MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Úlohy zahraničních matematických soutěží

Bakalářská práce

Anna Poĺomská

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2020**

Obsah

Úvod

Matematická olympiáda je u nás tradiční soutěží pro žáky základních a středních škol. Jejich úkolem je v určitém časovém intervalu vyřešit několik příkladů, samotný výsledek ale nestačí, žáci musí prokázat schopnost logického úsudku a podat celý postup řešení slovní formou. Toto řešení je ve své podstatě matematickým důkazem, kde žáci podrobně zdůvodňují svůj myšlenkový postup. Matematické olympiády řeší žáci základních a středních škol, přičemž obtížnost se stupňuje v závislosti na znalostech a dovednostech, které se očekávají od žáka daného ročníku. Obtížnost se také zvyšuje porovnáme-li zadání úloh domácích kol, která fungují jako kvalifikační, se zadáními úloh okresních, krajských či celorepublikových.

Ve své bakalářské práci se zaměřím pouze na řešení planimetrických úloh ze zahraničních matematických soutěží. Mým cílem je vytvořit sbírku planimetrických úloh, která bude sloužit jako cvičebnice nadaných žáků v matematických kroužcích nebo jako studijní materiál při přípravě na matematické olympiády. Řešení těchto úloh jsou vypracovaná obdobně jako vzorové texty Matematické olympiády ČR na stránkách `www.matematickaolympiada.cz`.

Práce je rozdělena na dvě hlavní kapitoly, před kterými je umístěna vstupní kapitola s názvem Teoretické minimum shrnující nejdůležitější pojmy a poznatky potřebné k řešení mnou vybraných úloh. V následující kapitole jsou uvedeny jednodušší úlohy, jejichž řešení nejsou příliš komplikovaná a neobsahují složité důkazy. Ve třetí kapitole pak najdeme úlohy, jejichž řešení jsou náročnější, a to především po stránce důkazové. Jednotlivé úlohy jsou navíc v obou kapitolách řazeny podle obtížnosti od nejjednodušších po nejobtížnější.

Úlohy jsem čerpala z anglicky psaných sborníků matematických soutěží pěti různých zemí: Rakouska, Bulharska, Slovinska, Chorvatska a Nizozemska. Tyto sborníky vznikly po konání matematických soutěží a obsahují úlohy zadávané soutěžícím v jednotlivých kolech a kategoriích. Sborníky obsahují nejen zadání, ale také řešení soutěžních úloh, která však často nebyla úplná či dostatečně podrobná a v některých případech zcela chyběla. Mým úkolem tedy bylo přeložit vybraná zadání a přepracovat původní řešení úloh tak, aby byla kompletní. V některých případech tedy stačilo přeložit a pouze poupravit řešení uvedené ve sborníku, v dalších případech jsem se rozhodla řešení zcela přepsat podle sebe a cenných rad svého vedoucího.

Práci jsem sázela v programu LaTeX a obrázky vytvořila v programu GeoGebra.

Kapitola 1

Teoretické minimum

V této úvodní kapitole shrnu nejdůležitější pojmy a poznatky, jejichž znalost je potřeba k řešení mnou vybraných úloh zahraničních matematických olympiád. Definice, věty a poznámky jsem převzala z disertační práce Barbory Havířové *Metody neanalytických výpočtů v eukleidovské geometrii*[1], ve které ale nebyla obsažena typologie trojúhelníků. Tu jsem proto převzala z učebnice *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*[2] od Evy Pomykalové.

1.1 Úhly příslušné k oblouku kružnice

Definice 1.1.1. Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB kružnice k, který v tomto úhlu leží.

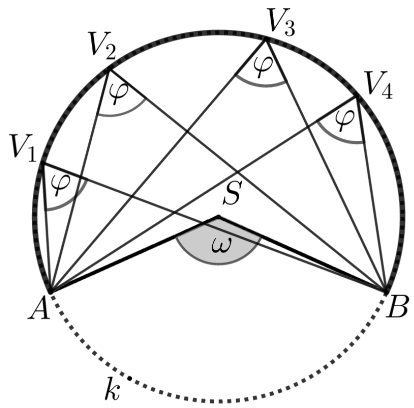
Definice 1.1.2. Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá **obvodový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.

Věta 1.1.1. *Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.*

Věta 1.1.2. *Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné.*

[1] HAVÍŘOVÁ, Barbora. *Metody neanalytických výpočtů v eukleidovské geometrii.* Brno: 2011. Disertační práce. Masarykova univerzita. Fakulta přírodovědecká. Vedoucí práce: Jaromír ŠIMŠA.

[2] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000 . Učebnice pro střední školy. ISBN 8071961744.

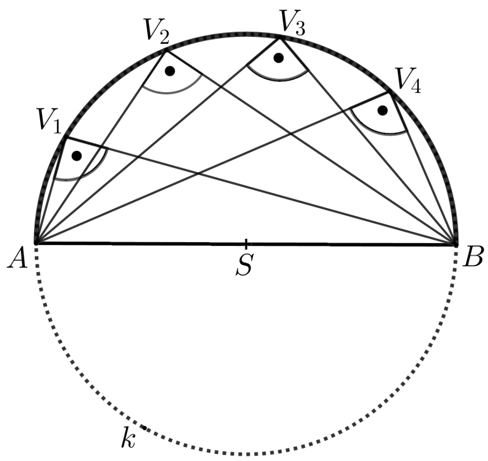


Obrázek 1.1: Středový úhel ω a obvodové úhly φ příslušné oblouku AB

Poznámka. K menšímu z obou oblouků AB kružnice k přísluší konvexní středový úhel a ostrý obvodový úhel. K většímu oblouku AB přísluší nekonvexní středový úhel a tupý obvodový úhel. K půlkružnici přísluší přímý středový úhel a pravý obvodový úhel. Součet středových úhlů příslušných k oběma obloukům AB je úhel plný, a proto je součet obvodových úhlů příslušných k oběma obloukům AB úhel přímý.

