VZNIK A VÝVOJ TEORIE GRAFŮ

Pavel Šišma

Úvod

Teorie grafů patří mezi relativně mladé části matematiky. Její kořeny sice nacházíme v 18. a 19. století, ale teprve v roce 1936 vyšla první kniha, která byla celá věnovaná teorii grafů. Bouřlivý rozvoj této matematické disciplíny nastal v druhé polovině 20. století, kdy výsledky teorie grafů našly uplatnění nejen v řadě matematických oblastí, ale také např. ve fyzice, v elektrotechnice, v chemii, v ekonomii a v lingvistice.

Historie teorie grafů není dlouhá. Za první práci je považován článek [1] Leonharda Eulera (1707–1783) z roku 1736, ve kterém Euler vyřešil tzv. „problém mostů města Königsbergu“. S Eulerovým jménem jsou spojeny také problémy týkající se „úlohy jezdce“, která v grafové interpretaci vede k nalezení hamiltonovské kružnice v grafu.

Další zdroje teorie grafů nalezneme až v polovině 19. století. V roce 1847 Gustav Kirchhoff (1824–1887) rozpracoval některé otázky teorie stromů v souvislosti s řešením soustav lineárních algebraických rovnic, které obdržel při výpočtu neznámých proudů v elektrických sítích. Problematika stromů se pak rozvíjela zejména v souvislosti s praktickými úlohami chemie. Arthur Cayley (1821–1895) studoval v roce 1857 problém izomerů uhlovodíků C_nH_{2n+2}, který formuloval obecně. Otázkami stromů se zabývali dále James Joseph Sylvester (1814–1897) a Camille Jordan (1838–1922). V této době, tedy ve druhé polovině minulého století, se poprvé objevil název graf v tom smyslu, jak jej chápeme dnes. Jako první tento pojem použil J. J. Sylvester v roce 1878.

V roce 1859 vymyslel William Rowan Hamilton (1805–1865) hru, kterou nazval *Icosian game*. Šlo v ní vlastně o hledání hamiltonovských kružnic v grafu, který odpovídá pravidelnému dvanáctistěnu.

Nejznámější úlohou, která od poloviny minulého století vzrušovala mnoho matematiků i nematematiků, byl „problém čtyř barev“. Jde o důkaz všeobecně známého faktu, že k obarvení libovolné mapy (v rovině či na kulové ploše) stačí pouhé čtyři barvy. Problém byl vyřešen až v roce 1976 s využitím počítačů a do té doby podnítil k práci v teorii grafů řadu matematiků 19. a 20. století.

Jak již bylo řečeno, rychlý rozvoj teorie grafů nastává v druhé polovině 20. století. Kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* [2] maďarského matematika Dénese Kőniga (1884–1944) z roku 1936 (znovu vydaná v roce 1950) sloužila dlouhou dobu jako jediná učebnice. V roce 1958 vydal svoji knihu francouzský matematik Claud Berge [3] a čtyři roky po něm norský matematik Oystein Ore (1899–1968) [4]. Klasickou a u nás dobře známou knihou je i dílo amerického matematika Franka Hararyho [5] z roku 1969. V následujícím období se objevuje celá řada dalších publikací a přicházejí i první knihy věnované speciálním částem teorie grafů.

První práci s grafovou tematikou v Československu napsal brněnský matematik Otakar Borůvka (1899–1995) v roce 1926 [6]. Řešil úlohu ekonomické elektrifikace moravských vesnic a vytvořil pro ni první algoritmus nalezení minimální kostry ohodnoceného grafu. Touto problematikou se dále zabývali Vojtěch Jarník (1897–1970) a Miloš Kössler (1884–1961).

První česky psanou knihou z teorie grafů se v roce 1964 stala kniha Jiřího Sedláčka *Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů)*. Kniha později vyšla jednou bulharsky a dvakrát německy, pro druhé české vydání z roku 1977 ji autor značně přepracoval a rozšířil. V roce 1981 vyšla kniha potřetí [7].

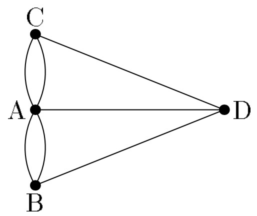
Zatímco do roku 1961, kdy se v Liblicích u Mělníka konal první celostátní seminář o teorii grafů v Československu, se touto problematikou zabývali jen jednotlivci, nastává v dalším období prudký rozvoj i u nás. O tom svědčí mimo jiné i mezinárodní konference věnované teorii grafů, které byly pořádány v Československu (první již roku 1963 ve Smolenicích na Slovensku).

