MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Polynomy v úlohách zahraničních matematických soutěží a sbírek

Diplomová práce

Hana Líšková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Brno 2012

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá tematikou polynomů, polynomických rovic a jejich soustav na úrovni matematických seminářů na gymnáziích. Jejím cílem je poskytnout doplňkový učební materiál pro práci s nadanými žáky, a to především při jejich přípravě na matematickou olympiádu. Je zpracována tak, aby mohla sloužit nejen učitelům matematiky, ale i samotným studentům.

Celá práce se skládá ze dvou kapitol. Kapitola 1 je věnována teoretickým poznatkům, které jsou využívány při řešení příkladů v kapitole 2. Některé základní poznatky, které jsou při řešení těchto příkladů využity, v kapitole 1 nejsou uvedeny. Jedná se o poznatky známé již ze základní případně střední školy, přičemž se vzhledem k náročnosti příkladů předpokládá, že je s nimi čtenář obeznámen a dovede je plně využívat. Není proto nutné je v kapitole 1 uvádět. Věty, které jsou zde uvedeny, jsou vzhledem k předpokládanému využití práce uvedeny bez důkazů. Pro snazší orientaci v práci jsou také u každého poznatku uvedena čísla příkladů, v nichž je ho využito.

Stěžejní částí této práce je kapitola 2, která obsahuje celkem 50 řešených příkladů rozčleněných do jedenácti tematických podkapitol. V rámci těchto podkapitol jsou příklady řazeny podle náročnosti od jednodušších úloh po úlohy složitější. Všechna řešení jsou uvedena s podrobným slovním komentářem, který umožní čtenářům sledovat všechny početní i myšlenkové kroky řešení. U některých příkladů jsou uvedena dvě různá řešení využívající různých poznatků i metod a vedoucí k jednomu správnému výsledku. Přehled zadání a výsledků řešených příkladů je uveden na konci práce jako příloha. Všechny příklady z kapitoly 2 pochází ze zahraničních matematických soutěží (především olympiád) nebo sbírek úloh. V poznámce pod čarou jsou u každého příkladu uvedeny dostupné informace o zdroji, tedy údaje o zemi, roce, soutěži, sbírce (případně jiné tiskovině) včetně čísel stran, kde je daný příklad uveden. Velká část příkladů pochází přímo z brožur věnovaných jednotlivým ročníkům soutěží, není proto vždy možné u nich dohledat kompletní údaje. Jejich výhodou ovšem je, že pravděpodobně nebyly v uceleném knižním textu zpracovány, a tudíž by pro čtenáře mohli být nové. Zároveň vzhledem k tomu, že všechny příklady pochází ze zahraničních soutěží, mnohé z nich mohou být pro českého čtenáře neobvyklé jak způsobem zadání, tak i postupem řešení.

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu je zde uveden přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	množina všech nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel

Kapitola 1

Základní teoretické poznatky o polynomech

Stručný přehled poznatků, které jsou uvedeny v této kapitole, je zpracován podle zdrojů [3] a [4].

Polynomem (mnohočlenem) jedné proměnné x rozumíme výraz, který lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x, \tag{1.1}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Čísla a_i pro $i = 0, 1, \ldots, n$ jsou z některého číselného oboru ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a nazýváme je koeficienty polynomu. Výrazy $a_i x^i$ nazýváme členy polynomu, přičemž člen a_0 absolutním členem. Členy s nulovým koeficientem zpravidla v zápise polynomu vynecháváme. Jsou-li všechny členy polynomu nulové, nazýváme ho nulovým polynomem. Dále pro $a_n \neq 0$ nazýváme číslo n stupněm polynomu (1.1) a číslo a_n jeho vedoucím koeficientem. Polynomy stupně 1 nazýváme lineární a obvykle je zapisujeme $ax + b$, polynomy stupně 2 nazýváme kvadratické a zapisujeme je $ax^2 + bx + c$, polynomy stupně 3 nazýváme kubické a polynomy čtvrtého stupně označujeme jako bikvadratické.

Každý polynom je jednoznačně určen svými koeficienty u příslušných mocnin proměnné x, ačkoli existují jeho různé zápisy.

Rovnost polynomů: Polynomy $P(x)$, $Q(x)$ stejné proměnné x jsou si rovny, značíme $P(x) = Q(x)$, právě když jsou si rovny všechny koeficienty u stejných mocnin proměnné x.[1]

Sčítání polynomů: Polynomy stejné proměnné x sčítáme tak, že sečteme všechny členy se stejnou mocninou proměnné x.

Odčítání polynomů provádíme přičtením opačného polynomu, tedy polynomu, který vznikne z původního změnou znamének u všech členů.

Násobení polynomů provádíme tak, že vynásobíme každý člen jednoho polynomu každým členem druhého polynomu a vzniklé součiny sečteme.

[1] Využito v příkladu 9

Dělení polynomů provádíme algoritmem podobným algoritmu dělení přirozených čísel. Blíže jej popisuje následující věta.

Věta o dělení polynomů se zbytkem. Nechť $P(x)$ je polynom, $Q(x)$ nenulový polynom. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů $H(x)$, $R(x)$ taková, že platí rovnost:

$$P(x) = H(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

přičemž platí, že stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$ nebo je $R(x) = 0$ (v takovém případě se jedná o dělení polynomů beze zbytku). Polynom $H(x)$ nazýváme (neúlpný) podíl a polynom $R(x)$ zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $Q(x)$.[2]

Hodnotou polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x$ v čísle c nazveme číslo

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0.$$

Je-li $P(c) = 0$, pak číslo c nazveme *kořenem polynomu* $P(x)$. Pro $c = 1$ je hodnota $P(c)$ hodnotou součtu všech koeficientů polynomu $P(x)$.[3]

Nyní už lze uvést další větu, která blíže specifikuje dělení polynomu lineárním polynomem.

Bezoutova věta. Zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $x - c$ je roven $P(c)$, přitom polynom $P(x)$ je dělitelný polynomem $x - c$, právě když je číslo c kořenem polynomu $P(x)$. Říkáme pak, že $x - c$ je kořenový činitel polynomu $P(x)$.[4]

Rozkladem polynomu rozumíme jeho zápis ve tvaru součinu polynomů nižších stupňů. Obvykle takový rozklad získáme vytýkáním nebo užitím vhodných vzorců.

Nyní ještě třeba zmínit několik poznatků o kořenech polynomu.

Násobným kořenem polynomu $P(x)$ nazveme takové číslo c, které je kořenem nenulového polynomu $P(x)$ i kořenem polynomu $\frac{P(x)}{x-c}$. Platí tedy, že $(x - c)^2$ dělí $P(x)$ beze zbytku. Pro každý kořen c polynomu $P(x)$ zřejmě existuje největší k menší nebo rovno stupni polynomu $P(x)$, pro které platí $(x-c)^k$ dělí $P(x)$. Číslo c tedy nazveme k-násobným kořenem polynomu $P(x)$. Dodejme, že pro kořeny násobnosti 1 užíváme termín *jednoduché kořeny*.

Následující důležitá věta hovoří o počtu kořenů polynomu a zároveň popisuje další možný zápis libovolného polynomu, a to ve tvaru součinu jeho kořenových činitelů.

Základní věta algebry. Každý nenulový mnohočlen $P(x)$ stupně n má právě n komplexních kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, počítáme-li je i s násobností, a platí[5]

$$P(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad (1.2)$$

[2]Využito v příkladech 6 a 25
[3]Využito v příkladech 7, 15 a 16
[4]Využito v příkladech 10 a 42
[5]Využito v příkladech 10, 15 a 16

Dále jsou uvedeny vztahy mezi koeficienty polynomu a jeho kořeny, jejichž využití často vede k určení kořenů polynomů.

Vietovy vztahy pro polynom n-tého stupně získáme roznásobením kořenových činitelů v (1.2) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x:[6]

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1}x_n \\
\frac{a_{n-3}}{a_n} &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\
&\vdots \\
\frac{a_1}{a_n} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2\dots x_{n-1} + x_1x_2\dots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3\dots x_n) \\
\frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n x_1x_2\dots x_n
\end{aligned}$$

Pro kvadratický trojčlen ax^2+bx+c tak dostáváme tvrzení, že čísla x_1, x_2 jsou jeho kořeny, právě když platí:[7]

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Podobně pro kubický polynom ax^3+bx^2+cx+d jsou čísla x_1, x_2, x_3 jeho kořeny, právě když platí:[8]

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Z Vietových vztahů navíc vyplývá, že pokud jsou všechny kořeny polynomu n-tého stupně celá čísla, pak vedoucí koeficient dělí všechny ostatní koeficienty.[9]

Máme-li zadán polynom s celočíselnými koeficienty, pak všechny ty jeho kořeny, jež jsou racionální čísla, můžeme určit podle následujícího pravidla. Je-li zlomek $\frac{p}{q}$ s nesoudělnými celými čísly p a q kořenem takového polynomu, pak čitatel p dělí jeho absolutní člen a jmenovatel q dělí jeho vedoucí koeficient.[10]

Polynom n proměnných $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je algebraický výraz, který lze zapsat jako součet konečně mnoha sčítanců (členů polynomu) tvaru

$$a_{k_1,k_2,\dots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}, \tag{1.3}$$

kde $k_1, k_1, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla a čísla $a_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ nazýváme koeficienty polynomu $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Stejně jako v případě polynomů jedné proměnné, členy s nulovými koeficienty v zápise vynecháváme. Polynom, jehož všechny členy jsou nulové, nazýváme

[6] Využito v příkladech 5,17,18 a 50
[7] Využito v příkladech 9, 10, 13, 14, 16, 23, 26, 31, 36 a 49
[8] Využito v příkladech 2, 19, 31 a 33
[9] Využito v příkladu 23
[10] Využito v příkladech 14, 18, 19 a 31

nulovým polynomem. Pokud se v zápise polynomu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyskytnou členy se stejnými n-ticemi exponentů $k_1, k_2, \ldots, k_n$, je možné je sečíst. Proto budeme dále uvažovat pouze polynomy $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jež jsou součtem členů s navzájem různými n-ticemi exponentů $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Stupněm členu (1.3) nazveme součet $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Nejvyšší ze stupňů členů, které jsou v daném polynomu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zastoupeny s nenulovým koeficientem, se nazývá stupněm polynomu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Polynomy více proměnných v elementární matematice vystupují především v soustavách algebraických rovnic. Vyskytují se však také v diofantických rovnicích, což jsou rovnice, u nichž hledáme pouze celočíselná řešení.

Symetrickým polynomem nazveme polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jestliže pro libovolné pořadí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ platí rovnost polynomů

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Elementární symetrické polynomy n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou polynomy:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1}x_n \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1} &= x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3\ldots x_n \\
\sigma_n &= x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

Tyto polynomy vystupují ve Vietových vztazích mezi kořeny a koeficienty daného polynomu jedné proměnné, které jsem uvedla již dříve.

Nyní už lze uvést důležitou větu o symetrických polynomech.

Hlavní věta o symetrických polynomech. Každý symetrický polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lze vyjádřit jako polynom n proměnných $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, kde σ_k jsou pro $k = 1, 2, \ldots, n$ elementární symetrické polynomy n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tedy

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

přičemž toto vyjádření je až na pořadí členů polynomu $Q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ jednoznačné.[11]

Například pro součet druhých mocnin n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

což lze ověřit přímým výpočtem.

V tomto textu jsou dále používány pojmy *symetrická soustava rovnic* pro soustavy algebraických rovnic, které při libovolné záměně proměnných zůstávají identické, a *cyklická*

[11] Využito v příkladech 14 a 36

soustava rovnic pro soustavy algebraických rovnic, které při libovolné cyklické záměně proměnných zůstávají identické.

Nyní je potřeba uvést dvě důležité klasické nerovnosti, jichž je v tomto textu využito při řešení některých příkladů.

Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě n-tice reálných čísel $u_1, u_2, \dots u_n$ a $v_1, v_2, \dots v_n$ platí nerovnost

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2),$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jsou si poměry $u_i : v_i$ rovny pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$.[12]

AG-nerovnost. Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \dots x_n},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.[13]

V textu se dále objevuje pojem číselné kongruence. Protože však využíváme pouze jejich základní vlastnosti, není třeba uvádět více teoretických poznatků, než je uvedeno v následujícím odstavci.

Kongruence. Jestliže dvě celá čísla a, b mají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r, kde $0 \leq r < m$, nazývají se kongruentní podle modulu m (nebo kongruentní modulo m), což zapisujeme:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Následuje výčet základních úprav kongruencí.[14]

- K oběma stranám kongruence lze přičíst libovolné celé číslo.
- Obě strany kongruence lze vynásobit stejným celým číslem.
- Obě strany kongruence lze umocnit na totéž přirozené číslo.
- Obě strany kongruence lze vydělit jejich společným dělitelem, je-li tento dělitel nesoudělný s modulem.
- Obě strany kongruence i její modul lze vynásobit stejným přirozeným číslem.
- Obě strany kongruence i její modul lze vydělit jejich společným kladným dělitelem.

[12] Využito v příkladu 50
[13] Využito v příkladech 45 a 46
[14] Využito v příkladu 10

Kapitola 2

Polynomy v příkladech

2.1 Výpočty hodnot výrazů

Příklad 1. Pro všechna reálná a, b, c platí rovnost:[1]

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+kabc$$

Určete hodnotu konstanty k.

Řešení. Nejprve roznásobíme výraz $(a+b+c)^3$:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$$

Dále roznásobíme i druhý výraz z pravé strany rovnosti:

$$3(a+b+c)(ab+bc+ca)=3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+9abc$$

Takto roznásobené výrazy dosadíme do zadané rovnosti a po úpravě dostaneme:

$$0=-3abc+kabc$$

Odtud je zřejmě $k=3$.

Příklad 2. Nechť u, v, w jsou kořeny rovnice $x^3-x-1=0$ v oboru komplexních čísel. Vypočtěte hodnotu výrazu[2]

$$\frac{1-u}{1+u}+\frac{1-v}{1+v}+\frac{1-w}{1+w}.$$

Řešení. Nejprve převedeme výraz ze zadání na společný jmenovatel:

$$\frac{(1-u)(1+v)(1+w)+(1-v)(1+u)(1+w)+(1-w)(1+u)(1+v)}{(1+u)(1+v)(1+w)}$$

Nyní roznásobíme závorky v čitateli i jmenovateli a úpravách získáme výraz:

$$\frac{3+u+v+w-(uv+vw+uw)-3uvw}{1+u+v+w+uv+vw+uw+uvw}$$

[1] Velká Británie 2001, [15], Invitational Mathematics Challenge, str. 73 a 79
[2] Slovinsko 1999, [18], str. 6 a 8

Protože u, v, w jsou kořeny rovnice $x^3 - x - 1 = 0$, víme z Vietových vztahů, že

$$1 = uvw, \quad -1 = uv + vw + uw, \quad 0 = u + v + w$$

Díky tomu můžeme do upraveného výrazu dosadit tyto hodnoty. Po dosazení a výpočtu dostáváme

$$\frac{3 + 0 - (-1) - 3 \cdot 1}{1 + 0 - 1 + 1} = 1.$$

Hodnota výrazu ze zadání je tedy 1.

Příklad 3. Pro některá reálná čísla a, b platí obě rovnosti

$$a^3 = 3ab^2 + 11, \quad b^3 = 3a^2b + 2.$$

Určete hodnotu výrazu $a^2 + b^2$.[3]

Řešení. Nejprve obě rovnosti ze zadání upravíme tak, aby obě neznámé byly na levé straně:

$$a^3 - 3ab^2 = 11, \quad b^3 - 3a^2b = 2$$

Kdybychom tyto rovnice nyní sečetli, získali bychom na levé straně výraz $a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3$, který až na znaménka prostředních členů připomíná vzorec pro $(a \pm b)^3$. Abychom problém se znaménky vyřešili, zkusíme obě rovnosti umocnit na druhou, tak dostaneme:

$$a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 121, \quad b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 4$$

Po sečtení těchto rovnic už lze zmíněný vzorec použít:

$$125 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2 + b^2)^3$$

Odtud už odmocněním spočítáme hodnotu zadaného výrazu

$$a^2 + b^2 = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Příklad 4. Pro reálná čísla x, y, z platí rovnost $xyz = 1$. Vypočtěte hodnotu výrazu[4]

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+z+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}.$$

Řešení. Protože známe hodnotu výrazu $xyz = 1$, můžeme číslo 1 ve jmenovateli prvního zlomku nahradit výrazem xyz. Výraz ze zadání poté získá tvar

$$\frac{x+1}{x(y+1+yz)} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}.$$

Nyní první dva zlomky převedeme na společného jmenovatele a po sečtení dostaneme nové vyjádření původního výrazu:

$$\frac{xy+2x+1}{x(y+1+yz)} + \frac{z+1}{zx+z+1}$$

[3]Slovinsko 2005, [21], str. 5 a 7
[4]Slovinsko 2005, [21], str. 12 a 14

Nyní opět nahradíme číslo 1 ve jmenovateli prvního zlomku výrazem xyz a výraz dále upravíme:

$$\frac{xy+2x+1}{xy(1+xz+z)}+\frac{z+1}{zx+z+1}=\frac{2x+2xy+1+xyz}{xy(1+zx+z)}$$

Nyní pro změnu nahradíme číslo 1 výrazem xyz v čitateli zlomku a úpravami postupně dostaneme:

$$\frac{2x(1+yz+y)}{xy(1+xz+z)}=\frac{2x(xyz+yz+y)}{xy(1+xz+z)}=\frac{2xy(xz+z+1)}{xy(1+xz+z)}=2$$

Úprava krácením je korektní, neboť z rovnosti $xyz=1$ plyne, že čísla x, y, z jsou nenulová. Hledaná hodnota výrazu je tedy rovna 2.

Příklad 5. Najděte součet všech kořenů, reálných i imaginárních, rovnice

$$x^{2001}+\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{2001}=0,$$

jestliže víte, že žádný její kořen není násobný.[5]

Řešení. Nejprve rovnici upravíme tak, že druhý sčítanec rozvineme podle binomické věty. Dostaneme tak:

$$x^{2001}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2001}-\binom{2001}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}x+\binom{2001}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1999}x^{2}-\ \dots$$
$$\dots-\binom{2001}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}x^{1999}+\binom{2001}{1}\left(\frac{1}{2}\right)x^{2000}-x^{2001}=0 \qquad (2.1)$$

Ihned vidíme, že první a poslední člen polynomu se odečtou a zůstane tak pouze polynom stupně 2000. Jelikož díky binomické větě známe koeficienty u všech členů polynomu, můžeme součet všech kořenů zadané rovnice spočítat pomocí Vietova vzorce pro součet kořenů

$$x_1+x_2+\dots+x_{1999}+x_{2000}=-\frac{a_{1999}}{a_{2000}},$$

kde a_{1999}, a_{2000} jsou po řadě koeficienty u x^{1999}, x^{2000}. Tyto koeficienty již známe z (2.1). Stačí pouze dosadit do vzorce a dopočítat:

$$-\frac{a_{1999}}{a_{2000}}=-\frac{-\binom{2001}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{\binom{2001}{1}\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{2001\cdot 2000}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2001}=500$$

Součet všech kořenů zadané rovnice je 500.