Věta 1.1.3. *Je dán oblouk AB kružnice k a bod C v opačné polorovině s hraniční přímkou AB. Je-li velikost úhlu ACB rovna velikosti obvodového úhlu příslušného k oblouku AB, pak bod C leží na kružnici k.*

Věta 1.1.4 (Thaletova)**.** *Každý obvodový úhel nad průměrem kružnice je pravý.*



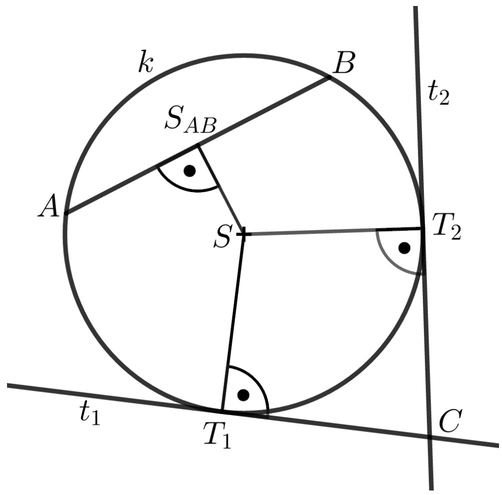
Obrázek 1.2: Pravé úhly nad průměrem AB kružnice k

1.2 Další vlastnosti kružnice

Věta 1.2.1. *Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem tětivy AB.*

Věta 1.2.2. *Tečna kružnice je kolmá ke spojnici bodu dotyku a středu kružnice.*

Věta 1.2.3. *Bodem ležícím vně kružnice procházejí právě dvě tečny této kružnice.*

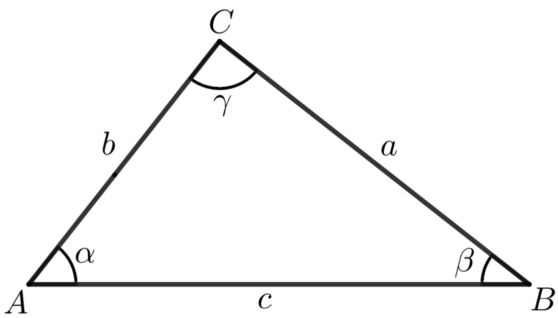


Obrázek 1.3: Tečny ke kružnici k z bodu C a tětiva AB

1.3 Trojúhelník

Definice 1.3.1. Trojúhelník ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB; přitom body A, B, C (zvané vrcholy trojúhelníka ACB) neleží v jedné přímce. Konvexní úhly BAC, ABC, BCA nazýváme **vnitřní úhly trojúhelníka** ABC. Vedlejší úhly k vnitřním úhlům trojúhelníka ABC nazýváme **vnější úhly trojúhelníka** ABC.

Poznámka. Strany BC, AC, AB trojúhelníka ABC značíme obvykle po řadě a, b, c, vnitřní úhly BAC, ABC, ACB značíme α, β, γ.

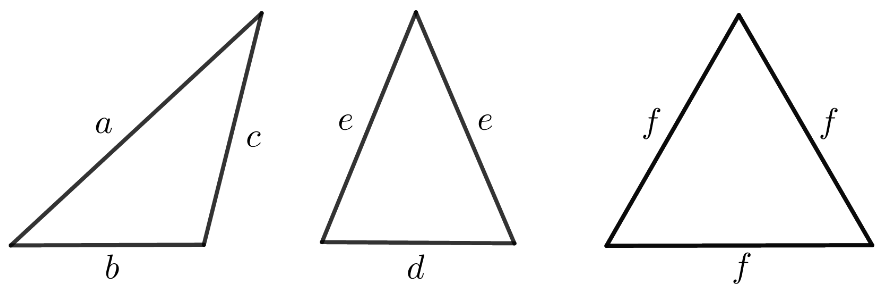


Obrázek 1.4: Označení stran a úhlů trojúhelníka ABC

1.3.1 Typologie trojúhelníků

Definice 1.3.2. Podle délek stran rozlišujeme trojúhelníky:

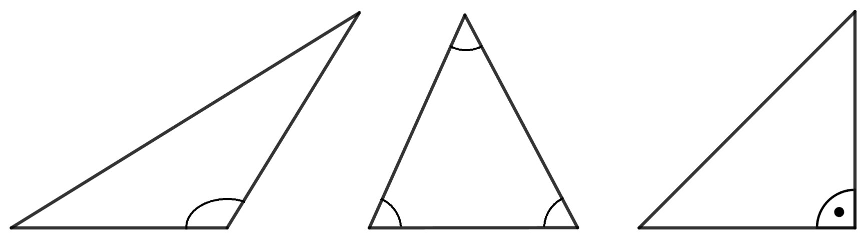
- **různostranné**, v nichž žádné dvě strany nejsou shodné,
- **rovnoramenné**, které mají dvě strany shodné, tyto dvě strany nazýváme **ramena** a třetí stranu nazýváme **základna** rovnoramenného trojúhelníka,
- **rovnostranné**, které mají všechny strany shodné.



Obrázek 1.5: Různostranný, rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník

Definice 1.3.3. Podle velikosti vnitřních úhlů rozlišujeme trojúhelníky:

- **ostroúhlé** se všemi ostrými úhly,
- **tupoúhlé** s jedním tupým úhlem,
- **pravoúhlé** s jedním pravým úhlem; stranám, které tvoří ramena pravého úhlu, říkáme **odvěsny**, strana ležící naproti pravému úhlu se nazývá **přepona**.



Obrázek 1.6: Tupoúhlý, ostroúhlý a pravoúhlý trojúhelník

Poznámka. Různostranné trojúhelníky, které nejsou pravoúhlé, se často nazývají **obecné**.

