MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Planimetrické výpočty v příkladech

Bakalářská práce

Petra Mačková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2018**

Obsah

Úvod

Téma planimetrických výpočtů potažmo celé planimetrie je důležitou součástí výuky matematiky na střední i základní škole. Podstatná není jenom pro žáky, jejichž následující cesta vzděláváním povede na vysoké školy technického rázu, neboť všichni lidé potřebují jistou geometrickou představivost, aby se mohli orientovat, pohybovat. Geometrie nás především učí myslet. Vzhledem k náročnosti je její výuka občas opomíjena, a to zvlášť v situacích, kdy učitele tlačí čas z důvodu „předimenzované“ náplně předmětu matematika vzhledem k jeho nízké hodinové dotaci v současných ŠVP.

Jako posluchačka bakalářského studia připravující se na učitelské povolání považuji za dobrou příležitost, že mohu zpracovat svoji bakalářskou práci jako sbírku řešených planimetrických úloh.

„K pochopení geometrie nevede žádná královská cesta,“ odpovídá Eukleidés egyptskému faraonovi na otázku, zda se dá snadno porozumět geometrii. Nejvyšší poctou učitelů může být tuto cestu, a cesty jí podobné, vlastním studentům zjednodušovat a pomáhat jim při jejich hledání. Hlavní motivací věnovat se potom tématu planimetrických výpočtů pro mě bylo nejen vlastní zdokonalení se v této oblasti a šance přinést ostatním kolegům v učitelské praxi kvalitně zpracovanou sbírku úloh, kterými se dá doplnit středoškolský i základoškolský výklad matematiky, ale především pomoc žákům na jejich cestě geometrií. Práce by měla díky metodickým výkladům jednotlivých úloh posloužit žákům základních i středních škol, kteří se rozhodnou postoupit krůček za rámec úloh předkládaných ve škole.

Cílem je pro mě přehledně zpracovat sbírku úloh ruského matematika I. F. Šarigyna, která se kromě ruského dočkala i anglického (ne však českého) vydání, takže není české učitelské veřejnosti příliš známa. Autor se v zásadě nezabýval tříděním úloh - ať už podle obtížnosti, nebo podle témat, a také sbírku až na výjimky neopatřil návodem pro řešení úloh. Proto jednotlivé úlohy hodlám postupně vyřešit a roztřídit do kapitol podle způsobu řešení.

Protože je již nyní jasné, že se v mnoha úlohách budou kombinovat různé poučky a věty, nebude třídění úloh do tematických celků zcela jednoznačné. Proto v každé sekci uvádím, které další úlohy by do ní mohly být zařazeny, přestože jsem je z určitých důvodů zařadila jinam. Některé úlohy není možno zařadit nikam, nebo by stály samy ve své sekci, proto jsem jsou zahrnuty do poslední podkapitoly druhé kapitoly pod názvem Jiné.

Ke tvorbě obrázků, které nechybí u žádného příkladu, byl použit matematický program GeoGebra, který je volně dostupný. Text práce včetně matematických formulí je vysázen v systému LaTeX.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje. Je-li v úlohách použito vlastní značení, vždy je na daném místě v textu dle potřeb úlohy nově zavedeno.

A	bod A
p	přímka p
AB	úsečka AB
AB	polopřímka určená body A, B
$\triangleleft AXB$	úhel AXB
α	úhel α
o	osa o
v_a	výška ke straně a
t_a	těžnice trojúhelníku vedená vrcholem A
S_{AB}	střed úsečky AB
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$k(S;\ r)$	kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r
$X \in p$	bod X leží na přímce p
$p \cap q$	průnik přímky p s přímkou q
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad úsečkou AB
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\lvert\triangleleft AXB\rvert$	velikost úhlu AXB
$\lvert AB\rvert$	velikost úsečky AB

Kapitola 1

Teoretický úvod

V této kapitole se ve zkratce budeme věnovat teoretickému úvodu do problematiky planimetrických výpočtů. Následující definice, věty či poučky ve většině případů doslovně převzaté z učebnic [2] a [1] zde uvedeme (bez důkazů) proto, aby při studiu této práce nebylo třeba používat další literaturu. Veškeré postupy uvedené při řešení úloh v praktické části bakalářské práce se budou opírat o tuto kapitolu.

1.1 Úhly, kružnice

1 Definice. Jsou-li polopřímky VA, VB opačné, je každý z obou úhlů AVB úhel přímý. Dále splývající polopřímky VA, VB určují jednak nulový úhel AVB, který neobsahuje žádné další vnitřní body, jednak plný úhel AVB, jehož vnitřními body jsou všechny ostatní body roviny.

Uvedeme přehled významných dvojic úhlů, které často využijeme v řešení úloh.

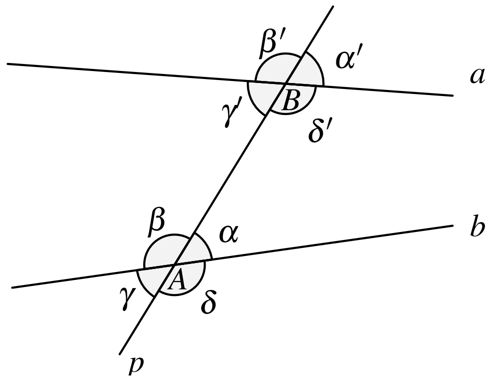
2 Definice. Dva konvexní úhly AVB, AVC, které mají společné rameno VA a ramena VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají úhly vedlejší.

3 Definice. Dva konvexní úhly AVB, CVD, jejichž ramena VA, VD a rovněž tak VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají vrcholové úhly. Druhou dvojicí vrcholových úhlů jsou konvexní úhly AVC, BVD.

4 Definice. Pravý úhel je takový úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším. Všechny pravé úhly jsou shodné.

Dále zavedeme s pomocí obrázku 1.1 úhly souhlasné a střídavé.

5 Definice. Každý z bodů A, B je vrcholem čtyř konvexních úhlů. Říkáme, že tyto úhly α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', jsou vyťaty příčkou p přímek a, b. Dvojice α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' se nazývají úhly souhlasné. Nahradíme-li jeden ze dvou souhlasných úhlů úhlem k němu vrcholovým, dostaneme dvojici střídavých úhlů. Dvojice střídavých úhlů tedy jsou α, γ'; β, δ'; γ, α'; δ, β'.



Obr. 1.1: Souhlasné a střídavé úhly

V následující kapitole budeme využívat i tyto poznatky:

- Vrcholové úhly jsou shodné.
- Součet vedlejších úhlů je úhel přímý.
- Jsou-li přímky a, b rovnoběžné, pak každá dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné.
- Jestliže jedna dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné, pak přímky a, b jsou rovnoběžné.

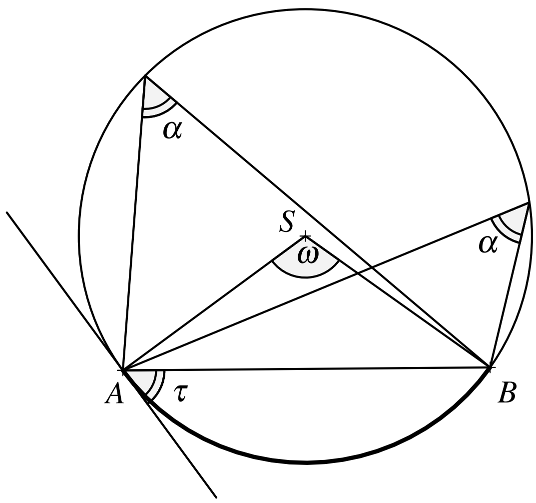
Úhly příslušné oblouku

6 Definice. Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

7 Definice. Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá obvodový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Platí:

- Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.
- Úsekový úhel příslušný oblouku je shodný s obvodovými úhly k témuž oblouku.
- Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné.
- Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý.
- Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je tupý.
- Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je pravý. (Thaletova věta)



Obr. 1.2: Obvodový, středový a úsekový úhel: $\alpha = \tau = \frac{1}{2}\omega$

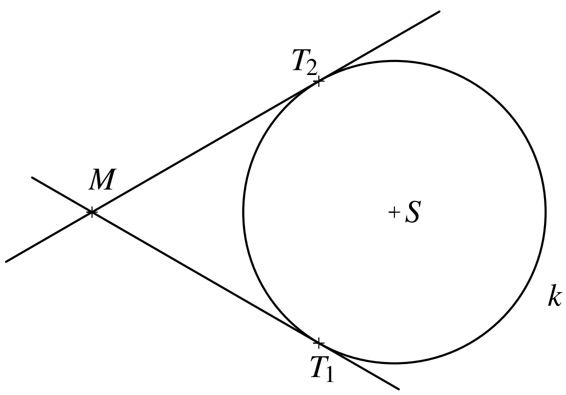
8 Definice. Konvexní úhel BAX (příp. ABX), jehož jedním ramenem je polopřímka AB (popř. BA), kde A, B jsou krajní body oblouku AB kružnice k v bodě A (popř. B), se nazývá úsekový úhel příslušný k oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Další vlastnosti kružnice

Zde se budeme krátce věnovat vybraným vlastnostem kružnice, které využijeme v Kapitole 2. Platí:

- Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem tětivy AB.
- Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje bod dotyku se středem kružnice.

Bodem M, který leží vně kružnice, procházejí právě dvě tečny kružnice. Délka úsečky MT_1 (MT_2) se nazývá délka tečny. Platí $|MT_1| = |MT_2|$. Situaci znázorníme v obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Tečny ke kružnici

1.2 Trojúhelník

9 Definice. Trojúhelník ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB. Přitom body A, B, C jsou různé a neleží v jedné přímce.

Platí:

- Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý.
- Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.
- Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti delší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel a naopak, proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.

10 Definice. Výška trojúhelníka je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku.

Výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě, tzv. průsečíku výšek, kterému se také říká ortocentrum.

11 Definice. Těžnice trojúhelníku je úsečka, spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany.

12 Definice. Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě zvaném těžiště trojúhelníku. Vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice.

Každému trojúhelníku můžeme opsat i vepsat kružnici. Kružnice opsaná trojúhelníku je kružnice procházející všemi vrcholy trojúhelníku. Jejím středem je průsečík os stran trojúhelníku.
Kružnice vepsaná trojúhelníku je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku. Jejím středem je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku.

1.3 Shodnost a podobnost trojúhelníků

13 Definice. Řekneme-li o trojúhelnících ABC a $A'B'C'$, že jsou shodné, znamená to, že při vhodném přemístění přejde bod A do bodu A', bod B do bodu B' a bod C do bodu C'. Zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Shodnost trojúhelníků zpravidla zjišťujeme pomocí známých vět:

- **sss**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.
- **usu**: Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech k ní přilehlých, jsou shodné.
- **sus**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.

- **Ssu**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

14 Definice. Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro jejich strany platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$, $|B'C'| = k \cdot |BC|$, $|A'C'| = k \cdot |AC|$. Zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$. Podobnost trojúhelníků zjišťujeme opět pomocí známých vět:

- **uu**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.
- **sus**: Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

1.4 Čtyřúhelníky

15 Definice. Takový n-úhelník, kde $n = 4$, se nazývá čtyřúhelník.

1. Různoběžník je čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné.
2. Lichoběžník je čtyřúhelník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany nejsou rovnoběžné. Rovnoběžné strany se nazývají základny, zbývající dvě ramena.

   O lichoběžníku víme:

   - Jeho strany nejsou shodné, ramena mohou být shodná. Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, nazýváme rovnoramenný lichoběžník.

   - Jen jedno rameno může být kolmé k základně. Pak je toto rameno kolmé i k druhé základně. Takový lichoběžník nazveme pravoúhlý lichoběžník.

   - Součet vnitřních úhlů při každém rameni lichoběžníku je úhel přímý.

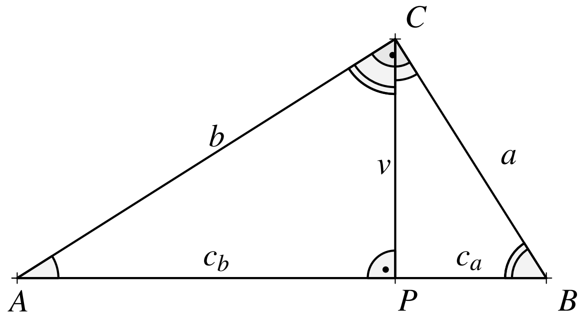
   - Střední příčka lichoběžníku, tj. úsečka spojující středy jeho ramen, je rovnoběžná s oběma základnami. Její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.
3. Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné. Podle velikostí úhlů můžeme rovnoběžníky dělit na pravoúhlé (čtverec, obdélník) a kosoúhlé (kosočtverec, kosodélník). Podle délek stran pak na rovnostranné (čtverec, kosočtverec) a různostranné (obdélník, kosodélník).