V této krátké práci se budeme zabývat čtyřmi oblastmi teorie grafů. V první části se seznámíme s vývojem pojmu eulerovský graf, který patří k prvním studovaným pojmům teorie grafů. V druhé části se budeme věnovat problémům, které souvisí s hamiltonovskými grafy. Další část je věnována problému čtyř barev. V nejrozsáhlejší čtvrté části ukážeme přínos českých matematiků k otázce nalezení minimální kostry ohodnoceného grafu. Podrobnější přehled vývoje teorie grafů poskytují práce [8],[9].

1. Eulerovské grafy

Ve městě Königsbergu ve Východním Prusku (dnešní Kaliningrad v Rusku) jsou v centru města na řece Pregel dva ostrovy, které v 18. století spojovalo s oběma břehy sedm mostů. **Problém königsberských mostů** spočíval v nalezení cesty, která by spojovala všechny části města, začínala a končila ve stejné části, a při které by každý most byl použit právě jedenkrát.

K zaslání řešení tohoto problému vyzval L. Eulera, který v té době působil na Petrohradské akademii, jeho přítel Carl Leonhard Gottlieb Ehler v dopise z 9. března 1736. 13. března 1736 napsal Euler do Vídně italskému matematiku Giovannimu Jacobovi Marinonimu (1670–1755) o tom, že řešení úlohy neexistuje a stručně naznačil, jak k tomuto závěru došel. Podrobné řešení pak zaslal v dopise Ehlerovi, který je psaný 3. dubna 1736. Euler napsal, že tento úkol nemá mnoho společného s matematikou, ale že bude rád, když dostane nějaké podobné (viz [10]). Nakonec se Euler rozhodl své řešení publikovat. Ve své práci *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [1] vyřešil problém obecně.



Obr. č. 1: Graf k problému königsberských mostů

V dnešní grafové terminologii bychom řekli, že hledáme eulerovský tah v grafu, jehož uzly představují jednotlivé části města a hrany odpovídají sedmi mostům přes řeku Pregel. Tento graf vidíme na obrázku č. 1.

Euler si byl vědom, že v daném konkrétním případě je možno prozkoumat všechny možnosti, ale u složitých případů by tato metoda byla obtížná.

První věta teorie grafů, která byla v této práci dokázána, zní v dnešní terminologii takto:

Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina jeho uzlů a nechť pro množinu jeho hran E je $|E| = h$. Stupeň uzlu v_i $(i = 1, \ldots, n)$ označme $d_G(v_i)$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2h.$$

Své další úvahy Euler v závěru shrnul do následujících pravidel (jsou opět vyjádřena dnešním jazykem), která nám umožňují v podobných problémech rozhodnout, zda hledaná cesta existuje:

1. Jsou-li v grafu více než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.
2. Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.
3. Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerovský tah.

Euler samozřejmě uvažoval jen souvislé grafy, jak vyplývalo z formulace úlohy. Dobře také věděl, že graf může obsahovat jen sudý počet uzlů lichého stupně. Souvislý graf, který obsahuje pouze uzly sudého stupně, dnes nazýváme eulerovský graf.

Musíme konstatovat, že Euler dokázal jen první dvě tvrzení. Důkaz třetího podal v práci, která vyšla v roce 1873, mladý německý matematik Carl Hierholzer (1840–1871). Ten s velkou pravděpodobností Eulerovu práci neznal. Citoval pouze práci Johanna Benedicta Listinga (1808–1882) z roku 1847, v níž se autor mimo jiné zabýval úkolem nakreslit obrázky složené z uzlů a čar jedním tahem. Listing zjistil, že pokud obrázek obsahuje $2p$ $(p > 0)$ uzlů lichého stupně, pak k jeho nakreslení je zapotřebí minimálně p otevřených tahů.

Za zmínku stojí ještě článek Louise Poinsota (1777–1859) z roku 1810, který se zabýval existencí eulerovského tahu v úplných grafech K_n. Podobným způsobem jako postupoval Euler ukázal, že pro $n = 4, 6, 8, \ldots$ eulerovský tah neexistuje. Zajímavá interpretace pro úplný graf K_7 se objevila v roce 1849 v *Nouvelles Annales de Mathématiques*, kde Orly Terquem (1782–1862) problém vyjádřil v termínech hry domino. Číslům 0 až 6 přiřadil uzly a jednotlivým kostkám hrany tohoto grafu. Existence kostek se dvěma stejnými čísly, kterým by odpovídaly smyčky grafu, na problému nic nemění. Terquem studoval i obecný případ „domina“ s čísly $n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_0 - 1$. Položil otázku, kolik různých tahů v odpovídajících grafech existuje. Pro klasické domino tento problém vyřešil v roce 1871 M. Reiss. Obecnou metodu výpočtu počtu eulerovských tahů v grafech podal v roce 1886 Gaston Tarry (1843–1913).