Pro zajímavost dodejme, že zadaná rovnice nemá žádný reálný kořen. Když ji totiž přepíšeme do tvaru

$$x^{2001}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2001}$$

a uvědomíme si, že funkce $y=x^{2001}$ je v oboru reálných čísel prostá, je v tomto oboru zadaná rovnice ekvivalentní s rovnicí $x=x-\frac{1}{2}$, která nemá žádné řešení.

[5]USA 2001, [6], American Invitational Mathematics Examination, str. 3 a 12

2.2 Dělení polynomů a rozklady na součin

Příklad 6. Určete všechna čísla a, b taková, že polynom ax^5+bx^4+1 je dělitelný polynomem x^2-x-1.[6]

Řešení. Označme $P(x)$ polynom ax^5+bx^4+1 a $Q(x)$ polynom x^2-x-1. Polynom $P(x)$ vydělíme se zbytkem polynomem $Q(x)$:

$$P(x):Q(x)=ax^3+(a+b)x^2+(2a+b)x+3a+2b+\frac{(5a+3b)x+3a+2b+1}{Q(x)}$$

Odtud je zřejmé, že polynom $Q(x)$ dělí polynom $P(x)$ beze zbytku, právě když je polynom $(5a+3b)x+3a+2b+1$ nulový. To znamená, že hledané koeficienty a, b jsou právě řešeními soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 5a+3b&=0\\ 3a+2b+1&=0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu snadno vyřešíme a dostaneme $a=3, b=-5$. Polynom $P(x)$ je tedy dělitelný polynomem $Q(x)$ pouze, je-li $a=3$, $b=-5$.

Příklad 7. Určete součet koeficientů mnohočlenu $P(x)$ z rozkladu

$$x^{23}+23x^{17}-18x^{16}-24x^{15}+108x^{14}=(x^4-3x^2-2x+9)\cdot P(x),$$

přičemž skutečnost, že takový mnohočlen $P(x)$ existuje, dokazovat nemusíte.[7]

Řešení. Tuto úlohu bychom mohli řešit tak, že bychom mnohočlen z levé strany rovnosti vydělili mnohočlenem x^4-3x^2-2x+9 (dělení by mělo vyjít beze zbytku) a získali tak mnohočlen $P(x)$. Pak bychom pouze sečetli jeho koeficienty. Tento postup je však zbytečně početně náročný. Stačí si uvědomit, že součet koeficientů libovolného mnohočlenu $Q(x)$ získáme, když do něj dosadíme hodnotu $x=1$. Tuto hodnotu tedy dosadíme do zadané rovnosti dvou mnohočlenů a dostaneme tak

$$1+23-18-24+108=(1-3-2+9)\cdot P(1),$$

odkud $P(1)=\frac{90}{5}=18$. Součet koeficientů mnohočlenu $P(x)$ je tedy 18.
Pro kontrolu dodejme, že při přímém dělení vychází

$$P(x)=x^{19}+3x^{17}+2x^{16}+12x^{14}.$$

Příklad 8. Rozložte polynom

$$(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$$

na součin polynomů dále nerozložitelných v oboru reálných čísel.[8]

---

[6]Chorvatsko 2005, [8], City Competition, str. 4 a 8-9
[7]USA 1989, [6], American Regions Math League, str. 1 a 12
[8]Chorvatsko 2008, [9], City Competition, str. 3 a 6

Řešení. Podíváme-li se na výrazy uvnitř závorek, zjistíme, že v každém z nich lze vytknout nějakou mocninu x, v jednom případě s koeficientem 3 tak, abychom dostali součin tohoto činitele a dvojčlenu $x+2$. Toto vytknutí tedy provedeme:

$$x^4(x+2)^4 - x^4(x+2)^2 - 9x^2(x+2)^2 + 9x^2$$

Nyní bude výhodné z prvních dvou výrazů vytknout $x^4(x+2)^2$ a z druhých dvou výrazů vytknout $9x^2$. Dostaneme tak:

$$x^4(x+2)^2((x+2)^2-1) - 9x^2((x+2)^2-1)$$

Dále je možné vytknout společný činitel $x^2((x+2)^2-1)$ a dostat:

$$x^2((x+2)^2-1)(x^2(x+2)^2-9)$$

Nyní oba výrazy v závorkách upravíme podle vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ a dostaneme

$$x^2(x+1)(x+3)(x(x+2)-3)(x(x+2)+3),$$

po úpravě

$$x^2(x+1)(x+3)(x^2+2x-3)(x^2+2x+3).$$

Jediný činitel, který lze ještě rozložit, je $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. Polynom ze zadání lze tedy zapsat jako součin dále nerozložitelných polynomů takto:

$$x^2(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+2x+3)$$

Příklad 9. Nechť $f(n) = n^4+2n^3-n^2+2n+1$. Určete všechna celá čísla a, b, c, d taková, že pro každé n platí [9]

$$f(n) = (n^2+an+b)(n^2+cn+d).$$

Řešení. Nejprve roznásobíme výraz s neznámými a, b, c, d:

$$f(n) = n^4 + (c+a)n^3 + (d+ac+b)n^2 + (ad+bc)n + bd$$

Nyní můžeme porovnat koeficienty u obou tvarů polynomu $f(n)$. Dostaneme tak soustavu rovnic:

$$c+a = 2 \tag{2.2}$$
$$d+ac+b = -1 \tag{2.3}$$
$$ad+bc = 2 \tag{2.4}$$
$$bd = 1 \tag{2.5}$$

Protože a, b, c, d mají být celá čísla, dostáváme z rovnice (2.5), že $b=d=1$ nebo $b=d=-1$. Postupně budeme řešit oba případy.
Pro $b=d=1$ dostáváme po dosazení soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} c+a &= 2 \\ ac &= -3 \end{aligned}$$

[9]Velká Británie 2001, [15], Invitational Mathematics Challenge, str. 52 a 55

Z Vietových vztahů víme, že řešení této soustavy rovnic jsou právě řešení kvadratické rovnice $k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) = 0$. Její kořeny jsou $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Řešení soustavy rovnic jsou tudíž uspořádané dvojice $(a,c) \in \{(-1,3),(3,-1)\}$. Pro kontrolu dosaďme ještě zjištěné hodnoty do rovnice (2.4), kterou jsme dosud nevyužili. V obou případech dostáváme platnou rovnost $2 = 2$, proto jsou uspořádané čtveřice celých čísel $(a,b,c,d) \in \{(-1,1,3,1),(3,1,-1,1)\}$ řešením celé původní soustavy rovnic a polynom $f(n)$ má požadovaný rozklad $f(n) = (n^2-n+1)(n^2+3n+1)$, který se pro obě čtveřice liší pouze pořadím činitelů.
Pro $b = d = -1$ dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} c+a &= 2 \\ ac &= 1 \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že $a = c = 1$. Pro kontrolu dosaďme ještě do rovnice (2.4). V tomto případě obdržíme rovnost $-2 = 2$, která zřejmě neplatí a žádné nové řešení původní soustavy rovnic jsme nenašli.
Celkem jsme zjistili, že existují dvě uspořádané čtveřice

$$(a,b,c,d) \in \{(-1,1,3,1),(3,1,-1,1)\},$$

které vyhovují zadání a odpovídají právě jednomu polynomu

$$f(n) = (n^2-n+1)(n^2+3n+1).$$

Jiné řešení. Pokusme se polynom $f(n)$ ze zadání přímo rozložit na součin kvadratických trojčlenů. Pokud se nám to povede, získáme z tohoto rozkladu koeficietny a, b, c, d. Nejprve zkusíme polynom $f(n)$ doplnit na čtverec tak, aby ve druhé mocnině byl nějaký vhodný kvadratický trojčlen. Protože víme, že $(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2+2pq+2pr+2qr$, budeme hledat druhé mocniny v polynomu $f(n)$. Těmi jsou n^4, n^2 a 1. Jejich odmocniny tvoří hledaný kvadratický trojčlen (n^2+n+1). Nyní doplníme na čtverec:

$$f(n) = (n^2+n+1)^2 - 4n^2$$

Tento polynom můžeme dále rozložit podle vzorce pro rozdíl dvou čtverců na

$$f(n) = (n^2+n+1-2n)(n^2+n+1+2n) = (n^2-n+1)(n^2+3n+1).$$

Našli jsme tedy vhodný rozklad polynomu $f(n)$ vyhovující zadání. Abychom vysvětlili, proč je tento rozklad až na pořadí činitelů jediný, rozložíme kvadratické trojčleny, které jsme nalezli, ještě dále v komplexních číslech. Tyto rozklady provedeme pomocí diskriminantu a získáme rozklad polynomu $f(n)$ na lineární činitele:

$$f(n) = \left(n - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(n - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(n - \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(n + \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$$

Tento rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný. Protože první dva činitelé z tohoto rozkladu obsahují komplexní koeficienty a druzí dva činitelé koeficienty reálné, je zřejmé, že tyto lineární činitele nelze vynásobit tak, abychom dostali dva kvadratické trojčleny s celými koeficienty jiné, než ty, které jsme již dříve našli. Až na pořadí činitelů tedy existuje jediný rozklad polynomu $f(n)$, který splňuje podmínky zadání, a to právě

$$f(n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1).$$

Získali jsme tak obě hledané uspořádané čtveřice hledaných koeficientů a, b, c, d:

$$(a,b,c,d) \in \{(-1,1,3,1),(3,1,-1,1)\}.$$

Příklad 10. Zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $x^2 - (a+b)x + ab$, kde $a \neq b$, je $mx + n$. Vyjádřete koeficienty m, n pomocí parametrů a, b. Potom vypočítejte tyto koeficienty pro případ dělení polynomu $P(x) = x^{200}$ polynomem $x^2 - x - 2$ a dokažte, že jsou to celá čísla.[10]

Řešení. Ze zadání víme, že $P(x) = Q(x)(x^2 - (a+b)x + ab) + mx + n$, kde $Q(x)$ je vhodný polynom. Přitom z Vietových vztahů vyplývá, že kořeny polynomu $x^2 - (a+b)x + ab$ jsou právě čísla a, b. Tento polynom tedy můžeme zapsat ve tvaru $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$. Potom je $P(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + mx + n$. Položíme-li nyní $x = a$, dostaneme $P(a) = ma + n$. Stejně tak pro $x = b$ dostaneme $P(b) = mb + n$. Získali jsme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých m, n s parametry a, b:

$$P(a) = ma + n, \quad P(b) = mb + n$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme například tak, že nejprve odečteme druhou rovnici od první a pak na pravé straně nově vzniklé rovnice vytkneme m:

$$P(a) - P(b) = m(a-b), \quad \text{tedy} \quad m = \frac{P(a) - P(b)}{a-b}$$

Nyní z první rovnice dopočítáme $n = P(a) - ma$. Po dosazení a všech úpravách dostaneme $n = \frac{P(b)a - P(a)b}{a-b}$. První část úlohy je tedy vyřešena. Našli jsme vyjádření koeficientů m, n ze zadání pomocí parametrů a, b:

$$m = \frac{P(a) - P(b)}{a-b}, \quad n = \frac{P(b)a - P(a)b}{a-b} \tag{2.6}$$

S pomocí tohoto výsledku budeme řešit druhou část úlohy pro $P(x) = x^{200}$ a polynom $x^2 - x - 2$. Z Vietových vztahů dopočítáme, že $a = 2$, $b = -1$, a dosadíme do vztahů (2.6):

$$m = \frac{2^{200} - 1}{3}, \quad n = \frac{2^{200} + 2}{3}$$

Pro daný případ jsme tedy vypočítali hodnoty neznámých m, n. Zbývá už jen dokázat, že m, n jsou v tomto případě celá čísla. Protože $n = \frac{2^{200}+2}{3} = \frac{2^{200}-1}{3} + 1$, je $n = m + 1$. Stačí tedy dokázat, že $2^{200} - 1$ je násobek tří. Pak by obě čísla m, n byla celá. Jistě platí, že $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Pokud tuto kongruenci umocníme na 200, dostaneme $2^{200} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 3)$, a tedy $2^{200} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, což znamená, že $2^{200} - 1$ je násobkem tří. Dokázali jsme tak, že obě čísla m, n jsou v tomto případě celá.

[10] Brazílie 1979, [13], str. 3 a 39

2.3 Kvadratické rovnice

Příklad 11. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

Poté určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které je absolutní hodnota jednoho kořene zadané rovnice dvojnásobkem absolutní hodnoty jejího druhého kořene.[11]

Řešení. Rovnici budeme řešit pomocí diskriminantu

$$D = (a-2)^2 - 4(-2a^2 + 5a - 3) = 9a^2 - 24a + 16 = (3a-4)^2.$$

Její kořeny pro všechna reálná a jsou

$$x_{1,2} = \frac{2 - a \pm \sqrt{(3a-4)^2}}{2}, \quad \text{tedy} \quad x_1 = -2a + 3, \quad x_2 = a - 1.$$

Nyní máme určit všechna a taková, že $|x_1| = 2|x_2|$ nebo $2|x_1| = |x_2|$. Oba případy postupně vyřešíme. V prvním případě dostáváme $|-2a+3| = 2|a-1|$, což je ekvivalentní s rovnicí $(-2a+3)^2 = 4(a-1)^2$, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 4a^2 - 12a + 9 &= 4a^2 - 8a + 4 \\ 4a &= 5 \\ a &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Ve druhém případě dostáváme rovnici $2|-2a+3| = |a-1|$, která je ekvivalentní s rovnicí $4(-2a+3)^2 = (a-1)^2$, již upravíme na:

$$15a^2 - 46a + 35 = 0$$

Diskriminant této rovnice je $D = 16$ a její kořeny tedy jsou $a_{1,2} = \frac{46 \pm 4}{30}$, odkud $a_1 = \frac{5}{3}$ a $a_2 = \frac{7}{5}$.
Celkem jsme získali všechny tři hodnoty parametru a, které vyhovují podmínce ze zadání, a to $a \in \left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}\right\}$.

Příklad 12. V oboru reálných čísel řešte rovnici[12]

$$(2x+1)^2 + y^2 + (y-2x)^2 = \frac{1}{3}.$$

Řešení. Nejprve výraz na levé straně rovnice upravíme roznásobením závorek:

$$\begin{aligned} 2y^2 + 8x^2 - 4xy + 4x + 1 &= \frac{1}{3} \\ 3y^2 - 6xy + 12x^2 + 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

[11] Albánie 2002, [17], str. 2
[12] Chorvatsko 2003, [7], National Competition, str. 28 a 31

Tuto rovnici budeme řešit jako kvadratickou rovnici pro neznámou y. Ta má reálné řešení, právě když je její diskriminant

$$D = 36x^2 - 12(12x^2 + 6x + 1) = -12(9x^2 + 6x + 1) = -12(3x+1)^2$$

nezáporný. Musí tedy být $3x + 1 = 0$ neboli $x = -\frac{1}{3}$. Tuto hodnotu nyní dosadíme za x do upravené rovnice a dostaneme:

$$3y^2 + 2y + \frac{1}{3} = 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0, \quad \text{tedy} \quad y = -\frac{1}{3}.$$

Rovnice ze zadání má právě jedno reálné řešení, a to uspořádanou dvojici $(x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Příklad 13. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které mají rovnice

$$x^2 - (2a+1)x + a = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + (a-4)x + a - 1 = 0$$

postupně reálné kořeny x_1, x_2 a x_3, x_4 takové, že platí[13]

$$\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_4}{x_2} = \frac{x_1x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{a}.$$

Řešení. Protože pro $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a = 0$ zřejmě nemá rovnost ze závěru zadání smysl, uvažujme pouze nenulové hodnoty těchto neznámých. Rovnost pak můžeme upravit na tvar:

$$a(x_1x_2 + x_3x_4) = x_1x_2x_3x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \tag{2.7}$$

Nyní využijeme Vietových vztahů pro obě rovnice ze zadání a získáme tak hodnoty součtů a součinů neznámých x_1, x_2, x_3, x_4. Pro první rovnici dostáváme:

$$x_1 + x_2 = 2a + 1, \quad x_1x_2 = a$$

A pro druhou rovnici:

$$x_3 + x_4 = 4 - a, \quad x_3x_4 = a - 1$$

Můžeme tak dosadit do upravené rovnosti (2.7):

$$a(a + a - 1) = a(a-1)(2a + 1 + 4 - a)$$

Získali jsme tak rovnici pro výpočet všech hodnot parametru a, které vyhovují zadání. Tuto rovnici ještě dále upravíme (připomeňme, že $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} 2a - 1 &= (a-1)(a+5) \\ a^2 + 2a - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme dvě možné hodnoty parametru $a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Ověříme ještě, zda pro každou z nich mají rovnice ze zadání každá opravdu dva reálné kořeny. To provedeme dosazením za a do obou rovnic. Pro a_1 dostaneme:

$$x^2 + (1 - 2\sqrt{5})x - 1 + \sqrt{5} = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + (\sqrt{5} - 5)x - 2 + \sqrt{5} = 0$$

[13] Bulharsko 2005, [1], Winter Mathematical Competitions, str. 2

Diskriminanty těchto rovnic jsou

$$D = (1-2\sqrt{5})^2 - 4(-1+\sqrt{5}) = 25 - 8\sqrt{5} > 0,$$
$$D' = (\sqrt{5}-5)^2 - 4(-2+\sqrt{5}) = 38 - 14\sqrt{5} > 0,$$

takže pro a_1 jsou všechny podmínky úlohy splněny. Stejným způsobem zjistíme, že je tomu tak i pro a_2. Hledané hodnoty parametru jsou tedy právě čísla a_1, a_2.

Příklad 14. Nechť $f(x) = x^2 + (2a-1)x - a - 3$, kde a je reálné číslo.[14]

1. Dokažte, že rovnice $f(x) = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1, x_2.

2. Určete všechny hodnoty a takové, že $x_1^3 + x_2^3 = -72$.

Řešení. Úkoly budeme řešit postupně.

1. K tomu, abychom dokázali, že rovnice $f(x) = 0$ má dva různé reálné kořeny, stačí dokázat, že její diskriminant je větší než nula. Zjistíme tedy hodnotu diskriminantu $D = (2a-1)^2 + 4(a+3) = 4a^2 + 13$. Protože druhá mocnina libovolného reálného čísla je vždy nezáporné číslo, je zřejmě $D > 0$, což jsme měli dokázat.

2. Z Vietových vztahů pro zadanou rovnici je $x_1 + x_2 = -2a + 1$, $x_1x_2 = -a - 3$. Bude proto výhodné výraz $x_1^3 + x_2^3$ vyjádřit pomocí elementárních symetrických mnohočlenů:
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1x_2)$$
Rovnici $x_1^3 + x_2^3 = -72$ můžeme po dosazení za $x_1 + x_2$ a x_1x_2 zapsat takto:
$$\begin{aligned} (-2a+1)^3 - 3(-2a+1)(-a-3) &= -72 \\ -8a^3 + 12a^2 - 6a + 1 - 6a^2 - 15a + 9 &= -72 \\ -8a^3 + 6a^2 - 21a + 10 &= -72 \\ 8a^3 - 6a^2 + 21a - 82 &= 0 \end{aligned}$$
Z této rovnice vypočítáme všechny hodnoty a, které splňují podmínky zadání. S využitím pravidla pro hledání racionálních kořenů polynomu s celočíselnými koeficienty zjistíme, že jedním z kořenů této rovnice je $a = 2$. Rozkladem získáme:
$$8a^3 - 6a^2 + 21a - 82 = (a-2)(8a^2 + 10a + 41) = 0$$
Vzhledem k tomu, že diskriminant kvadratického trojčlenu v závorce je záporný, nemá daná kubická rovnice žádné jiné reálné kořeny. Existuje tedy právě jedna hodnota $a = 2$, pro kterou $x_1^3 + x_2^3 = -72$.

