.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS
IN
METHODO INVERSA TANGENTIVM, SVBTANGENTIVM, ET SVBNORMALIVM &c.

89. *Methodus inverſa* tangent. ſubtang. &c. dicitur; quia, ut calculo differentiali *directe* ex æquatione ad curvam data invenitur ejus ſubtangens, tangens &c. ita hic *viciſſim* ex data ſubtang. tangent. &c. invenitur ad curvam ipſam æquatio.

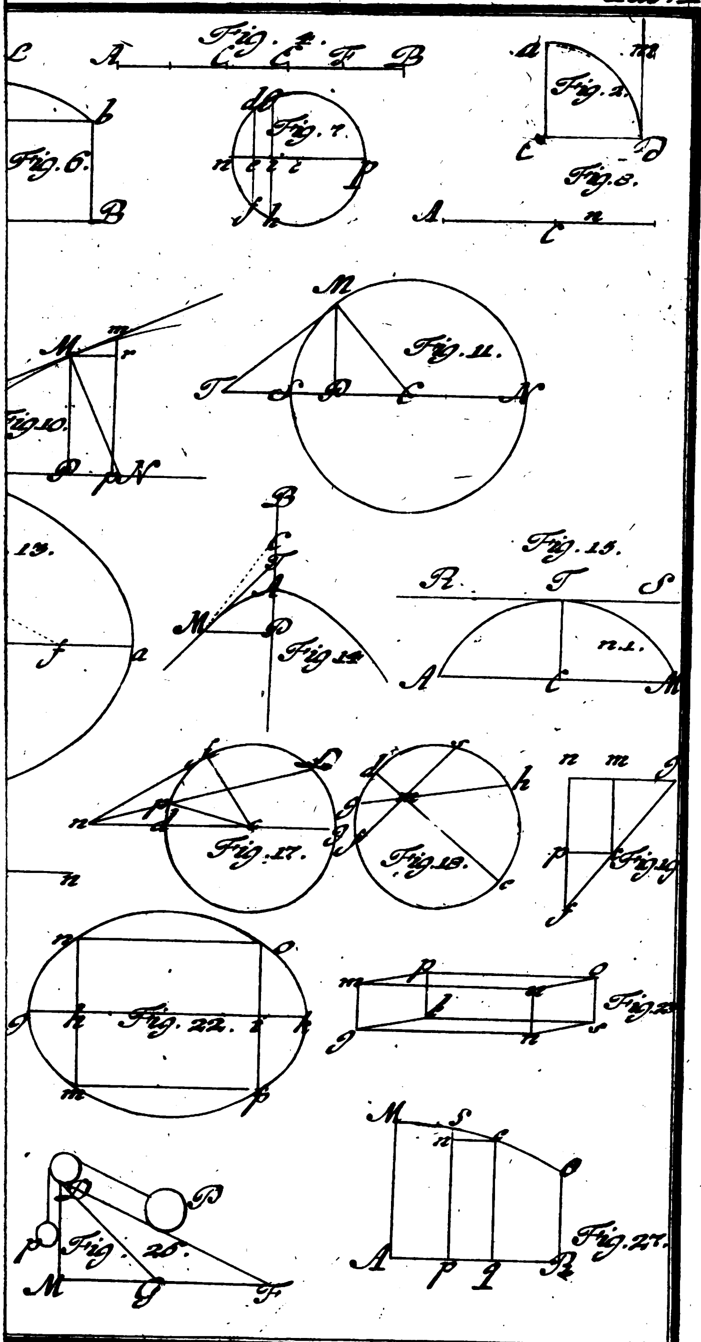
Ita autem operatio eſt inſtituenda: data expreſſio finita ſubtangentis vel ſubnormalis &c. in uno æquationis membro collocetur, in altero ejusdem rectæ expreſſio differentialis. Demum reductiones neceſſariæ fiant, ut utrumque membrum evadat integrabile. Integratione perfecta habebitur æquatio ad curvam, quæ data proprietate gaudet. Nos faciliora duntaxat methodi hujus exempla dabimus.

90. *Invenire curvam, in qua ſubnormalis* $= r - x$.

Resol. Expreſſio differentialis (per n. 44.) ſubnormalis eſt $\frac{y\,dy}{dx}$. Igitur $r - x = \frac{y\,dy}{dx}$. Et multiplicando per dx; $r\,dx - x\,dx = y\,dy$. Integrando: $rx - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Multiplicando

per

Tab. I.