Eulerova průkopnická práce nebyla v minulém století zapomenuta úplně. V roce 1851 použil É. Coupy Eulerův postup k řešení problémů mostů přes řeku Seinu v Paříži. Také v Königsbergu si problém pamatovali, protože když byl v roce 1875 postaven další most, tak L. Saalschütz napsal, že úloha už má řešení (viz [8]). Tato úloha je součástí většiny knih rekreační matematiky, ale také teorie grafů.

2. Hamiltonovské kružnice

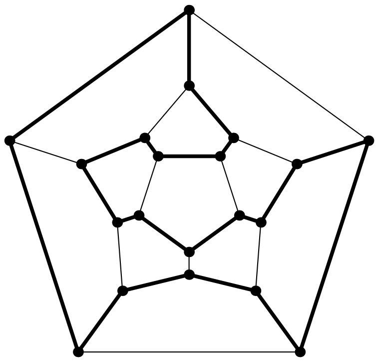
Také problémy spojené s hamiltonovskými kružnicemi mají svůj původ v 18. století. V této době, ale jistě již dříve, byla populární tzv. **úloha jezdce**. V této úloze má šachový jezdec projít prázdnou šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou a vrátil se při posledním tahu na výchozí pole (tato podmínka se často vynechává). Také tuto úlohu řešil již L. Euler. První zmínku o tom, že řešil tento problém, nacházíme v dopise Christianu Goldbachovi (1690–1764) z roku 1757 (viz [11]). V roce 1759 Euler úlohu zobecnil pro šachovnici $n \times n$. Dalším významným příspěvkem je práce Alexandra Théophila Vandermonda (1735–1796) z roku 1771. Vandermonde se zabýval klasickou šachovnicí 8×8 a našel algebraické řešení úlohy. Jeho metoda využívala šachových souřadnic a symetrie šachovnice. To mu také umožnilo úlohu zobecnit na vícerozměrné šachovnice.

V roce 1884 interpretoval poprvé úlohu jezdce grafově Peter Guthrie Tait (1831–1901). Přirozená otázka, kolik je cest jezdce na šachovnici, nebyla dodnes vyřešena.

Druhou oblastí, ve které se setkáváme v 19. století se zkoumáním hamiltonovských kružnic, je studium kružnic na hranách mnohostěnů.

V roce 1855 napsal svoji první práci k této otázce Thomas Penyngton Kirkman (1806–1895), který působil 50 let jako kněz v anglickém hrabství Lancashire. Přes svoji izolaci a zaneprázdnění duchovní prací je autorem řady matematických článků. Je znám zejména svým „problémem patnácti školaček“. V práci z roku 1855 si položil otázku, zda každý graf, který dostaneme promítnutím nějakého mnohostěnu do roviny, obsahuje kružnici, která prochází všemi uzly tohoto grafu. Ve svých úvahách se dopustil chyb, byl však první, kdo se takovou úlohou zabýval. Jeho přínos spočívá v tom, že ukázal třídu grafů, které takovou kružnici nemohou obsahovat.

Ve stejný čas jako Kirkman se podobnými problémy začal zabývat W. R. Hamilton. Hamilton se v té době věnoval otázkám existence nekomutativních algeber. Pro jednu z nich našel model, který představoval cesty v grafu pravidelného dvanáctistěnu a který proto nazval *The Icosian Calculus*. Na jeho základě vznikla hra, která se od roku 1859 prodávala a nesla název *The Icosian Game*. Později vznikla další verze této hry *Cesta kolem světa*. V této hře vrcholy dvanáctistěnu představovaly světová města a každý vrchol byl označen kolíkem. Cílem hry bylo natáhnout vlákno, které by procházelo kolem všech kolíků a tvořilo kružnici.



Obr. č. 2: Icosian game

Na obrázku č. 2 vidíme graf dvanáctistěnu, ve kterém je vyznačena hamiltonovská kružnice.