Příklad 15. Pro kvadratický trojčlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty platí

1. oba jeho kořeny jsou přirozená čísla,

2. součet jeho koeficientů je prvočíslo,

[14]Bulharsko 2005, [1], Spring Competition, str. 17

3. pro některé celé číslo k platí $P(k) = -55$.

Dokažte, že jedním z kořenů takového kvadratického trojčlenu je číslo 2 a najděte jeho druhý kořen.[15]

Řešení. Označme x_1, x_2 kořeny zkoumaného kvadratického trojčlenu $P(x)$. Podle zadání má mnohočlen $P(x)$ rozklad

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kde a, b, c jsou celá čísla a x_1, x_2 jsou přirozená čísla, o kterých můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_1 \le x_2$. Dále ze druhé podmínky víme, že pro některé prvočíslo p je $a + b + c = p$. Protože pro součet koeficientů libovolného mnohočlenu $Q(x)$ platí, že je roven hodnotě polynomu $Q(x)$ pro $x = 1$, je tedy $P(1) = a(1 - x_1)(1 - x_2) = p$. Protože p je prvočíslo, musí být $a = \pm 1$ nebo $a = \pm p$. Úlohu vyřešíme postupně pro všechny čtyři přípustné hodnoty koeficientu a.

1. Je-li $a = p$, neboli $P(x) = p(x - x_1)(x - x_2)$, pak z rovnosti $p(1 - x_1)(1 - x_2) = p$ vyplývá, že musí být $(1 - x_1)(1 - x_2) = 1$. Protože $1 - x_1$ a $1 - x_2$ jsou celá čísla menší než 1, musí být obě rovna číslu -1, tedy $x_1 = x_2 = 2$. Odtud $P(x) = p(x - 2)^2$, takže podle třetí podmínky musí existovat takové celé číslo k, pro které platí $P(k) = p(k - 2)^2 = -55$. Poslední rovnost však odporuje tomu, že $p > 0$ a $(k - 2)^2 \ge 0$. Proto žádný kvadratický trojčlen $P(x)$ s koeficientem $a = p$ zadání nevyhovuje.

2. Je-li $a = -p$, neboli $P(x) = -p(1 - x_1)(1 - x_2)$, pak z $-p(1 - x_1)(1 - x_2) = p$ vyplývá, že musí být $(1 - x_1)(1 - x_2) = -1$, což odporuje nerovnostem $1 - x_1 \le 0$ a $1 - x_2 \le 0$, které vzhledem k prvnímu bodu zadání musí platit. Ani pro $a = -p$ tedy neexistuje žádný trojčlen splňující všechny tři podmínky ze zadání úlohy.

3. Je-li $a = 1$, neboli $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, pak z $(1 - x_1)(1 - x_2) = p$ vzhledem k předpokladu $1 \le x_1 \le x_2$ ze začátku řešení, ze kterého plyne $0 \ge 1 - x_1 \ge 1 - x_2$, a k tomu, že p je prvočíslo, musí platit rovnosti $1 - x_1 = -1$ a $1 - x_2 = -p$. Odtud je zřejmě $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + p$ a $P(x) = (x - 2)(x - 1 - p)$. Nyní využijeme třetí podmínku, podle které pro vhodné celé k platí:

   $$P(k) = (k - 2)(k - 1 - p) = -55$$

   Protože $p \ge 2$, a tedy $k - 2 > k - p - 1$, dostáváme pro činitele $k - 2$ a $k - p - 1$ tyto možnosti:

   (a) $$\begin{aligned} k - 2 &= 55 \\ k - p - 1 &= -1 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} k - 2 &= 11 \\ k - p - 1 &= -5 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} k - 2 &= 5 \\ k - p - 1 &= -11 \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} k - 2 &= 1 \\ k - p - 1 &= -55 \end{aligned}$$

[15] Kanada 2001, [6], str. 3 a 13

V případě (a) je $k = 57$ a $p = 57$, což není prvočíslo. V případě (b) dostáváme $k = 13$, $p = 17$, a tedy i první hledaný trojčlen $P_1(x) = (x-2)(x-1-p) = (x-2)(x-18)$. V případě (c) máme $k = 7$, $p = 17$, tedy stejné prvočíslo jako v případě (b), kterému odpovídá již vypsaný mnohočlen $P_1(x)$. V případě (d) je $k = 3$ a $p = 57$, což není prvočíslo. Ukázali jsme, že existuje jediný trojčlen s koeficientem $a = 1$, který vyhovuje všem třem podmínkám úlohy, a to právě polynom $P_1(x)$, jehož kořeny jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 18$.

4. Je-li $a = -1$, neboli $P(x) = -(x-x_1)(x-x_2)$, musí platit $(1-x_1)(1-x_2) = -p$. Protože ale z předpokladu $1 \le x_1 \le x_2$, odkud platí $0 \ge 1-x_1 \ge 1-x_2$ plyne, že $(1-x_1)(1-x_2) \ge 0$, ani pro $a = -1$ neexistuje trojčlen splňující všechny podmínky zadání.

Zjistili jsme, že jediný polynom vyhovující všem třem podmínkám ze zadání úlohy je polynom $P(x) = (x-2)(x-18) = x^2 - 20x + 36$. Dokázali jsme, číslo 2 je skutečně jeho kořenem a zároveň jsme našli i jeho druhý kořen, číslo 18.

2.4 Rovnice vyšších stupňů

Příklad 16. Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž $a \neq 0$. Určete všechna řešení rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

jestliže víte, že jedním jejím kořenem je $x = 1$ a aspoň jeden její kořen je dvojnásobný.[16]

Řešení. Označme $Q(x) = x^2 + 4x - 7$. Protože víme, že jedním kořenem rovnice ze zadání je $x = 1$, musí platit $P(Q(1)) = 0$, a tedy po dosazení $Q(1) = -2$ i $P(-2) = 0$. To ale znamená, že polynom $P(x)$ lze zapsat jako $P(x) = a(x+2)(x-p)$, kde p je vhodné reálné číslo. Tohoto vyjádření polynomu $P(x)$ nyní využijeme a dostaneme:

$$P(Q(x)) = a(x^2 + 4x - 7 + 2)(x^2 + 4x - 7 - p) = a(x-1)(x+5)(x^2 + 4x - 7 - p)$$

Odtud je zřejmé, že řešení zadané rovnice jsou právě $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ a kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 4x - 7 - p = 0$. Protože aspoň jeden kořen původní rovnice má být dvojnásobný, musí být buď některé z čísel 1 nebo -5 řešením rovnice $x^2 + 4x - 7 - p = 0$, nebo tato rovnice musí mít dvojnásobný kořen. Zároveň z Vietových vztahů víme, že součet jejích kořenů musí být roven -4. To ale znamená, že pokud je 1 kořenem této rovnice, je jím i -5 a naopak. Po dosazení tak dostáváme $p = -2$ a poté $P(Q(x)) = a(x-1)^2(x+5)^2$. V tomto případě má rovnice ze zadání dva dvojnásobné kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. Pokud má rovnice $x^2 + 4x - 7 - p = 0$ jeden dvojnásobný kořen, musí díky hodnotě součtu kořenů být tímto kořenem $-4 : 2 = -2$. Toto číslo je skutečně kořenem pro $p = -11$, kdy $P(Q(x)) = a(x-1)(x+5)(x+2)^2$. Kořeny zadané rovnice v tomto případě jsou $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ a dvojnásobný kořen $x_3 = -2$.

[16] Chorvatsko 2008, [9], County Competition, str. 16 a 23

Příklad 17. Určete všechny hodnoty parametru a, pro které má rovnice

$$x^4-(3a+2)x^2+a^2=0$$

čtyři reálné kořeny, jež jsou po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.[17]

Řešení. Protože kořeny této rovnice mají být po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, můžeme je označit x_1, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_1+2d$, $x_4=x_1+3d$, kde $x_1\in\mathbb{R}$ a $d\in\mathbb{R}$ je diference aritmetické posloupnosti. Z Vietova vztahu pro součet kořenů při tomto označení platí:

$$-(x_1+x_2+x_3+x_4)=-4x_1-6d=0, \quad \text{tedy} \quad 2x_1+3d=0$$

Odtud dostáváme nové vyjádření všech kořenů zadané rovnice pouze pomocí diference d:

$$x_1=-\frac{3}{2}d, \quad x_2=-\frac{1}{2}d, \quad x_3=\frac{1}{2}d, \quad x_4=\frac{3}{2}d \tag{2.8}$$

Nyní s využitím těchto vyjádření zapíšeme další tři elementární symetrické polynomy vystupující ve Vietových vztazích:

$$\begin{aligned}
x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4&=-\frac{3}{4}d^2+\frac{3}{4}d^2+\frac{9}{4}d^2+\frac{1}{4}d^2+\frac{3}{4}d^2-\frac{3}{4}d^2\\
x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4&=\frac{3}{8}d^3+\frac{9}{8}d^3-\frac{9}{8}d^3-\frac{3}{8}d^3\\
x_1x_2x_3x_4&=\frac{9}{16}d^4
\end{aligned}$$

S využitím těchto vyjádření elementárních symetrických polynomů pomocí diference d zapíšeme zbývající tři Vietovy vztahy. Zjistíme tak, že Vietův vztah pro x^1 je splněn vždy. Z dalších dvou Vietových vztahů získáme po úpravě výše uvedených vyjádření soustavu rovnic o neznámých a, d:

$$\begin{aligned}
9d^4&=16a^2\\
5d^2&=6a+4
\end{aligned}$$

Nyní první rovnici této soustavy odmocníme a dostaneme tak $3d^2=4|a|$. Dále z obou rovnic eliminujeme neznámou d:

$$d^2=\frac{4|a|}{3}=\frac{6a+4}{5}, \quad \text{odtud} \quad 10|a|-9a-6=0$$

Pro $a\geq 0$ je jejím řešením $a=6$ a pro $a<0$ je jím $a=-\frac{6}{19}$. Díky tomu, že $|a|\geq 0$ pro každé a, můžeme ke každému z určených a vypočítat příslušné d, pro které čtveřice čísel (2.8) tvořící aritmetickou posloupnost bude splňovat všechny čtyři Vietovy vztahy, takže půjde o kořeny zadané rovnice. Podmínce ze zadání tedy vyhovují právě dvě hodnoty $a=6$, $a=-\frac{6}{19}$.

[17]Moldavsko 1997, [12], str. 6 a 14-15

Příklad 18. Najděte všechny hodnoty parametru k, při kterých má rovnice

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1\,984 = 0,$$

v oboru komplexních čísel takové dva kořeny, jejichž součin je -32.[18]

Řešení. Označme r, s, t, u kořeny dané bikvadratické rovnice. Podle jejích koeficientů mají Vietovy vztahy tvar:

$$\begin{aligned} rstu &= -1\,984 \\ rst + rsu + rtu + stu &= -200 \\ rs + rt + ru + st + su + tu &= k \\ r + s + t + u &= 18 \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že součin dvou z kořenů r, s, t, u dané rovnice je -32. Bez újmy na obecnosti můžeme položit například $r \cdot s = -32$. Pak z první rovnosti obdržíme $t \cdot u = 62$. Nyní tyto hodnoty součinů $r \cdot s$, $t \cdot u$ dosadíme do druhé rovnosti a dostaneme

$$-32t - 32u + 62r + 62s = -200, \quad \text{tedy} \quad -32(t+u) + 62(r+s) = -200.$$

Jelikož rovněž v poslední rovnosti se vyskytují součty $r+s$, $t+u$, můžeme nyní sestavit soustavu dvou rovnic s neznámými $a = r+s$, $b = t+u$:

$$\begin{aligned} -32b + 62a &= -200 \\ a + b &= 18 \end{aligned}$$

Odtud snadno vypočítáme hodnoty $a = r+s = 4$ a $b = t+u = 14$. Protože už známe hodnoty součtů $r+s, t+u$ i součinů $r \cdot s, t \cdot u$, můžeme je dosadit do rovnosti s parametrem k, kterou nejprve upravíme na vhodný tvar pro toto dosazení.

$$\begin{aligned} rs + rt + ru + st + su + tu &= k \\ rs + r(t+u) + tu + s(t+u) &= k \\ rs + tu + (t+u)(r+s) &= k \\ -32 + 62 + 14 \cdot 4 &= k \\ k &= 86 \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že požadavku ze zadaní může vyhovovat jediná hodnota $k = 86$. Musíme však ještě ověřit, zda pro takovou hodnotu parametru k má daná rovnice skutečně takové kořeny, že součin dvou z nich je roven -32. Dosadíme tedy do zadané rovnice hodnotu $k = 86$, a dostaneme tak rovnici:

$$x^4 - 18x^3 + 86x^2 + 200x - 1\,984 = 0$$

Postupným dosazováním dělitelů čísla 1 984 lze určit její celočíselné kořeny $x_1 = -4$, $x_2 = 8$. Protože tyto kořeny splňují požadovanou podmínku $x_1 x_2 = -32$, je námi nalezená hodnota $k = 86$ skutečně vyhovující. Existuje tedy právě jedno číslo k vyhovující podmínkám zadání, a to $k = 86$.

[18] USA 1984, [6], str. 3 a 12-13

Příklad 19. Nechť a je reálné číslo. Najděte kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice

$$x^3 + 2ax^2 - ax + 10 = 0,$$

jestliže víte, že jsou to po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.[19]

Řešení. Z Vietových vztahů dostáváme:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -a \\ x_1x_2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Zároveň víme, že x_1, x_2, x_3 jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Můžeme je tedy pro vhodná čísla k, d zapsat následovně:

$$x_1 = k - d, \quad x_2 = k, \quad x_3 = k + d$$

Po dosazení do Vietových vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} 3k &= -2a \\ (k-d)k + (k-d)(k+d) + k(k+d) &= -a \\ (k-d)k(k+d) &= -10 \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme pro neznámé a, k, d, a to tak, že nejprve vhodným postupem eliminujeme neznámé k, d a získáme kubickou rovnici pro neznámou a. Z první rovnice dostáváme $k = -\frac{2a}{3}$. Ze třetí rovnice můžeme vyjádřit rozdíl $k^2 - d^2$:

$$(k-d)k(k+d) = -10, \quad \text{tedy} \quad k \neq 0 \quad \text{a} \quad k^2 - d^2 = -\frac{10}{k}$$

Nyní dosadíme do jmenovatele posledního zlomku $k = -\frac{2a}{3}$ a po úpravě dostaneme rovnici $k^2 - d^2 = \frac{15}{a}$, kterou lze uvažovat pouze pro $a \neq 0$. Pro $a = 0$ je rovnice ze zadání tvaru $x^3 + 10 = 0$ a má zřejmě jeden trojnásobný kořen $x = \sqrt[3]{-10}$. Našli jsme tedy první hodnotu parametru a, vyhovující zadání, a to $a = 0$. Pro $a = 0$ jsou kořeny $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{-10}$ rovnice ze zadání členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 0$. Nyní už můžeme uvažovat pouze $a \neq 0$ a využít rovnici $k^2 - d^2 = \frac{15}{a}$. Rozdíl $k^2 - d^2$ vyjádříme i ze třetí rovnice předchozí soustavy:

$$k^2 - kd + (k-d)(k+d) + k^2 + kd = -a, \quad \text{tedy} \quad k^2 - d^2 = -a - 2k^2$$

Opět dosadíme do pravé strany za k a po tomto dosazení dostaneme ze dvojího vyjádření rozdílu $k^2 - d^2$:

$$\frac{15}{a} = -a - 2\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 \quad \text{po úpravě} \quad 8a^3 + 9a^2 + 135 = 0$$

[19] Chorvatsko 2003, [7], City Competition, str. 5 a 13-14

Tuto rovnici vyřešíme a zjistíme tak další přípustné hodnoty parametru a. Jedním z kořenů je podle známého pravidla $a = -3$. Vydělíme tedy polynom z levé strany rovnice polynomem $a+3$, abychom získali kvadratickou rovnici pro případné další kořeny. Dostaneme tak rovnici $8a^2 - 15a + 45 = 0$. Protože je diskriminant této rovnice záporný, neexistují žádné další přípustné hodnoty parametru a. Zjistili jsme, že kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice ze zadání musí vyhovovat této rovnici s parametrem $a = -3$:

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0.$$

Vraťme se nyní k soustavě rovnic s neznámými k a d, do které dosadíme $a = -3$. Z první rovnice dostáváme $k = -\frac{2a}{3} = 2$ a z třetí upravené rovnice je $d^2 = k^2 - \frac{15}{a} = 9$, a tedy $d = \pm 3$. Protože změna znaménka čísla d pouze způsobí záměnu kořenů x_1 a x_3, stačí uvažovat pouze $d = 3$. Našli jsme tedy kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice ze zadání, kterými jsou čísla $x_1 = k - d = -1$, $x_2 = k = 2$, $x_3 = k + d = 5$.
Rovnice ze zadání má tedy pro $a = 0$ kořeny $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{-10}$, které jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 0$, a pro $a \neq 0$ kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, které jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

2.5 Diofantické rovnice

Příklad 20. Najděte všechna řešení rovnice $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, kde m, n jsou neznámá přirozená čísla.[20]

Řešení. Protože máme najít všechna řešení jedné rovnice o dvou neznámých, vyřešíme rovnici vzhledem k neznámé m, přičemž neznámou n budeme považovat za parametr. Rovnici tedy bude výhodnější zapsat takto:

$$m^2 - 3m - (n^2 + n - 2) = 0$$

Protože je to kvadratická rovnice vzhledem k m, můžeme její kořeny spočítat pomocí diskriminantu $D = 9 + 4(n^2 + n - 2) = (2n+1)^2$. Její kořeny tedy jsou:

$$m_1 = 2 + n, \quad m_2 = 1 - n$$

Protože n je podle zadání přirozené číslo, je m_2 číslo záporné nebo nula, což odporuje zadané podmínce pro číslo m. Jediná řešení zadané rovnice jsou tedy uspořádané dvojice (m, n) tvaru $(n + 2, n)$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Příklad 21. V oboru celých čísel řešte rovnici:[21]

$$2x^4 - 4xy + y^2 + 2 = 0$$

Řešení. Rovnici budeme řešit vzhledem k neznámé y. Pro přehlednost tedy tuto rovnici upravíme na tvar:

$$y^2 - 4xy + 2x^4 + 2 = 0$$

[20] Slovinsko 2005, [21], str. 6 a 9

[21] Itálie 2005, [5], I giochi di Archimede, str. 4 a 6

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = 16x^2 - 8x^4 - 8$. Aby rovnice měla řešení, musí být $D \geq 0$. Navíc, protože máme rovnici řešit v oboru celých čísel, musí pro některé celé číslo a platit $16x^2 - 8x^4 - 8 = a^2$. Levou stranu této rovnice upravíme na:

$$-8(x^4 - 2x^2 + 1) = -8(x^2 - 1)^2$$

Získali jsme tedy rovnici $-8(x^2 - 1)^2 = a^2$, kde a je vhodné celé číslo. Vzhledem k tomu, že na levé straně rovnice je součin záporného a nezáporného čísla, jediné přípustné číslo a je $a = 0$. Rovnice $-8(x^2 - 1)^2 = 0$ má právě dvě řešení, a to $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Nyní pro obě tyto hodnoty x dopočítáme hodnoty y. Pro $x_1 = 1$ je rovnice ze zadání tvaru $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 = 0$, tedy $y_1 = 2$. Pro $x_2 = -1$ je rovnice ze zadání tvaru $y^2 + 4y + {} + 4 = (y + 2)^2 = 0$, tedy $y_2 = -2$.
Celkem jsme získali obě dvě řešení zadané rovnice, a to uspořádané dvojice

$$(x, y) \in \{(1, 2), (-1, -2)\}.$$

Příklad 22. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice[22]

$$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0.$$

Řešení. Nejprve se pokusíme výraz na levé straně rovnice rozložit na součin. Začneme například tak, že upravíme součet prvních tří členů:

$$4x + 4\sqrt{xy} + y = (2\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Další dva členy upravíme vytknutím a dostaneme tak rovnici:

$$(2\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 14(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 48 = 0$$