Základní vlastnosti rovnoběžníku jsou:

- Protější strany rovnoběžníku jsou shodné.
- Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.
- Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí; jejich společný bod je středem souměrnosti rovnoběžníku.

1.5 Eukleidovy věty, věta Pythagorova

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C sestrojíme výšku CP k přeponě AB. Označme a, b délky odvěsen, c délku přepony, v výšku k přeponě, c_a, c_b délky úseček BP a AP. Úsečka BP se nazývá úsek přepony přilehlý k odvěsně BC; obdobně úsečka AP se nazývá úsek přepony přilehlý k odvěsně AC. Podle obrázku 1.4 nahlédneme, že každé dva z trojúhelníků ABC, ACP, CBP jsou podobné.



Obr. 1.4: Pravoúhlý trojúhelník ABC

Z podobnosti trojúhelníků ACP a CBP plyne:

$$c_b : v = v : c_a \Rightarrow v^2 = c_a \cdot c_b \Rightarrow v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

Slovy:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony. (Eukleidova věta o výšce)

Z podobnosti trojúhelníků CBP a ABC plyne

$$a : c_a = c : a \Rightarrow a^2 = c \cdot c_a,$$

analogicky platí

$$b : c_b = c : b \Rightarrow b^2 = c \cdot c_b.$$

Slovy:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku. (Eukleidova věta o odvěsně)

Sečtením předchozích dvou výsledků obdržíme:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b), \text{ neboli } \; a^2 + b^2 = c^2.$$

Takto jsme dostali algebraický zápis Pythagorovy věty:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

Platí také věta k ní obrácená:

Platí-li pro délky stran trojúhelníku ABC vztah $a^2 + b^2 = c^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý a c je délka jeho přepony.

1.6 Goniometrické vzorce

Zde uvedeme krátký přehled základních goniometrických vzorců. Pro všechna reálná čísla x, y (pro která mají zastoupené hodnoty smysl) platí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1 \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin 2x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\
\left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

Dále pro všechna x, y od 0° do 90° platí ekvivalence

$$\sin x = \cos y \Leftrightarrow x + y = 90^\circ.$$

1.7 Trigonometrie

Věta 1.1 (Sinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c, platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Při řešení úloh používáme často sinovou větu ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \ \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

slovy:

Poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí protilehlých úhlů.

Věta 1.2 (Kosinová věta)**.** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhel proti straně BC má velikost α, platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Věta 1.3. *Pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC platí*

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Věta 1.4. *Pro obsah S každého trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c platí*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Kapitola 2

Řešení úloh

V této kapitole se budeme věnovat nenápadné tenké knize *Zadači po geometrii: Planimetria*, jejímž autorem je významný ruský matematik Igor Fedorovič Šarygin, který do její první části vložil 297 úloh, z nichž 28 v naší práci teď podrobně vyřešíme a roztřídíme do menších tematických celků. Každá z úloh ve svém názvu kromě čísla přiděleného z důvodu třídění v této práci nese i číslo, které má v původní Šaryginově sbírce, aby ji čtenář mohl případně dohledat v originále.

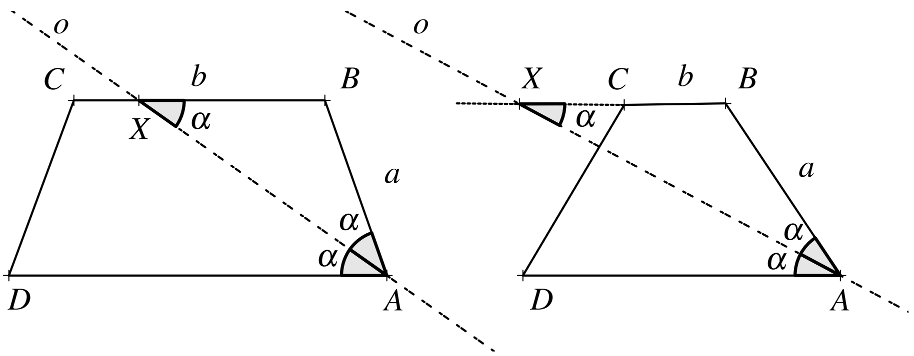
2.1 Vlastnosti úhlů

V řešení následujících úloh využijeme některé z vlastností úhlů, resp. úhlů příslušných danému kružnicovému oblouku.

Příklad 1; Šar. 39

V lichoběžníku $ABCD$ je dáno $|AB| = a$, $|BC| = b$ ($a \neq b$). Rozhodněte, kdy osa úhlu při vrcholu A protne základnu BC a kdy rameno CD.

Řešení:



Obr. 2.1: Příklad 1

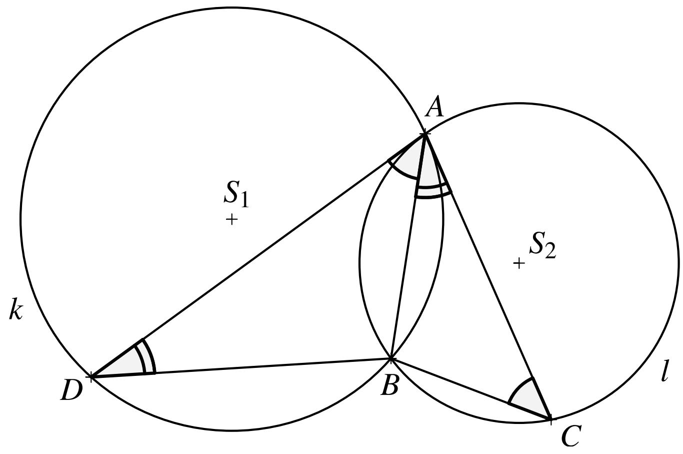
Je-li vyloučena rovnost mezi a a b, pak mohou nastat pouze situace $a > b$, nebo $b > a$. Rozeberme si je. V případě $b > a$ (na obrázku vlevo) zdůvodníme, že osa o úhlu DAB

protne polopřímku BC v takovém bodě X, který leží na základně BC. Protože úhly DAX a AXB jsou střídavé, jsou shodné. Protože osa o půlí úhel DAB, jsou shodné úhly DAX a XAB, tudíž i úhly BXA a XAB jsou shodné a trojúhelník ABX je díky tomu rovnoramenný se základnou XA. Pak ale $|AB| = |BX| = a < b$ a proto osa o protne skutečně základnu BC lichoběžníka $ABCD$.
Na obrázku vpravo vidíme situaci, kdy $a > b$. Analogickou úvahou zjistíme, že je trojúhelník ABX rovnoramenný, tudíž $|AB| = |BX| = a > b$. Proto bod X leží na prodloužení základny BC za vrchol C a osa o tak neprotne základnu BC lichoběžníka, ale rameno CD. Připustíme-li variantu, kdy $a = b$, je nyní jasné, že osa o by tehdy procházela bodem C.

Příklad 2; Šar. 34

Dvě nesoustředné kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Bodem A prochází sečna AD kružnice k, která je zároveň tečnou kružnice l s bodem dotyku A. Analogicky sečna AC kružnice l je tečnou kružnice k s bodem dotyku A. Dokažte, že $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|$.

Řešení:



Obr. 2.2: Příklad 2

Při řešení předložené úlohy je vhodné si uvědomit, že podle věty o shodnosti obvodového a úsekového úhlu jsou shodné úhly BDA a BAC a také úhly BAD a BCA. A tedy díky větě *uu* jsou si trojúhelníky ADB a CAB podobné. Zapišme rovnosti poměrů stran, které si v této podobnosti odpovídají:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$

Odtud vyjádříme:

$$\frac{|AC|^2}{|AD|^2} = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$$

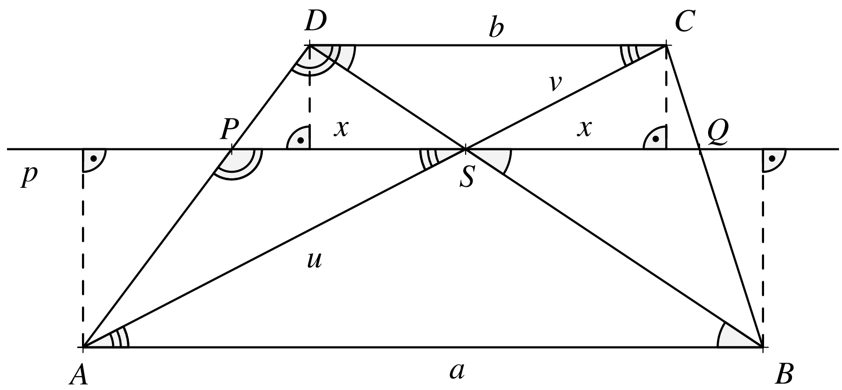
Dokázali jsme:

$$\frac{|AC|^2}{|AD|^2} = \frac{|BC|}{|BD|}, \text{ neboli } |AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|.$$

Příklad 3; Šar. 40

Základny lichoběžníka mají délku a, b. Přímka p je rovnoběžná se základnami a prochází průsečíkem úhlopříček daného lichoběžníka. Určete délku úsečky, která je na přímce p ohraničena rameny lichoběžníka.

Řešení:



Obr. 2.3: Příklad 3

Zavedeme značení podle obrázku. Nechť $|AS| = u$, $|SC| = v$. Z podobnosti podle věty *uu* trojúhelníků APS a ADC plyne $\frac{|PS|}{|DC|} = \frac{|AP|}{|AD|}$. Dále jsou podle věty *uu* podobné trojúhelníky BQS a BCD, z čehož plyne rovnost $\frac{|SQ|}{|DC|} = \frac{|BQ|}{|BC|}$. Podle vyznačených vzdáleností bodů A, B, C, D od přímky p, platí: $\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|BQ|}{|BC|}$. Odtud

$$\frac{|PS|}{|DC|} = \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|BQ|}{|DBC|} = \frac{|SQ|}{|DC|} \Rightarrow |PS| = |SQ|.$$

Označme tuto velikost $|PS| = |SQ| = x$. Trojúhelníky ABS a CDS jsou podle věty *uu* podobné, protože se shodují v úhlech ABS a CDS, resp. BAS a DCS, které jsou po dvojicích střídavé. Z toho plyne vztah $\frac{a}{b} = \frac{|AS|}{|SC|} = \frac{u}{v}$.
Dalšími podobnými trojúhelníky jsou, opět podle věty *uu*, ASP a ACD. (Úhly APS a ADC, resp. ASP a ACD jsou po dvojicích souhlasné.)
Proto platí $\frac{|PS|}{|DC|} = \frac{|AS|}{|AC|}$, což je ale totéž jako $\frac{x}{b} = \frac{u}{u+v}$. Několika elementárními úpravami a s využitím substituce $\frac{a}{b} = \frac{|AS|}{|SC|} = \frac{u}{v}$ vyjádříme x v závislosti na a a b.

$$\frac{x}{b} = \frac{u}{u+v} = \frac{\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} = \frac{a}{a+b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ab}{a+b}$$

Proto úsečka PQ má délku $2x = \frac{2ab}{a+b}$.

Poznámka. Pokud výsledný zlomek ještě upravíme následujícím způsobem

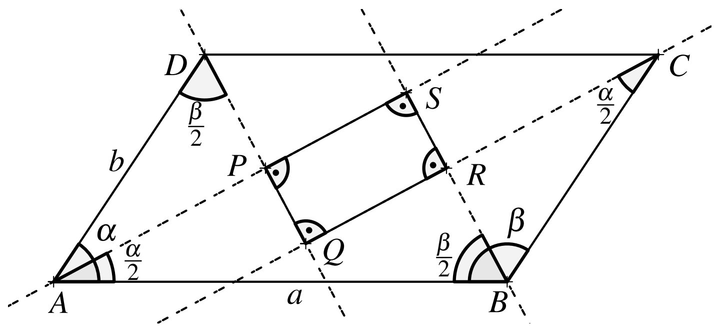
$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}},$$

dosáhneme zajímavého výsledku. Poslední tvar je totiž zápisem harmonického průměru délek a, b. Harmonický průměr je jedním z méně známých typů průměru. (Dalšími jsou např. aritmetický, geometrický, či kvadratický.) Definuje se jako převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot, a své využití nachází například v úlohách, kde se zjišťuje průměrná délka času nutná k provedení nějakého úkonu. Další uplatnění má ve statistice.