J. Berka sc. Prague

loides æquale differentiæ inter conum ACDR, *& cylindrum* MKLH.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN METHODO INVERSA TANGENTIVM, SVBTANGENTIVM, ET SVBNORMALIVM &c.

89. *Methodus inversa* tangent. ſubtang. &c. dicitur; quia, ut calculo differentiali *directe* ex æquatione ad curvam data invenitur ejus ſubtangens, tangens &c. ita hic *viciſſim* ex data ſubtang. tangent. &c. invenitur ad curvam ipſam æquatio.

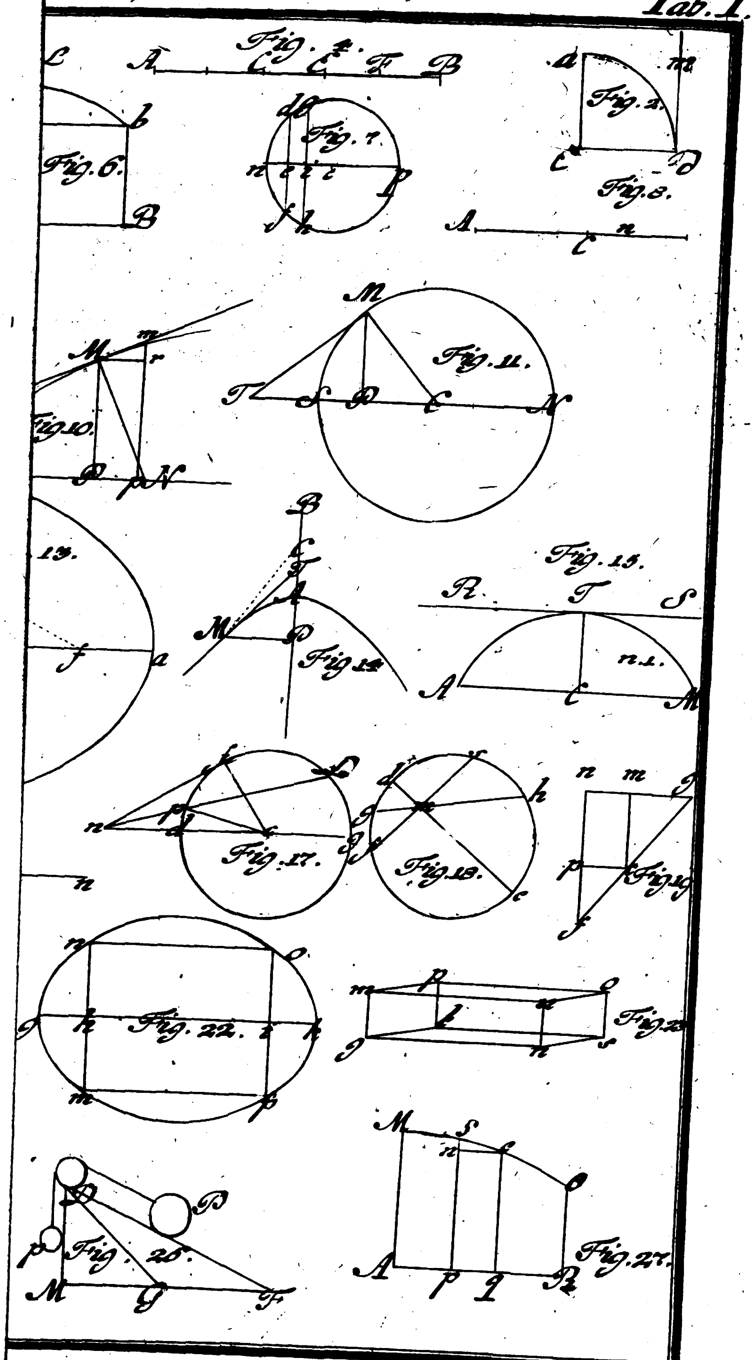
Ita autem operatio eſt inſtituenda: data expreſſio finita ſubtangentis vel ſubnormalis &c. in uno æquationis membro collocetur, in altero ejusdem rectæ expreſſio differentialis. Demum reductiones neceſſariæ fiant, ut utrumque membrum evadat integrabile. Integratione perfecta habebitur æquatio ad curvam, quæ data proprietate gaudet. Nos faciliora duntaxat methodi hujus exempla dabimus.

90. *Invenire curvam, in qua ſubnormalis* $= r - x$.

Resol. Expreſſio differentialis (per n. 44.) ſubnormalis eſt $\frac{y\,dy}{dx}$. Igitur $r - x = \frac{y\,dy}{dx}$. Et multiplicando per dx; $r\,dx - x\,dx = y\,dy$. Integrando: $rx - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Multiplicando

per

Tab. I.