1.3.2 Úhly v trojúhelníku

Věta 1.3.1. *Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý.*

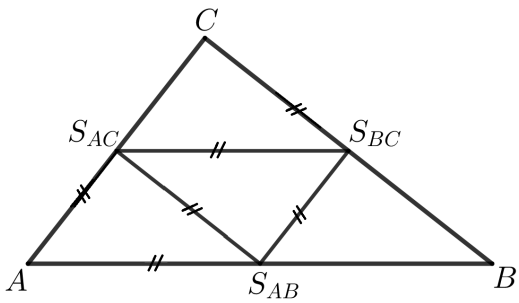
Věta 1.3.2. *Vnější úhel trojúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících dvou vrcholech.*

Věta 1.3.3. *Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly, proti delší straně trojúhelníka leží větší vnitřní úhel a naopak proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.*

1.3.3 Základní prvky v trojúhelníku

Definice 1.3.4. Střední příčka trojúhelníka je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníka.

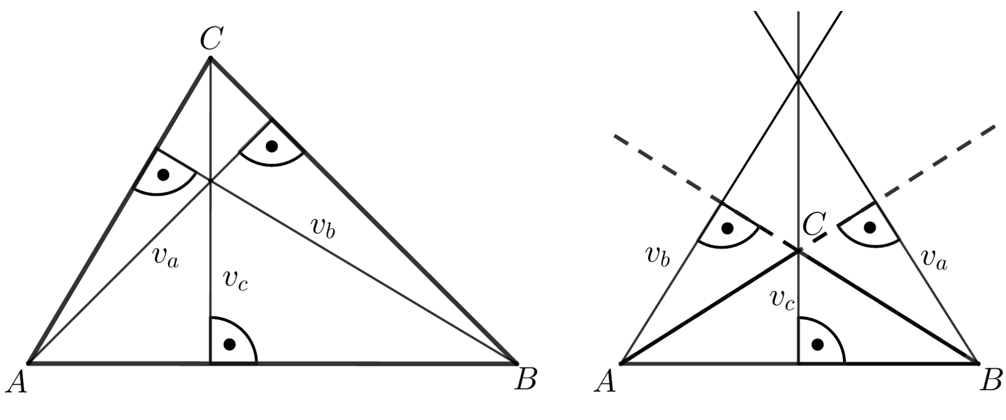
Věta 1.3.4. *Každá střední příčka je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníka, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany.*



Obrázek 1.7: Střední příčky trojúhelníka

Definice 1.3.5. Výška trojúhelníka je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníka.

Věta 1.3.5. *Výšky trojúhelníka leží na třech přímkách, které se protínají v jednom bodě zvaném **ortocentrum trojúhelníka**.*

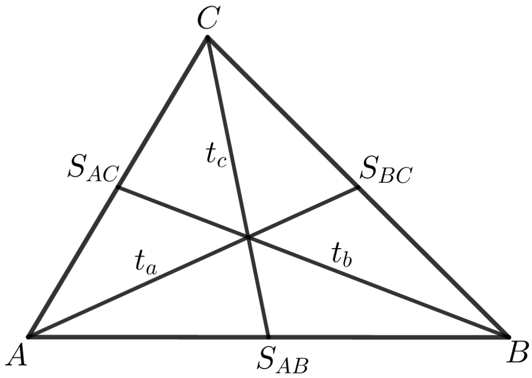


Obrázek 1.8: Výšky v ostroúhlém a tupoúhlém trojúhelníku a jejich ortocentra

Definice 1.3.6. Těžnice trojúhelníka je úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníka se středem jeho protější strany.

Věta 1.3.6. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, zvaném* ***těžiště trojúhelníka****. Vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníka je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice.*

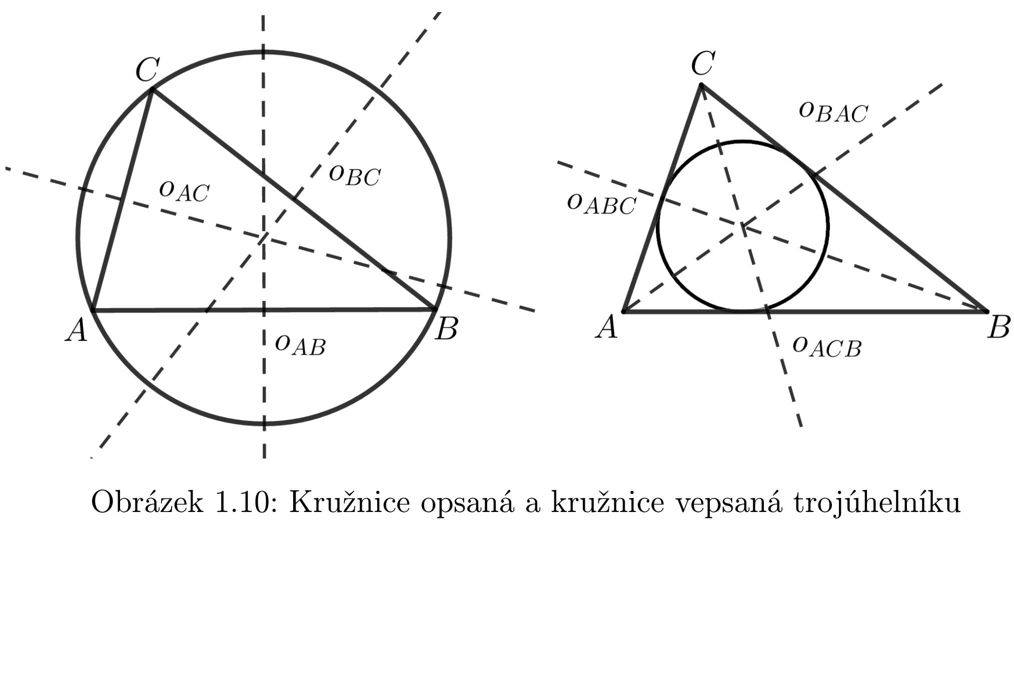
Poznámka. Výšky trojúhelníka ABC kolmé na strany a, b, c se po řadě označují v_a, v_b, v_c. Podobně označujeme těžnice t_a, t_b, t_c.



Obrázek 1.9: Těžnice trojúhelníka a jeho těžiště

Definice 1.3.7. Kružnice opsaná trojúhelníku je kružnice procházející všemi vrcholy trojúhelníka. **Kružnice vepsaná trojúhelníku** je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníka.