Příklad 4; Šar. 29

V rovnoběžníku se stranami o délkách a, b jsou sestrojeny osy vnitřních úhlů. Ostré z nich mají velikost α. Určete obsah čtyřúhelníku vymezeného těmito osami.

Řešení:



Obr. 2.4: Příklad 4

Uvažme situaci jako je vyznačena v obrázku. Řekněme tedy, že $a \geq b$. Nejprve si uvědomme, že z rovnosti $\alpha + \beta = 180°$ plyne $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$. To znamená, že v trojúhelníku ABS platí, že úhel při vrcholu S je pravý. Analogicky jsou pravoúhlé i trojúhelníky BCR, CDQ a DAP. Proto je útvar $PQRS$ zcela jistě pravoúhelník a jeho obsah S_{PQRS} snadno spočítáme jako součin $|PQ| \cdot |PS|$. Velikost úsečky PS můžeme vyjádřit jako rozdíl $|AS| - - |AP|$. Využijeme přitom toho, že platí vztahy $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}$ a $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$.
$|AS|$ vyjádříme z trojúhelníka ABS takto: $|AS| = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.
$|AP|$ vyjádříme z trojúhelníka DAP jako $|AP| = b \cdot \sin\frac{\beta}{2} = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.
Proto $|PS| = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2}$.
Podobným způsobem vyjádříme i $|PQ| = |DQ| - |DP|$.
$|PQ| = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - b \cdot \cos\frac{\beta}{2} = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$
Dohromady:

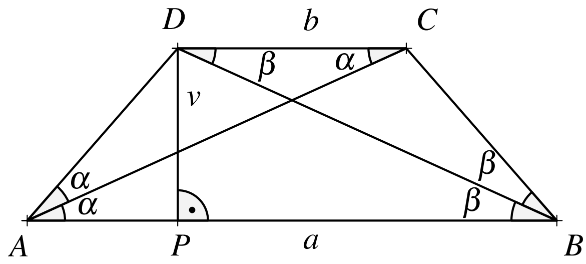
$$S_{PQRS} = |PS| \cdot |PQ| = (a-b)^2 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$$

Pokud bychom na začátku řešení předpokládali, že $b \geq a$, došli bychom k obdobnému výsledku, tedy $\frac{1}{2}(b-a)^2 \sin\alpha$. Protože $(a-b)^2 = (b-a)^2$, je výše uvedený výsledek správný v obou případech.

Příklad 5; Šar. 42

V lichoběžníku se základnami AB, CD platí $|AB| = a$, $|CD| = b$ a jeho úhlopříčky leží na osách úhlů ABC a DAB. Určete jeho obsah, víte-li, že $a > b$.

Řešení:



Obr. 2.5: Příklad 5 – varianta $a > b$

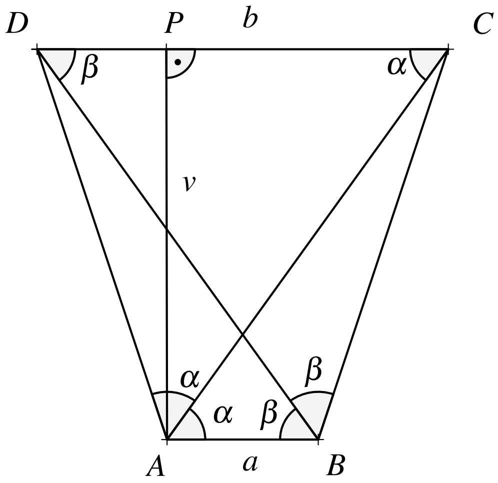
Zavedeme značení podle obrázku a rozeberme s jeho pomocí nejprve situaci $a > b$. Vidíme, že úhly BAC a ACD jsou střídavé, tudíž mají stejnou velikost. Díky tomu, že úhlopříčka AC půlí úhel DAB, platí $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACD|$. To ale znamená, že trojúhelník DAC je rovnoramenný se základnou AC. Pak se ale rovnají i velikosti jeho ramen a díky tomu $|DC| = |DA| = b$.
Analogicky: $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle BDC|$. Pak ale trojúhelník DBC je také rovnoramenný a platí $|DC| = |BC| = b$.
Nyní víme, že lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný a proto $|AP| = \frac{a-b}{2}$. Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku APD zjistíme výšku v lichoběžníka a snadno už vypočítáme jeho obsah.

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$v^2 = b^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 - 2ab + b^2\right)$$
$$v = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-a^2 + 2ab + 3b^2}$$

Obsah S lichoběžníka $ABCD$ je tedy:

$$S = \frac{v \cdot (a+b)}{2} = \frac{a+b}{4} \cdot \sqrt{-a^2 + 2ab + 3b^2}$$

Rozeberme nyní ještě situaci, kdy $b > a$. S pomocí nového obrázku budeme postupovat analogicky.



Obr. 2.6: Příklad 5 – varianta $a < b$

Zavedeme značení podle obrázku. Trojúhelníky ACD a BCD jsou oba rovnoramenné s rameny délky b (zdůvodněno v předchozím postupu). Proto počítáme-li užitím Pythagorovy věty výšku v lichoběžníka $ABCD$ z pravoúhlého trojúhelníka APD, dobereme se následujícího výsledku.

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$v^2 = b^2 - \frac{1}{4}\cdot\left(b^2 - 2ab + a^2\right)$$
$$v = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-a^2 + 2ab + 3b^2}$$

Vidíme, že velikost výšky v je stejná jako v situaci $a > b$, protože platí $(b-a)^2 = (a-b)^2$. Případ $a = b$ nemůže nastat, neboť lichoběžník je definován tak, že jeho základny nemají stejnou délku. (Zadání by ale vyhovoval čtverec, jehož obsah je triviálně vyjádřen jako a^2.)

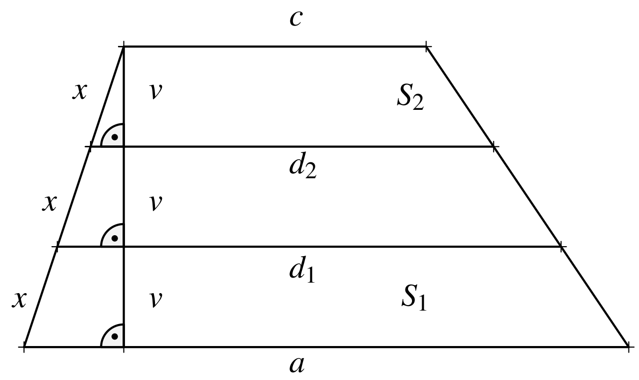
2.2 Podobnost

V úlohách, které jsou zařazeny do této podkapitoly, užijeme věty, které zpravidla užíváme ke zjištění podobnosti trojúhelníků. Podobnost trojúhelníků využijeme také při řešení Příkladu 2 a Příkladu 3.

Příklad 6; Šar. 38

Je dán lichoběžník. Úsečky délek d_1, d_2, které jsou rovnoběžné s jeho základnami délek a, c, rozdělují obě ramena lichoběžníka na tři shodné úseky. Určete obsah prostřední části lichoběžníka rozděleného takovými úsečkami, jestliže u horní a dolní části známe obsahy S_1, S_2.

Řešení:



Obr. 2.7: Příklad 6

Označme obsah celého lichoběžníka S a obsah prostřední části S_P. Levé rameno lichoběžníka je danými úsečkami rozděleno na tři shodné úsečky délky x. U tohoto ramene tak vznikly tři podobné pravoúhlé trojúhelníky. Z jejich podobnosti plyne, že všechny tři menší lichoběžníky mají shodnou výšku, kterou označíme v.
Platí:

$$S = S_1 + S_2 + S_P = \frac{(a+c)\cdot 3v}{2}$$

$$S_1 = \frac{(a+d_1)\cdot v}{2},\ S_2 = \frac{(d_2+c)\cdot v}{2},\ S_P = \frac{(d_1+d_2)\cdot v}{2}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{(a+d_1)\cdot v}{2} + \frac{(d_2+c)\cdot v}{2} = \frac{(a+c)\cdot v}{2} + \frac{(d_1+d_2)\cdot v}{2} = \frac{1}{3}\cdot S + S_P$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3}\cdot (S_1 + S_2 + S_P) + S_P$$

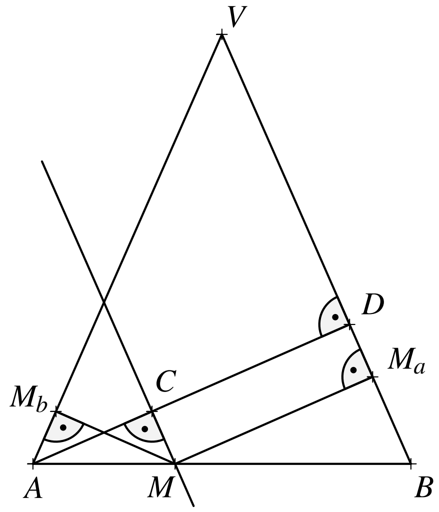
$$S_P = \frac{1}{2}\cdot (S_1 + S_2)$$

Obsah prostřední části lichoběžníka je, jak vidíme, aritmetickým průměrem obsahů jeho krajních částí.

Příklad 7; Šar. 26

Na základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABV je zvolen bod M. Z bodu M spustíme kolmice k ramenům VA, VB a paty těchto kolmic označíme M_a, M_b. Dokažte, že součet $|MM_a| + |MM_b|$ je konstantní a že je tento součet roven velikosti výšky daného trojúhelníka spuštěné k libovolnému z ramen.

Řešení:



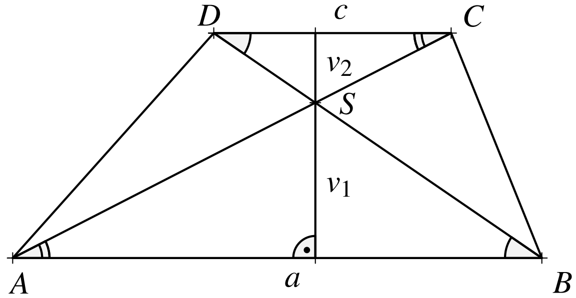
Obr. 2.8: Příklad 7

Zvolme body C, D podle obrázku. Trojúhelníky AMM_b a MAC se shodují ve straně AM a dále jsou shodné jejich úhly MCA a AM_bM. Díky rovnoběžnosti $CM \parallel BV$ víme, že oba úhly MAM_b a AMC jsou shodné s úhlem ABV. Z těchto informací díky větě *usu* můžeme o trojúhelnících AMM_b a MAC prohlásit, že jsou shodné. Z jejich shodnosti plyne rovnost $|AC| = |MM_b|$. Protože MM_aDC je obdélník, platí rovnost $|MM_a| = |CD|$, což ale znamená, že hledaný součet $|MM_b| + |MM_a|$ je roven součtu $|AC| + |CD|$, tedy výšce z vrcholu A k rameni BV.

Příklad 8; Šar. 45

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a v něm jsou narýsovány úhlopříčky, jejichž průsečík označíme S. Určete obsah daného lichoběžníka, znáte-li obsahy S_1, S_2 trojúhelníků ABS a CDS.