V pozdější době vznikly spory o to, kdo byl autorem myšlenky zkoumat kružnice dvanáctistěnu. Je třeba říci, že zatímco Euler, Vandermonde a Hamilton zkoumali konkrétní případy grafů, Kirkman byl první, kdo se pokusil o jistá zobecnění. Nicméně na počest Hamiltonových prací dnes hovoříme o hamiltonovské kružnici, resp. hamiltonovském grafu.

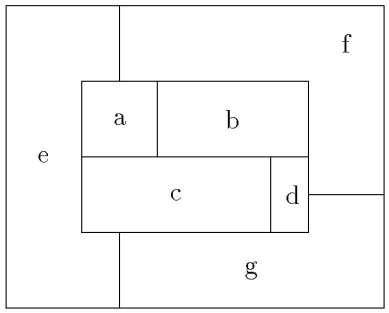
Přestože se na první pohled otázka nalezení hamiltonovské kružnice velmi podobá problému nalezení eulerovského tahu, nebyla dosud nalezena nutná a postačující podmínka pro existenci hamiltonovských kružnic. Po roce 1936 byla odvozena pouze řada postačujících podmínek. Uveďme některé z nich:

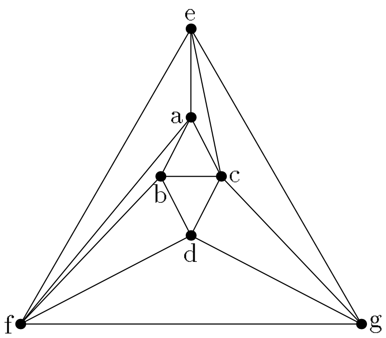
1. 1952 G. A. Dirac: Je-li G obyčejný graf s n uzly $(n \geq 3)$ a jestliže stupeň každého uzlu je nejméně $\frac{1}{2}n$, pak G obsahuje hamiltonovskou kružnici.
2. 1960 O. Ore: K tomu, aby graf G s n uzly $(n \geq 3)$ obsahoval hamiltonovskou kružnici, stačí, aby pro každé dva nesousední uzly u, v platilo
$$d_G(u) + d_G(v) \geq n.$$
3. 1962 L. Pósa: Nechť G je graf s n uzly $(n \geq 3)$ takový, že pro každé celé číslo k splňující nerovnost
$$1 \leq k < \frac{n-1}{2}$$
je počet uzlů grafu G, jejichž stupeň není vyšší než k, menší než k a pro liché n počet uzlů stupně $(n-1)/2$ není vyšší než $(n-1)/2$. Potom G obsahuje hamiltonovskou kružnici.

K této části ještě několik poznámek. Z předpokladů Diracovy věty se dá při dostatečně velkém počtu uzlů odvodit víc než pouhá existence jediné hamiltonovské kružnice. Je dále vidět, že Diracova věta je důsledkem Oreho věty. Časově ovšem předcházela. Zajímavé dále je, že Lajos Pósa byl v roce 1962 sotva středoškolského věku. Z českých matematiků se problematice hamiltonovských grafů věnoval např. brněnský matematik Milan Sekanina (1931–1987).

3. Problém čtyř barev

Jedním z problémů, které po desetiletí podněcovaly rozvoj teorie grafů, byla následující zdánlivě jednoduchá otázka. Mějme v rovině nebo na kouli zeměpisnou mapu s několika státy. Každý stát máme obarvit jednou barvou tak, aby žádné dva sousední státy nebyly obarveny stejně. Sousedními přitom rozumíme ta dvě území, jež mají společnou hraniční čáru. Mají-li dva státy společné jen izolované body, nepokládáme je tedy za sousední. Rovněž neuvažujeme případ, kdy je stát rozdělen na několik navzájem oddělených částí. Ptáme se, kolik barev potřebujeme na obarvení libovolné mapy takovým způsobem. Praxe ukazuje, že čtyři barvy stačí. Dokázat toto tvrzení se však podařilo až v roce 1976. Barvení mapy je možno převést na barvení uzlů grafu, který získáme takto: uvnitř každého státu zvolíme libovolný bod a prohlásíme ho za uzel grafu, jehož hrany dostaneme tak, že spojíme dva uzly právě tehdy, když jsou odpovídající státy sousední. Barvení států je pak možno převést na barvení příslušných uzlů. Z názoru je zřejmé, že graf odpovídající zeměpisné mapě je rovinný. Na obrázku č. 3 je znázorněna mapa v rovině a její graf. K obarvení této mapy stačí pouhé tři barvy.