Nyní můžeme zavést substituci $z = 2\sqrt{x} + \sqrt{y}$ a po dosazení dostat kvadratickou rovnici:

$$z^2 - 14z + 48 = 0, \quad \text{tedy} \quad (z - 6)(z - 8) = 0$$

Kořeny této rovnice jsou zřejmě $z_1 = 6$, $z_2 = 8$. Pro neznámé x, y tedy musí platit jedna z podmínek:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$$
$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$$

Je-li $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$, pak je $\sqrt{y} = 6 - 2\sqrt{x}$. Protože $\sqrt{y} \geq 0$, musí nutně být $\sqrt{x} \leq 3$. Jelikož hledáme pouze celočíselná řešení, musí platit $x \in \{0, 1, 4, 9\}$. Pro tato x snadno dopočítáme $y \in \{36, 16, 4, 0\}$ v pořadí jako odpovídající x.
Je-li $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$, pak je $\sqrt{y} = 8 - 2\sqrt{x}$. Opět z $\sqrt{y} \geq 0$ dostáváme $\sqrt{x} \leq 4$. Vyhovují tedy $x \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$ a jim odpovídající $y \in \{64, 36, 16, 4, 0\}$.
Celkem jsme tedy zjistili, že zadaná rovnice má devět celočíselných řešení. Jsou jimi uspořádané dvojice (x, y) z množiny

$$\{(0, 64), (1, 36), (4, 16), (9, 4), (16, 0), (0, 36), (1, 16), (4, 4), (9, 0)\}.$$

[22] Chorvatsko 2003, [7], County Competition, str. 16 a 19-20

Příklad 23. Najděte všechna racionální čísla r taková, že rovnice

$$rx^2 + (r+1)x + r = 1$$

má celočíselné kořeny. [23]

Řešení. Protože číslo r ze zadání má být racionální, lze ho zapsat jako zlomek $r = \frac{a}{b}$, kde a, b jsou celá čísla. Navíc bude výhodné uvažovat pouze zlomky v základním tvaru, tedy $a \geq 0$, $b \neq 0$, přičemž jsou čísla a, b nesoudělná. Pokud je $a = 0$, pak je i $r = 0$ a rovnice ze zadání má jediné řešení $x = 1$. Pro $a > 0$ rovnici ze zadání přepíšeme do nových neznámých a, b:

$$\frac{a}{b}x^2 + \left(\frac{a}{b} + 1\right)x + \frac{a}{b} = 1$$

Celou rovnici dále vynásobíme nenulovým číslem b a dále upravíme na tvar:

$$ax^2 + (a+b)x + (a-b) = 0$$

Pro součin kořenů x_1, x_2 této rovnice z Vietových vztahů platí $x_1x_2 = \frac{a-b}{a}$. Protože se zajímáme pouze o případ, kdy kořeny x_1, x_2 jsou celá čísla, musí platit, že a dělí rozdíl $a-b$. Tuto podmínku lze zapsat jako $a - b = ka$, kde k je vhodné celé číslo. Po úpravě této rovnosti dostaneme vyjádření $b = a(1-k)$, odkud zřejmě a dělí b. Protože ale uvažujeme pouze nesoudělná čísla a, b, existuje jediné $a > 0$ splňující tuto podmínku, a to $a = 1$. Pro $a = 1$ dostáváme rovnici:

$$x^2 + (1+b)x + (1-b) = 0$$

Tato rovnice má celočíselné kořeny, je-li její diskriminant druhá mocnina celého čísla. Tedy $(1+b)^2 - 4(1-b) = (b+3)^2 - 12 = c^2$, kde c je vhodné celé číslo. Tuto rovnici dále upravíme tak, že všechny neznámé převedeme na její levou stranu a poté rozložíme na součin $(b+3-c)(b+3+c) = 12$. Odtud je zřejmé, že čísla $b+3-c$ a $b+3+c$ musí být buď obě záporná nebo obě kladná. Nyní můžeme sestavit následující soustavu rovnic, kde k_1, k_2 jsou celá čísla taková, že $k_1k_2 = 12$:

$$b + 3 - c = k_1, \quad b + 3 + c = k_2$$

Sečtením obou rovnic a následnou úpravou získáme rovnici $b = \frac{k_1+k_2}{2} - 3$. Odtud je zřejmé, že součet $k_1 + k_2$ musí být sudý, tedy k_1, k_2 musí mít stejnou paritu (buď jsou obě lichá nebo obě sudá). Existují jen dvě možnosti, jak tímto způsobem rozložit číslo 12, a to $12 = 2 \cdot 6 = (-2) \cdot (-6)$. Pro $12 = 2 \cdot 6$ dostáváme, že $b = 4 - 3 = 1$. Pak je $r = 1$. Tento případ jsme však již dříve vyřešili. Pro $12 = (-2) \cdot (-6)$ dostáváme $b = -4 - 3 = -7$ a $r = -\frac{1}{7}$. Původní rovnice je v tomto případě tvaru $x^2 - 6x + 8 = 0$, tedy $(x-2)(x-4) = 0$, a má celočíselné kořeny.
Celkem jsme zjistili všechny tři hodnoty racionálního čísla r, které vyhovují zadání. Tyto hodnoty jsou $r = 0$, $r = 1$ a $r = -\frac{1}{7}$.

---

[23] Slovinsko 2001, [19], str. 12 a 15-16

Jiné řešení. Pro $r = 0$ má rovnice zřejmě jediné řešení, a to $x = 1$. Dále budeme uvažovat pouze $r \neq 0$. Můžeme tak pro rovnici ze zadání zapsat Vietovy vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{r+1}{r}$$
$$x_1 x_2 = \frac{r-1}{r}$$

Z první rovnice vyjádříme

$$r = \frac{-1}{x_1 + x_2 + 1} \tag{2.9}$$

a dosadíme do druhé rovnice. Po snadných úpravách dostaneme jednu rovnici pro kořeny x_1, x_2 zadané rovnice:

$$x_1 + x_2 - x_1 x_2 + 2 = 0$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit i tak, že určíme hodnotu výrazu $x_1 + x_2 - x_1 x_2$ z vypsaných Vietových vztahů. Z odvozené rovnice vyjádříme kořen x_1:

$$x_1 = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} = 1 + \frac{3}{x_2 - 1}$$

Protože x_1 má být podle zadání celé číslo, musí platit, že $x_2 - 1$ dělí 3. Číslo 3 dělí pouze čísla -3, -1, 1, 3, kterým po řadě odpovídají hodnoty $x_2 = -2$, $x_2 = 0$, $x_2 = 2$, $x_2 = 4$. Pro tyto hodnoty dopočítáme hodnoty druhého kořene x_1, a poté obě dvojice kořenů x_1, x_2 dosadíme do (2.9) a vypočítáme hledané hodnoty r. Celkem tak pro $x_2 = -2$ dostaneme $x_1 = 0$ a $r = 1$, pro $x_2 = 0$ obdržíme $x_1 = -2$ a opět $r = 1$, pro $x_2 = 2$ dostaneme $x_1 = 4$ a $r = -\frac{1}{7}$ a nakonec pro $x_2 = 4$ obdržíme $x_1 = 2$ a opět $r = -\frac{1}{7}$. Získali jsme tak dvě další hodnoty racionáního čísla r splňující zadání úlohy.
Celkem jsme tedy zjistili všechny tři hodnoty r, které vyhovují podmínkám ze zadání. Tyto hodnoty jsou $r = 0$, $r = -\frac{1}{7}$, $r = 1$.

Příklad 24. Najděte všechna celá čísla x, y vyhovující rovnici:[24]

$$x^3 + 9xy + 127 = y^3$$

Řešení. Protože x, y mají být celá čísla, je jistě možné zapsat y jako $y = x + a$, kde a je vhodné celé číslo. Přepišme tedy původní rovnici s využitím tohoto zápisu čísla y:

$$x^3 + 9x(x+a) + 127 = (x+a)^3$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem a:

$$(9-3a)x^2 + (9a - 3a^2)x + (127 - a^3) = 0 \tag{2.10}$$

Pro $a = 3$ jsou zřejmě první dva členy polynomu z levé strany rovnice nulové a dostáváme tak rovnost $100 = 0$, která zřejmě neplatí. Dále budeme uvažovat pouze $a \neq 3$. Pro taková a je tato rovnice kvadratická s diskriminantem

$$D = (9a - 3a^2)^2 - 4(9-3a)(127 - a^3) = (9-3a)(a^3 + 9a^2 - 508).$$

[24] Slovinsko 1999, [18], str. 16 a 17

Rovnice má tedy řešení, pokud je aspoň jeden z výrazů $9-3a$, a^3+9a^2-508 roven nule, nebo pokud jsou oba tyto výrazy kladné, nebo jsou-li oba záporné. Výraz $9-3a$ je roven nule pro $a=3$, ale tuto hodnotu a jsme již dříve vyloučili. Kladný je tento výraz pro $a<3$ a záporný pro $a>3$. V prvním případě hledáme taková celá $a<3$, pro která platí $a^3+9a^2-508 \geq 0$. Protože je ale zřejmě $a^3+9a^2=a^2(a+9) \leq 0$ pro všechna $a \leq -9$, a tedy $a^3+9a^2-508<0$ pro všechna $a \leq -9$, a navíc i pro celá $a \in \{-8,-7,\dots,1,2\}$ je tento výraz záporný, neexistuje v tomto případě žádné vyhovující a. Ve druhém případě hledáme ta celá $a>3$, pro která platí $a^3+9a^2-508 \leq 0$. Postupným dosazováním celých čísel $a>3$ zjistíme, že vyhovují pouze hodnoty $a \in \{4,5\}$, neboť už pro $a=6$ je daný výraz kladný. Zjistili jsme tak, že rovnice (2.10) s celočíselným parametrem a má v oboru reálných čísel řešení pouze pro $a \in \{4,5\}$. Budeme tedy řešit oba tyto případy:

1. $\boxed{a=4}$

   Po dosazení do (2.10) dostaneme rovnici $-3x^2-12x+63=0$, kterou upravíme na $(x+7)(x-3)=0$. Pro oba kořeny této rovnice $x_1=-7$, $x_2=3$ dopočítáme y ze vztahu $y=x+a=x+4$. V tomto případě tedy existují dvě uspořádané dvojice celých čísel x, y vyhovující zadání, a to $(x,y) \in \{(-7,-3),(3,7)\}$.

2. $\boxed{a=5}$

   Po dosazení do (2.10) dostaneme rovnici $3x^2+15x-1=0$, která však nemá celočíselné kořeny, proto v tomto případě žádné řešení zadané úlohy neexistuje.

Celkem tedy existují právě dvě uspořádané dvojice celých čísel x, y vyhovující rovnici ze zadání, a to $(x,y) \in \{(-7,-3),(3,7)\}$.

Příklad 25. V oboru celých čísel řešte rovnici:[25]

$$1+x^2y=x^2+2xy+2x+y$$

Řešení. Rovnici budeme nejprve řešit pro neznámou y. Přepíšeme ji tedy do tvaru:

$$y(x^2-2x-1)=x^2+2x-1$$

Pokud by platilo $x^2-2x-1=0$, pak pomocí diskriminantu $D=8$ získáme kořeny této rovnice $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, což nejsou celá čísla. Můžeme tedy rovnici pro neznámou y výrazem x^2-2x-1 vydělit. Dostaneme tak:

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\frac{x^2-2x-1+4x}{x^2-2x-1}=1+\frac{4x}{x^2-2x-1}$$

Znamená to tedy, že výraz $\frac{4x}{x^2-2x-1}$ musí být celé číslo. Pro $x=0$ dostáváme jedno z řešení původní rovnice, a to $x=0$, $y=1$. Dále budeme uvažovat pouze nenulová čísla $\frac{4x}{x^2-2x-1}$. To ale znamená, že musí platit $\left|\frac{4x}{x^2-2x-1}\right| \geq 1$. Aby tato nerovnost platila, musí zřejmě být $|4x| \geq |x^2-2x-1|$. Protože víme, že pro všechna reálná čísla a, b platí, že $|a| \geq |b|$ právě když $a^2 \geq b^2$, můžeme předchozí nerovnici zapsat jako

$$16x^2 \geq (x^2-2x-1)^2,$$

[25] Velká Británie 2001, [15], Invitational Mathematics Challenge, str. 108-110

což po převedení mocniny z pravé strany na levou dále upravíme podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin:

$$(4x - x^2 + 2x + 1)(4x + x^2 - 2x - 1) \geq 0$$

Po další ekvivalentní úpravě dostaneme nerovnici:

$$(x^2 - 6x - 1)(x^2 + 2x - 1) \leq 0$$

Tuto nerovnici vyřešíme pomocí nulových bodů obou zastoupených činitelů. Nejprve proto vyřešíme rovnice $x^2 - 6x - 1 = 0$ a $x^2 + 2x - 1 = 0$. Pro první rovnici je $D = 40$ a její kořeny jsou $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{40}$. Pro druhou rovnici je $D = 8$ a její kořeny jsou $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$. Nalezené nulové body leží na číselné ose v pořadí daném nerovnostmi:

$$-1 - \sqrt{2} < 3 - \sqrt{10} < -1 + \sqrt{2} < 3 + \sqrt{10}$$

Snadno zjistíme, že výraz $(x^2 - 6x - 1)(x^2 + 2x - 1)$ je záporný právě v intervalech $(-1 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{10})$ a $(-1 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{10})$. Celá čísla, která leží ve sjednocení těchto intervalů, jsou právě čísla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pro tato zjištěná x dopočítáme y z rovnice $y = 1 + \frac{4x}{x^2 - 2x - 1}$. Tímto způsobem zjištěné uspořádané dvojice (x, y) pro přehlednost zapíšeme do tabulky:

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-\frac{1}{7}$	-1	1	-1	-7	7	$\frac{23}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{47}{23}$

Z této tabulky vyplývá, že zadaná rovnice má v oboru celých čísel právě pět řešení. Jsou jimi uspořádané dvojice

$$(x, y) \in \{(-1, -1), (0, 1), (1, -1), (2, -7), (3, 7)\}.$$

2.6 Soustavy rovnic stejného stupně

Příklad 26. Najděte všechna reálná čísla x, y taková, že platí rovnosti:[26]

$$x^3 - y^3 = 7(x - y) \tag{2.11}$$

$$x^3 + y^3 = 5(x + y) \tag{2.12}$$

Řešení. Nejprve levé strany obou rovnic rozložíme na součin:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7(x - y) \tag{2.13}$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 5(x + y) \tag{2.14}$$

Díky tomuto rozkladu můžeme dále uvažovat tři případy, které pro neznámé x, y mohou nastat, a těm se dále samostatně věnovat. V případě, kdy $x = y$ nebo $x = -y$, budeme řešit původní soustavu rovnic, v opačném případě využijeme námi upravenou soustavu.

[26] Slovinsko 2005, [21], str. 12 a 15

Je-li $x = y$, je rovnice (2.11) splněna automaticky a rovnice (2.12) přejde na rovnici $2x^3 = 10x$, po úpravě $x(x^2 - 5) = 0$. Tato rovnice má tři reálné kořeny, a to $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$ a řešením zadané soustavy jsou v tomto případě právě tři uspořádané dvojice $(0,0)$, $(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5})$.
Je-li $x = -y$, je rovnice (2.12) splněna automaticky a rovnice (2.11) přejde na rovnici $2x^3 = 14x$, po úpravě $x(x^2 - 7) = 0$. Tato rovnice má tři reálné kořeny $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{7}$, a řešením zadané soustavy rovnic jsou v tomto případě právě tři uspořádané dvojice $(0,0)$, $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.
Pokud $x \neq \pm y$, můžeme rovnici (2.13) vydělit nenulovým číslem $x - y$ a rovnici (2.14) vydělit nenulovým číslem $x + y$. Dostaneme tak soustavu rovnic:

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$
$$x^2 - xy + y^2 = 5$$

Tyto rovnice nejprve sečteme a dostaneme rovnici $x^2 + y^2 = 6$. Nyní je od sebe odečteme a dostaneme $xy = 1$. Díky tomu víme, že $(x + y)^2 = 8$. Proto je $x + y = \pm\sqrt{8}$. Čísla x, y tedy podle Vietových vztahů tvoří dvojici kořenů právě jedné z kvadratických rovnic $z^2 \mp \sqrt{8}z + 1 = 0$.Tyto kořeny snadno spočítáme pomocí diskriminantu $D = 4$. Jsou to právě $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1$, $z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm 1$. Dostáváme tak čtyři uspořádané dvojice $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$, $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$, $(-\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1)$ a $(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1)$.
Celkem jsme získali všech devět uspořádaných dvojic (x, y), které vyhovují zadané soustavě rovnic. Jsou to dvojice: $(0,0)$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$, $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$, $(-\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1)$, $(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1)$.

Příklad 27. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:[27]

$$x^2 + y^2 - z(x + y) = 2 \tag{2.15}$$
$$y^2 + z^2 - x(y + z) = 4 \tag{2.16}$$
$$z^2 + x^2 - y(z + x) = 8 \tag{2.17}$$

Řešení. Nejprve odečteme rovnici (2.16) od rovnice (2.15), dále rovnici (2.17) od rovnice (2.16) a nakonec rovnici (2.15) od rovnice (2.17). Získáme tak novou soustavu rovnic, jež je pouhým důsledkem původní soustavy, nikoli jejím ekvivalentem:

$$(x + y + z)(x - z) = -2$$
$$(x + y + z)(y - x) = -4$$
$$(x + y + z)(z - y) = 6$$

Z této soustavy vyplývá, že neznámé x, y, z jsou navzájem různé a že zároveň platí $x + y + z \neq 0$. Můžeme tedy všechny rovnice vydělit $x + y + z$ a po další úpravě dostat soustavu rovnic

$$\frac{1}{x + y + z} = \frac{x - z}{-2} = \frac{y - z}{-4} = \frac{z - y}{6} = t, \tag{2.18}$$

[27] Řecko 2003, [2], str. 8-9

kde t je nové neznámé číslo. Pokud zjistíme hodnotu t, neznámé x, y, z snadno dopočítáme. Sečteme-li všechny rovnice původní soustavy, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 2xy &= 14 \\
(x-z)^2 + (y-x)^2 + (z-y)^2 &= 14
\end{aligned}
$$

Do této rovnice můžeme dosadit výrazy s neznámou t, které získáme z rovnic (2.18), tedy $x-z=-2t$, $y-x=-4t$, $z-y=6t$. Po dosazení a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici $t^2=\frac{1}{4}$. Budeme tedy řešit dvě soustavy rovnic s neznámými x, y, z pro $t_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$. Obě soustavy vyřešíme najednou:

$$
\begin{aligned}
x+y+z &= \pm 2 \\
x-z &= \mp 1 \\
x-y &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Odtud sečtením všech rovnic a následnou úpravou dostáváme $x_{1,2}=\pm 1$, dále $y_{1,2}=\mp 1$ a nakonec $z_{1,2}=\pm 2$. Řešením zadané soustavy rovnic jsou tedy právě dvě uspořádané trojice $(x,y,z)=(\pm 1,\mp 1,\pm 2)$. Vzhledem k tomu, že jsme se při našem postupu vrátili k původní soustavě rovnic a sečetli je, není zkouška nutná.