Řešení:



Obr. 2.9: Příklad 8 – zadání

Ukážeme dva způsoby řešení, z nichž první je následující:
Zavedeme značení jako v obrázku. Obsah trojúhelníka ABS je S_1, obsah trojúhelníka CDS je S_2, označme tedy obsah zbylé části S_3, tzn. S_3 je součtem obsahů trojúhelníků ASD a BCS. Platí tedy, že obsah S_{ABCD} lichoběžníka $ABCD$ je roven součtu $S_1 + S_2 + S_3$. Tuto rovnost budeme postupně upravovat a dosazovat do ní zjištěné výsledky, abychom vyjádřili hodnotu S_3 pomocí S_1 a S_2. Platí:

$$S_1 = \frac{a \cdot v_1}{2}, \;\; S_2 = \frac{c \cdot v_2}{2}, \;\; S_{ABCD} = \frac{(a+c)\cdot(v_1+v_2)}{2}.$$

Dosadíme do výše zmiňované rovnosti předchozí výsledky:

$$\frac{(a+c)\cdot(v_1+v_2)}{2} = \frac{a \cdot v_1}{2} + \frac{c \cdot v_2}{2} + S_3$$

$$\frac{av_1 + av_2 + cv_1 + cv_2}{2} = \frac{av_1 + cv_2}{2} + S_3$$

$$\frac{av_2 + cv_1}{2} = S_3$$

Dále využijeme, že jsou si trojúhelníky ABS a CDS podobné, což platí díky větě *uu*. Dvojice $\sphericalangle ABS$, $\sphericalangle SDC$ a $\sphericalangle BAS$, $\sphericalangle SCD$ jsou totiž dvojicemi navzájem shodných střídavých úhlů. Z této podobnosti plyne mnoho vztahů, mimo jiné následující: $\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_2} \Rightarrow av_2 = cv_1$. To ale můžeme využít pro náš záměr – vyjádřit S_3 v závislosti na S_1 a S_2. Platí:

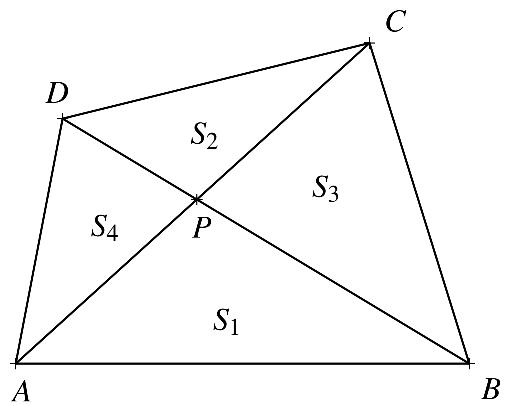
$$S_3 = \frac{av_2 + av_2}{2} = av_2 = cv_1$$

$$S_3^2 = av_2 \cdot cv_1 \Rightarrow S_3^2 = 2 \cdot \frac{v_1 a}{2} \cdot 2 \cdot \frac{v_2 c}{2} \Rightarrow S_3^2 = 4 \cdot S_1 \cdot S_2 \Rightarrow S_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}$$

Nyní už můžeme vypočítat obsah S_{ABCD} lichoběžníka.

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Abychom názorně vysvětlili druhý z možných způsobů řešení, doplníme ho vlastním obrázkem.



Obr. 2.10: Příklad 8 – pomocný obrázek

V obrázku jsou vyznačeny obsahy S_1, S_2, S_3, S_4, jednotlivých částí obecného čtyřúhelníka $ABCD$, tedy obsahy trojúhelníků, které jsou vymezeny jeho úhlopříčkami. Průsečík těchto úhlopříček označme P. Pro každý takový obecný čtyřúhelník platí, že $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_4}{S_2}$, neboli $S_1S_2 = S_3S_4$. Oba podíly totiž odpovídají podílu $\frac{|AP|}{|PC|}$. Tuto skutečnost si můžeme zdůvodnit například tak, že se podíváme na trojúhelníky ABP a PBC, které mají shodnou výšku, tj. vzdálenost bodu B od přímky AC. Jestliže ale mají shodnou výšku, jsou jejich obsahy ve stejném poměru, jaký je mezi délkami jejich základen $|AP|$ a $|PC|$. Analogicky to platí pro trojúhelníky APD a PCD.

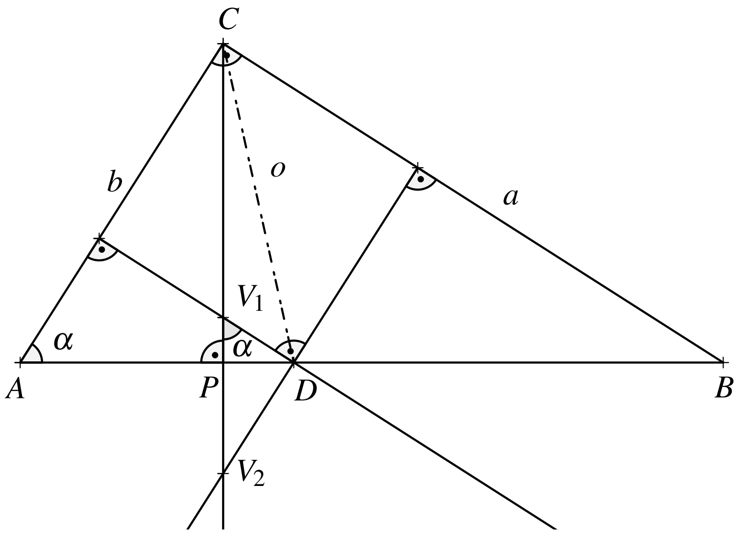
V této úloze se zabýváme lichoběžníkem, což ovšem znamená, že $AB\,||\,CD$. To ale znamená, že $S_1 + S_3 = S_1 + S_4$, protože oba tyto součty jsou obsahy trojúhelníků se základnou AB a shodnou výškou, která je zároveň vzdáleností mezi rovnoběžkami AB a CD. Odtud plyne rovnost $S_4 = S_3$ a proto $S_1S_2 = S_3S_4$ přejde v $S_1S_2 = S_3^2$, odtud $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1S_2}$. Což je ale stejný výsledek, jako v prvním řešení:

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Příklad 9; Šar. 47

V pravoúhlém trojúhelníku ABC, je narýsována osa o pravého úhlu BCA, která rozdělí trojúhelník ABC na dva trojúhelníky. V nich jsou narýsovány výšky, jejichž průsečíky označme V_1, V_2. Určete velikost úsečky V_1V_2.

Řešení:



Obr. 2.11: Příklad 9

Zavedeme značení podle obrázku. Předpokládejme, že $a > b$, kdy bod P je vnitřním bodem úsečky AD, neboť $|\sphericalangle ACP| < |\sphericalangle BCP|$. V trojúhelníku PDV_1 je úhel při vrcholu P pravý, úhel při vrcholu D je souhlasný s úhlem ABC, takže má s ním shodnou velikost.

Proto úhel při vrcholu V_1 má velikost α a trojúhelníky ABC a DV_1P jsou podle věty *uu* podobné. Podle věty *uu* jsou si podobné i trojúhelníky ABC a V_1V_2D. Odtud

$$\frac{|V_1V_2|}{|AB|} = \frac{|V_1D|}{|AC|} \Rightarrow |V_1V_2| = \frac{|V_1D|}{b} \cdot \sqrt{a^2+b^2}.$$

Dále podle věty *uu* jsou si podobné trojúhelníky V_1DP a ACP. Platí

$$\frac{|V_1D|}{|AC|} = \frac{|DP|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|V_1D|}{b} = \frac{|DP|}{|CP|}.$$

Předchozí výsledek můžeme dosadit a dostat $|V_1V_2| = \frac{|DP|}{|CP|} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$, takže zbývá určit neznámý poměr $\frac{|DP|}{|CP|}$. Velikost úsečky CP jakožto výšky trojúhelníka ABC určíme pomocí následujícího výpočtu přes obsah trojúhelníka ABC:

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{|CP|\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow |CP| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Velikost úsečky DP určíme z rozdílu $|DP| = |AD| - |AP|$, kde $|AP|$ pomocí Pythagorovy věty užité v pravoúhlém trojúhelníku APC vyjádříme jako:

$$|AP|^2 = b^2 - |CP|^2 \Rightarrow |AP|^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow |AP|^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AP|^2 = b^2\frac{b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow |AP| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Potřebujeme ještě velikost úsečky AD. Zde využijeme vlastnosti, kterou má osa vnitřního úhlu trojúhelníka, že totiž rozděluje protější stranu v poměru rovném poměru délek zbylých dvou stran trojúhelníku. Pro nás to znamená

$$\frac{|AD|}{|BD|} = b : a, \text{ odkud } |AD| = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Dosadíme zjištěné délky $|AD|$ a $|AP|$ do rozdílu $|AD| - |AP| = |DP|$, abychom zjistili hledaný poměr $\frac{|DP|}{|CP|}$:

$$|DP| = |AD| - |AP| = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b(a^2+b^2) - b^2(a+b)}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{ab(a-b)}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|DP|}{|CP|} = \frac{\frac{ab(a-b)}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Hledaný poměr $\frac{|DP|}{|CP|}$ je tedy $\frac{a-b}{a+b}$, což dosadíme do rovnosti $|V_1V_2| = \frac{|DP|}{|CP|} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$. Hledaná hodnota je $|V_1V_2| = \frac{a-b}{a+b} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|a-b|}{a+b} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$.

Poznámka. Díky tvaru s absolutní hodnotou ve výsledku nemusíme rozlišovat, zda platí $a > b$ nebo $b > a$. Pokud $a = b$, je $V_1 = V_2 = P$.

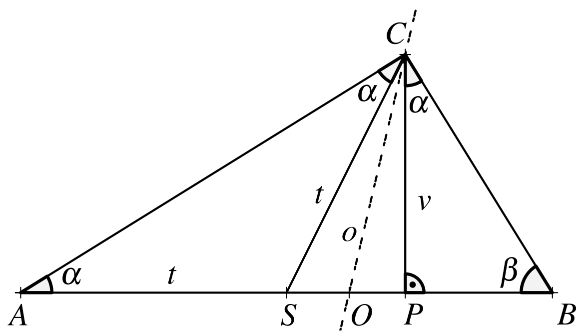
2.3 Thaletova věta

V následujících dvou úlohách použijeme Thaletovu větu.

Příklad 10; Šar. 35

Dokažte, že osa pravého úhlu ACB v trojúhelníku ABC je zároveň osou úhlu, který spolu svírají těžnice a výška spuštěné z téhož vrcholu C.

Řešení:



Obr. 2.12: Příklad 10

Zavedeme značení podle obrázku. Máme ověřit rovnost $|\sphericalangle SCO| = |\sphericalangle OCP|$. Protože o je osa úhlu ACB, platí rovnost $|\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle OCB|$. Potřebujeme tedy ukázat, že platí rovnost mezi úhly ACS a PCB. Díky Thaletově větě užité v pravoúhlém trojúhelníku ABC víme, že $|AS| = t = |SC|$. Proto je trojúhelník ASC rovnoramenný se základnou AC, takže jsou i úhly při základně shodné a velikost úhlu ACS je α. V pravoúhlém trojúhelníku ABC ovšem platí $\alpha = 90^\circ - \beta$. Použijeme-li stejný poznatek v pravoúhlém trojúhelníku PBC, vidíme, že úhel PCB má velikost α. Ale to je přesně to, co jsme chtěli ukázat.

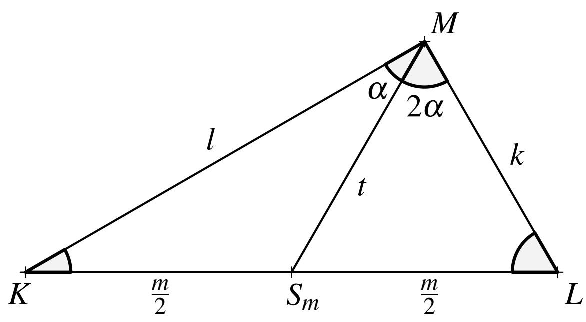
$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle ACO| &= |\sphericalangle OCB| \\
|\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle SCO| &= |\sphericalangle OCP| + |\sphericalangle PCB| \\
\alpha + |\sphericalangle SCO| &= |\sphericalangle OCP| + \alpha \\
|\sphericalangle SCO| &= |\sphericalangle OCP|
\end{aligned}
$$

Osa o je tedy jak osou úhlu ACB, tak osou úhlu SCP.

Příklad 11; Šar. 24

Je dán pravoúhlý trojúhelník KLM a v něm těžnice spuštěná z vrcholu M. Tato těžnice má délku t a dělí pravý úhel $\sphericalangle LMK$ v poměru 1:2. Určete obsah trojúhelníka.