Obr. č. 3: Mapa a její graf

První zmínku o **problému čtyř barev** nalézáme v dopise Augusta de Morgana (1806–1871) adresovaném W. R. Hamiltonovi ze dne 23. října 1852. De Morgan seznámil Hamiltona s otázkou, kterou mu položil jeden z jeho studentů na University College v Londýně. Tento student se jmenoval Frederick Guthrie; problém nevymyslel on, ale jeho bratr Francis, který byl později profesorem matematiky v Kapském Městě. Oba si všimli, že někdy jsou nutné k obarvení mapy skutečně čtyři barvy. Nenašli případ, kdy čtyři barvy nestačí, ale dokázat, že stačí, se jim nepodařilo. Frederick tedy položil tuto otázku de Morganovi. Ten důkaz také neznal a proto se obrátil na Hamiltona. Odpověď dostal už 26. října, kdy Hamilton odpověděl, že se touto otázkou nebude v nejbližší době zabývat.

Problém, který začal de Morgan šířit, se stal brzy součástí matematického folklóru. Už v roce 1860 o důkazu přednášel Charles Sanders Peirce (1839–1914) na Harvardu. Tušíme, že jeho důkaz nebyl správný, i když jeho znění neznáme. S problémem se seznámil i A. Cayley, který o něm v roce 1879 publikoval krátký článek. Z jeho úvah je zřejmé, že se domníval, že důkaz tohoto tvrzení není možný. Předpokládal, že pro libovolné přirozené číslo n můžeme sestrojit mapu, na jejíž obarvení potřebujeme n různých barev.

Nesprávný důkaz podal v roce 1879 londýnský advokát a matematik Alfred Bray Kempe (1849–1922) (bývalý student Cayleyho v Cambridge) v *American Journal of Mathematics*. Kempe použil metody zvané *Kempe chains* a dopustil se při ní chyby. Jeho důkaz vyvolal velké nadšení a Cayley navrhl autora za člena *Royal Society*. Brzy se objevily další „důkazy“ odvozené z Kempeho důkazu a problém se zdál být jasný.

Na chybu, které se Kempe ve svých úvahách dopustil, upozornil v roce 1890 Percy John Heawood (1861–1955). Ve své práci dokázal, že pět barev k obarvení libovolné rovinné mapy stačí (viz [8]). Dlouhou dobu šlo o jediný definitivní výsledek. Protože se nedařil důkaz, snažili se někteří matematici sestrojit protipříklad, který by domněnku vyvrátil. Ukazovalo se, že mapa, pro kterou by čtyři barvy nestačily, by musela být hodně složitá. Uveďme pro zajímavost některé autory, kteří se touto otázkou zabývali. Čísla udávají, pro jak velkou mapu (co se týče počtu států) se jim podařilo dokázat, že čtyři barvy stačí k jejímu obarvení. 25 – P. Franklin v roce 1922; 27 – C. N. Reynolds v letech 1926–27; 31 – P. Franklin v roce 1938; 35 – C. E. Winn v roce 1940; 44 – G. A. Doněc, W. Stromquist v roce 1970. Poslední hodnotou bylo 95, které dosáhl profesor francouzské literatury v Montpellier J. Mayer kolem roku 1974.

Konečně v roce 1976 Kenneth Appel a Wolfgang Haken z univerzity v Illinois oznámili, že problém čtyř barev kladně vyřešili. O vyřešení problému napsal u nás článek Juraj Bosák [12]. Důkaz si vyžádal asi 1200 hodin strojového času na počítači a muselo se při něm rozlišovat téměř 2000 různých případů. Je jistě zajímavé uvědomit si, že problém barvení mapy se podařilo poměrně brzy vyřešit na různých „složitých“ plochách. Již P. J. Heawood například dokázal, že k obarvení libovolné mapy na anuloidu stačí 7 barev.

4. Minimální kostra grafu

Jednou z prvních prací, ve které nalézáme otázky související s problémy teorie grafů, byla práce G. Kirchhoffa z roku 1847. Kirchhoff ještě jako student objevil v roce 1845 dva fyzikální zákony, které umožňují stanovit velikosti proudů v elektrické síti. Na základě těchto zákonů můžeme pro každou elektrickou síť sestavit soustavu lineárních rovnic, ve kterých jako neznámé vystupují velikosti proudů v jednotlivých obvodech sítě. Tato soustava však obsahuje rovnice, které jsou lineárně závislé na ostatních. Druhý Kirchhoffův zákon totiž neříká, pro které obvody máme rovnice psát, a tak je píšeme pro všechny.