I. Berka sc. Prague.

loides æquale differentiæ inter conum ACDR, *& cylindrum* MKLH.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN METHODO INVERSA TANGENTIVM, SVBTANGENTIVM, ET SVBNORMALIVM &c.

89. *Methodus inversa* tangent. ſubtang. &c. dicitur; quia, ut calculo differentiali *directe* ex æquatione ad curvam data invenitur ejus ſubtangens, tangens &c. ita hic *viciſſim* ex data ſubtang. tangent. &c. invenitur ad curvam ipſam æquatio.

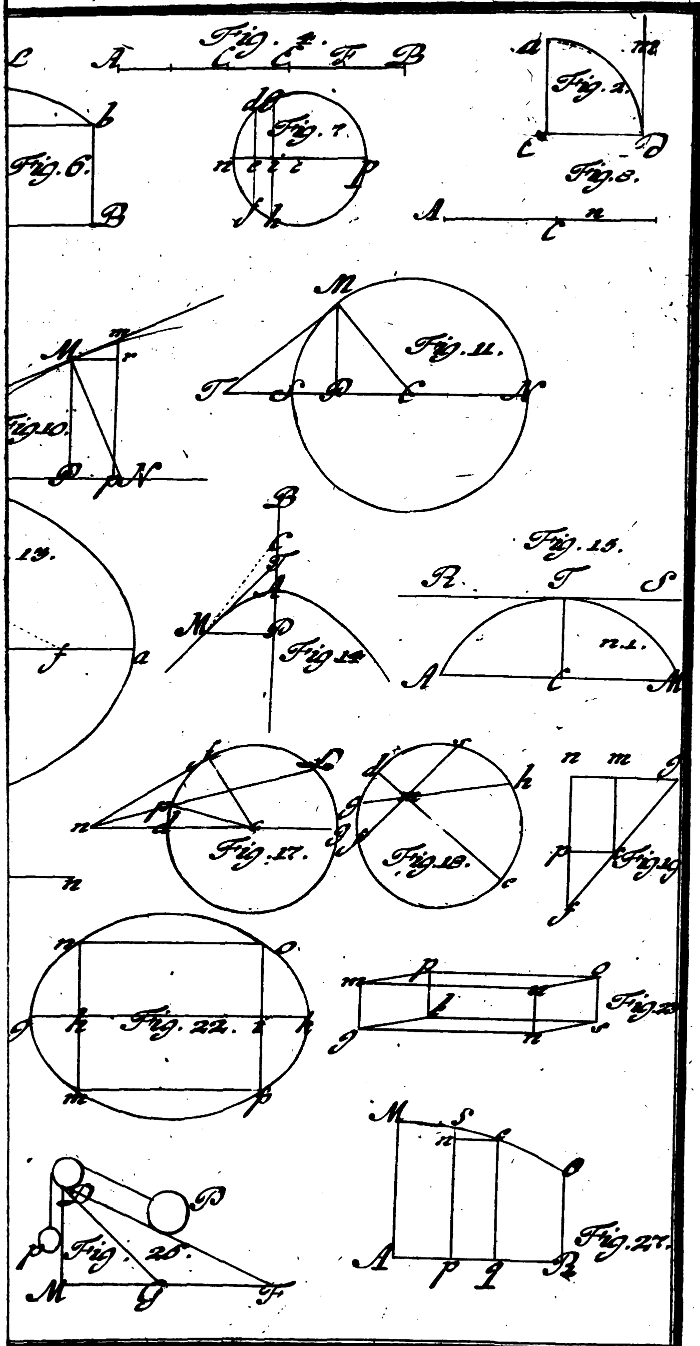
Ita autem operatio eſt inſtituenda: data expreſſio finita ſubtangentis vel ſubnormalis &c. in uno æquationis membro collocetur, in altero ejusdem rectæ expreſſio differentialis. Demum reductiones neceſſariæ fiant, ut utrumque membrum evadat integrabile. Integratione perfecta habebitur æquatio ad curvam, quæ data proprietate gaudet. Nos faciliora duntaxat methodi hujus exempla dabimus.

90. *Invenire curvam, in qua ſubnormalis* $= r - x$.

Resol. Expreſſio differentialis (per n. 44.) ſubnormalis eſt $\frac{y\,dy}{dx}$. Igitur $r - x = \frac{y\,dy}{dx}$. Et multiplicando per dx; $r\,dx - x\,dx = y\,dy$. Integrando: $rx - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Multiplicando

per

Tab. I.