Příklad 28. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:[28]

$$
\begin{aligned}
ab+c+d &= 3 \qquad (2.19)\\
bc+d+a &= 5 \qquad (2.20)\\
cd+a+b &= 2 \qquad (2.21)\\
da+b+c &= 6 \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Řešení. Nejprve od rovnice (2.20) odečteme rovnici (2.21) a od rovnice (2.22) odečteme rovnici (2.19). Po úpravě dostaneme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
c(b-d)-(b-d) &= 3 \\
a(d-b)-(d-b) &= 3
\end{aligned}
$$

Nyní na levých stranách obou rovnic vytkneme shodné činitele:

$$
\begin{aligned}
(b-d)(c-1) &= 3 \qquad (2.23)\\
(d-b)(a-1) &= 3 \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Odečtením rovnice (2.24) od rovnice (2.23) získáme jednu rovnici, kterou následně upravíme:

$$
\begin{aligned}
(b-d)(c-1)-(d-b)(a-1) &= 0 \\
(b-d)(c-1)+(b-d)(a-1) &= 0 \\
(b-d)(c+a-2) &= 0
\end{aligned}
$$

[28] Velká Británie 2004, [14], str. 6 a 14-15

Odtud vyplývá, že musí platit $b = d$ nebo $c + a = 2$. Případ $b = d$ však nemůže nastat, protože pak bychom z (2.23) dostali $0 = 3$, což je spor. Proto musí platit $c + a = 2$. Tuto hodnotu můžeme dosadit do součtu rovnic (2.19) a (2.20), jenž je tvaru

$$b(c+a)+(c+a)+2d = 8,$$

a dostat tak:

$$2b+2+2d = 8 \quad \text{neboli} \quad b+d = 3 \tag{2.25}$$

Odtud a z rovnosti $c + a = 2$ vychází $a + b + c + d = 5$. Protože však podle zadání platí i $bc + d + a = 5$, musí být

$$a+b+c+d = bc+d+a, \quad \text{tedy} \quad b+c = bc. \tag{2.26}$$

Další podmínky pro čísla a, b, c, d můžeme získat odečtením rovnice (2.21) od rovnice (2.22) a odečtením rovnice (2.19) od rovnice (2.20). Po úpravě dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} d(a-c)-(a-c) &= 4 \\ b(c-a)-(c-a) &= 2 \end{aligned}$$

Po vytknutí shodných činitelů na levých stranách obou rovnic a vynásobení druhé rovnice dvěma dostaneme:

$$(a-c)(d-1) = 4, \quad (2b-2)(c-a) = 4 \tag{2.27}$$

Odečtením druhé rovnice od první získáme po úpravě rovnici $(a-c)(d+2b-3) = 0$. Musí tedy platit $a = c$ nebo $d = 3-2b$. Rovnost $a = c$ však zřejmě odporuje oběma rovnicím (2.27). Musí tedy platit $d = 3-2b$. Podle podmínky (2.25) navíc platí $b+d = 3$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, ze které snadno vypočteme $b = 0$, $d = 3$. Pro $b = 0$ ovšem z rovnice (2.26), jež je tvaru $b + c = bc$, plyne, že také $c = 0$. Z podmínky $c + a = 2$ dále dostáváme $a = 2$. Zadaná soustava rovnic má tedy jediné řešení, a to $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ a $d = 3$.

2.7 Soustavy rovnic různého stupně

Příklad 29. Existují reálná čísla x, y taková, že platí[29]

$$x+y = 1, \quad x^2+y^2 = 2, \quad x^3+y^3 = 3?$$

Řešení. Pokud první rovnici umocníme na druhou, dostaneme $(x+y)^2 = 1$, tedy x^2+2xy+ $+y^2 = 1$. Zároveň ze zadání víme, že $x^2+y^2 = 2$. Odtud dostáváme $xy = -\frac{1}{2}$. Dále rovnici $x+y = 1$ umocníme na třetí a obdržíme $(x+y)^3 = 1$, tedy $x^3+y^3+3xy(x+y) = 1$. Víme však, že $xy = -\frac{1}{2}$ a $x+y = 1$ a zároveň $x^3+y^3 = 3$. Po dosazení těchto hodnot do odvozené rovnice dostáváme $3+3\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 1 = 1$. Taková rovnost ale neplatí, protože její levá strana je rovna $\frac{3}{2}$. Čísla x, y, která by splňovala všechny tři rovnice ze zadání, tedy neexistují.

[29] Slovinsko 1999, [18], str. 5 a 7

Příklad 30. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:[30]

$$x+y+z=2 \tag{2.28}$$
$$x^2-y^2-z^2=2 \tag{2.29}$$
$$x-3y^2+z=0 \tag{2.30}$$

Řešení. Nejprve odečteme rovnici (2.30) od rovnice (2.28) a dostaneme tak kvadratickou rovnici pro neznámou y:

$$3y^2+y-2=0$$

Tuto rovnici vyřešíme. Výraz na její levé straně lze rozložit na součin takto:

$$(3y-2)(y+1)=0$$

Kořeny této rovnice tedy jsou $y_1=\frac{2}{3}, y_2=-1$. Tyto hodnoty postupně dosadíme do zadané soustavy rovnic.
Pro $y_1=\frac{2}{3}$ dostáváme:

$$x+z=\frac{4}{3}$$
$$x^2-z^2=\frac{22}{9}$$

Protože $x^2-z^2=(x-z)(x+z)$, dostáváme další rovnici pro neznámé x, z, a to $x-z=\frac{11}{6}$.
Ze soustavy rovnic

$$x+z=\frac{4}{3}$$
$$x-z=\frac{11}{6}$$

sečtením rovnic dostaneme $x=\frac{19}{12}$. Dále z předchozích rovnic dopočítáme $z=-\frac{1}{4}$. Získali jsme tak první řešení zadané soustavy rovnic $x_1=\frac{19}{12}$, $y_1=\frac{2}{3}$, $z_1=-\frac{1}{4}$.
Pro $y_2=-1$ dostáváme soustavu rovnic:

$$x+z=3$$
$$x^2-z^2=3$$

Protože platí $x^2-z^2=(x-z)(x+z)=3$, je zřejmě $x-z=1$. Ze soustavy rovnic

$$x+z=3$$
$$x-z=1$$

dostáváme $x=2$. Po dosazení je $z=1$. Existuje tedy ještě jedno řešení zadané soustavy rovnic, a to $x_2=2$, $y=-1$, $z=1$.
Zadaná soustava rovnic má celkem dvě řešení:

$$x_1=\frac{19}{12}, y_1=\frac{2}{3}, z_1=-\frac{1}{4}$$
$$x_2=2, y_2=-1, z_2=1$$

[30]Velká Británie 2001, [15], Invitational Mathematics Challenge, str. 48-49

Příklad 31. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:[31]

$$x+y-z=0 \tag{2.31}$$
$$zx-xy+yz=27 \tag{2.32}$$
$$xyz=54 \tag{2.33}$$

Řešení. Nejprve ze druhé rovnice vyjádříme $xy=zx+yz-27=z(x+y)-27$. Z první rovnice snadno dostaneme $x+y=z$, což můžeme dosadit do upravené druhé rovnice a získat tak $xy=z^2-27$. Po dosazení za součin xy do třetí rovnice dostaneme kubickou rovnici:

$$z^3-27z-54=0$$

Užitím známého pravidla určíme její celočíselné kořeny $z=-3, z=6$, podle nichž najdeme rozklad:

$$z^3-27z-54=(z-6)(z+3)^2$$

Zjistili jsme tedy všechny možné hodnoty neznámé z z původní soustavy rovnic. Nyní stačí pouze dosadit obě zjištěné hodnoty $z_1=6$, $z_2=-3$ do vztahů $x+y=z$, $xy=\frac{54}{z}$.

1. $\boxed{z=6}$

   Dostaneme soustavu rovnic

   $$x+y=6,\ xy=9.$$

   Pomocí Vietových vztahů sestavíme kvadratickou rovnici s kořeny x, y:

   $$a^2-6a+9=(a-3)^2=0$$

   Odtud dostáváme, že pro $z_1=6$ je $x_1=y_1=3$.

2. $\boxed{z=-3}$

   Dostaneme soustavu rovnic

   $$x+y=-3,\ xy=-18.$$

   Opět s pomocí Vietových vztahů sestavíme kvadratickou rovnici s kořeny x, y:

   $$a^2+3a-18=(a+6)(a-3)=0$$

   Odtud dostáváme dvě různá řešení:

   $$z_2=-3,\ x_2=-6,\ y_2=3$$
   $$z_3=-3,\ x_3=3,\ y_3=-6$$

Celkem jsme tedy zjistili, že zadaná soustava rovnic má právě tři řešení, a to uspořádané trojice $(3,-6,-3)$, $(-6,3,-3)$, $(3,3,6)$.

[31] [6], str. 3 a 12

Jiné řešení. Než začneme zadanou soustavu rovnic řešit, můžeme si všimnout, že až na znaky minus v prvních dvou rovnicích se ve všech rovnicích vyskytují symetrické mnohočleny. Abychom mohli postup pro řešení soustav rovnic se symetrickými mnohočleny použít, zbavíme se znaků minus následujícím způsobem. Rovnice (2.32) a (2.33) vynásobíme -1 a dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ xy-zx-yz &= -27 \\ -xyz &= -54 \end{aligned}$$

Nyní použijeme ve všech rovnicích substituci $u = -z$. Nová soustava rovnic už bude obsahovat pouze symetrické mnohočleny proměnných x, y, u:

$$\begin{aligned} x+y+u &= 0 \\ xy+ux+yu &= -27 \\ xyu &= -54 \end{aligned}$$

Jsou to právě elementární symetrické mnohočleny vyskytující se ve Vietovych vztazích. Můžeme tak přímo sestavit kubickou rovnici s kořeny x, y, u:

$$0 = a^3 - 0a^2 + (-27)a - (-54) = a^3 - 27a + 54 = (a-3)^2(a+6)$$

Kořeny této rovnice jsou $a_1 = a_2 = 3$, $a_3 = -6$. Trojice (x,y,u) a (a_1,a_2,a_3) se mohou lišit jen pořadím prvků. Dostáváme tak celkem tři řešení:

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 = 3,\ u_1 &= -6 \\ x_2 = 3,\ y_2 = -6,\ u_2 &= 3 \\ x_3 = -6,\ y_3 = u_3 &= 3 \end{aligned}$$

Nyní se však ještě musíme vrátit k původní neznámé $z = -u$. Tak obdržíme všechna tři řešení původní soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 = 3,\ z_1 &= 6 \\ x_2 = 3,\ y_2 = -6,\ z_2 &= -3 \\ x_3 = -6,\ y_3 = 3,\ z_3 &= -3 \end{aligned}$$

2.8 Soustavy rovnic s parametrem

Příklad 32. Najděte všechna reálná čísla a, pro něž rovnice

$$1\,988x^2 + ax + 8\,891 = 0 \quad \text{a} \quad 8\,891x^2 + ax + 1\,988 = 0$$

mají společný kořen.[32]

[32]Kanada 1988, [6], Canadian Mathematical Olympiad, str. 1 a 12

Řešení. Protože rovnice ze zadání mají mít společný kořen, budeme tuto úlohu řešit jako soustavu dvou rovnic o neznámých x a a.
Nejprve odečteme první rovnici od druhé a zbavíme se tak neznámé a. Dostaneme kvadratickou rovnici $6\,903x^2 - 6\,903 = 0$, tedy $x^2 - 1 = 0$. Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Nyní oba kořeny dosadíme do první rovnice.

1. Pro $x_1 = 1$ dostáváme rovnici $1\,988 + a + 8\,891 = 0$, tedy $a = -10\,879$.

2. Pro $x_2 = -1$ dostáváme rovnici $1\,988 - a + 8\,891 = 0$, tedy $a = 10\,879$.

Existují právě dvě hodnoty parametru a, pro které mají obě rovnice společný kořen. Tyto hodnoty jsou $a_{1,2} = \pm 10\,879$.

Příklad 33. V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3} &= \frac{1}{a} \\ xy^2z^3 &= a^2 \end{aligned}$$

kde $a \neq 0$ je dané celé číslo.[33]

Řešení. Vynásobením dvou posledních rovnic získáme rovnici:

$$y^2z^3 + xz^3 + xy^2 = a$$

Tato rovnice spolu s první a třetí rovnicí zadané soustavy tvoří soustavu rovnic, v nichž vystupují právě elementární symetrické polynomy proměnných $r = x$, $s = y^2$, $t = z^3$:

$$\begin{aligned} r + s + t &= a \\ st + rt + rs &= a \\ rst &= a^2 \end{aligned}$$

Z Vietových vztahů víme, že řešením této soustavy rovnic je právě jakkoli uspořádaná trojice kořenů kubické rovnice

$$u^3 - au^2 + au - a^2 = 0.$$

Polynom z levé strany této rovnice lze rozložit na $(u - a)(u^2 + a)$. Z tohoto rozkladu je zřejmé, že pokud všechny tři kořeny této rovnice mají být celá čísla, musí být parametr a tvaru $a = -b^2$, kde $b \in \mathbb{N}_0$. Za a tedy do této rovnice dosadíme a dostaneme tak rovnici

$$(u + b^2)(u^2 - b^2) = (u + b^2)(u - b)(u + b) = 0,$$

jejíž kořeny zřejmě jsou $-b^2$, b, $-b$. Zároveň víme, že kořeny této rovnice jsou i $r = x$, $s = y^2$, $t = z^3$. Musíme tedy zjistit, v jakém pořadí si stejné kořeny mohou odpovídat. Protože b je jediný nezáporný kořen z prvního vyjádření a druhá mocnina je vždy nezáporné

[33] Rakousko 2006, [11], str. 10-11

číslo, musí být $y^2 = b$, a číslo b tedy musí být druhou mocninou některého čísla z $\mathbb{N}_0$. Protože další kořen z^3 se rovná jednomu z čísel $-b^2$, $-b$, musí být číslo b i třetí mocninou některého čísla z $\mathbb{N}_0$, celkem tedy $b = c^6$, kde $c \in \mathbb{N}_0$. Znamená to, že pro a, které nelze zapsat ve tvaru $a = -b^2 = -c^{12}$, neexistuje žádné celočíselné řešení zadané soustavy rovnic. Pro $a = -c^{12}$ z rovnosti $y^2 = b = c^6$ dostáváme $y = \pm c^3$. Pro tyto hodnoty y rozlišíme, v jakém pořadí si odpovídají prvky dvojic $(-b, -b^2) = (-c^6, -c^{12})$ a $(r,t) = (x, z^3)$:

1. Je-li $x = -c^6$, pak je $z^3 = -c^{12}$, tedy $z = -c^4$.
2. Je-li $x = -c^{12}$, pak je $z^3 = -c^6$, tedy $z = -c^2$.

Všechna řešení (x,y,z) zadané soustavy rovnic v oboru celých čísel tvoří množinu uspořádaných trojic:

$$\{(-c^6, \pm c^3, -c^4), (-c^{12}, \pm c^3, -c^2); c \in \mathbb{N}_0\}$$

Příklad 34. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax &= |y-z| + y \\ ay &= |z-x| + z \\ az &= |x-y| + x, \end{aligned}$$

kde a je kladný reálný parametr.[34]

Řešení. Zadaná soustava rovnic je cyklická, což znamená, že se nezmění, když trojici (x,y,z) nahradíme kteroukoli z trojic (y,z,x), (z,x,y). Můžeme tedy předpokládat, že $x \le y$ a $x \le z$. Pak ze třetí rovnice zadané soustavy dostaneme

$$az = (y-x) + x, \quad \text{tedy} \quad az = y.$$

Nyní můžeme dosadit $y = az$ do první rovnice soustavy a získat

$$ax = |az - z| + az, \quad \text{tedy} \quad a(x-z) = |az - z|.$$

Protože absolutní hodnota z jakéhokoli výrazu je nezáporné číslo, a a je kladné reálné číslo, musí podle poslední odvozené rovnice být $x \ge z$. Odtud a z předpokladu $x \le z$ plyne, že $x = z$. Ze druhé rovnice soustavy tak dostáváme $ay = z = x$. Dosazením do třetí rovnice soustavy získáme

$$az = |ay - y| + ay, \quad \text{tedy} \quad a(z-y) = |ay - y|.$$

Odtud opět s ohledem na $a > 0$ plyne, že musí být $z \ge y$, a tedy s přihlédnutím k $x = z$ a předpokladu $x \le y$ musí platit $x = y = z$. Řešit zadanou soustavy rovnic tak vlastně znamená řešit rovnici

$$ax = |x - x| + x, \quad \text{tedy} \quad ax = x.$$

Tato rovnice má zřejmě pro $a = 1$ za řešení libovolné reálné číslo, zatímco pro $a \ne 1$ má jediné řešení, a to $x = 0$. Jedinými řešeními zadané soustavy rovnic jsou tak pro $a = 1$ uspořádané trojice $(x,y,z) = (t,t,t)$, kde $t \in \mathbb{R}$, a pro $a \ne 1$ uspořádaná trojice $(x,y,z) = (0,0,0)$.

[34] Bělorusko 1995, [16], str. 8 a 26

Příklad 35. Nechť $n > 1$ je přirozené číslo, a je reálné číslo. Řešte soustavu rovnic:[35]

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 0 \\ x_2 + a^2x_3 &= 0 \\ &\vdots \\ x_k + a^kx_{k+1} &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + a^{n-1}x_n &= 0 \\ x_n + a^nx_1 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve z poslední rovnice vyjádříme $x_n = -a^nx_1$ a s přihlédnutím k tomu pak z předposlední rovnice dostaneme $x_{n-1} = -a^{n-1}(-a^nx_1) = a^{2n-1}x_1$. Takto postupujeme dále až k první rovnici, u které dostaneme $x_1 = (-1)^pa^qx_1$ pro některá celá p, q. Je zřejmé, že pokud $a \neq \pm 1$, musí být $x_1 = 0$. V tomto případě existuje jediné řešení zadané soustavy, a to uspořádaná n-tice $(0, 0, \ldots, 0)$. Dále budeme řešit zadanou soustavu rovnic odděleně pro zbývající $a = 1$ a $a = -1$.