Kirchhoff ukázal, že stačí uvažovat jen tzv. nezávislé obvody a uvedl metodu pro jejich nalezení. Při zkoumání topologických vlastností elektrických sítí přiřazujeme síti neorientovaný graf G, který ignoruje fyzikální podstatu elektrických prvků v jednotlivých obvodech. Uzlům sítě pak odpovídají uzly grafu G a elektrickým vodičům, které spojují dva uzly, odpovídají hrany grafu G.

Kirchhoff dokázal, že počet nezávislých obvodů v síti je roven číslu $\mu(\mathrm{G}) = m - n + 1$, kde m udává počet hran a n počet uzlů odpovídajícího grafu. Toto číslo dnes nazýváme *cyklomatické číslo grafu*.

Můžeme na tomto místě připomenout, že již v 60. letech popsali užití teorie grafů při zkoumání elektrických sítí K. Čulík, M. Fiedler a V. Doležal v knize [13].

Uvažujme nyní graf, který má hrany ohodnoceny reálnými čísly. Objevuje se otázka, jak najít kostru tohoto grafu, která má součet ohodnocení na svých hranách minimální. Této kostře říkáme **minimální kostra**.

Nalezení minimální kostry má praktický význam např. při budování rozvodu elektrické energie, plynu ap. Pokud uzly grafu představují odběratele a ohodnocení hran odpovídá nákladům na vybudování elektrického vedení mezi těmito odběrateli, pak nalezení minimální kostry tohoto grafu odpovídá nalezení optimální elektrické sítě.

Problém minimální kostry patří mezi starší grafové úlohy. Jako první se touto úlohou zabýval brněnský matematik O. Borůvka v roce 1925, právě inspirovaný úkolem nalézt optimální elektrickou síť. Borůvka podal první algoritmus nalezení minimální kostry grafu. Vzhledem k praktické aplikaci uvažoval úplný graf, který je ohodnocen tak, že žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení. Takovému ohodnocení říkáme ostré ohodnocení. V práci [6] formuloval úkol v pojmech teorie matic:
„Budiž dána matice M čísel $r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; n \geq 2)$, až na podmínku $r_{\alpha\alpha} = 0, r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$, kladných a vzájemně různých.

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby:
1^0 *bylo možno, jsou-li* p_1, p_2 *libovolná od sebe různá přirozená čísla* $\leq n$, *vybrati z ní skupinu částečnou tvaru*

$$r_{p_1c_2}, r_{c_2c_3}, r_{c_3c_4}, \dots, r_{c_{q-2}c_{q-1}}, r_{c_{q-1}p_2},$$

2^0 *součet jejích členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce* 1^0.“

Jak je pak prakticky možno nalézt minimální kostru uvedl v článku [14], který časově těsně předchází vydání práce [6]:

„*V rovině (v prostoru) jest dáno n bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou vesměs různé. Jest je spojiti sítí tak, aby:*

1. *každé dva body byly spojeny buď přímo, nebo prostřednictvím jiných,*
2. *celková délka sítě byla co nejmenší.*

Řešení je následující:
Každý z daných bodů spojím s bodem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Každý z nich spojím s tahem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Takto postupuji stále dál, až obdržím konečně jediný polygonální tah, jenž řeší danou úlohu.“

Na Borůvkovu práci reagoval 12. února 1929 V. Jarník, který mu v dopise (jeho část byla později publikována v práci [15]) píše své „jednodušší řešení“. Ani on neuvažoval v pojmech teorie grafů, což nepřekvapuje. Oba autoři se touto problematikou nezabývali a literatura prakticky neexistovala. Jarník dokázal existenci minimální kostry a našel algoritmus, který ji nalezne. Opět uvažoval úplný graf, který má ostré ohodnocení. Jeho postup můžeme dnešním jazykem teorie grafů popsat takto:
„*Nechť je dán úplný graf* K_n, *jehož hrany jsou ohodnoceny vesměs různými kladnými čísly. Za* a_1 *zvolme libovolný uzel grafu* K_n. *Budiž* a_2 *definováno vztahem*

$$r_{a_1,a_2} = \min r_{a_1,l}$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

$$l \neq a_1.$$

V k-tém kroku máme definovánu posloupnost

$$(*) \qquad a_1, a_2, \dots, a_{2k-3}, a_{2k-2} \qquad (2 \leq k < n)$$

a definujeme (a_{2k-1}, a_{2k}) *vztahem*

$$r_{a_{2k-1},a_{2k}} = \min r_{i,j},$$

kde i probíhá všechny uzly $a_1, a_2, \dots, a_{2k-2}$ *; j všechny ostatní uzly. Přitom budiž* a_{2k-1} *jedno z čísel posloupnosti* $(*)$, *takže* a_{2k} *není obsažen mezi uzly* $(*)$.“