J. Berka sc. Prague

$\sqrt{(4ax + a^2)}$. Sit $\sqrt{(4ax+a^2)} = z$, erit $4ax + a^2 = z^2$, & $4adx = 2zdz$, dividendo per $4a$; erit $dx = \frac{2zdz}{4a}$, ut prodeat in uno membro expressio integranda, multiplicemus primum membrum per $\frac{p}{2r}\sqrt{(4ax+a^2)}$, & alterum per quantitatem huic æqualem $\frac{pz}{2r}$; erit

$$\frac{pdx}{2r}\sqrt{(4ax + a^2)} = \frac{pz^2\,dz}{4ar}.$$ Unde

$$\int\frac{pdx}{2r}\sqrt{(4ax + a^2)} = \frac{pz^3}{12ar} = \frac{pz^2 \times z}{12ar}$$

$$= \frac{p(4ax + a^2)\sqrt{(4ax + a^2)}}{12ar}.$$ Ponendo

$x = o$, manebit $\frac{a^3p}{12ar}$; consequenter integrale completum, id est superficies paraboloidis habebitur:

$$\frac{p(4ax + a^2)\sqrt{(4ax+a^2)} - a^3p}{12ar}.$$

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN CVBANDIS SOLIDIS.

82. Si soliditas corporis propositi ope calculi integralis invenienda est; sciri initio debet hujus solidi differentiale elementum. Sic pyramidis triangularis elementum est pyramis truncata
Fig. 35. $mnrqop$ infinite parvæ altitudinis bg; quæ ob bases

bases mnr, & poq hoc ipso sibi infinite vicinas pro prismate triangulari potest haberi.

Iam si Eb perpendicularis e vertice ad mnr demissa $= x$, erit $bg = dx$ altitudo hujus prismatis, & quoniam sectiones in pyramide basi parallelæ (quales hic supponuntur) sunt basi similes, erunt ut quadrata laterum homologorum. Consequenter, posito latere $pq = y$; erit basis prismatis elementaris poq in ratione y^2, quare prisma elementare erit ut $y^2\, dx$; & summa omnium, ut $\int y^2\, dx$.

Si vero solidum generetur rotatione alicujus plani, cujus elementum (n. 27.) ostendimus esse rectangulum $knmp$; certum est, sicut rotatione plani DEC circa DC describitur totum solidum, ita rotatione rectanguli elementaris describi cylindrum infinite parvæ altitudinis nk; qui erit elementum differentiale solidi rotatione geniti. Iam si sit ratio radii ad peripheriam $r : p$, $nm = y$, Fig. 34.

$Dn = x$, erit $nk = dx$, & $r : p = y : \frac{py}{r}$.

Quare basis hujus elementaris cylindri $= \frac{py^2}{2r}$,

& ipse cylindrus $\frac{py^2\, dx}{2r}$. Denique $\frac{\int py^2\, dx}{2r}$

ipsum solidum rotatione genitum. Exemplis usum inventarum formularum docebimus.

83. *Invenire soliditatem pyramidis triangularis.*

Resol. Quoniam elementum pyramidis est ut $y^2\, dx$. Altitudo pyramidis data $ES = a$, pyramidis $mEnr$ altitudo $Eb = x$. Recta AD Fig. 35.

data

data $= g$; recta $pq = y$. Erunt pyramidum $AEDC$, $mErn$ similium dimensiones homologæ proportionales. Itaque $a : x = g : y$, & $a^2 : x^2 = g^2 : y^2$. Hinc $y^2 = \frac{g^2 x^2}{a^2}$. Ergo $y^2 dx = \frac{g^2 x^2 dx}{a^2}$, & $\int y^2 dx = \frac{g^2 x^3}{3 a^2}$. Sit $x = a$; erit soliditas totius pyramidis, ut $\frac{g^2 a}{3}$. Loco g^2 ponendo ipsam basim $ACD = b$; erit soliditas pyramidis propositæ $= \frac{ba}{3} = b \times \frac{a}{3}$ = facto ex basi in tertiam partem altitudinis.

Porro cuivis polygono æquale triangulum construi potest; ergo pyramis cujuscunque baseos ad triangularem ejusdem cum ea altitudinis est reducibilis. Quare cujuscunque pyramidis soliditas æquatur facto ex basi in tertiam partem altitudinis.