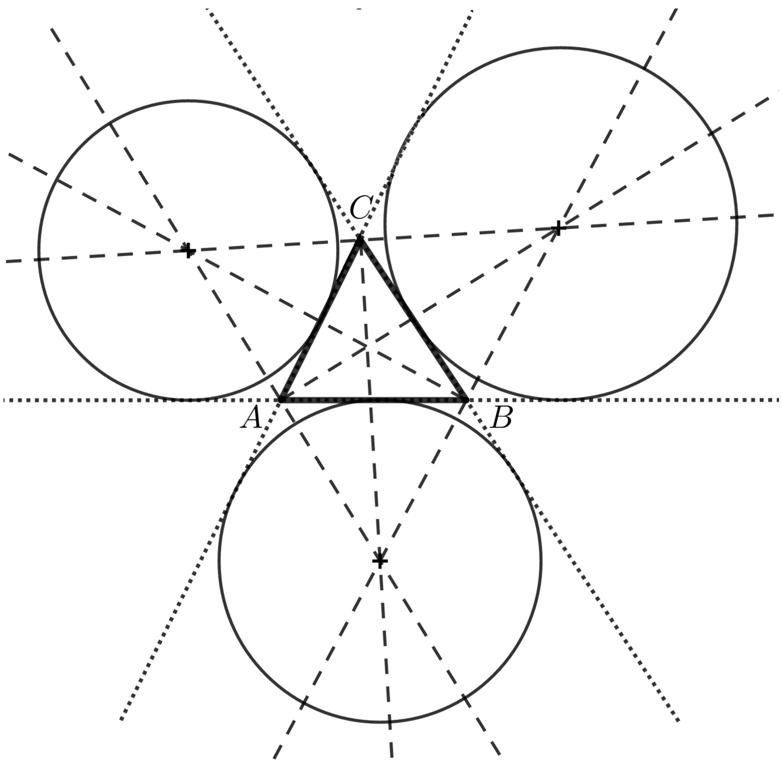
Věta 1.3.7. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku.*
Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice vepsané tomuto trojúhelníku.



Obrázek 1.10: Kružnice opsaná a kružnice vepsaná trojúhelníku

Definice 1.3.8. Kružnice připsaná trojúhelníku je kružnice, která se dotýká jedné strany trojúhelníka a přímek, v nichž leží zbývající dvě strany, a to v bodech, které na těchto stranách neleží.

Věta 1.3.8. *Osa vnitřního úhlu a osy vnějších úhlů u zbývajících dvou vrcholů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem jedné ze tří kružnic připsaných tomuto trojúhelníku.*



Obrázek 1.11: Kružnice připsané trojúhelníku

1.3.4 Shodnost a podobnost

Shodnost trojúhelníků

Definice 1.3.9. Dva trojúhelníky jsou **shodné**, když je lze přemístěním ztotožnit.

Věta 1.3.9 (*sss*)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.*

Věta 1.3.10 (*usu*)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně, jsou shodné.*

Věta 1.3.11 (*sus*)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.*

Věta 1.3.12 (Ssu)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.*

Poznámka. Pokud jsou dva trojúhelníky shodné, shodují se ve všech stranách, úhlech, výškách, těžnicích i v poloměru kružnice opsané a vepsané.

Podobnost trojúhelníků

Definice 1.3.10. Trojúhelník $A'B'C'$ **je podobný trojúhelníku** ABC, právě když existuje kladné číslo k takové, že pro jejich délky stran platí:

$$|A'B'| = k|AB|, \quad |B'C'| = k|BC|, \quad |A'C'| = k|AC|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti daných trojúhelníků.

Věta 1.3.13 (uu)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.*

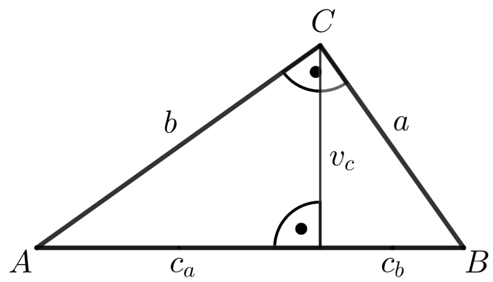
Věta 1.3.14 (sus)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.*

Věta 1.3.15 (Ssu)**.** *Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu proti větší z nich, jsou podobné.*

Poznámka. Pokud jsou dva trojúhelníky podobné, shodují se ve všech úhlech a jejich odpovídající si strany, výšky, těžnice, poloměr opsané i vepsané kružnice jsou ve stejném poměru.

1.3.5 Eukleidovy věty

Definice 1.3.11. Označme C_0 patu výšky z vrcholu C na přeponu AB pravoúhlého trojúhelníka. Úsečku AC_0 (resp. BC_0) nazýváme **úsek přilehlý k odvěsně** AC (resp. BC).
Délky těchto dvou úseků přepony AB obvykle značíme $|AC_0| = c_b$, $|BC_0| = c_a$.



Obrázek 1.12: Pravoúhlý trojúhelník s úseky přepony

Věta 1.3.16 (Eukleidova věta o výšce)**.** *V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony.*

Věta 1.3.17 (Eukleidova věta o odvěsně)**.** *V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a jejího úseku přilehlého k této odvěsně.*

1.3.6 Pythagorova věta

Věta 1.3.18 (Pythagorova). *V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.*

Poznámka. Označíme-li c přeponu a a, b odvěsny pravoúhlého trojúhelníka ABC, platí rovnost $c^2 = a^2 + b^2$.
Obráceně, platí-li pro délky stran trojúhelníka ABC rovnost $c^2 = a^2 + b^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý.