Jarník dále podal názornou interpretaci problému:
„*Je dáno n kuliček, jež jsou očíslovány čísly* $1, 2, \dots, n$, *a jež jsou po dvou spojeny tyčemi v počtu* $\frac{1}{2}n(n-1)$. *Hmota tyče, jež spojuje kuličku a s kuličkou b, budiž* $r_{a,b}$. *Ty tyče buďte eventuelně tak prohnuty, aby se navzájem nestýkaly. Jest odstraniti*

z tohoto systému tyčí některé tak, aby těch n kuliček drželo pohromadě a aby hmota zbylých tyčí byla co nejmenší.“

Jiný podobný postup vytvořil polský matematik Jan Lukasziewicz (1878–1956). Jeho konstrukce je však oprávněna jen za předpokladu, že jde o ostře ohodnocený graf (viz [13]).

Základními příspěvky k problému minimální kostry se v 50. letech staly práce J. P. Kruskala z roku 1956 a práce R. C. Prima z roku 1957. Kruskal znal Borůvkovu práci, která se opsána na psacím stroji objevila v USA. Kruskal ve své práci [16] studoval také ostře ohodnocené grafy, ale požadavek úplnosti grafu nepovažoval za nutný. Uvedl, že chybějící hrany se dají nahradit hranami s dostatečně velkým ohodnocením.

Kruskal dokázal správnost tří konstrukcí minimální kostry:

„*A. Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Mezi hranami grafu G, které ještě nejsou vybrány, vybereme nejkratší, která netvoří kružnici s těmi, které už byly vybrány. Množina nakonec vybraných hran tvoří minimální kostru grafu G.*

B. Buď V libovolná, ale pevná neprázdná podmnožina uzlů grafu G. Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Z hran grafu G, které doposud nebyly vybrány a které jsou incidentní buď s některým uzlem z V, nebo s hranou, která již vybrána byla, vybereme nejkratší z těch, které s již vybranými hranami netvoří kružnici. Množina nakonec vybraných hran tvoří minimální kostru grafu G. V případě, že množina V je rovna množině všech uzlů grafu G, pak konstrukce B odpovídá konstrukci A.

A’. (V jistém smyslu duální k A.) Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Mezi hranami, které dosud nebyly vybrány, vybereme nejdelší z těch, jejichž odstranění neporuší souvislost. Pak množina hran, které po provedení posledního kroku zůstanou nevybrány, tvoří minimální kostru grafu G.“

Kruskal napsal, že mu není známo, zda konstrukce B má také duální formu.

Konstrukci A’ použil A. Kotzig v práci [17]. Kotzig znal Kruskalovu práci; zobecnil konstrukci s poukazem na skutečnost, že tato (patřičně pozměněná) konstrukce je možná i pro grafy, které nejsou ohodnoceny ostře. V takových grafech může existovat více než jedna minimální kostra. Kotzig našel nutnou a postačující podmínku, kdy v grafu existuje právě jedna minimální kostra.

H. Loberman a A. Weinberger upravili v roce 1957 konstrukci A tak, aby byla použitelná pro počítač.

Stejný postup řešení problému minimální kostry jako dokázal V. Jarník na počátku roku 1929, odvodil v roce 1957 R. C. Prim a nezávisle na něm E. W. Dijkstra v roce 1959.

Problematika nalezení minimální kostry byla v dalších letech studována řadou autorů. Dnes se ukazuje, že v Borůvkově práci komplikovaně vyjádřený algoritmus je mnohem lepší než se v minulosti předpokládalo.

Historické aspekty řešení tohoto problému nalezneme zejména v práci [18] R. L. Grahama a P. Hella z roku 1985 a v práci J. Nešetřila [19] z roku 1997 věnované památce profesora Otakara Borůvky.