84. *Invenire soliditatem coni recti.*

Resol. In triangulo genitore coni recti si
Fig. 33. sit $DC = a$, $CE = r$; erit peripheria radio CE descripta $= p$. $Dn = x$, $nm = y$. Ob similia triangula CDE, nDm erit $a : r = x : y$. Quare $y = \frac{rx}{a}$, & $y^2 = \frac{r^2 x^2}{a^2}$, & $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{pr^2 x^2 dx}{2a^2 r}$. Itaque $\frac{\int py^2 dx}{2r} = \frac{pr^2 x^3}{6a^2 r} = \frac{prx^3}{6a^2}$. Sit $x = a$, erit $\frac{prx^3}{6a^2} = \frac{pra}{6}$

=

$= \frac{pr}{2} \times \frac{a}{3}$. Atqui $\frac{pr}{2}$ eſt baſis coni; ergo ſoliditas coni recti æquatur facto ex baſi in tertiam partem altitudinis.

Eſt vero conus ſcalenus æqualis recto ejusdem baſeos & altitudinis; itaque etiam coni ſcaleni ſoliditas æquatur facto ex baſi in tertiam partem altitudinis.

85. *Invenire ſoliditatem ſphæræ.*

Resol. Sit ſphæræ diameter $= 2r$, erit pro circulo ſphæræ genitore $y^2 = 2rx - x^2$. Conſequenter $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{2prxdx}{2r} - \frac{px^2dx}{2r}$. Et $\frac{\int py^2dx}{2r} = \frac{2prx^2}{4r} - \frac{px^3}{6r} = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$

$= \frac{3rpx^2 - px^3}{6r}$. Quæ eſt ſoliditas ſegmenti ſphæræ, cujus altitudo eſt x. Sit $x = r$. Erit $\frac{3rpx^2 - px^3}{6r} = \frac{3pr^3 - pr^3}{6r} = \frac{2}{6}pr^2$

$= \frac{pr^2}{3} = pr \times \frac{r}{3}$. Ergo ſoliditas hemiſphærii æquatur pyramidi, cujus baſis eſt pr ſuperficies hemiſphærii, & altitudo radius. Quare ſphæræ totius ſoliditas erit $= \frac{2}{3}pr^2 = 2pr \times \frac{r}{3} =$ pyramidi, cujus baſis $2pr$ ſuperficies integra ſphæræ, & altitudo radius.

Sit

Fig. 36. Sit hemisphærium $APD = \frac{pr^2}{3}$. Sit $PO = x$. Erit ſoliditas zonæ $ABCD = \frac{pr^2}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Dico: *hanc zonæ ſoliditatem eſſe æqualem duabus tertiis cylindri, cujus baſis circulus maximus ſphæræ* AMD, *& altitudo eadem, cum altitudine zonæ* OI, *plus una tertia cylindri, cujus baſis eſt circulus* BLC *minor zonam terminans, & altitudo eadem zonæ* OI.

Demonst. Nam $OI = r - x$, & baſis $AMD = \frac{pr}{2}$. Quare $\frac{2}{3}$ cylindri $EAMDF = \frac{r^2 p}{3} - \frac{prx}{3}$. Cylindri vero $BLCHG$ una tertia $= \left(px - \frac{px^2}{2r}\right)\left(\frac{r-x}{3}\right) = \frac{prx}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Ergo $\frac{2}{3}\ EAMDF + \frac{1}{3}\ BLCHG = \frac{r^2 p}{3} - \frac{prx}{3} + \frac{prx}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r} = \frac{r^2 p}{3} - \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Q. E. D.

Soliditatem ſectoris ſphærici $BPCI$ obtinebimus; ſi ad ſoliditatem ſegmenti $BPC = \frac{3prx^2 - px^3}{6r}$, addiderimus ſoliditatem coni, cujus baſis BLC, & altitudo OI, quæ ſoliditas

liditas est æqualis $\frac{1}{3}$ cylindri $BLCHG = \frac{prx}{3}$ $- \frac{3prx^2 + px^3}{6r}$. Quare sectoris sphærici soliditas $= \frac{prx}{3} + \frac{3prx^2 - px^3 - 3prx^2 + px^3}{6r}$ $= \frac{prx}{3} = px \times \frac{r}{3}$. Atqui px (per n. 80.) est superficies segmenti sphæræ, quæ agit basim sectoris sphærici; ergo sector sphæricus est æqualis pyramidi, cujus basis est superficies segmenti sphæræ, & altitudo radius. Quod inde etiam deducitur: quia sphæra concipi potest ut aggregatum pyramidum infinite parvarum basium & infinite multarum, quarum vertices sint in sphæræ centro, & communis altitudo radius.