1.3.7 Goniometrické funkce ostrého úhlu

Definice 1.3.12. V pravoúhlém trojúhelníku je dán jeden jeho ostrý vnitřní úhel α:

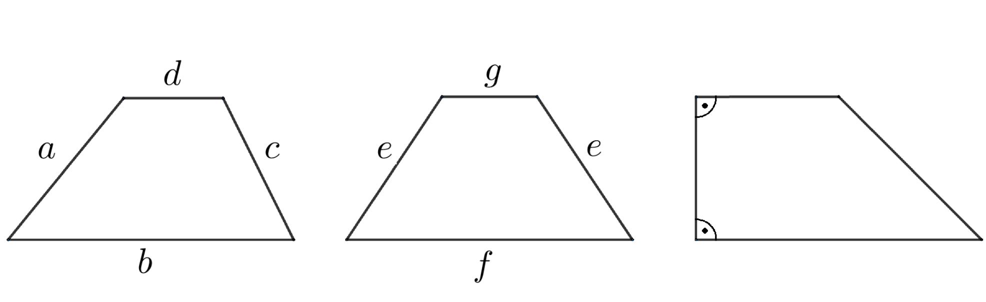
- **sinus** α je roven poměru délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony.
- **kosinus** α je roven poměru délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony.
- **tangens** α je roven poměru délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky odvěsny přilehlé k tomuto úhlu.
- **kotangens** α je roven poměru délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky odvěsny protilehlé k tomuto úhlu.

Poznámka. Všechny pravoúhlé trojúhelníky s daným ostrým úhlem α jsou podle věty *uu* navzájem podobné, a tak je definice 1.3.12. korektní, tj. hodnoty čtyř zavedených funkcí nezávisí na tom, jakou má trojúhelník velikost.

1.4 Čtyřúhelníky

Definice 1.4.1. Různoběžník je čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné.

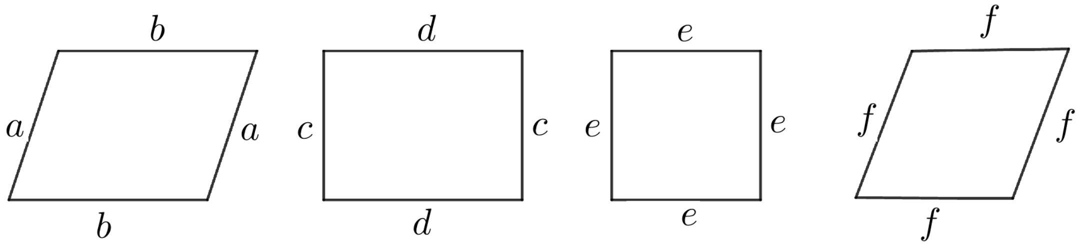
Definice 1.4.2. Lichoběžník je čtyřúhelník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany nejsou rovnoběžné. Rovnoběžné strany se nazývají **základny**, zbývající dvě **ramena**. Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, nazýváme **rovnoramenný lichoběžník**. Lichoběžník, jehož jedno rameno je kolmé k základnám, nazýváme **pravoúhlý lichoběžník**. **Střední příčka lichoběžníku** je úsečka spojující středy jeho ramen.



Obrázek 1.13: Obecný, rovnoramenný a pravoúhlý lichoběžník

Věta 1.4.1. *Střední příčka lichoběžníku je rovnoběžná s oběma základnami. Její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.*

Definice 1.4.3. **Rovnoběžník** je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné. **Obdélník** je rovnoběžník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé (pravoúhlý rovnoběžník). **Čtverec** je obdélník, jehož všechny strany mají stejnou délku (je rovnostranný). **Kosodélník** je rovnoběžník, jehož vnitřní úhly nejsou pravé (kosoúhlý rovnoběžník). **Kosočtverec** je kosodélník, jehož všechny strany mají stejnou délku (je rovnostranný).



Obrázek 1.14: Kosodélník, obdélník, čtverec, kosočtverec

Věta 1.4.2. *Protější strany rovnoběžníku jsou shodné. Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.*

Věta 1.4.3. *Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí, jejich společný bod se nazývá střed rovnoběžníku.*
Úhlopříčky obdélníku jsou shodné.
Úhlopříčky kosočtverce půlí jeho vnitřní úhly a jsou k sobě kolmé.

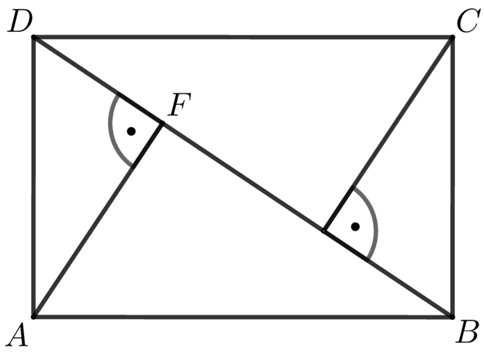
Definice 1.4.4. Čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, se nazývá **tětivový**.

Věta 1.4.4. *Součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníka je úhel přímý. Obráceně, každý konvexní čtyřúhelník, jehož součet protějších vnitřních úhlů je úhel přímý, je tětivový.*

Kapitola 2

Jednodušší úlohy

ZADÁNÍ I[1]:
Obdélník $ABCD$ má strany o délkách a a b, kde $a > b$. Přímky, které prochází body A a C kolmo k úhlopříčce BD, rozdělují tuto úhlopříčku na tři části o délkách 4, 5 a 4 (viz obrázek). Vypočítejte poměr $a : b$.



ŘEŠENÍ:
Trojúhelníky ADF, BDA a AFB jsou podobné podle věty uu, proto platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|BF|}{|AF|}.$$

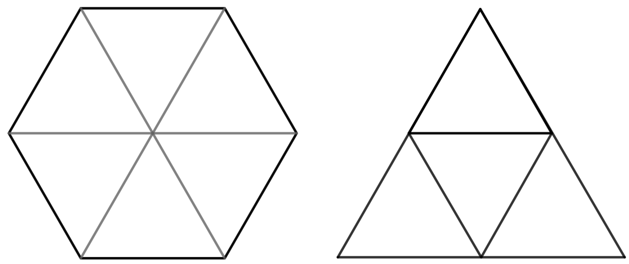
Velikosti DF a BF známe a velikost AF je společným prvkem pro oba výše uvedené poměry $|AF| : |DF|$ a $|BF| : |AF|$. Vztah pro $a : b$ tudíž můžeme upravit následovně:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{|AF|}{|DF|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{9}{4}.$$

Po odmocnění nakonec dostáváme $a : b = 3 : 2$.