Řešení:



Obr. 2.13: Příklad 11

Označme k, l, m strany trojúhelníka podle obrázku. Při vrcholu M se nachází pravý úhel, který je těžnicí t rozdělen na dva úhly, jejichž poměr velikostí je 1:2. Proto můžeme jejich velikosti reprezentovat hodnotami α a 2α, kde $\alpha = 30°$. Těžnice t je úsečka, která spojuje bod M se středem strany m. Tento střed S_m tedy půlí úsečku KL, které lze opsat Thaletovu kružnici se středem v S_m. Bod M na této kružnici jistě leží a z toho vyplývá, že t i $\frac{m}{2}$ jsou poloměrem této Thaletovy kružnice a proto mají shodnou délku. Proto $m = 2t$. Protože $t = \frac{m}{2}$, lze o trojúhelníku S_mLM říci, že je rovnoramenný se základnou k, a že tedy úhly při vrcholech L, M jsou shodné a mají velikost $2\alpha = 60°$. Pak ale i třetí úhel při vrcholu S_m je s nimi shodný a $\triangle S_mLM$ je rovnostranný, tedy $k = t$.
Užitím Pythagorovy věty v $\triangle KLM$ určíme velikost strany l:

$$l^2 = m^2 - k^2 = (2t)^2 - t^2 \Rightarrow l = t\sqrt{3}.$$

Nyní máme vše potřebné pro to, abychom vypočítali obsah trojúhelníka KLM:

$$S_{KLM} = \frac{k \cdot l}{2} = \frac{t \cdot t\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t^2.$$

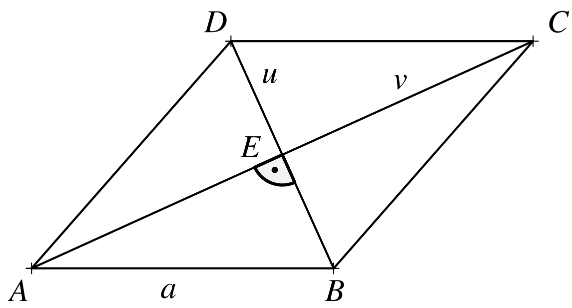
2.4 Pythagorova věta

Přestože je do této podkapitoly zařazena pouze jedna úloha, používáme Pythagorovu větu v mnoha jiných úlohách. Jsou to: Příklad 9, Příklad 11, Příklad 15, Příklad 16, Příklad 18, Příklad 21 a Příklad 23.

Příklad 12; Šar. 59

Určete velikost strany kosočtverce, je-li dán jeho obsah S a součet délek jeho úhlopříček je roven t.

Řešení:



Obr. 2.14: Příklad 12

Označme stranu kosočtverce a a úhlopříčky u a v. Ty jsou navzájem kolmé a jejich průsečík E je obě půlí, takže hledané a můžeme díky Pythagorově větě pro $\triangle ABS$ vyjádřit jako:

$$a^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(u^2 + v^2).$$

Pomocí obrázku je snadné si uvědomit vztah mezi obsahem kosočtverce a délkami jeho úhlopříček:

$$\frac{S}{4} = S_{ABE} = \frac{\frac{u}{2} \cdot \frac{v}{2}}{2} \Rightarrow u \cdot v = 2S.$$

Postupnými úpravami a dosazením už bez obtíží vyjádříme požadované a.

$$\begin{aligned}
t &= u + v \\
t^2 &= (u + v)^2 \\
t^2 &= u^2 + 2uv + v^2 \\
t^2 &= u^2 + 4S + v^2 \\
u^2 + v^2 &= t^2 - 4S \\
a^2 &= \frac{1}{4}(t^2 - 4S) \Rightarrow a = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 4S}
\end{aligned}$$

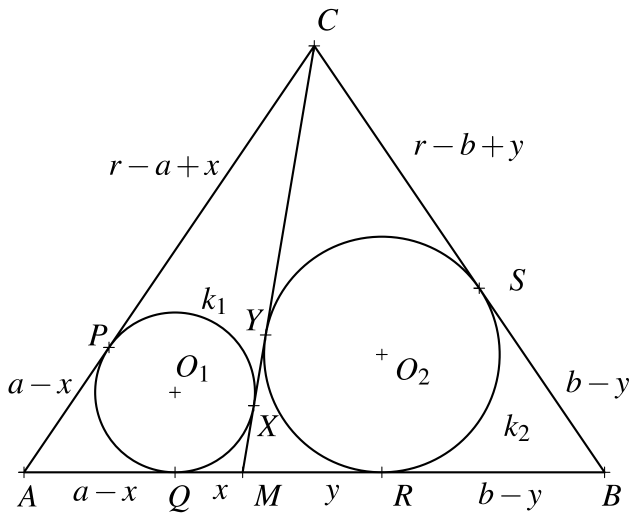
2.5 Vlastnosti tečen

V řešení následujících úloh kromě jiných poznatků užijeme vlastnosti tečen z bodu ke kružnici, především pak tu vlastnost, že délky tečen spuštěných z bodu ke kružnici se rovnají.

Příklad 13; Šar. 28

V rovnoramenném trojúhelníku ABC je na základně AB zvolen bod M tak, že $|AM| = a$, $|MB| = b$. Do trojúhelníků AMC a MBC jsou vepsány kružnice. Najděte vzdálenost mezi body dotyků těchto kružnic se stranou MC.

Řešení:



Obr. 2.15: Příklad 13

Zavedeme značení podle obrázku. X, Y jsou body dotyku kružnic k_1, resp. k_2 s úsečkou MC. Položme $|MX| = x$, $|MY| = y$, $|AC| = |BC| = r$.

Spustíme-li tečny z bodu ke kružnici, má tento bod stejnou vzdálenost od obou vzniklých bodů dotyku. Využijeme-li tento poznatek, snadno vidíme:
$x = |MX| = |MQ| \Rightarrow |AQ| = |AM| - |QM| = a - x$.
Analogicky: $y = |MY| = |MR| \Rightarrow |RB| = |MB| - |MR| = b - y$. Na ramenech AC a BC trojúhelníka ABC vznikly také body dotyku P, S. Protože $|AP| = |AQ|$ a $|AC| = r$, platí $|PC| = r - (a - x) = r - a + x$. Analogicky vyjádříme $|CS|$ jako $r - b + y$. Z úsečky CM můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby vztah mezi x, y, a a b. Platí tedy:

$$|CM| = |CY| + |YM| = (r - b + y) + y, \text{ ale také } |CM| = |CX| + |XM| = (r - a + x) + x.$$

Porovnáme pravé strany rovnic:

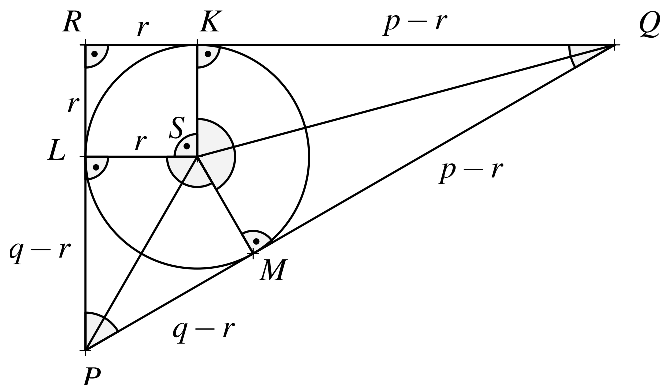
$$\begin{aligned}(r - b + y) + y &= (r - a + x) + x \\ 2x - 2y &= a - b \\ |YX| = x - y &= \frac{a - b}{2}\end{aligned}$$

To je hledaná vzdálenost.

Příklad 14; Šar. 36

Na kružnici o poloměru r jsou vybrány body K, L, M tak, že ji rozdělují na 3 oblouky, jejichž délky jsou v poměru 3:4:5. Určete obsah trojúhelníka vymezeného tečnami dané kružnice sestrojenými v bodech K, L a M.

Řešení:



Obr. 2.16: Příklad 14

Zavedeme značení podle obrázku, z něhož plyne, že $|\sphericalangle KSL| = \frac{3}{12} \cdot 360^\circ = 90^\circ$, dále $|\sphericalangle LSM| = \frac{4}{12} \cdot 360^\circ = 120^\circ$, a také $|\sphericalangle MSK| = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Máme-li vyjádřit obsah S_{PQR} pomocí rozměru r, je třeba pomocí r vyjádřit také velikosti stran trojúhelníka PQR, neboť $S_{PQR} = \frac{p \cdot q}{2}$. Velikosti stran p a q postupně vyjádříme s pomocí goniometrických funkcí užitých v pravoúhlých trojúhelnících PSL a MQS.
Protože úsečka PS půlí úhel MPL velikosti $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (střed kružnice vepsané totiž leží na průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníka), má úhel SPL velikost 30°. Proto:

$$q - r = \frac{r}{\operatorname{tg} 30^\circ} = r\sqrt{3} \Rightarrow q = (1 + \sqrt{3})r.$$

Analogicky úhel SQK má velikost $\frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$ a proto

$$p - r = \frac{r}{\operatorname{tg} 15^\circ}.$$

Hodnotu $\operatorname{tg} 15^\circ$ spočítáme pomocí vzorce pro tangens dvojnásobného argumentu:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} \Rightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}^2 15^\circ + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ - 1 = 0.$$

Takto jsme získali kvadratickou rovnici, jejíž kořeny není obtížné nalézt. Získáme dva, z nichž jeden je záporný, a proto nevyhovuje skutečnosti, že funkce tangens je na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí a nabývá kladných hodnot. Vyhovuje tedy pouze kořen s hodnotou $2 - \sqrt{3}$, proto $p - r = \frac{r}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow p = r \cdot \left(1 + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$. Nyní už můžeme vypočítat obsah S_{PQR} trojúhelníka PQR:

$$S_{PQR} = \frac{p \cdot q}{2} = \frac{r^2(1 + \sqrt{3})(1 + \frac{1}{2-\sqrt{3}})}{2} = r^2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{3}).$$

Systematický výpočet přes hodnotu $\operatorname{tg} 15^\circ$ lze obejít, uvědomíme-li si, že v pravoúhlém trojúhelníku PQR známe velikost vnitřního úhlu $|\sphericalangle RPQ| = 60^\circ$ a velikost strany $|RP| = q = (1+\sqrt{3})r$. Pak v trojúhelníku PQR využijeme goniometrické funkce a vidíme:

$$p = |RQ| = |PR| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (1+\sqrt{3})r \cdot \sqrt{3} = (3+\sqrt{3})r.$$

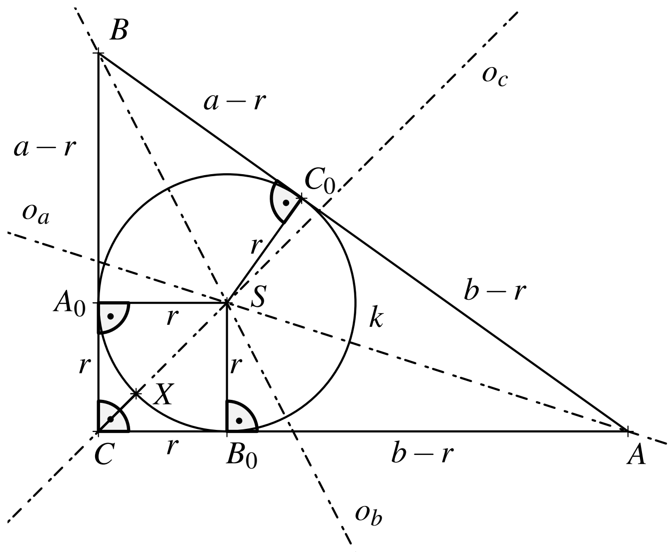
Odtud docházíme ke stejnému výsledku:

$$S_{PQR} = \frac{p \cdot q}{2} = \frac{r^2(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{2} = r^2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{3}).$$

Příklad 15; Šar. 23

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB jsou dány odvěsny a, b. Určete vzdálenost vrcholu C od nejbližšího bodu kružnice vepsané.

Řešení:



Obr. 2.17: Příklad 15

Z obrázku plyne, že CB_0SA_0 je čtverec. Nejbližší bod kružnice k od C je průsečík k s úsečkou CS. Označme tento průsečík X. Vidíme, že $|CX| = |CS| - |SX| = r\sqrt{2} - r = (\sqrt{2}-1)r$. Zbývá vypočítat r. $|CA_0| = |CB_0| = r \Rightarrow |BA_0| = a - r$, $|AB_0| = b - r$. Proto

$$c = |AB| = |AC_0| + |BC_0| = |AB_0| + |BA_0| = (a-r) + (b-r).$$

Odtud

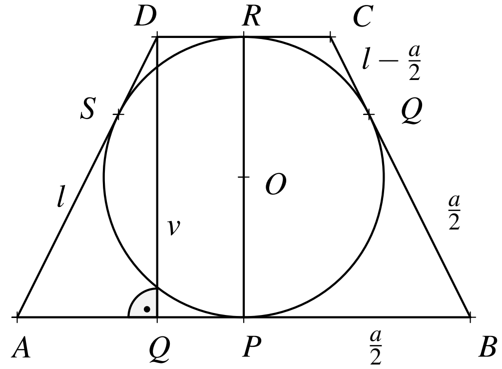
$$r = \frac{c-a-b}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a-b}{2}.$$

Odpověď na zadanou otázku je $|CX| = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a-b)$.