86. *Invenire soliditatem paraboloidis.*

Resol. Posita parametro $= a$, erit $y^2 = ax$. Fig. 37.
Quare $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{paxdx}{2r}$; & $\frac{\int py^2 dx}{2r}$ $= \frac{pax^2}{4r} = \frac{pax}{2r} \times \frac{x}{2} = \frac{py^2}{2r} \times \frac{x}{2}$; sed $\frac{py^2}{2r}$ est circulus FGH cujus radius $y = EH$; & $x = CE$. Ergo soliditas paraboloidis æquatur dimidio cylindri $AFGHD$.

87. *Invenire soliditatem sphæroidis elliptici, seu solidi rotatione dimidiæ ellipseos circa axem majorem geniti.*

Resol. Aequatio ad ellipsim (ex num. 78.) est $y^2 = \frac{g^2}{4} - \frac{g^2 x^2}{a^2}$. Itaque $\frac{\int py^2 dx}{2r}$

$$= \frac{\int p g^2 \, dx}{8 r} - \frac{\int p g^2 x^2 \, dx}{2 a^2 r} = \frac{p g^2 x}{8 r} - \frac{p g^2 x^3}{6 a^2 r}.$$

Sit $x = \frac{1}{2} a$; erit $x^3 = \frac{1}{8} a^3$, & $\frac{p g^2 x}{8 r} - \frac{p g^2 x^3}{6 a^2 r}$

$$= \frac{p g^2 a}{16 r} - \frac{p g^2 a}{48 r} = \frac{6 p g^2 a - 2 p g^2 a}{96 r}$$

$= \frac{4 p g^2 a}{96 r} = \frac{p g^2 a}{24 r}$. Et hæc est soliditas dimidii sphæroidis elliptici; Igitur totius erit $= \frac{2 p g^2 a}{24 r} = \frac{p g^2 a}{12 r} = \frac{p g^2}{2 r} \times \frac{a}{6}$, nempe sphæroides ellipticum æquatur sextæ parti cylindri, cujus baseos radius est g axis minor, & altitudo a axis major.

88. *Invenire soliditatem hyperboloidis* F B G K.

Fig. 38. Resol. Si sit in hyperbola axis transversus $= a$, conjugatus $= g$; erit $y^2 = \frac{g^2 x}{a} + \frac{g^2 x^2}{a^2}$ abscissis a vertice B computatis. Hinc: $\frac{\int p y^2 \, dx}{2 r}$

$$= \frac{\int p g^2 x \, dx}{2 a r} + \frac{\int p g^2 x^2 \, dx}{2 a^2 r} = \frac{p g^2 x^2}{4 a r}$$

$+ \frac{p g^2 x^3}{6 a^2 r}$. Sint AC, CD asymptoti hyperbolæ, habebimus ob similitudinem triangulorum SCT, ACD, proportionem $CB : ST = CN : AD$, seu $\frac{1}{2} a : g = \frac{1}{2} a + x : g + \frac{2 g x}{a} = AD$. Si ratio dia-

metri

metri ad peripheriam assumatur $2r:p$, erit $2r:p$ $= g + \frac{2gx}{a} : \frac{pg}{2r} + \frac{pgx}{ar}$; hinc area circuli

$$ARD = \left(\frac{pg}{2r} + \frac{pgx}{ar}\right)\left(\frac{g}{4} + \frac{gx}{2a}\right)$$

$$= \frac{pg^2}{8r} + \frac{pg^2x}{4ar} + \frac{pg^2x}{4ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r} = \frac{pg^2}{8r}$$

$+ \frac{pg^2x}{2ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r}$, & soliditas coni inter asymptotos comprehensi, cujus basis est inventus circulus, altitudo vero CN, erit

$$= \left(\frac{pg^2}{8r} + \frac{pg^2x}{2ar} + \frac{pg^2x^2}{2a^2r}\right)\left(\frac{a}{6} + \frac{x}{3}\right)$$

$$= \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{12r} + \frac{pg^2x^2}{12ar} + \frac{pg^2x}{24r}$$

$$+ \frac{pg^2x^2}{6ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r} = \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{8r}$$

$+ \frac{pg^2x^2}{4ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r}$, ex hoc cono auferendo cylindrum $MKLH$, cujus baseos diameter est $KL = g$, & altitudo $\frac{a}{6} + x = ON$, proinde basis ejus $= \frac{pg^2}{8r}$, & cylindrus ipse

$$= \frac{pg^2}{8r}\left(\frac{a}{6} + x\right) = \frac{apg^2}{48r} + \frac{pg^2x}{8r}.$$

Obtinebimus residuum $\frac{pg^2x^2}{4ar} + \frac{pg^2x^3}{6a^2r}$ soliditatem nempe hyperboloidis inventam. *Est igitur hyperboloides*

loides æquale differentiæ inter conum ACDR, *& cylindrum* MKLH.