Je možno se zmínit ještě o jednom starém problému, který s minimální kostrou úzce souvisí. Na počátku 19. století vyřešil Jakob Steiner (1796–1863) následující úlohu: Pro dané tři body A, B, C v rovině máme najít spojovací síť nejkratší možné délky. Zobecnění této úlohy pro n ($n \geq 2$) bodů studovali V. Jarník a M. Kössler v roce

1934 v práci [20] a nyní je známa jako **Steinerův problém** v rovině (resp. obecněji v n-rozměrném euklidovském prostoru). Každá optimální síť má tvar stromu a proto hovoříme o steinerovském stromu. Další podrobnosti lze nalézt například v Plesníkově knize [21].

Závěr

Historie matematiky nechávala delší dobu teorii grafů mimo svoji pozornost. Výjimku tvořil problém čtyř barev, který patřil od svého vzniku v roce 1852 k nejpopulárnějším matematickým problémům. První rozsáhlou historickou prací o teorii grafů se stala kniha *Graph theory 1736–1936* [8] z roku 1976. Autoři rozdělili svoji knihu do deseti kapitol, ve kterých nalezneme 37 původních prací z období let 1736–1936. Latinsky, německy a francouzsky psané práce přitom byly přeloženy do angličtiny; některé jsou uvedeny celé, jiné ve zkrácené verzi. Kniha se zabývá eulerovskými grafy, hamiltonovskými kružnicemi, stromy, vztahem teorie grafů k organické chemii, problémem čtyř barev, Eulerovou větou pro mnohostěny a faktorizací grafů.

Český čtenář se mohl s mnoha historickými poznámkami setkat v Sedláčkově knize [7], kde je například podrobněji vyložena historie problému čtyř barev.

V roce 1997 vyšla v edici *Dějiny matematiky* práce autora tohoto článku s názvem *Teorie grafů 1736–1963* [9]. Kniha se zabývá historickým vývojem některých oblastí teorie grafů (cesty v grafech, kostra grafů, problém čtyř barev, faktorizace grafů, orientované grafy) v uvedeném období, zejména s přihlédnutím k přínosu českých a slovenských matematiků. Součástí práce je rozsáhlá bibliografie, která je doplněna krátkými poznámkami.

Literatura

1. EULER, L., *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **8** (1736), 128–140.
2. KŐNIG, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1936.
3. BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
4. ORE, O., *Theory of graphs*, American Mathematical Society, Providence, 1962.
5. HARARY, F., *Graph theory*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, 1969.
6. BORŮVKA, O., *O jistém problému minimálním*, Práce Moravské Přírodovědecké společnosti **3** (1926), 37–58.
7. SEDLÁČEK, J., *Úvod do teorie grafů*, Academia, Praha, 1981.
8. BIGGS, N. L. — LLOYD, K. E. — WILSON, R. J., *Graph theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
9. ŠIŠMA, P., *Teorie grafů 1736 – 1963*, Prometheus, Praha, 1997.
10. JUŠKEVIČ, A. P. — SMIRNOV, V. I., *Leonard Ejler: Perepiska. Annotirovannyj ukazatěl*, Nauka, Leningrad, 1967.
11. JUŠKEVIČ, A. P. — WINTER, E., *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729–1764*, Akademie–Verlag, Berlin, 1965.
12. BOSÁK, J., *Ako bol vyriešený problém štyroch farieb*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **24** (1979), 181–201.
13. ČULÍK, K. — DOLEŽAL, V. — FIEDLER, M., *Kombinatorická analýza v praxi*, SNTL, Praha, 1967.
14. BORŮVKA, O., *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí*, Elektrotechnický obzor **15** (1926), 153–154.

15. JARNÍK, V., *O jistém problému minimálním*, Práce Moravské Přírodovědecké společnosti **6** (1930), 57–63.
16. KRUSKAL, J. B., *On the Shortes Spanning Subtree of a Graph and the Travelling Salesman Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society **7** (1956), 48–50.
17. KOTZIG, A., *Súvislé podgrafy s minimálnou hodnotou v konečnom súvislom grafe*, Časopis pro pěstování matematiky **86** (1961), 1–6.
18. GRAHAM, R. L. — HELL, P., *On the history of the minimum spanning tree problem*, Annals of the History of Computing **7** (1985), 43–57.
19. NEŠETŘIL, J., *A few remarks on the history of MST-problem*, Archivum mathematicum **33** (1997), 15–22.
20. JARNÍK, V. — KÖSSLER, M., *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů*, Časopis pro pěstování matematiky **63**, (1934), 223–235.
21. PLESNÍK, J., *Grafové algoritmy*, Veda, Bratislava, 1983.