Příklad 16; Šar. 37

Určete obsah S rovnoramenného lichoběžníka, kterému lze vepsat kružnici. Délka jeho ramene je l, a délka jedné z jeho základen je a.

Řešení:



Obr. 2.18: Příklad 16

Zavedeme značení podle obrázku a využijeme symetrie podle přímky PR a rovností $|BP| = |BQ|$ a $|CQ| = |CR|$. Zjistíme, že druhá základna má délku $2\left(l - \frac{a}{2}\right) = 2l - a$.
Pro výpočet obsahu lichoběžníka potřebujeme znát velikost jeho výšky v. V našem lichoběžníku ji snadno spočítáme pomocí Pythagorovy věty použité v pravoúhlém trojúhelníku ATD. Nejdřív ale vyjádříme velikost jeho strany AT:

$$|AT| = |AP| - |TP| = |AP| - |DR| = \frac{a}{2} - \left(l - \frac{a}{2}\right) = a - l,$$

$$l^2 = v^2 + (a-l)^2 \Rightarrow v = \sqrt{a \cdot (2l - a)}.$$

Hledaný obsah S lichoběžníka $ABCD$ vypočítáme podle obvyklého vzorce:

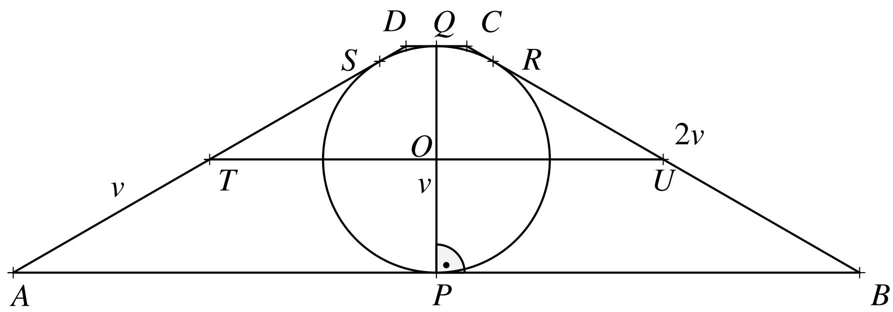
$$S = v \cdot \frac{a + (2l - a)}{2} = l \cdot \sqrt{a \cdot (2l - a)}.$$

Příklad 17; Šar. 44

Je dán rovnoramenný lichoběžník o obsahu S, kterému lze vepsat kružnici. Jeho výška je dvakrát kratší než jeho rameno. Určete poloměr kružnice vepsané tomuto lichoběžníku.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Podle zadání je $|AD| = 2|PQ| = 2v$. Vidíme, že $|AP| = |AS|$ a že $|SD| = |DQ|$. Pak ale $|AP| + |DQ| = |AS| + |SD| = |AD| = 2v$. Z toho, že P a Q jsou středy základen plyne, že $|AB| + |CD| = 2(|AP| + |DQ|) = 4v$. Střední příčka TU je polovinou tohoto součtu, tzn. $|TU| = 2v$. Jestliže ale máme velikost střední příčky a známe výšku lichoběžníka v, můžeme vyjádřit známý obsah jako $S = |TU| \cdot v = 2v^2$, odkud $v = \sqrt{\frac{S}{2}}$.



Obr. 2.19: Příklad 17

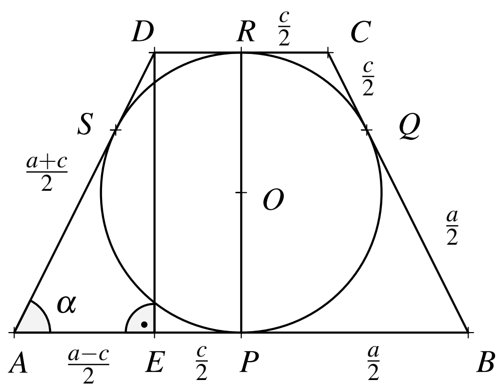
Nás ale zajímá poloměr kružnice vepsané danému lichoběžníku. Poloměr r má stejnou velikost jako OP, tedy polovinu výšky v:

$$r = \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{S}{2}}.$$

Příklad 18; Šar. 41

Je dán rovnoramenný lichoběžník, kterému lze vepsat kružnici. Určete velikost ostrého z jeho úhlů, víte-li, že jedna ze základen je k-násobkem druhé, kde $k > 1$.

Řešení:



Obr. 2.20: Příklad 18

Zavedeme značení jako v obrázku. Nechť $|AB| = a$, $|CD| = c$. Řekněme, že $a = k \cdot c$. Díky tomu, že je lichoběžník rovnoramenný, je $|AQ| = |AP| - |QP| = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Protože $|BP| = |BQ|$ a protože $|QC| = |RC|$, je délka ramene daného lichoběžníka $\frac{a+c}{2}$. (Rozmyslete si podle obrázku.) Potom už snadno vyjádříme velikost úhlu α užitím goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku AED.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a-c}{2}}{\frac{a+c}{2}} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{kc-c}{kc+c} = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{k-1}{k+1}$$

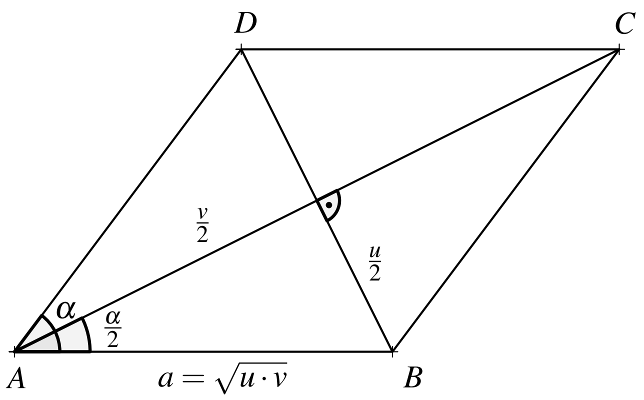
2.6 Goniometrické vzorce, sinová a kosinová věta

Tato podkapitola sdružuje úlohy, v jejichž řešení využijeme některé poznatky z oblasti goniometrie, tedy goniometrické funkce ostrého úhlu, goniometrické vzorce a sinovou a kosinovou větu. Kromě následujících pěti úloh by do této podkapitoly mohly patřit také Příklad 4, Příklad 14 a Příklad 18.

Příklad 19; Šar. 31

Určete ostrý úhel kosočtverce, ve kterém platí, že velikost jeho strany a je geometrickým průměrem velikostí u, v jeho úhlopříček tj. platí $a = \sqrt{u \cdot v}$.

Řešení:



Obr. 2.21: Příklad 19

V řešení využijeme vzorec pro sinus dvojnásobného úhlu:

$$\sin 2\phi = 2 \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi$$

S využitím obrázku vyjádříme potřebné vztahy:

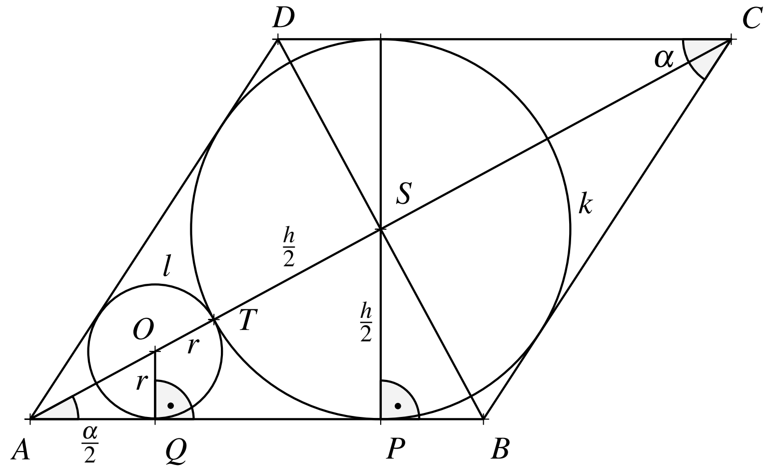
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{2\sqrt{u \cdot v}} \wedge \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2\sqrt{u \cdot v}} \Rightarrow \sin\alpha = 2 \cdot \frac{u}{2\sqrt{u \cdot v}} \cdot \frac{v}{2\sqrt{u \cdot v}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ$$

Příklad 20; Šar. 30

Do kosočtverce s výškou h a ostrým úhlem α je vepsána kružnice k. Najděte poloměr takové kružnice l, která se dotýká dvou stran kosočtverce a kružnice k, a zároveň je z takových kružnic největší.

Řešení:



Obr. 2.22: Příklad 20

Zavedeme značení podle obrázku. Intuitivně víme, že největší z kružnic l, které připadají v úvahu, je ta, která se dotýká právě těch stran kosočtverce, které spolu svírají ostrý z jeho úhlů, který označíme α. (Jako je to provedeno v obrázku.) Proč to není kružnice dotýkající se stran, které svírají tupý z úhlů, vysvětlíme v poznámce za řešením.

Abychom zjistili velikost poloměru r kružnice l, potřebujeme zjistit další rozměry v obrázku. V řešení budeme postupovat tak, že vyjádříme velikost úsečky OS dvěma způsoby a výsledky potom porovnáme. Potřebnou velikost úsečky OS získáme z rozdílu $|AS| - |AO| = |OS|$. Na to ovšem potřebujeme vyjádřit $|AS|$ a $|AO|$. V pravoúhlém trojúhelníku APS platí:

$$|AS| = \frac{h}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku AQO platí:

$$|AO| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Potom ale

$$|OS| = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{h}{2} - r\right).$$

Druhá možnost, jak vyjádřit velikost úsečky OS, je $|OS| = |OT| + |TS| = r + \frac{h}{2}$, což nás navede na následující rovnici, ze které postupnými úpravami získáme kýžené r.

$$
\begin{aligned}
r+\frac{h}{2} &= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{h}{2}-r\right)\\
\left(r+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{h}{2}-r\\
\frac{h}{2}\cdot\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) &= r\cdot\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\\
r &= \frac{h}{2}\cdot\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

Pro další úpravy dosaďme následující: $1=\sin^2\frac{\alpha}{4}+\cos^2\frac{\alpha}{4}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$.

$$
r=\frac{h}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}{\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}=\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}-1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+1}\right)^2=\frac{h}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)
$$

Poznámka. Nyní vysvětlíme volbu polohy kružnice l. Velikost úhlu při vrcholu B, resp. D, je $\pi-\alpha$. Po dosazení velikosti tohoto úhlu do výsledného vzorce pro poloměr r kružnice l, dostaneme $r'=\frac{h}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi-\alpha}{4}\right)=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$. Nerovnost $r'<r$ dokážeme porovnáním hodnot $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$ a $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$. Funkce tangens je na intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, proto porovnáme hodnoty $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}$ a $\frac{\alpha}{4}$.

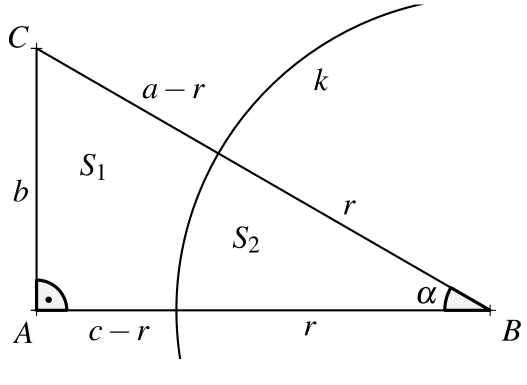
$$
\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\Leftrightarrow\alpha<\pi-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha<\pi\Leftrightarrow\alpha<\frac{\pi}{2},
$$

což ale platí, neboť α je ostrý úhel, tzn. $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Příklad 21; Šar. 22

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona má zadanou délku a. Úhel při vrcholu B má velikost $30°$. Najděte poloměr takové kružnice, která má střed ve vrcholu B a která rozdělí trojúhelník ABC na dvě části o stejném obsahu.