VSVS CALCVLI INTEGRALIS IN METHODO INVERSA TANGENTIVM, SVBTANGENTIVM, ET SVBNORMALIVM &c.

89. *Methodus inversa* tangent. ſubtang. &c. dicitur; quia, ut calculo differentiali *directe* ex æquatione ad curvam data invenitur ejus ſubtangens, tangens &c. ita hic *viciſſim* ex data ſubtang. tangent. &c. invenitur ad curvam ipſam æquatio.

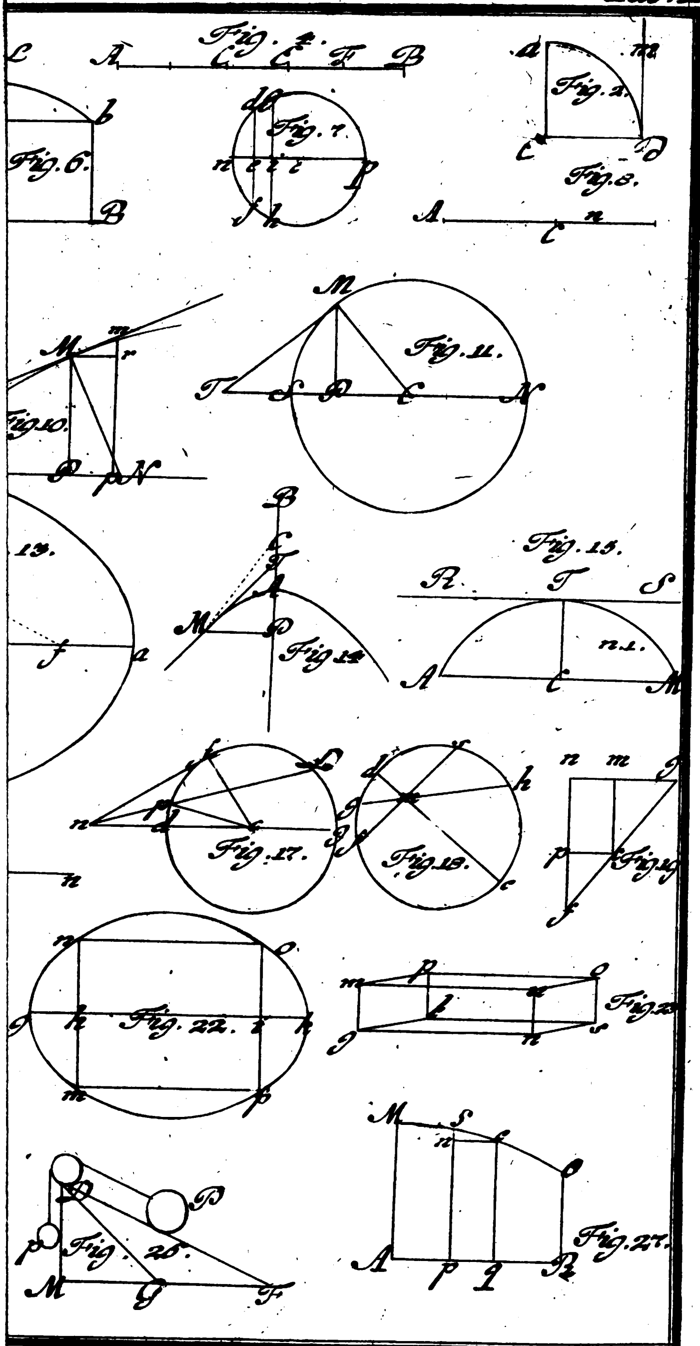
Ita autem operatio eſt inſtituenda: data expreſſio finita ſubtangentis vel ſubnormalis &c. in uno æquationis membro collocetur, in altero ejusdem rectæ expreſſio differentialis. Demum reductiones neceſſariæ fiant, ut utrumque membrum evadat integrabile. Integratione perfecta habebitur æquatio ad curvam, quæ data proprietate gaudet. Nos faciliora duntaxat methodi hujus exempla dabimus.

90. *Invenire curvam, in qua ſubnormalis* $= r - x$.