Pro $a = 1$ jsou všechny rovnice typu $x_j + x_{j+1} = 0$, kde $1 \leq j \leq n$, a $x_{n+1} = x_1$. Znamená to tedy, že všechny neznámé x_j pro $1 \leq j \leq n$ si musí být rovny v absolutní hodnotě, a to tak, že

$$x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 = ... = (-1)^{n-1}x_n = (-1)^nx_1.$$

Odtud je zřejmé, že pro lichá n má soustava rovnic pouze nulové řešení. Pro sudá n je pak řešením každá uspořádaná n-tice $(t, -t, t, -t, \ldots, t, -t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Pro $a = -1$ jsou rovnice soustavy tvaru $x_{2k-1} - x_{2k} = 0$ a $x_{2k} + x_{2k+1} = 0$ a poslední rovnice je $x_n + (-1)^nx_1 = 0$. Odtud dostáváme, že platí

$$x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = x_5 = x_6 = \ldots$$

Zakončení tohoto řetězce závisí na tom, jaký je zbytek čísla n po dělení čtyřmi. Rozlišíme proto čtyři případy.

Je-li $n = 4k$, končí řetězec $\ldots = -x_{4k-1} = -x_{4k} = x_1$ a řešením je každá uspořádaná n-tice $(t, t, -t, -t, t, t, \ldots, -t, -t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Je-li $n = 4k + 1$, končí řetězec $\ldots = -x_{4k} = x_{4k+1} = x_1$ a řešením je každá uspořádaná n-tice $(t, t, -t, -t, t, t, \ldots, -t, -t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Je-li $n = 4k + 2$, končí řetězec $\ldots = x_{4k+1} = x_{4k+2} = -x_1$, proto $x_1 = -x_1$ a tudíž jediné řešení je nulová n-tice $(0, 0, \ldots, 0)$.

Je-li $n = 4k + 3$, končí řetězec $\ldots = x_{4k+2} = -x_{4k+3} = -x_1$, proto $x_1 = -x_1$ a tudíž jediné řešení je nulová n-tice $(0, 0, \ldots, 0)$.

Zadaná soustava rovnic má tedy čtyři typy množiny řešení v závislosti na čísle n a parametru a.

Pro $a = 1$ a n sudé je řešením množina

$$\{(t, -t, t, -t, \ldots, t, -t), t \in \mathbb{R}\}.$$

[35] Rakousko 2006, [11], str. 2

Pro $a = -1$ a n dělitelné 4 je řešením množina

$$\{(t,t,-t,-t,t,t,\dots,-t,-t),t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro $a = -1$ a n dávající zbytek 1 po dělení 4 je řešením množina

$$\{(t,t,-t,-t,t,t,\dots,-t,-t,t),t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro všechny ostatní případy je jediným řešením nulové řešení $(0,0,\dots,0)$.

2.9 Symetrické soustavy rovnic

Příklad 36. V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:[36]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x + y + xy &= 19 \end{aligned}$$

Řešení. Všimněme si, že v obou rovnicích zadané soustavy vystupují symetrické polynomy. Protože víme, že libovolný symetrický polynom lze jednoznačně vyjádřit pomocí elementárních symetrickým polynomů, bude výhodné užít substitucí $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Polynom z levé strany první rovnice zadané soustavy lze doplnit na čtverec a získat tak jeho výjádření v nových neznámých σ_1, σ_2:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Do těchto nových neznámých přepíšeme i druhou rovnici zadané soustavy a získáme tak soustavu:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 25, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 19 \tag{2.34}$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme. Nejprve druhou rovnici vynásobíme dvěma a poté obě rovnice sečteme. Dostaneme tak kvadratickou rovnici

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 63 = 0, \quad \text{tedy} \quad (\sigma_1 - 7)(\sigma_1 + 9) = 0,$$

jejíž kořeny jsou $\sigma_1 = 7$, $\sigma_1 = -9$. Dopočítáme pro ně i příslušné hodnoty $\sigma_2 = 19 - \sigma_1$. Soustava rovnic (2.34) má tedy dvě řešení, a to $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{(7,12),(-9,28)\}$. Nyní se postupně pro oba případy vrátíme k původním neznámým x, y. V prvním případě dostáváme soustavu rovnic:

$$x + y = 7, \quad xy = 12$$

Její řešení jsou podle Vietových vztahů právě řešeními kvadratické rovnice $a^2 - 7a + {} + 12 = 0$, tedy $(a-3)(a-4) = 0$, kterými jsou $a_1 = 3$, $a_2 = 4$. To znamená, že řešení této i zadané soustavy rovnic jsou uspořádané dvojice $(x,y) \in \{(3,4),(4,3)\}$. Ve druhém případě dostáváme soustavu rovnic

$$x + y = -9, \quad xy = 28,$$

[36] Slovinsko 2003, [20], str. 7 a 11

jejíž řešení jsou opět podle Vietových vztahů právě řešeními kvadratické rovnice a^2+9a+ $+28=0$. Její diskriminant je $D=9^2-4\cdot 28=-31$ a její kořeny tedy jsou $a_{1,2}=\frac{-9\pm i\sqrt{31}}{2}$. Řešení této i zadané soustavy rovnic tak jsou uspořádané dvojice

$$(x,y)\in\left\{\left(\frac{-9+i\sqrt{31}}{2},\frac{-9-i\sqrt{31}}{2}\right),\left(\frac{-9-i\sqrt{31}}{2},\frac{-9+i\sqrt{31}}{2}\right)\right\}.$$

Celkem jsme tedy získali všechna čtyři řešení zadané soustavy rovnic, a to uspořádané dvojice

$$(x,y)\in\left\{(3,4),(4,3),\left(\frac{-9+i\sqrt{31}}{2},\frac{-9-i\sqrt{31}}{2}\right),\left(\frac{-9-i\sqrt{31}}{2},\frac{-9+i\sqrt{31}}{2}\right)\right\}.$$

Příklad 37. V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:[37]

$$x(x-y)(x-z)=3 \tag{2.35}$$
$$y(y-x)(y-z)=3 \tag{2.36}$$
$$z(z-x)(z-y)=3 \tag{2.37}$$

Řešení. Z tvarů všech rovnic je zřejmé, že $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ a že zároveň musí být neznámé x, y, z navzájem různé. Nyní vydělíme rovnici (2.35) rovnicí (2.36), zároveň rovnici (2.36) rovnicí (2.37) a rovnici (2.37) rovnicí (2.35). Tak dostaneme po následné úpravě soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x(x-z)&=y(z-y)\\y(y-x)&=z(x-z)\\z(z-y)&=x(y-x)\end{aligned}$$

Dále výrazy v rovnicích roznásobíme a upravíme na tvar:

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=z(x+y)\\y^2+z^2&=x(y+z)\\z^2+x^2&=y(z+x)\end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic získáme rovnici $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. Porovnáme-li získanou rovnici s první ze tří sčítaných rovnic, dojdeme k závěru, že musí platit $x^2=yz$. Podobně odvodíme i rovnosti $y^2=xz$ a $z^2=xy$. Odtud je také $x^2-y^2=yz-zx$, tedy $(x-y)(x+y)=-z(x-y)$, proto $x+y+z=0$, neboť víme, že $x\neq y$.
Nyní můžeme například do rovnice (2.35) dosadit $yz=x^2$ a $y+z=-x$ a dostat tak rovnici o jedné neznámé x:

$$\begin{aligned}x(x^2-(y+z)x+yz)&=3\\x(x^2-(-x)x+x^2)&=3\\x^3-1&=0\end{aligned}$$

[37]Chorvatsko 2003, [7], County Competition, str. 18 a 24-25

Výraz na levé straně poslední rovnice rozložíme na součin:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

Jedním z řešení poslední rovnice je $x_1=1$, dalšími dvěma řešeními jsou komplexní čísla $x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Vzhledem k symetrii soustavy rovnic ze zadání musí i neznámé y, z nabývat jen tři nalezené hodnoty. Protože neznámé x, y, z jsou navzájem různé, za řešení mohou připadat v úvahu pouze uspořádané trojice

$$\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1\right),$$
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1\right).$$

Na závěr ještě ověřme zkouškou, že jde skutečně o řešení zadané soustavy rovnic. S ohledem na její symetrii stačí do rovnic (2.35), (2.36) a (2.37) dosadit pouze hodnoty $x=1$, $y=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ a $z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Dostaneme:

$$x(x-y)(x-z)=1\cdot\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3^2-3i^2}{4}=\frac{12}{4}=3$$
$$y(y-x)(y-z)=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2i\sqrt{3}}{2}=\frac{12}{4}=3$$
$$z(z-x)(z-y)=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-2i\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})=3$$

Příklad 38. Najděte všechny takové čtveřice reálných čísel a, b, c, d, pro které má součet součinu libovolných tří z těchto čísel a čtvrtého čísla vždy stejnou hodnotu nezávisle na volbě těchto tří čísel.[38]

Řešení. Zadání úlohy lze přepsat do podoby soustavy rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d:

$$abc+d=abd+c=acd+b=bcd+a \tag{2.38}$$

Tato soustava rovnic je symetrická vzhledem ke všem čtyřem neznámým. To znamená, že každá permutace každého řešení soustavy je také jejím řešením. Díky tomu můžeme rozlišit pět případů, které mohou pro neznámé a, b, c, d nastat:

1. Všechny čtyři neznámé jsou si rovny, tedy $a=b=c=d$.
2. Právě tři neznámé jsou si rovny, tedy $a=b=c\neq d$.
3. První dvě neznámé jsou si rovny a druhé dvě neznámé jsou si rovny, tedy $a=b\neq$ $\neq c=d$.

[38] Rakousko 2004, [10], str. 4-6

4. Pouze dvě neznámé jsou si rovny, tedy $a = b$, $a \neq c$, $a \neq d$, $c \neq d$.

5. Všechny neznámé jsou různé.

Žádný další případ až na permutace neznámých, což zohledníme až v závěru řešení, nemůže nastat. Nyní budeme soustavu rovnic upravovat tak, abychom mohli postupně uvažovat všechny uvedené případy. Z první rovnice dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} abc + d &= abd + c \\ abc + d - abd - c &= 0 \\ ab(c-d) - (c-d) &= 0 \\ (c-d)(ab-1) &= 0 \end{aligned}$$

Stejným způsobem upravíme všechny rovnice plynoucí ze soustavy (2.38) a dostaneme tak soustavu šesti rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} (c-d)(ab-1) &= 0, \quad & (b-d)(ac-1) &= 0 \\ (a-d)(bc-1) &= 0, \quad & (b-c)(ad-1) &= 0 \\ (a-c)(bd-1) &= 0, \quad & (a-b)(cd-1) &= 0 \end{aligned}$$

Různé rovnice z této soustavy závislých rovnic budeme využívat v jednotlivých z pěti uvedených případů.

1. Protože všechny neznámé jsou si rovny, označíme je písmenem r, tedy $a = b = c = d = r$. Původní soustava (2.38) tak přejde v rovnice:

   $$r^3 + r = r^3 + r = r^3 + r = r^3 + r,$$

   jež jsou zřejmě splněny pro všechna reálná r. V tomto případě je tedy řešením každá uspořádaná čtveřice reálných čísel tvaru (r,r,r,r). Tuto skupinu řešení označme jako množinu

   $$K_1 = \{(r,r,r,r); r \in \mathbb{R}\}.$$

2. V tomto případě je $a = b = c \neq d$. S ohledem na $c \neq d$ dostáváme z $(c-d)(ab-1) = 0$, že musí platit $ab = 1$. Vzhledem k $a = b$ tedy platí $a^2 = 1$, což znamená, že $a = \pm 1$. Pro $a = b = c = \pm 1$ přejde soustava (2.38) v rovnice

   $$\pm 1 + d = d \pm 1 = d \pm 1 = d \pm 1,$$

   jež zřejmě platí pro všechná reálná d. Do celkového řešení tohoto případu nesmíme zapomenout zahrnout všechny permutace neznámých a, b, c, d. Dostáváme tak druhou skupinu řešení

   $$K_2 = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, r), (\pm 1, \pm 1, r, \pm 1), (\pm 1, r, \pm 1, \pm 1), \\ (r, \pm 1, \pm 1, \pm 1); r \in \mathbb{R}\}.$$

3. V tomto případě je $a = b \neq c = d$. Protože $b \neq c$, dostáváme z $(b-c)(ad-1) = 0$, že musí platit $ad = 1$, odkud plyne $a \neq 0$ a $d = \frac{1}{a}$. Při označení $a = b = r$ je tedy $c = d = \frac{1}{r}$. Původní soustava (2.38) tak vypadá následovně:

$$r + \frac{1}{r} = r + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + r = \frac{1}{r} + r$$

   To platí pro všechna reálná nenulová r. Se zahrnutím všech permutací neznámých pro tento případ dostáváme skupinu řešení:

$$K_3 = \left\{ \left(r, r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right), \left(r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, r\right), \left(r, \frac{1}{r}, r, \frac{1}{r}\right); r \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

4. Protože v tomto případě $a \neq c$, $a \neq d$ a $c \neq d$, dostáváme postupně z rovnic $(a - c)(bd-1) = 0$ a $(a-d)(bc-1) = 0$, že musí platit zároveň $bd = 1$, $bc = 1$, tedy $d = c$, což je v rozporu s předpokladem tohoto případu. V tomto případě tedy neexistuje žádné řešení.

5. V tomto případě jsou všechny neznámé různé. Podobně jako v předchozím případě tak dostáváme, že musí zároveň platit například $bd = 1$ a $bc = 1$. Odtud je opět $d = c$, což je v rozporu s předpoklady případu. Ani v tomto případě tedy neexistuje žádné řešení.

Celkem jsme zjistili, že množinou všech řešení úlohy je množina uspořádaných čtveřic reálných čísel $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

2.10 Důkazové příklady

Příklad 39. Pro některá reálná čísla a, b, c platí:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 \tag{2.39}$$

Dokažte, že pro ně rovněž platí:[39]

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Řešení. Ze zadání je zřejmé, že $b+c \neq 0$, $c+a \neq 0$, $a+b \neq 0$, jinak by zlomky v (2.39) neměly smysl. Zadanou rovnost (2.39) vynásobíme odděleně čísly a, b, c a dostaneme tyto tři důsledky:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{b+c} + \frac{ba}{c+a} + \frac{ca}{a+b} &= a \\
\frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{cb}{a+b} &= b \\
\frac{ac}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &= c
\end{aligned}$$

[39] Chorvatsko 2003, [7], City Competition, str. 3 a 7

Všechny tyto rovnosti sečteme a upravíme na tvar:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=a+b+c-\frac{a(b+c)}{b+c}-\frac{b(a+c)}{a+c}-\frac{c(a+b)}{a+b}$$

Abychom dokázali, že rovnost ze zadání platí, stačí vypočítat hodnotu výrazu na pravé straně předchozí rovnosti:

$$a+b+c-\frac{a(b+c)}{b+c}-\frac{b(a+c)}{a+c}-\frac{c(a+b)}{a+b}=a+b+c-a-b-c=0$$

Tvrzení je dokázáno.

Příklad 40. Nechť celá čísla a, b splňují rovnost:

$$a=a^2+b^2-8b-2ab+16$$

Dokažte, že a je druhá mocnina celého čísla.[40]

Řešení. Jelikož mnohočlen z pravé strany rovnosti obsahuje tři druhé mocniny celého čísla, a to a^2, b^2, 16, bude vhodné pokusit se ho doplnit na čtverec. V základu druhé mocniny tedy zapíšeme čísla a, b a 4. Po umocnění dostaneme:

$$(a+b+4)^2=a^2+b^2+16+2ab+8b+8a$$

V mnohočlenu z pravé strany této rovnosti vystupují až na znaménka a člen $8a$ stejné členy jako v zadané rovnosti. Změníme tedy vhodným způsobem znaménka v umocňovaném výrazu a dostaneme:

$$(a-b+4)^2=a^2+b^2+16-2ab-8+8a$$

Nyní se vrátíme k původní rovnosti, kde mnohočlen z pravé strany doplníme na čtverec:

$$a=(a-b+4)^2-8a, \quad \text{tedy} \quad 9a=(a-b+4)^2$$

To ale znamená, že $9a$ je druhá mocnina některého celého čísla, tedy i a musí být druhá mocnina celého čísla, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 41. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x>-1$ platí nerovnost:[41]

$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5}\leq 2$$

Řešení. Tuto nerovnost bude výhodné přepsat do tvaru, kdy na jedné straně bude nula:

$$\frac{2+2x^5-x-x^2-x^3-x^4}{1+x^5}\geq 0$$

[40] Bělorusko 1995, [16], str. 7 a 25

[41] Chorvatsko 2008, [9]County Competition, str. 15 a 18

Protože jmenovatel zlomku je pro každé $x > -1$ kladný, stačí dokázat, že pro každé takové x platí
$$2 + 2x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 \geq 0.$$

Zkusme tedy polynom z této nerovnosti rozložit na součin. Nejprve vhodně přeskládáme jeho jednotlivé členy a dále zřejmým způsobem upravujeme

$$\begin{aligned}
(x^5 - x^4) + (x^5 - x^3) - (x^2 - 1) - (x - 1) &\geq 0, \\
x^4(x-1) + x^3(x^2-1) - (x^2-1) - (x-1) &\geq 0, \\
(x-1)(x^4-1) + (x^2-1)(x^3-1) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Protože $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, můžeme v celé levé straně vytknout $(x-1)(x^2-1)$ a dostat:

$$(x-1)(x^2-1)(2x^2+x+2) \geq 0$$

Nakonec ještě výraz ve druhé závorce rozložíme na součin a dostaneme:

$$(x-1)^2(x+1)(2x^2+x+2) \geq 0$$

Pro každé $x > -1$ jsou zřejmě všechny výrazy v závorkách kladné. To však znamená, že tato nerovnost za předpokladu $x > -1$ platí. Tak jsme dokázali i platnost původní nerovnosti.

Příklad 42. Dokažte, že všechny reálné kořeny rovnice

$$x^4 - 14x^3 + 64x^2 - 114x + 63 = 0$$

jsou z intervalu $(0, 14)$.[42]

Řešení. Označme $P(x)$ polynom z levé strany zadané rovnice. Tento polynom můžeme jistě vydělit se zbytkem dvojčlenem $x - a$, kde a je libovolné reálné číslo. Pokud zbytek po tomto dělení není roven nule, není číslo a kořenem polynomu $P(x)$. Nejprve vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $x - 0 = x$:

$$P(x) = Q(x) \cdot x + r = (x^3 - 14x^2 + 64x - 114)x + 63$$

Zjistili jsme, že zbytek po tomto dělení je $63 \neq 0$. Nula tak není kořenem polynomu $P(x)$. Navíc je patrné, že pro každé $x < 0$ je hodnota polynomu $Q(x)$ záporné číslo, protože jde o součet čtyř záporných čísel, a tedy $Q(x) \cdot x$ je kladné číslo, což znamená, že žádné záporné číslo nemůže být kořenem polynomu $P(x)$.
Nyní vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $x - 14$:

$$P(x) = R(x)(x-14) + s = (x^3 + 64x + 782)(x-14) + 11\,011$$

Zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $x - 14$ je $11\,011 \neq 0$. Číslo 14 tedy také není kořenem polynomu $P(x)$. Navíc pro všechna $x > 14$ jsou hodnoty polynomů $R(x)$ i $x - 14$ kladná čísla, a tedy žádné $x > 14$ nemůže být kořenem polynomu $P(x)$.
Celkem jsme tedy zjistili, že všechny reálné kořeny polynomu $P(x)$ musí být z intervalu $(0, 14)$.