Řešení:



Obr. 2.23: Příklad 21

Zavedeme značení podle obrázku. Ze zadání víme, že $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$. Podle sinové věty užité v $\triangle ABC$ vyjádříme velikost strany b pomocí velikosti strany a:

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 90^\circ} \Rightarrow b = \frac{a}{2}.$$

Abychom mohli určit obsah $\triangle ABC$, potřebujeme ještě vyjádřit velikost strany c. Užijeme Pythagorovu větu:

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

Víme, že kruhová výseč má poloviční obsah S_2 oproti obsahu trojúhelníka ABC a zároveň tvoří $\frac{1}{12}$ kruhu omezeného kružnicí k. Z obsahu tohoto kruhu, který označíme S_k, už můžeme vyjádřit kýžené r. Vypadá následovně:

$$\frac{S_k}{12} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot a^2$$

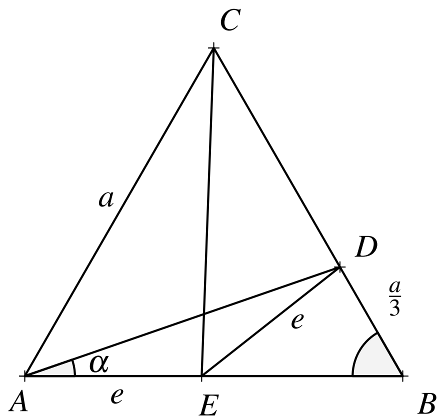
$$S_k = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$S_k = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S_k}{\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}{\pi}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$$

Příklad 22; Šar. 166

Strana rovnostranného trojúhelníku ABC má délku a. Na straně BC leží bod D tak, že $BD = \frac{1}{3}a$. Na straně AB leží bod E tak, že $|AE| = |DE|$. Určete $|CE|$.

Řešení:



Obr. 2.24: Příklad 22

V první části řešení uvedeme myšlenkový postup vedoucí k požadované odpovědi, ve druhé části se budeme věnovat samotným výpočtům. Zavedeme značení podle obrázku, nechť tedy $|AE| = |ED| = e$, $|\sphericalangle EAD| = \alpha$. Užitím kosinové věty můžeme požadovanou velikost úsečky CE získat z trojúhelníka AEC, kde známe $|AC| = a$ a $|\sphericalangle EAC| = 60°$, když k tomu ještě určíme velikost úsečky AE, kterou jsme pro přehlednost výpočtů označili e.

Hodnotu e zjistíme z $\triangle AED$. Díky rovnosti $|AE| = |DE|$ je $\triangle AED$ rovnoramenný a jeho základnou je AD. Této vlastnosti využijeme a hledanou velikost AE dostaneme užitím kosinové věty v $\triangle AED$, pokud budeme znát délku strany AD a hodnotu $\cos\alpha$.

Délku AD i hodnotu $\cos\alpha$ už dvojím užitím kosinové věty určíme z $\triangle ABD$, kde $|AB| = a$, $|BD| = \frac{a}{3}$, $|\sphericalangle ABD| = 60°$.

$$|AD|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{a}{3}\cdot\cos 60° \Rightarrow |AD| = \frac{\sqrt{7}}{3}a,$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}a\right)^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}a\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

Odtud

$$e^2 = e^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}a\right)^2 - 2\cdot e\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot a\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}} \Rightarrow e = \frac{7}{15}a.$$

A konečně

$$|CE|^2 = a^2 + \left(\frac{7}{15}a\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{7}{15}a\cdot\cos 60° \Rightarrow |CE| = \frac{13}{15}a.$$

Hledaná velikost úsečky CE je tedy $\frac{13}{15}a$.

Příklad 23; Šar. 33

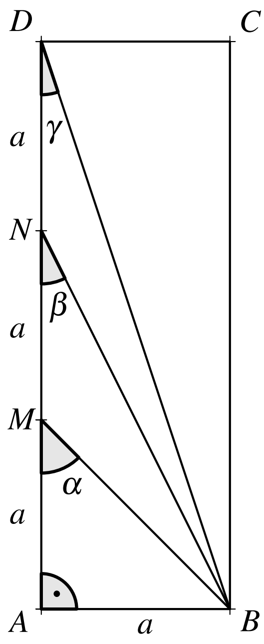
Je dán obdélník $ABCD$, jehož strana AD je třikrát delší než strana AB. Body M, N leží na straně AD a rozdělují ji na tři shodné části. Určete $|\sphericalangle AMB| + |\sphericalangle ANB| + |\sphericalangle ADB|$.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Řekněme, že strana AB má délku a. Pak podle zadání $|AD| = 3a$. Body M, N vyneseme na stranu AD tak, že $|AM| = |MN| = |ND| = a$. Zvolíme označení úhlů $\sphericalangle AMB = \alpha$, $\sphericalangle ANB = \beta$, $\sphericalangle ADB = \gamma$.

Určíme jejich velikosti postupně.

Úhel $\boldsymbol{\alpha}$***:*** Protože $|AM| = |AB| = a$, je $\triangle ABM$ rovnoramenný a jeho základnou je strana BM. U vrcholu A je pravý úhel. Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180° a protože úhly při základně v rovnoramenném trojúhelníku jsou shodné, platí následující rovnost: $180° = 90° + 2\cdot\alpha$. Odtud $\alpha = 45°$. Pro další výpočty budeme potřebovat znát velikosti úseček BN a BD.



Obr. 2.25: Příklad 23

Podle Pythagorovy věty užité v $\triangle ABN$:

$$|BN|^2 = a^2 + (2a)^2 \Rightarrow |BN| = a\sqrt{5}.$$

Dále podle Pythagorovy věty užité v $\triangle ABD$:

$$|BD|^2 = a^2 + (3a)^2 \Rightarrow |BD| = a\sqrt{10}.$$

Úhel β: Využijeme kosinovou větu v $\triangle ABN$:

$$\begin{aligned} a^2 &= (2a)^2 + 5a^2 - 2\cdot 2a\cdot a\sqrt{5}\cdot\cos\beta \\ \cos\beta &= \frac{4a^2 + 5a^2 - a^2}{4a^2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \beta &\doteq 26^\circ\, 33'\, 54.18'' \end{aligned}$$

Úhel γ: Znovu použijeme kosinovou větu, tentokrát v trojúhelníku ABD:

$$\begin{aligned} a^2 &= (3a)^2 + 10a^2 - 2\cdot 3a\cdot a\sqrt{10}\cdot\cos\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{9a^2 + 10a^2 - a^2}{6a^2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \gamma &\doteq 18^\circ\, 26'\, 5.82'' \end{aligned}$$

Odpověď na zadanou otázku, tedy hodnota součtu $|\sphericalangle AMB| + |\sphericalangle ANB| + |\sphericalangle ADB|$, je následující:

$$\alpha + \beta + \gamma \doteq 45^\circ + 26^\circ\, 33'\, 54.18'' + 18^\circ\, 26'\, 5.82'' \doteq 90^\circ.$$

Poznámka. Přes poměrně přesné vyjádření úhlů β a γ nemáme matematickou jistotu, že správná odpověď je přesně 90°. Věnujme se exaktnímu důkazu potřebné rovnosti $\beta+\gamma=$ $=45^\circ$, kterou ekvivalentně zapíšeme jako $2\beta+2\gamma=90^\circ$. Taková rovnost pro ostré úhly platí, právě když $\sin 2\gamma=\cos 2\beta$. Počítejme:

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow$$

$$\sin 2\gamma=2\sin\gamma\cos\gamma=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

Rovnost $\cos 2\beta=\sin 2\gamma$ platí, proto platí i $2\beta+2\gamma=90^\circ$, tudíž skutečně $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

Další možnost řešení nabízí vcelku jednoduchý a účinný postup. Uplatnění kosinové (a vlastně i Pythagorovy) věty lze vynechat, když úhly β a γ určíme jejich hodnotami funkce tangens, které lze vyčíst z obrázku:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{|AB|}{|AN|}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\ \text{ a }\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}.$$

K odvození přesné rovnosti $\beta+\gamma=45^\circ$ pak stačí dosadit do vzorce:

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1\Rightarrow\beta+\gamma=45^\circ.$$

2.7 Jiné

Následující úlohy vzhledem k jejich jedinečnosti jsou seskupeny k sobě, přestože vzájemně nesouvisí. Nicméně jejich nezařaditelnost jim nijak neubírá na zajímavosti a netradičnosti.

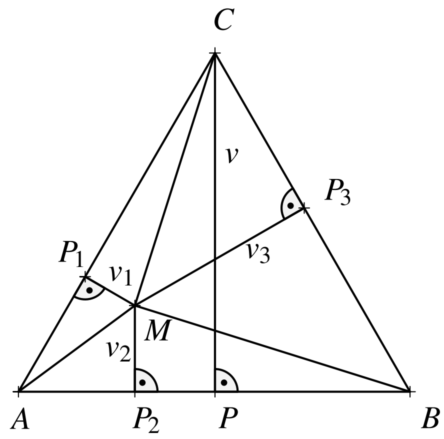
Příklad 24; Šar. 27

Dokažte, že pro libovolný bod M rovnostranného trojúhelníka ABC platí, že součet jeho vzdáleností od všech třech stran trojúhelníka je roven výšce tohoto trojúhelníka.

Řešení:

Označme vzdálenosti bodu M od jednotlivých stran trojúhelníka ABC podle obrázku v_1, v_2, v_3. Abychom snadno dokázali požadovanou rovnost mezi součtem $v_1+v_2+v_3$ a výškou v trojúhelníka ABC, využijeme k tomu vztah mezi obsahy trojúhelníků. Z obrázku plyne:

$$S_{AMC}+S_{ABM}+S_{BCM}=S_{ABC}.$$



Obr. 2.26: Příklad 24

Po rozepsání: $\frac{a \cdot v_1}{2} + \frac{a \cdot v_2}{2} + \frac{a \cdot v_3}{2} = \frac{a \cdot v}{2}$. Úpravou této rovnosti dostaneme:

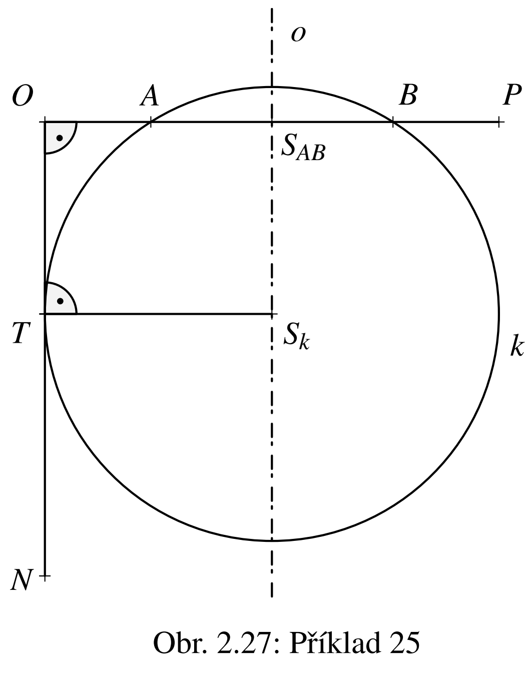
$$\frac{a}{2}(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{a}{2}v,$$

odkud již plyne požadovaná rovnost $v_1 + v_2 + v_3 = v$.

Příklad 25; Šar. 21

Na jednom rameni pravého úhlu NOP leží body A a B tak, že $|OA| = a$, $|OB| = b$. Určete poloměr kružnice k, která prochází body A, B a dotýká se druhého ramene daného pravého úhlu.

Řešení:



Obr. 2.27: Příklad 25

Bez újmy na obecnosti zvolíme body A, B na rameni OP tak, že $a \geq b$. Řešení úlohy popíšeme úvahou. Pro snazší pochopení se čtenář může držet obrázku.
Vycházíme-li z definice kružnice, pak víme, že všechny body na ní ležící mají stejnou vzdálenost od jejího středu. Protože zadané body A, B leží na zmíněné kružnici k, její střed S_k je bodem osy o úsečky AB. (Jen body této osy mají stejnou vzdálenost od A jako od B.) Vlastností této osy je, že je kolmá na úsečku AB. To ale znamená, že je rovnoběžná s druhým ramenem úhlu NOP.
Další z bodů kružnice má být bodem dotyku T kružnice k s ramenem NO. Poloměrem kružnice tedy bude vzdálenost osy o od ramene NO.

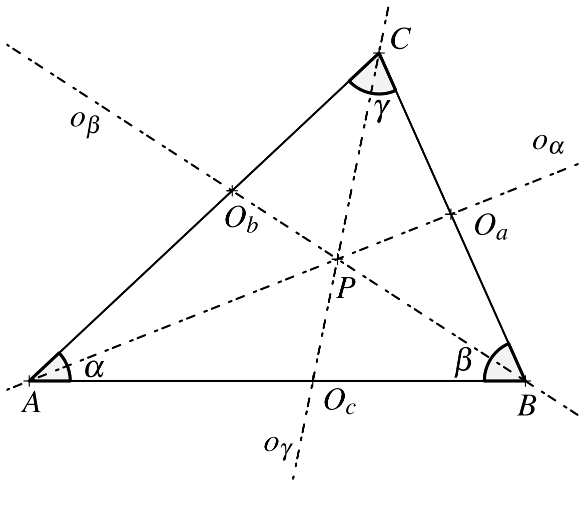
Ta je na obrázku reprezentována úsečkou OS_{AB}. Její délku můžeme vyjádřit jako součet $|OA| + \frac{1}{2}|AB|$. Protože $|OA| = a$ a protože $|AB| = b - a$, je

$$r = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Příklad 26; Šar. 25

V trojúhelníku ABC o stranách $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ jsou narýsovány osy všech vnitřních úhlů. V jakém poměru je průsečíkem P těchto os rozdělena jedna z nich, řekněme osa úhlu $\beta = \sphericalangle ABC$?