Resol. Expreſſio differentialis (per n. 44.) ſubnormalis eſt $\frac{y\,dy}{dx}$. Igitur $r - x = \frac{y\,dy}{dx}$. Et multiplicando per dx; $r\,dx - x\,dx = y\,dy$. Integrando: $rx - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Multiplicando

per

Tab. I.



J. Berka sc. Prague.

erit $r^2 - y^2 = z^2$, & $- y\,dy = z\,dz$, seu $y\,dy = - z\,dz$. Vnde $\frac{y\,dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = - dz$, & $\frac{\int y\,dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = - z = - \sqrt{(r^2 - y^2)}$. Quare $- \sqrt{(r^2 - y^2)} = x$. Itaque $r^2 - y^2 = x^2$. Et $y^2 = r^2 - x^2$. Quæ eſt æquatio ad circulum abſciſſis a centro computatis, cujus radius $= r$.

93. *Invenire curvam cujus ſubnormalis ſit conſtans* $= \frac{a}{2}$.

Resol. Erit $\frac{a}{2} = \frac{y\,dy}{dx}$. Hinc $a\,dx = 2y\,dy$, integrando: $ax = \frac{2y^2}{2}$; ſeu $ax = y^2$. Quæ eſt æquatio ad parabolam, cujus parameter $= a$.

94. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt* $= \frac{2y^2}{a}$.

Resol. Erit $\frac{2y^2}{a} = \frac{y\,dx}{dy}$, & $\frac{2y}{a} = \frac{dx}{dy}$. Hinc $2y\,dy = a\,dx$, integrando: $\frac{2y^2}{2} = ax$, ſeu $y^2 = ax$. Iterum æquatio ad parabolam; in qua quidem oſtendimus (n. 46.) ſubtangentem eſſe $= 2x$. Sed ob $y^2 = ax$, eſt $\frac{y^2}{a} = x$. Hinc $\frac{2y^2}{a} = 2x$.

95.

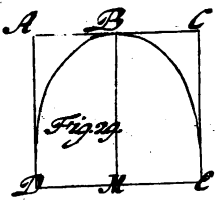


Fig. 29.

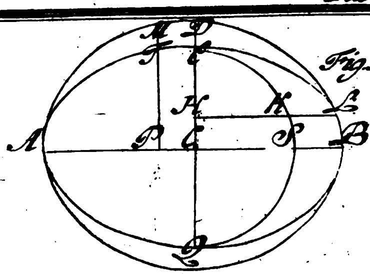


Fig. 32.

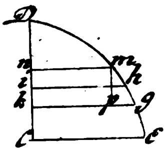


Fig. 34.

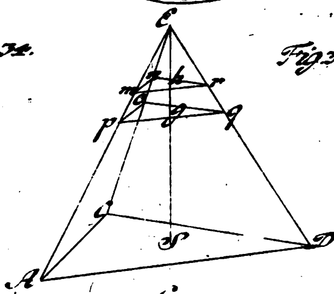


Fig. 35.

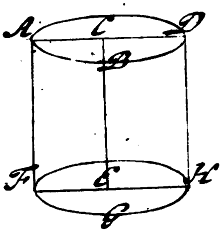


Fig. 37.

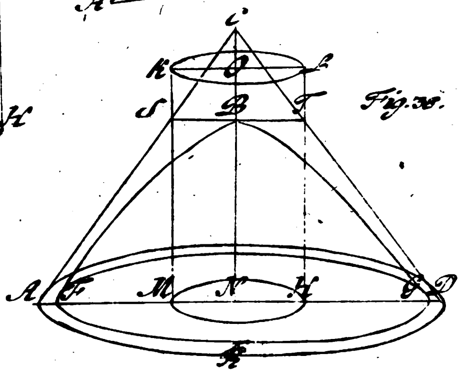


Fig. 38.

erit $\frac{y^2}{r+x} = \frac{y\,dx}{dy}$. Vnde $y\,dy = r\,dx + x\,dx$.

Integrando: $\frac{y^2}{2} = r\,x + \frac{x^2}{2}$, ſeu $y^2 = 2\,r\,x + x^2$.

Quæ eſt æquatio ad hyperbolam æquilateram, cujus tam axis transverſus, quam conjugatus $= 2\,r$.

97. Applicationem calculi integralis ad inveniendum centrum gravitatis magnitudinum planarum, & ſolidarum pro Mechanica ſervamus. Præſtantes alios uſus cum differentialis, tum integralis calculi eo conſilio hic omiſimus: quod tyronum diligentiam incitare, non vero multis intellectu difficilibus allatis terrere conſtituimus.

A. M. D. G.