[42][6], str. 6 a 14

Příklad 43. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má rovnice

$$\underbrace{f(f(\dots(f}_{n-\text{krát}}(x))\dots)=0,$$

kde $f(x)=x^2+2007x+1$, aspoň jedno reálné řešení.[43]

Řešení. Polynom ze zadání lze doplnit na čtverec tak, že dostaneme

$$f(x)=\left(x+\frac{2007}{2}\right)^2-\frac{2007^2}{4}+1.$$

Protože druhá mocnina libovolného čísla je vždy nezáporné číslo, je zřejmé, že obor hodnot funkce f je $A=\langle-\frac{2007^2}{4}+1,\infty)$. Pokud tedy zobrazíme všechna reálná čísla pomocí funkce f, dostaneme $f(\mathbb{R})=A$. Protože toto zobrazení musíme provést n-krát, abychom dostali obor hodnot rovnice ze zadání, je třeba zjistit, čemu je rovno $f(A)$, neboť už při druhém zobrazení $f(f(\mathbb{R}))$ provádíme zobrazení pouze čísel z intervalu A. Díky předchozí úpravě předpisu funkce f doplněním na čtverec a vzniklé druhé mocnině $(x+\frac{2007}{2})^2$ víme, že k tomu, abychom po zobrazení dostali celý obor hodnot funkce f, nemusíme zobrazovat všechna reálná čísla, ale stačí zobrazit pouze čísla z intervalu $D=\langle-\frac{2007}{2},\infty)$. Platí jistě $f(D)=A$, přičemž je zřejmě $D\subset A$, neboť $-\frac{2007^2}{4}+1<-\frac{2007}{2}$. To ale znamená, že i $f(A)=A$, a proto $\underbrace{f(f(\dots(f}_{n-\text{krát}}(\mathbb{R}))\dots))=A$. Protože interval A zřejmě obsahuje číslo 0, musí existovat aspoň jedno reálné číslo x, pro které platí $\underbrace{f(f(\dots(f}_{n-\text{krát}}(x))\dots)=0$. To tedy znamená, že tato rovnice má aspoň jedno reálné řešení, což jsme chtěli dokázat.

2.11 Příklady řešené pomocí nerovností

Příklad 44. V oboru reálných čísel řešte rovnici:[44]

$$\left(x^2+y^2-4\right)^2(xy-1)^2+\sqrt{y^2-x^2}=0$$

Řešení. Nejprve si uvědomme, že druhá odmocnina je v oboru reálných čísel definována pouze pro nezáporná čísla. Musí tedy platit $y^2\geq x^2$. Navíc z definice druhé odmocniny je $\sqrt{y^2-x^2}\geq 0$. Protože i činitelé z prvního sčítance levé strany rovnice jsou jako druhé mocniny nezáporná čísla, musí platit jednak $(x^2+y^2-4)^2(xy-1)^2=0$, tedy $x^2+y^2=4$ nebo $xy=1$, a současně $\sqrt{y^2-x^2}=0$, tedy $y^2=x^2$. Dostáváme tak dvě soustavy rovnic pro neznámé x, y, jejichž řešení jsou právě řešeními zadané rovnice. V prvním případě je to soustava

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=4\\ y^2&=x^2,\end{aligned}$$

[43] Brazílie 2007, [13], str. 34 a 141

[44] Chorvatsko 2005, [8], City Competition, str. 4 a 7

jejíž řešení jsou $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$ s nezávislými výběry obou znamének. Ve druhém případě řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ y^2 &= x^2, \end{aligned}$$

jejíž řešení jsou $x = y = \pm 1$.
Získali jsme tak všech šest řešení zadané rovnice. Jsou jimi uspořádané dvojice:

$$(x,y) \in \{(\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(1,1),(-1,-1)\}$$

Příklad 45. V oboru reálných čísel řešte rovnici:[45]

$$4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1$$

Řešení. Danou rovnici nejprve upravíme na tvar $4xyz = 1 + x^4 + y^4 + z^4$. Nyní můžeme první i druhé dva členy z pravé strany rovnice doplnit na čtverec tak, abychom zde získali součet druhých mocnin výrazů:

$$4xyz = \left(1-x^2\right)^2 + 2x^2 + \left(y^2 - z^2\right)^2 + 2y^2z^2$$

Dále od obou stran rovnice odečteme člen $4xyz$ a upravíme vytknutím takto:

$$0 = \left(1-x^2\right)^2 + \left(y^2-z^2\right)^2 + 2\left(x^2 - 2xyz + y^2z^2\right)$$

Poslední činitel polynomu z pravé strany rovnice lze zapsat jako další čtverec. Po této úpravě dostáváme rovnici:

$$\left(1-x^2\right)^2 + \left(y^2-z^2\right)^2 + 2\,(x-yz)^2 = 0$$

Na levé straně je součet druhých mocnin výrazů, tedy nezáporných čísel, který je proto roven nule, pouze jsou-li hodnoty všech těchto výrazů rovny nule. Dostáváme tak soustavu tří rovnic o neznámých x, y, z:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \\ x - zy &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice této soustavy je $x = \pm 1$. Pro $x = 1$ je $yz = 1$ a s využitím druhé rovnice tedy $y = z = \pm 1$. Pro $x = -1$ stejným způsobem dostaneme $y = -z = \pm 1$.
Celkem jsme získali všechna čtyři řešení zadané rovnice, a to uspořádané trojice:

$$(x,y,z) \in \{(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)\}$$

[45]Chorvatsko 2005, [8], City Competition, str. 17 a 19

Jiné řešení. Rovnici ze zadání nejprve upravíme takto:

$$xyz = \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 1}{4}$$

Na pravé straně je aritmetický průměr čtyř nezáporných čísel. Zapíšeme příslušnou AG-nerovnost:

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 1}{4} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot 1}$$

Výraz z levé strany této nerovnosti je podle upravené rovnice roven xyz a výraz z její pravé strany je zřejmě roven $|xyz|$. Platí tedy nerovnost $xyz \geq |xyz|$. Z vlastnosti absolutní hodnoty ale musí platit nerovnost $xyz \leq |xyz|$. Znamená to tedy, že $xyz = |xyz|$, tedy $xyz \geq 0$. Díky tomu z AG-nerovnosti dostáváme rovnost. Víme však, že v AG-nerovnosti nastane rovnost, právě když jsou si všechny členy, pro něž tuto nerovnost sestavujeme, rovny. V našem případě tedy musí platit $x^4 = y^4 = z^4 = 1$. Znamená to, že každé z čísel x, y, z je rovno buď 1 nebo -1. Nesmíme ovšem zapomenout na dříve získanou platnou nerovnost $xyz \geq 0$. Všechna řešení zadané rovnice tedy jsou čtyři uspořádané trojice:

$$(x,y,z) \in \{(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1)\}$$

Příklad 46. V oboru reálných čísel řešte rovnici:[46]

$$\left(16x^{200} + 1\right)\left(y^{200} + 1\right) = 16x^{100}y^{100}$$

Řešení. K řešení této úlohy využijeme substituce $4x^{100} = a$, $y^{100} = b$. Rovnici ze zadání nyní přepíšeme do nových neznámých a, b:

$$\left(a^2 + 1\right)\left(b^2 + 1\right) = 4ab$$

Nyní výrazy v závorkách roznásobíme a členy vzniklého polynomu vhodně seskupíme:

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2ab + 1 = 0$$

Dále první i druhou trojici členů rozložíme na součin podle vzorce $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ a dostaneme:

$$(a-b)^2 + (ab-1)^2 = 0$$

Protože druhá mocnina libovolného reálného čísla je vždy nezáporné číslo, je tato rovnice splněna, právě když platí $a = b$ a zároveň $ab = 1$. To znamená, že pro hodnoty neznámých a, b existují pouze dvě možnosti. Buď je $a = b = 1$ nebo $a = b = -1$. Pro $a = b = 1$ se vrátíme zpět k původním neznámým x, y. Dostaneme tak:

$$4x^{100} = 1, \quad y^{100} = 1, \quad \text{tedy} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, \quad y = \pm 1$$

Pro $a = b = -1$ dostáváme po dosazení $4x^{100} = -1$, $y^{100} = -1$. Levé strany těchto rovnic mají nezáporné hodnoty, proto v tomto případě žádná reálná řešení zadané rovnice neexistují.

Zadaná rovnice má tedy právě čtyři řešení. Jsou jimi uspořádané dvojice:

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right)\right\}$$

[46] Chorvatsko 2008, [9], National Competition, str. 29 a 33

Jiné řešení. Z tvaru rovnice je zřejmé, že x a y musí být nenulová čísla. Je tedy možné rovnici vydělit $4x^{100}y^{100}$ a dostat tak:

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4 \tag{2.40}$$

Tvar výrazů v závorkách je $a+\frac{1}{a}$, kde a je v obou případech kladné číslo. Tohoto faktu dále využijeme. Pro čísla a a $\frac{1}{a}$ napíšeme AG-nerovnost $\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geq 1$, tedy $a+\frac{1}{a}\geq 2$, přičemž rovnost nastane právě když $a=\frac{1}{a}$, tedy pro $a=1$. Protože z (2.40) víme, že součin dvou výrazů tohoto tvaru je roven 4, musí v AG-nerovnostech nastat rovnost, a tedy musí v obou případech platit $a=1$. Proto z (2.40) dostáváme $4x^{100}=1$ a $y^{100}=1$. Nyní už snadno spočítáme hodnoty $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y=\pm 1$. Získali jsme tak všechna čtyři řešení zadané rovnice.

Příklad 47. Určete všechna reálná čísla a taková, že nerovnost

$$x^4+y^4+2ax^2y^2\geq (a+1)\left(x^3y+xy^3\right)$$

platí pro všechna reálná x, y.[47]

Řešení. Nerovnost upravíme tak, aby na pravé straně byla nula a roznásobíme závorky:

$$x^4+y^4+2ax^2y^2-ax^3y-axy^3-x^3y-xy^3\geq 0$$

Dále jednotlivé činitele vhodně seskupíme tak, abychom mohli vytýkat:

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3+ax^2y^2-ax^3y+ax^2y^2-axy^3\geq 0$$

Nyní z prvních dvou činitelů vytkneme x^3, ze druhých dvou y^3, z dalších dvou ax^2y a z posledních dvou axy^2. Dostaneme tak:

$$x^3(x-y)+y^3(y-x)+ax^2y(y-x)+axy^2(x-y)\geq 0$$

Z celého výrazu na levé straně nerovnosti je nyní možné vytknout $x-y$. Toto vytknutí provedeme:

$$(x-y)\left(x^3-y^3-ax^2y+axy^2\right)\geq 0$$

Dále je ještě možné upravit výraz ve druhé závorce. Pro první dva jeho členy užijeme vzorec pro rozdíl třetích mocnin a ze druhých dvou vytkneme axy. Dostaneme tak:

$$(x-y)\left[(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-axy(x-y)\right]\geq 0$$

Z druhé závorky tedy můžeme opět vytknout $x-y$ a dostat:

$$(x-y)^2\left(x^2+(1-a)xy+y^2\right)\geq 0$$

Protože druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporné číslo, zbývá už jen zjistit, pro která a je v reálných proměnných x, y splněno:

$$x^2+(1-a)xy+y^2\geq 0$$

Tato nerovnost platí pro všechna reálná x, y, je-li diskriminant této kvadratické rovnice s neznámou x nekladný, tedy pokud platí $D=(1-a)^2y^2-4y^2=y^2[(1-a)^2-4]\leq 0$. Tato nerovnost je pro každé y splněna, právě když platí $(1-a)^2\leq 4$, neboli $|1-a|\leq 2$. Všechna hledaná čísla a tudíž tvoří interval $\langle -1,3\rangle$.

[47] Bělorusko 1995, [16], str. 8 a 28

Příklad 48. V oboru reálných čísel řešte rovnici:[48]

$$\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}}=\frac{5x-6-x^2}{2}$$

Řešení. Všimněme si, že na levé straně rovnice je nezáporné číslo, proto i na pravé staně rovnice musí být nezáporné číslo, tedy $5x-6-x^2\geq 0$. Tuto nerovnici vyřešíme, abychom zjistili, do kterých intervalů musí možná řešení dané rovnice patřit:

$$\begin{aligned}5x-6-x^2&\geq 0\\ x^2-5x+6&\leq 0\\ (x-2)(x-3)&\leq 0\end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že pro všechna řešení x dané rovnice musí platit $2\leq x\leq 3$. Nyní se budeme věnovat úpravě levé strany rovnice. Nejprve upravíme výraz, který se odmocňuje jako první, tedy výraz $1+(x-5)(x-7)$:

$$1+(x-5)(x-7)=x^2-12x+36=(x-6)^2$$

Odtud je zřejmé, že pod odmocninou je v tomto případě vždy nezáporné reálné číslo, takže pro kořeny dané rovnice odtud nedostáváme žádné nové podmínky. Protože zároveň víme, že $x\leq 3$ a odmocnina z libovolného nezáporného čísla je opět nezáporné číslo, musí být

$$\sqrt{1+(x-5)(x-7)}=\sqrt{(x-6)^2}=6-x.$$

Rovnici ze zadání tak můžeme v oboru $\langle 2,3\rangle$ zjednodušit na rovnici

$$\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)(x-6)}}=\frac{5x-6-x^2}{2}.$$

Nyní upravíme výraz $4-(x-2)(x-6)$:

$$4-(x-2)(x-6)=x^2-8x+16=(x-4)^2$$

Opět jsme zjistili, že výraz pod odmocninou je vždy nezáporný. Zároveň z podmínky $x\leq 3$ a z toho, že odmocnina z nezáporného čísla je vždy nezáporné číslo, dostáváme:

$$\sqrt{4-(x-2)(x-6)}=\sqrt{(x-4)^2}=4-x$$

Rovnici ze zadání můžeme v oboru $\langle 2,3\rangle$ opět zjednodušit na rovnici

$$\sqrt{4-x(4-x)}=\frac{5x-6-x^2}{2}.$$

I tentokrát upravíme výraz pod odmocninou a dostaneme:

$$4-x(4-x)=x^2-4x-4=(x-2)^2$$

[48]Rakousko 2004, [10], str. 2-3

Výraz pod odmocninou je opět vždy nezáporné číslo. Navíc z podmínky $x \geq 2$ a z toho, že odmocnina z nezáporného čísla je vždy nezáporné číslo dostáváme:

$$\sqrt{4-x(4-x)} = \sqrt{(x-2)^2} = x-2$$

Rovnici ze zadání tak můžeme v oboru $\langle 2,3\rangle$ ještě jednou upravit a dostat rovnici bez odmocnin, kterou následně vyřešíme:

$$\begin{aligned} x-2 &= \frac{5x-6-x^2}{2} \\ 2(x-2) &= -(x-2)(x-3) \\ (x-2)(2+x-3) &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Kořen $x_1 = 1$ ale nevyhovuje podmínce $2 \leq x \leq 3$ určené na začátku řešení. Rovnice ze zadání tak má v oboru $\mathbb{R}$ právě jedno řešení, a to $x = 2$.

Příklad 49. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které je množinou řešení nerovnice

$$(x^2+ax+4)(x^2-5x+6) \leq 0$$

právě jeden interval reálných čísel.[49]

Řešení. Označme I interval všech řešení zadané nerovnice a $P(x)$ trojčlen x^2+ax+4. Interval I musí být kvůli podmínce ze zadání zřejmě ohraničený a uzavřený. Navíc, protože trojčlen x^2-5x+6 lze rozložit na součin $(x-2)(x-3)$, odkud víme, že interval $\langle 2,3\rangle$ musí být podmnožinou intervalu I, má interval I jeden z tvarů

$$\langle 2,3\rangle, \quad \langle 2-r,3\rangle, \quad \langle 2,3+s\rangle, \quad \langle 2-t,3+u\rangle,$$

kde r, s, t, u jsou vhodná kladná čísla. Nyní postupně rozebereme, co tyto možnosti znamenají pro trojčlen $P(x)$ a hodnoty parametru a.

1. $I = \langle 2,3\rangle$. Tento případ nastane, právě když trojčlen $P(x)$ buď nemá žádný reálný kořen, tedy jeho diskriminant $D = a^2-16$ je záporný, což znamená, že $a \in (-4,4)$, nebo má jeden dvojnásobný kořen z intervalu $\langle 2,3\rangle$, což znamená, že $a = \pm 4$. Pro $a = 4$ je ale tento dvojnásobný kořen roven číslu $-2 \notin \langle 2,3\rangle$. Pro $a = -4$ je tento kořen roven číslu $2 \in \langle 2,3\rangle$. V tomto případě tedy podmínce ze zadání vyhovují právě hodnoty $a \in \langle -4,4)$.

2. $I = \langle 2-r,3\rangle$. Tento případ nastane, právě když trojčlen $P(x)$ má dva reálné kořeny $2-r$ a 2. Z rovnosti $0 = P(2) = 2^2+2a+4$ však plyne, že $a = -4$ a trojčlen $P(x)$ má tedy jeden dvojnásobný kořen, jak jsme zjistili již v předchozím případě. Tento případ tedy za dané podmínky nenastane pro žádné reálné a.

[49]Rakousko 2006, [11], str. 11

3. $I = \langle 2, 3+s \rangle$. Tento případ nastane, právě když trojčlen $P(x)$ má dva reálné kořeny 3 a $3+s$. Z rovnosti $0 = P(3) = 3^2 + 3a + 4$ plyne, že $a = -\frac{13}{3}$, odkud je $P(x) = x^2 - \frac{13}{3}x + 4$. Druhý kořen polynomu $P(x)$ je z Vietových vztahů roven $\frac{13}{3} - 3$, což je číslo menší než 3. Ani tento případ tak nenastane pro žádné reálné a.

4. $I = \langle 2-t, 3+u \rangle$. V tomto případě by musel mít trojčlen $P(x)$ kořeny $2-t$ a $3+u$, takže množina všech řešení zadané nerovnice by byla tvaru $\langle 2-t, 2 \rangle \cup \langle 3, 3+u \rangle$, což nevyhovuje podmínce ze zadání.

Celkem jsme tedy zjistili, že hodnoty parametru a vyhovující zadání úlohy jsou právě hodnoty z intervalu $\langle -4, 4)$.