[1] Ve sborníku [5] str.6

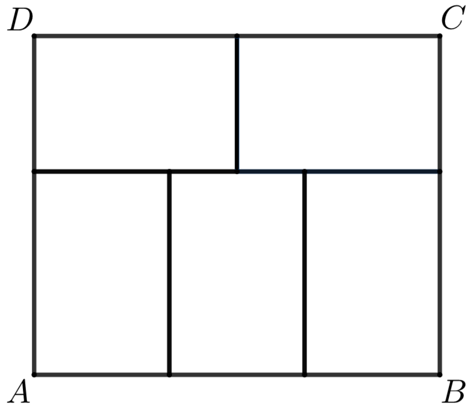
ZADÁNÍ II[2]:
Pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník mají stejný obvod. Jaký je poměr obsahu šestiúhelníka ku obsahu trojúhelníka?



ŘEŠENÍ:
Obvod šestiúhelníka si označíme O_6 a délku jeho strany a. Obvod trojúhelníka označíme O_3 a délku jeho strany b. Pro O_6 a O_3 platí: $O_6 = 6 \cdot a, O_3 = 3 \cdot b$.
Ze zadání víme, že obvod šestiúhelníka a trojúhelníka je stejný, tedy $O_6 = O_3$ neboli $6 \cdot a = 3 \cdot b$. Z toho plyne, že $2a = b$, tedy strana trojúhelníka je dvakrát delší než strana šestiúhelníka. Dále si rozdělíme rovnostranný trojúhelník pomocí středních příček na čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky a šestiúhelník rozdělíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků (viz obrázek).
Protože strany trojúhelníka jsou dvakrát delší než strany šestiúhelníka, jsou čtyři malé trojúhelníky tvořící trojúhelník ze zadání shodné s šesti malými trojúhelníky tvořícími šestiúhelník. Pomocí těchto malých trojúhelníků pak můžeme vyjádřit poměr obsahu zadaného šestiúhelníka a trojúhelníka, je to tedy 6 : 4, po úpravě 3 : 2.

[2]Ve sborníku [5] str.5

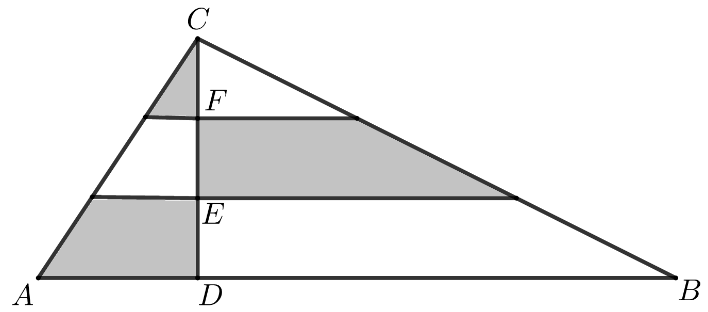
ZADÁNÍ III[3]:
Obdélník $ABCD$ je rozdělen na pět shodných obdélníků (viz obrázek). Obvod každého z těchto malých obdélníků je 20. Jaký je obsah obdélníka $ABCD$?



ŘEŠENÍ:
Z obrázku vidíme, že dvojnásobek délky malého obdélníka je roven trojnásobku jeho šířky. Z toho plyne, že poměr délky a šířky malých obdélníků je 3 : 2. Vzorec pro obvod obdélníka se stranami a a b je $2(a+b)$. Protože obvod malého obdélníka je 20 a známe poměr jeho stran, můžeme sestavit rovnici o jedné neznámé, ze které zjistíme rozměry $a = 3x, b = 2x$ malého obdélníka: $2(3x+2x) = 20$. Z toho plyne: $x = 2$. Délka malého obdélníka je tedy $3 \cdot 2 = 6$ a šířka $2 \cdot 2 = 4$. Následně můžeme vypočítat obsah malého obdélníka, a to je $6 \cdot 4 = 24$, a nakonec dopočítat obsah velkého obdélníka $ABCD$, tedy $5 \cdot 24 = 120$.

[3]Ve sborníku [5] str.4

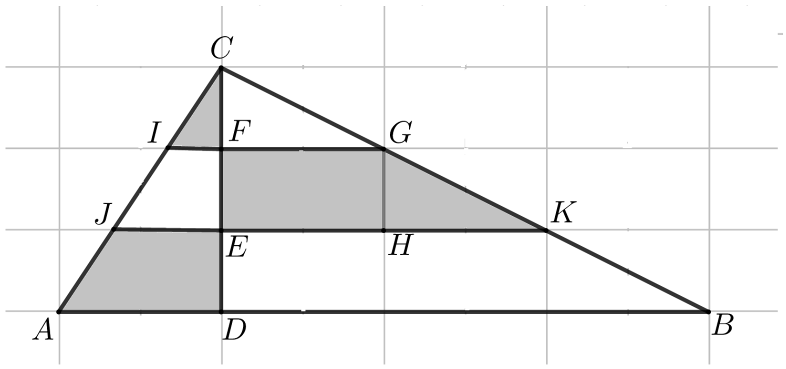
ZADÁNÍ IV[4]:
Na obrázku níže je trojúhelník ABC. Úsečka AB je umístěna horizontálně a úsečka CD je umístěna vertikálně. Dále platí, že úsečka DB je třikrát delší než úsečka AD. Body E a F rozdělují úsečku CD na tři části stejné délky. Dvě horizontální přímky procházející body E a F rozdělují společně s úsečkou CD trojúhelník ABC na šest částí. Víme, že obsah celého trojúhelníku je 1. Jaký je obsah plochy vyznačené šedou barvou?