Řešení:



Obr. 2.28: Příklad 26

Zavedeme značení podle obrázku. V této úloze budeme využívat známou větu, která říká, že osa úhlu dělí protější stranu ve stejném poměru, jaký je mezi přilehlými stranami k tomuto úhlu. (Tzn. $|AB| : |BC| = |AO_b| : |O_bC|$.) Užitím zmiňované věty a s využitím obrázku dostaneme následující soustavu rovnic, z níž vyjádříme neznámou délku AO_b:

$$\begin{aligned} |AO_b| : |O_bC| &= c : a \\ |AO_b| + |O_bC| &= b \\ a|AO_b| &= c|O_bC| = c(b - |AO_b|) \\ (a+c)|AO_b| &= bc \\ |AO_b| &= \frac{bc}{a+c} \end{aligned}$$

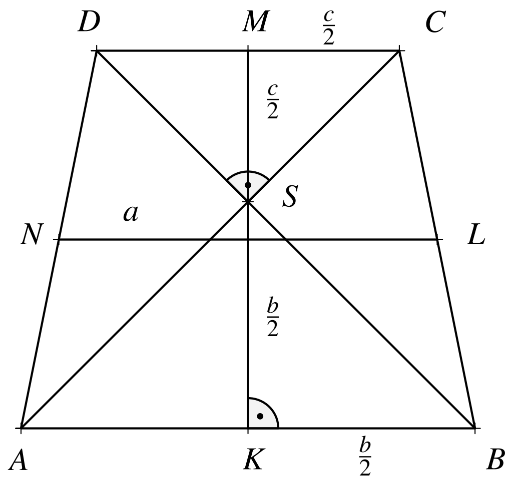
Nyní zmiňovanou větu užijeme ještě jednou, tentokrát v trojúhelníku ABO_b, abychom zjistili hledaný poměr $|O_bP| : |PB|$:

$$\frac{|O_bP|}{|PB|} = \frac{|AO_b|}{|AB|} = \frac{\frac{cb}{a+c}}{c} = \frac{b}{a+c}$$

Příklad 27; Šar. 43

Je dán rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé a jehož střední příčka má délku a. Určete obsah tohoto lichoběžníka.

Řešení:



Obr. 2.29: Příklad 27

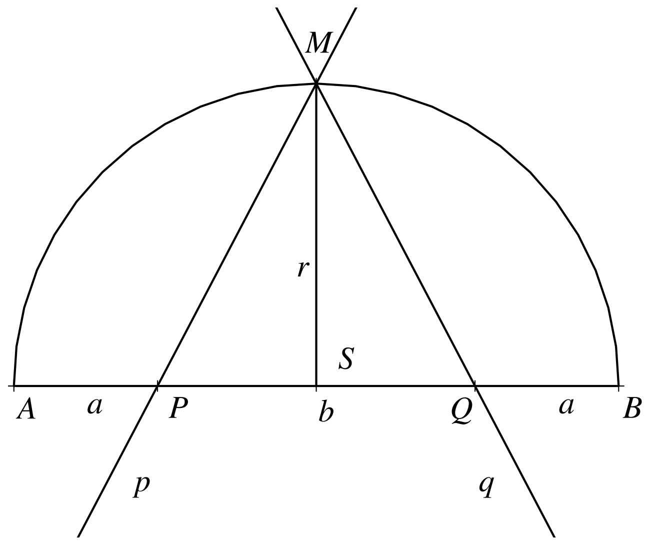
Zaveďme značení podle obrázku. Označme délky základen $|AB| = b$, $|DC| = c$.
Chceme-li vypočítat obsah lichoběžníka, užíváme k tomu vlastně součin velikosti střední příčky s výškou lichoběžníka. Velikost střední příčky je totiž (jak známo) aritmetickým průměrem délek základen lichoběžníka, v našem případě $a = \frac{b+c}{2}$.
Zaměřme se nyní na výšku lichoběžníka $ABCD$. Úhlopříčky v něm vymezily čtyři pravoúhlé trojúhelníky, z nichž se budeme věnovat trojúhelníkům ABS a CDS. Daný lichoběžník

je rovnoramenný, je tedy osově symetrický podle přímky KM spojující středy K, M obou základen. Díky této symetrii víme, že $|AS| = |BS|$ a že $|DS| = |CS|$. Trojúhelníky ABS a CDS jsou tak oba dva rovnoramenné a zároveň podle zadání pravoúhlé. V takových trojúhelnících (představme si je jako po úhlopříčce rozpůlené čtverce) platí, že základna je dvakrát delší než výška na základnu, která je zároveň přeponou. S pomocí obrázku už vidíme, proč výška KM lichoběžníka má délku $|KM| = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, což je ale to samé, jako a. Požadovaný obsah S_{ABCD} tedy velmi obratně můžeme vypočítat jako $S_{ABCD} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = a^2$.

Příklad 28; Šar. 49

Je dán půlkruh, jehož hranici tvoří průměr AB a polokružnice se středem S, který je zároveň středem úsečky AB. Bod M leží ve středu oblouku AB. Bodem M procházejí dvě přímky p, q, které rozdělí půlkruh na tři části o stejném obsahu a které protínají úsečku AB v bodech P, Q. V jakém poměru je těmito dvěma body úsečka AB rozdělena?

Řešení:



Obr. 2.30: Příklad 28

Zavedeme značení jako v obrázku. Mají-li se rovnat obsahy bočních útvarů, musí být nutně tyto dva útvary shodné (jinak je jeden vlastní podmnožinou druhého, takže platí $|AP| = |QB|$. Z této symetrie plyne, že poloměr r lze vyjádřit jako $a + \frac{b}{2}$, což je zároveň výška trojúhelníka PQM spuštěná z vrcholu M. Jeho obsah S_{PQM} je tudíž roven $\frac{b\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right)}{2}$, což je ale podle zadání třetina obsahu celého půlkruhu, který má obsah $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\frac{\pi r^2}{2} = 3 \cdot \frac{b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\pi \left(a + \frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{3b}{2} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = \frac{3b}{2} \Rightarrow \pi a + \pi \frac{b}{2} = 3b \Rightarrow a = \frac{3b - \frac{\pi b}{2}}{\pi} \Rightarrow a = b \cdot \frac{6 - \pi}{2\pi}$$

Hledaný poměr lze tedy vyjádřit následujícím způsobem:

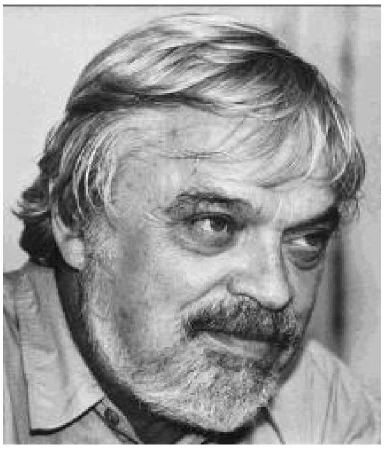
$$|AP| : |PQ| : |QB| = a : b : a = (6 - \pi) : 2\pi : (6 - \pi)$$

Kapitola 3

Biografické okénko

3.1 I. F. Šarygin

Igor Fedorovič Šarygin se narodil v roce 1937 v Moskvě. V ruské metropoli prožil také celý svůj život, s výjimkou jednoho roku během 2. světové války, kdy byl evakuován do Kazaně. Zemřel 12. března 2004.



Obr. 3.1: I. F. Šarygin
[4]

Po úspěšných studiích na Katedře matematiky a mechaniky Moskevské státní univerzity pokračoval v postgraduálním studiu a později na zmiňované katedře také vyučoval. To trvalo až do roku 1972, kdy musel z univerzity odejít kvůli tomu, že podepsal dopis ve prospěch disidentského matematika. Po odchodu z univerzity se dále věnoval výuce matematiky a především geometrie v různých moskevských institucích poskytujících vyšší vzdělání. [4] V roce 1985 se stal výzkumným pracovníkem Moskevského ústavu vzdělávacích systémů a metod ruské akademie školství (dříve Akademie pedagogických věd) a později byl povýšen na pozici vedoucího výzkumného pracovníka. Až do samého konce svého života pokračoval v psaní knih a bojoval za zlepšení matematické výchovy v Rusku.

Šarygin během svého života napsal více než 30 učebnic, zvláště v oblasti geometrie. V této bakalářské práci vás budeme provázet vybranými úlohami z Šaryginovy první knihy

Zadači po geometrii: Planimetria. V této i mnoha dalších učebnicích a sbírkách se projevila Šaryginova snaha prohlubovat kreativní myšlení žáků. Obdivuhodné je, že většina úloh předložených v jeho sbírkách jsou jeho vlastními úlohami. [4] Byla by proto škoda je nechat zapadnout v přílivu nových učebnic a neprovést jimi i čtenáře této práce.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo sestavit metodicky utříděnou sbírku řešených příkladů na planimetrické výpočty bez užití prostředků analytické geometrie, které jsou náplní běžného gymnaziálního učiva, jaké najdeme v sešitech Planimetrie a Goniometrie ze série učebnic pro gymnázia, vydané nakladatelstvím Prometheus. Pro splnění tohoto cíle jsem čerpala příklady z pozoruhodné rozsáhlé sbírky ruského matematika I. F. Šarygina, která nikdy nebyla přeložena do češtiny a ve které ono metodické utřídění provedeno není. Hlavním důvodem pro tuto volbu unikátního zdroje byla však skutečnost, že příklady, které byly pro bakalářskou práci vybírány, jsou ve sbírce opatřeny pouze výsledky, ne však postupy jejich řešení.

Po dopsání posledních řádků si troufám říci, že cíl jsem v zásadě splnila. Čerpala jsem příklady ze zadaného zdroje, vyřešila je a doplnila vlastními obrázky a názornými postupy, jak dojít k řešení předložených příkladů.

Psaní této bakalářské práce mi přineslo mnohé – oprášila jsem si ruštinu a zdokonalila se v odborné slovní zásobě při překladu zadání. Dále jsem se naučila pracovat v prostředí LaTeX a s programem GeoGebra na takové úrovni, že je mohu nadále využívat, zvláště pak ve své budoucí praxi učitele, který potřebuje efektivně připravovat písemná zadání kontrolních prací. Naučila jsem se také formulovat své myšlenky, a logicky je využívat v řešeních vybraných úloh. Neméně důležitý je můj osobní posun v oblasti elementární geometrie, především planimetrických výpočtů.

Poslední komentář zaslouží i to, že úlohy z Šaryginovy sbírky jsem nevybírala namátkově, ale postupně jsem podle jeho pořadí promýšlela všechny a do bakalářské práce jsem nakonec zařadila ty, které jsem považovala za zajímavé, nerutinní nebo poučné. Protože jsem zatím prošla pouze přibližně 30 % obsahu celé sbírky, ráda bych zbylou část obdobně zpracovala ve formě budoucí diplomové práce.

Seznam použité literatury

[1] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-85849-57-7.

[2] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4. uprav. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-174-4.

[3] SHARYGIN, Igor Fedorovich *Problems in plane geometry*. Rev. from 1986 Russian ed. transl. by Levant L. Moscow: Mir Publishers, 1988. ISBN 9785030001807.

[4] SIU, Man Keung, 2008. Igor Fedorovich Sharygin. In: *http://www.icmihistory.unito.it/*. [online] [cit. 23.2.2018]. Dostupné z: http://www.icmihistory.unito.it/portrait/sharygin.php

[5] ŠARYGIN, Igor Fedorovič. *Zadači po geometrii: planimetria* [Šarygin, 1986]. Izd. 2-oe. Moskva, Moskva: Nauka, 1986.222 s.

[6] ŠARYGIN, Igor Fedorovič *Zadači po geometrii*. Moskva: Nauka, 1986. Překlad zadání úloh: Holý, K., nepublikováno