Příklad 50. Najděte všechny možné hodnoty absolutního členu a_0 z polynomu

$$P(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

víte-li, že všechny jeho kořeny jsou reálná čísla.[50]

Řešení. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_8$ kořeny polynomu $P(x)$. K vyjádření absolutního členu a_0 využijeme Vietova vztahu, podle kterého je $a_0 = x_1 \cdot \ldots \cdot x_8$. Budeme tedy zjišťovat možnou hodnotu součinu všech kořenů polynomu $P(x)$. Protože známe koeficienty u prvních tří členů polynomu $P(x)$, můžeme Vietovy vztahy aplikovat i na koeficienty u x^7 a x^6:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + \ldots + x_8 = 4 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_6x_7 + x_7x_8 = 7 \end{aligned}$$

Známe tedy především hodnotu součtu všech kořenů polynomu $P(x)$. Pokud by se nám podařilo dokázat, že $x_1 = \ldots = x_8$, znali bychom všechny kořeny polynomu $P(x)$ a tím i jejich součin.
K tomu, abychom platnost hypotézy o rovnostech $x_1 = \cdots = x_8$ dokázali, využijeme Cauchyovu nerovnost, podle které pro libovolná reálná čísla $u_1, \ldots, u_n$ a $v_1, \ldots, v_n$ platí

$$(u_1v_1 + \ldots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2),$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když $u_1 : v_1 = \ldots = u_n : v_n$. V našem případě bude výhodné položit $u_i = x_i$ pro $i = 1, \ldots, 8$ a $v_1 = \ldots = v_8 = 1$. Pak tedy dostaneme nerovnost

$$(x_1 + \ldots + x_8)^2 \leq 8(x_1^2 + \ldots + x_8^2), \tag{2.41}$$

ve které nastane rovnost, právě když bude platit $x_1 = \ldots = x_8$. Protože součet všech kořenů polynomu $P(x)$ je $\sigma_1 = 4$, je levá strana nerovnosti (2.41) rovna 16. Abychom zjistili hodnotu výrazu na pravé straně nerovnosti, musíme spočítat součet $s_2 = x_1^2 + \ldots + x_8^2$. K tomu využijeme vzorec $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, jehož platnost lze snadno ověřit umocněním σ_1^2 a následným vhodným seskupením všech členů. Po dosazení do tohoto vzorce získáme $s_2 = 4^2 - 2 \cdot 7 = 2$. Výraz na pravé straně nerovnosti (2.41) je tedy roven $8 \cdot 2 = 16$. Zjistili jsme tak, že na obou stranách nerovnosti (2.41) jsou výrazy mající stejnou hodnotu. Proto musí platit $x_1 = \ldots = x_8$, což jsme chtěli dokázat. Protože součet všech kořenů polynomu

[50] Asie 2003, [6], Asian Pacific Mathematical Olympiad, str. 9 a 15

$P(x)$ je roven 4 a všechny kořeny jsou si rovny, dostáváme $x_1 = \ldots = x_8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Pak je tedy hodnota součinu $x_1 \cdot \ldots \cdot x_8 = \frac{1}{256}$. Zjistili jsme tak, že jediná možná hodnota absolutního členu a_0 z polynomu $P(x)$ je $\frac{1}{256}$. Dodejme, že z našeho postupu plyne, že polynom $P(x)$ popsané vlastnosti je jediný, totiž $P(x) = (x - \frac{1}{2})^8$, takže jsou jednoznačně určeny i ostatní koeficienty $a_1, \ldots, a_5$.

Závěr

Tato práce je obsahově i metodicky koncipována tak, aby mohla sloužit především učitelům matematiky jako doplňkový materiál pro matematické semináře na gymnáziích, případně pro přípravu studentů na matematickou olympiádu. Vzhledem k podrobnosti uváděných řešení v příkladové části a uvedení méně známých termínů a tvrzení v části teoretické, je tato práce vhodná i pro samotné studenty.

Mně osobně zpracování této práce umožnilo upevnit si některé metody řešení úloh, ve kterých se vyskytují polynomy. Nejvíce však tvorba této práce přispěla ke zlepšení mého didaktického vyjadřování při komentářích k řešeným příkladům. Jsem si jista, že zkušenosti nabyté při tvorbě této práce i práci samotnou budu ve své budoucí pedagogické praxi plně využívat.

Seznam použité literatury

[1] *Bulgarian Mathematical Competitions*. Sofia: Union of Bulgarian Mathematicians, 2005.

[2] *Hellenic Mathematical Competitions*. Athens: Hellenic Mathematical Society, 2003.

[3] Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J. *Metody řešení matematických úloh I*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011. 278 s. ISBN 978-80-210-5636-7.

[4] Horák, P. *Polynomy*. 1. vyd. Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1978. 127 s.

[5] *Italian Mathematical Contests 2005-2006*. Pisa, 2006.

[6] Khan, A. *A Few Elementary Properties of Polynomials* [online]. c2006 [cit. 2011-4-15]. Dostupné z:

http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/PolynomialsAK.pdf

[7] *Mathematical Competitions in Croatia*. Zagreb: HMD, 2003.

[8] *Mathematical Competition in Croatia*. Zagreb: HMD, 2005.

[9] *Mathematical Competition in Croatia*. Zagreb: HMD, 2008.

[10] *Problems of the 35th Austrian Mathematical Olympiad*. 2004.

[11] *Problems of the 37th Austrian Mathematical Olympiad*. 2006.

[12] *Republic of Moldova Mathematical Olympiad*. Chişinău: Mathematical Olympic Council of Moldova, 1997.

[13] Shine, C. Y. *Thirty Years of Brazilian Math Olympiads*. Rio de Janeiro: AOBM, 2009.

[14] *The British Mathematical Olympiad*. UKMT, 2004. 145 s. ISBN 0 9536823 2 3.

[15] *UK Mathematics Trust Yearbook 2000-2001*. Leeds: UKMT, 2001.

[16] *XLV Byelorussian Mathematical Olympiad*. Minsk, 1995.

[17] *23rd Albanian Mathematical Olympiad for High Schools*. Tirana, 2002.

[18] *43th National Math Olympiad in Slovenia*. Ljubljana: Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia, 1999.

[19] *45th National Math Olympiad in Slovenia*. Ljubljana: Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia, 2001.

[20] *47th National Math Olympiad in Slovenia*. Ljubljana: Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia, 2003.

[21] *49th National Math Olympiad in Slovenia*. Ljubljana: Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia, 2005.

Příloha: Přehled zadání a výsledků

Příklad 1. Pro všechna reálná a, b, c platí rovnost:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+kabc$$

Určete hodnotu konstanty k.

Výsledek: $k=3$

Příklad 2. Nechť u, v, w jsou kořeny rovnice $x^3-x-1=0$ v oboru komplexních čísel. Vypočtěte hodnotu výrazu $\frac{1-u}{1+u}+\frac{1-v}{1+v}+\frac{1-w}{1+w}$.

Výsledek: $\frac{1-u}{1+u}+\frac{1-v}{1+v}+\frac{1-w}{1+w}=1$

Příklad 3. Pro některá reálná čísla a, b platí obě rovnosti $a^3=3ab^2+11$, $b^3=3a^2b+2$. Určete hodnotu výrazu a^2+b^2.

Výsledek: $a^2+b^2=5$

Příklad 4. Pro reálná čísla x, y, z platí rovnost $xyz=1$. Vypočtěte hodnotu výrazu $\frac{x+1}{xy+x+1}+$ $+\frac{y+1}{yz+z+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$.

Výsledek: $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+z+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}=2$

Příklad 5. Najděte součet všech kořenů, reálných i imaginárních, rovnice

$$x^{2001}+\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{2001}=0,$$

jestliže víte, že žádný její kořen není násobný.

Výsledek: $x_1+x_2+\cdots+x_{1999}+x_{2000}=500$

Příklad 6. Určete všechna čísla a, b taková, že polynom ax^5+bx^4+1 je dělitelný polynomem x^2-x-1.

Výsledek: $a=3$, $b=-5$

Příklad 7. Určete součet koeficientů mnohočlenu $P(x)$ z rozkladu $x^{23}+23x^{17}-18x^{16}-$ $-24x^{15}+108x^{14}=(x^4-3x^2-2x+9)\cdot P(x)$, přičemž skutečnost, že takový mnohočlen $P(x)$ existuje, dokazovat nemusíte.

Výsledek: $P(1)=18$

Příklad 8. Rozložte polynom $(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$ na součin polynomů dále nerozložitelných v oboru reálných čísel.

Výsledek: $x^2(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+2x+3)$

Příklad 9. Nechť $f(n)=n^4+2n^3-n^2+2n+1$. Určete všechna celá čísla a, b, c, d taková, že pro každé n platí $f(n)=(n^2+an+b)(n^2+cn+d)$.

Výsledek: $(a,b,c,d)\in\{(-1,1,3,1),(3,1,-1,1)\}$

Příklad 10. Zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $x^2-(a+b)x+ab$, kde $a\neq b$, je $mx+n$. Vyjádřete koeficienty m, n pomocí parametrů a, b. Potom vypočítejte tyto koeficienty pro případ dělení polynomu $P(x)=x^{200}$ polynomem x^2-x-2 a dokažte, že jsou to celá čísla.

Výsledek: $m=\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$, $n=\frac{P(b)a-P(a)b}{a-b}$; pro $P(x)=x^{200}$ je $m=\frac{2^{200}-1}{3}$, $n=\frac{2^{200}+2}{3}$

Příklad 11. V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^2+(a-2)x-2a^2+5a-3=0$. Poté určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které je absolutní hodnota jednoho kořene zadané rovnice dvojnásobkem absolutní hodnoty jejího druhého kořene.

Výsledek: $x_1=-2a+3$, $x_2=a-1$ pro všechna $a\in\mathbb{R}$; vlastnost mají $a\in\left\{\frac{5}{4},\frac{5}{3},\frac{7}{5}\right\}$

Příklad 12. V oboru reálných čísel řešte rovnici$(2x+1)^2+y^2+(y-2x)^2=\frac{1}{3}$.

Výsledek: $(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Příklad 13. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které mají rovnice

$$x^2-(2a+1)x+a=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-4)x+a-1=0$$

postupně reálné kořeny x_1, x_2 a x_3, x_4 takové, že platí $\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_2(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}$.

Výsledek: $a_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$

Příklad 14. Nechť $f(x)=x^2+(2a-1)x-a-3$, kde a je reálné číslo.

1. Dokažte, že rovnice $f(x)=0$ má dva různé reálné kořeny x_1, x_2.
2. Určete všechny hodnoty a takové, že $x_1^3+x_2^3=-72$.

Výsledek: 2. část: $a=2$

Příklad 15. Pro kvadratický trojčlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty platí

1. oba jeho kořeny jsou celá kladná čísla,
2. součet jeho koeficientů je prvočíslo,
3. pro některé celé číslo k platí $P(k)=-55$.

Dokažte, že jedním z kořenů takového kvadratického kořenu je číslo 2 a najděte jeho druhý kořen.

Výsledek: $x_1 = 2, x_2 = 18$

Příklad 16. Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž $a \neq 0$. Určete všechna řešení rovnice $P(x^2 + 4x - 7) = 0$, jestliže víte, že jedním jejím kořenem je $x = 1$ a aspoň jeden její kořen je dvojnásobný.

Výsledek: $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = -5$ nebo $x_1 = 1, x_2 = -5, x_{3,4} = -2$

Příklad 17. Určete všechny hodnoty parametru a, pro které má rovnice

$$x^4 - (3a+2)x^2 + a^2 = 0$$

čtyři reálné kořeny, jež jsou po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

Výsledek: $a \in \left\{6, -\frac{6}{19}\right\}$

Příklad 18. Najděte všechny hodnoty parametru k, při kterých má rovnice

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1\,984 = 0$$

v oboru komplexních čísel takové dva kořeny, jejichž součin je -32.

Výsledek: $k = 86$

Příklad 19. Nechť a je reálné číslo. Najděte kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice

$$x^3 + 2ax^2 - ax + 10 = 0,$$

jestliže víte, že jsou to po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Výsledek: pro $a = 0$ je $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{-10}$; pro $a \neq 0$ je $x_1 - 1, x_2 = 2, x_3 = 5$

Příklad 20. Najděte všechna řešení rovnice $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, kde m, n jsou neznámá kladná celá čísla.

Výsledek: $(m,n) \in \{(n+2,n), n \in \mathbb{N}\}$

Příklad 21. V oboru celých čísel řešte rovnici $2x^4 - 4xy + y^2 + 2 = 0$.

Výsledek: $(x,y) \in \{(1,2),(-1,-2)\}$

Příklad 22. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice:

$$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$$

Výsledek: $(x,y) \in \{(0,64),(1,36),(4,16),(9,4),(16,0),(0,36),(1,16),(4,4),(9,0)\}$

Příklad 23. Najděte všechna racionální čísla r taková, že rovnice $rx^2 + (r+1)x + r = 1$ má celočíselné kořeny.

Výsledek: $r \in \left\{0, 1, -\frac{1}{7}\right\}$

Příklad 24. Najděte všechna celá čísla x, y vyhovující rovnici $x^3 + 9xy + 127 = y^3$.

Výsledek: $(x,y) \in \{(-7,-3),(3,7)\}$

Příklad 25. V oboru celých čísel řešte rovnici $1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$.

Výsledek: $(x,y) \in \{(-1,-1),(0,1),(1,-1),(2,-7),(3,7)\}$

Příklad 26. Najděte všechna reálná čísla x, y taková, že platí rovnosti:

$$x^3 - y^3 = 7(x-y), \quad x^3 + y^3 = 5(x+y)$$

Výsledek: $(x,y) \in \{(0,0),(\sqrt{5},\sqrt{5}),(-\sqrt{5},-\sqrt{5}),(\sqrt{7},-\sqrt{7}),(-\sqrt{7},\sqrt{7}),$
$(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1),(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1),(-\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}-1),(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}+1)\}$

Příklad 27. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x^2 + y^2 - z(x+y) = 2, \quad y^2 + z^2 - x(y+z) = 4, \quad z^2 + x^2 - y(z+x) = 8$$

Výsledek: $(x,y,z) = (\pm 1, \mp 1, \pm 2)$

Příklad 28. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$ab + c + d = 3, \quad bc + d + a = 5, \quad cd + a + b = 2, \quad da + b + c = 6$$

Výsledek: $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 3$

Příklad 29. Existují reálná čísla x, y taková, že platí

$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad x^3 + y^3 = 3?$$

Výsledek: neexistují

Příklad 30. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x + y + z = 2, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 2, \quad x - 3y^2 + z = 0$$

Výsledek: $(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{19}{12}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right), (2,-1,1)\right\}$

Příklad 31. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x + y - z = 0, \quad zx - xy + yz = 27, \quad xyz = 54$$

Výsledek: $(x,y,z) \in \{(3,-6,-3),(-6,3,-3),(3,3,6)\}$

Příklad 32. Najděte všechna reálná čísla a, pro něž rovnice $1\,988x^2 + ax + 8\,891 = 0$ a $8\,891x^2 + ax + 1\,988 = 0$ mají společný kořen.

Výsledek: $a_{1,2} = \pm 10\,879$

Příklad 33. V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$x+y^2+z^3=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{a}, \quad xy^2z^3=a^2,$$

kde $a \neq 0$ je dané celé číslo.

Výsledek: Pro $a \neq -c^{12}$, kde $c \in \mathbb{N}_0$, soustava rovnic nemá řešení.
Pro $a=-c^{12}$, kde $c \in \mathbb{N}_0$, je řešením soustavy množina uspořádaných trojic

$$(x,y,z) \in \{(-c^6, \pm c^3, -c^4), (-c^{12}, \pm c^3, -c^2); c \in \mathbb{N}_0\}$$

Příklad 34. Řešte soustavu rovnic

$$ax=|y-z|+y, \quad ay=|z-x|+z, \quad az=|x-y|+x,$$

kde a je kladný reálný parametr.

Výsledek: Pro $a=1$ jsou řešením soustavy trojice $(x,y,z)=(t,t,t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.
Pro $a \neq 1$ je řešením soustavy uspořádaná trojice $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Příklad 35. Nechť $n>1$ je přirozené číslo, a je reálné číslo. Řešte soustavu rovnic:

$$x_1+ax_2=0, \quad x_2+a^2x_3=0, \ \ldots, \ x_k+a^kx_{k+1}=0, \ \ldots, \ x_{n-1}+a^{n-1}x_n=0, \quad x_n+a^nx_1=0$$

Výsledek: Pro $a=1$ a n sudé je řešením množina $\{(t,-t,t,-t,\ldots,t,-t), t \in \mathbb{R}\}$.
Pro $a=-1$ a $n \equiv 0 \pmod 4$ je řešením množina $\{(t,t,-t,-t,t,t,\ldots,-t,-t), t \in \mathbb{R}\}$.
Pro $a=-1$ a $n \equiv 1 \pmod 4$ je řešením množina $\{(t,t,-t,-t,t,t,\ldots,-t,-t,t), t \in \mathbb{R}\}$.
Pro všechny ostatní případy je jediným řešením nulové řešení $(0,0,\ldots,0)$.

Příklad 36. V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$x^2+y^2=25, \quad x+y+xy=19$$

Výsledek: $(x,y) \in \left\{(3,4),(4,3),\left(\frac{-9+i\sqrt{31}}{2},\frac{-9-i\sqrt{31}}{2}\right),\left(\frac{-9-i\sqrt{31}}{2},\frac{-9+i\sqrt{31}}{2}\right)\right\}$

Příklad 37. V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$x(x-y)(x-z)=3, \quad y(y-x)(y-z)=3, \quad z(z-x)(z-y)=3$$

Výsledek: $(x,y,z) \in \left\{\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),\right.$
$\left.\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1\right)\right\}$

Příklad 38. Najděte všechny takové čtveřice reálných čísel a, b, c, d, pro které má součet součinu libovolných tří z těchto čísel a čtvrtého čísla vždy stejnou hodnotu nezávisle na volbě těchto tří čísel.

Výsledek: $(a,b,c,d) \in \{(r,r,r,r); r \in \mathbb{R}\} \cup \{(\pm 1,\pm 1,\pm 1,r),(\pm 1,\pm 1,r,\pm 1),$
$(\pm 1,r,\pm 1,\pm 1),(r,\pm 1,\pm 1,\pm 1); r \in \mathbb{R}\} \cup \left\{\left(r,r,\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right),\left(r,\frac{1}{r},\frac{1}{r},r\right),\left(r,\frac{1}{r},r,\frac{1}{r}\right); r \in \mathbb{R}-\{0\}\right\}$

Příklad 39. Pro některá reálná čísla a, b, c platí $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Dokažte, že pro ně rovněž platí $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Příklad 40. Nechť celá čísla a, b splňují rovnost $a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16$. Dokažte, že a je druhá mocnina celého čísla.

Příklad 41. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x > -1$ platí nerovnost:

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{1 + x^5} \leq 2$$

Příklad 42. Dokažte, že všechny reálné kořeny rovnice $x^4 - 14x^3 + 64x^2 - 114x + 63 = 0$ jsou z intervalu $(0, 14)$.

Příklad 43. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má rovnice

$$\underbrace{f(f(\dots(f}_{n-\text{krát}}(x))\dots) = 0,$$

kde $f(x) = x^2 + 2007x + 1$, aspoň jedno reálné řešení.

Příklad 44. V oboru reálných čísel řešte rovnici $(x^2 + y^2 - 4)^2(xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0$.

Výsledek: $(x,y) \in \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (1,1), (-1,-1)\}$

Příklad 45. V oboru reálných čísel řešte rovnici $4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1$.

Výsledek: $(x,y,z) \in \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\}$

Příklad 46. V oboru reálných čísel řešte rovnici $(16x^{200} + 1)(y^{200} + 1) = 16x^{100}y^{100}$.

Výsledek: $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, -1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, -1\right) \right\}$

Příklad 47. Určete všechna reálná čísla a taková, že nerovnost

$$x^4 + y^4 + 2ax^2y^2 \geq (a+1)(x^3y + xy^3)$$

platí pro všechna reálná x, y.

Výsledek: $a \in \langle -1, 3 \rangle$

Příklad 48. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}$$

Výsledek: $x = 2$

Příklad 49. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které je množinou řešení nerovnice $(x^2 + ax + 4)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$ právě jeden interval reálných čísel.

Výsledek: $a \in \langle -4, 4)$.

Příklad 50. Najděte všechny možné hodnoty absolutního členu a_0 z polynomu

$$P(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

víte-li, že všechny jeho kořeny jsou reálná čísla.

Výsledek: $a_0 = \frac{1}{256}$