ŘEŠENÍ:
Nejprve označíme $x = |AD|$, $y = |ED|$ a pomocí těchto délek vyjádříme obsah trojúhelníka ABC:

$$S_{ABC} = \frac{4x \cdot 3y}{2} = 1, \quad \text{odkud} \quad x \cdot y = \frac{1}{6}.$$

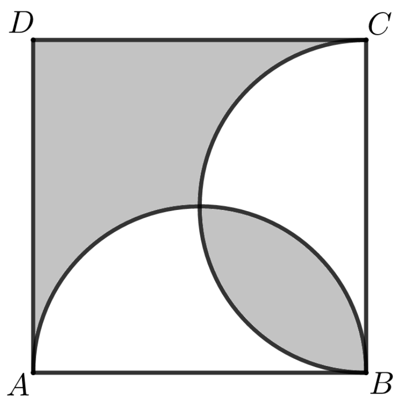
V dalším kroku trojúhelník ABC umístíme do sítě tvořené obdélníky o rozměrech x a y (x horizontálně a y vertikálně) tak, že bod A bude v rožku některého z obdélníků této sítě, a doplníme označení dalších potřebných bodů (viz obrázek).

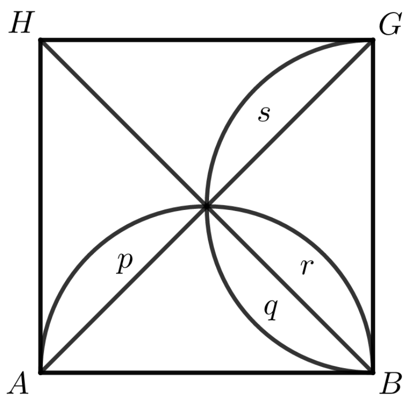


Obsah obdélníka $EHGF$ je $x \cdot y$, obsah trojúhelníka IFC společně s obsahem lichoběžníka $ADEJ$ je stejný jako obsah obdélníka $EHGF$ a obsah trojúhelníka GHK je roven jeho polovině.
Protože jsme si již dříve zjistili, že součin $x \cdot y$ je roven $\frac{1}{6}$, je obsah plochy vyznačené šedou barvou $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

[4] Ve sborníku [5] str.38

ZADÁNÍ V[5]:
Na obrázku je čtverec $ABCD$ o délce strany 4. Uvnitř čtverce jsou nakresleny dvě půlkružnice s průměry AB a BC (viz obrázek). Určete obsah plochy vyznačené šedou barvou.

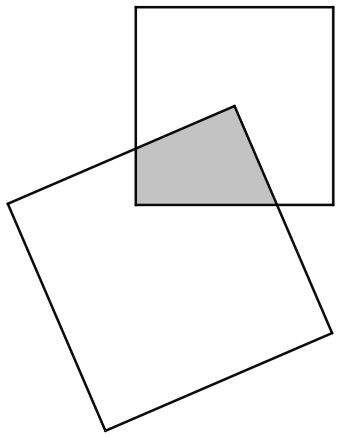




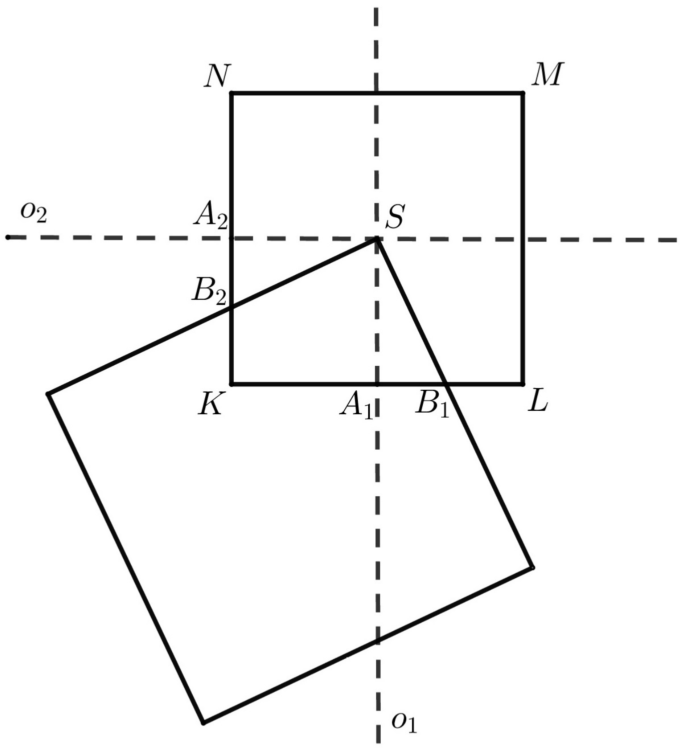
ŘEŠENÍ:
K vyřešení této úlohy budeme potřebovat úhlopříčky čtverce $ABCD$. Úhlopříčky čtverce jsou dvě shodné a navzájem kolmé úsečky, které se půlí, a navíc rozdělují celý čtverec na čtyři shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. Proto je podle Thaletovy věty průsečík obou úhlopříček zároveň průsečíkem obou zadaných půlkružnic a čtyři vzniklé kruhové úseče jsou shodné (v obrázku označené písmeny p, q, r, s), takže jejich obsahy jsou také stejné.
Z toho plyne, že obsah plochy vyznačené šedou barvou je roven obsahu trojúhelníka ACD, tedy polovině obsahu celého čtverce $ABCD$, a to je $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

[5] Ve sborníku [5] str.10

ZADÁNÍ VI[6]:
Malý čtverec o délce strany 4 leží částečně na velkém čtverci o délce strany 5 tak, že jeden z vrcholů velkého čtverce je umístěn přímo ve středu malého čtverce (viz obrázek). Jaká část velkého čtverce je zakrytá malým čtvercem?



ŘEŠENÍ:
Nejprve malý čtverec $KLMN$ rozdělíme na čtyři shodné čtverce pomocí dvou os o_1, o_2 a podle obrázku označíme A_1, A_2 průsečíky os o_1, o_2 s těmi stranami malého čtverce, které velký čtverec částečně zakrývá. Dále označíme B_1, B_2 průsečíky stran malého a velkého čtverce a S střed malého čtverce (vrchol velkého čtverce).

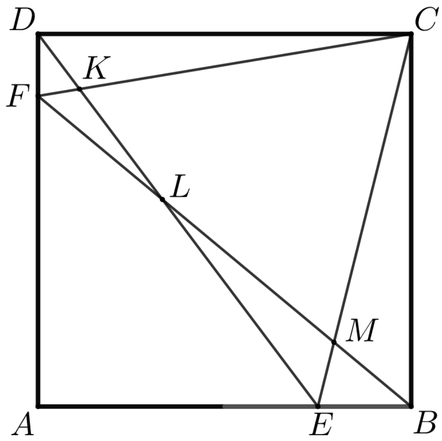


[6]Ve sborníku [5] str.36

Trojúhelníky A_1B_1S a A_2B_2S jsou shodné, neboť druhý z nich je obrazem prvního při otočení se středem S o úhel $90°$. Proto je obsah části velkého čtverce zakryté malým čtvercem, kterou je čtyřúhelník KB_2SB_1, rovna obsahu čtverce KA_2SA_1 a ten je roven $2 \cdot 2 = 4$. Obsah velkého čtverce je $5 \cdot 5 = 25$, a proto je hledaná část rovna zlomku $\frac{4}{25}$.

ZADÁNÍ VII[7]:

Je dán čtverec $ABCD$ a bod E na straně AB tohoto čtverce tak, že platí rovnost $|AE| = 3|EB|$. Dále zvolíme bod F na straně DA tak, že platí $|AF| = 5|FD|$. Označme K průsečík úseček DE a FC, L průsečík úseček DE a BF a M průsečík úseček FB a EC. Nechť p_1 je součet obsahů trojúhelníků EML a DKC a p_2 je součet obsahů trojúhelníků FLK a MBC. Zjistěte poměr $p_1 : p_2$.



ŘEŠENÍ:

Označme p obsah čtyřúhelníku $CKLM$. Potom součet p_2+p je roven obsahu trojúhelníka FBC. Délka výšky na stranu BC trojúhelníka FBC je rovna délce úsečky AB, proto pro obsah tohoto trojúhelníka platí:

$$p_2 + p = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}.$$

Odtud dostáváme: $p_2 = \dfrac{|AB|^2}{2} - p$.

Podobně ukážeme, že součet $p_1 + p$ je roven obsahu trojúhelníka DEC a že pro jeho obsah platí:

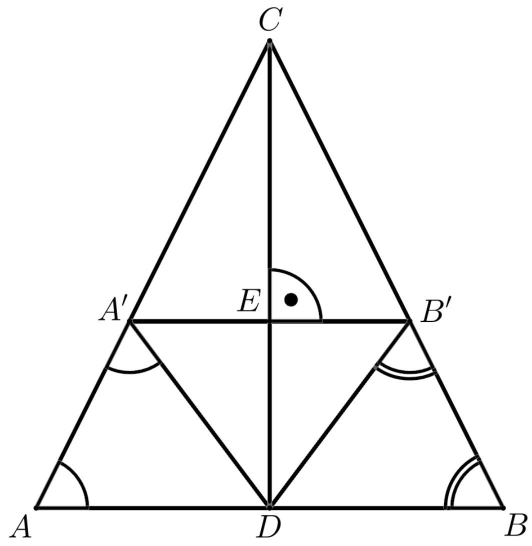
$$p_1 + p = \frac{|CD| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}.$$

Odtud dostáváme: $p_1 = \dfrac{|AB|^2}{2} - p$.

Dohromady to znamená, že $p_2 = p_1$, a proto hledaný poměr má hodnotu 1 : 1.

[7]Ve sborníku [1] str.6

ZADÁNÍ VIII[8]:
Označme D střed strany AB ostroúhlého trojúhelníka ABC. Nechť A' a B' jsou body na stranách AC a BC tohoto trojúhelníka takové, že trojúhelníky ADA' a DBB' jsou rovnoramenné a vrchol D je jejich hlavním vrcholem. Dokažte, že pokud jsou přímky CD a $A'B'$ navzájem kolmé, potom je trojúhelník ABC rovnoramenný.



ŘEŠENÍ:
Pro střed D úsečky AB platí $|AD| = |DB|$. Trojúhelníky ADA' a DBB' jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem D, proto také platí $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$, a tudíž trojúhelník $A'DB'$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem D.
Označme E průsečík přímek $A'B'$ a CD. Z předpokladu $DE \perp A'B'$ plyne, že E je střed $A'B'$, trojúhelník $A'DB'$ je totiž rovnoramenný. Úsečka CE je ovšem výškou trojúhelníka $A'B'C$, tudíž trojúhelník $A'B'C$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem C.
Proto platí:

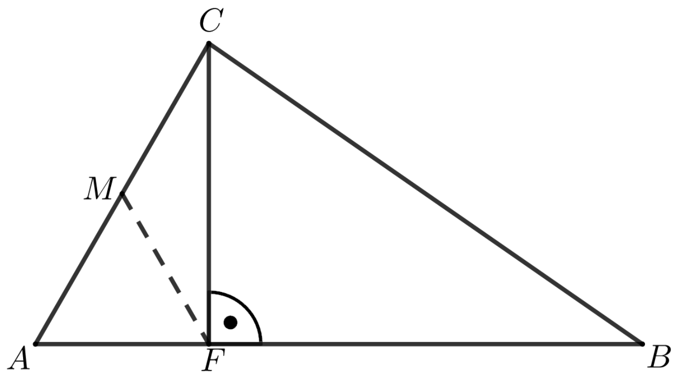
$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DA'A| = \pi - |\sphericalangle DA'B'| - |\sphericalangle B'A'C| =$$

$$= \pi - |\sphericalangle DB'A'| - |\sphericalangle A'B'C| = |\sphericalangle DB'B| = |\sphericalangle ABC|.$$

Trojúhelník ABC je tedy také rovnoramenný s hlavním vrcholem C.

[8]Ve sborníku [1] str.14

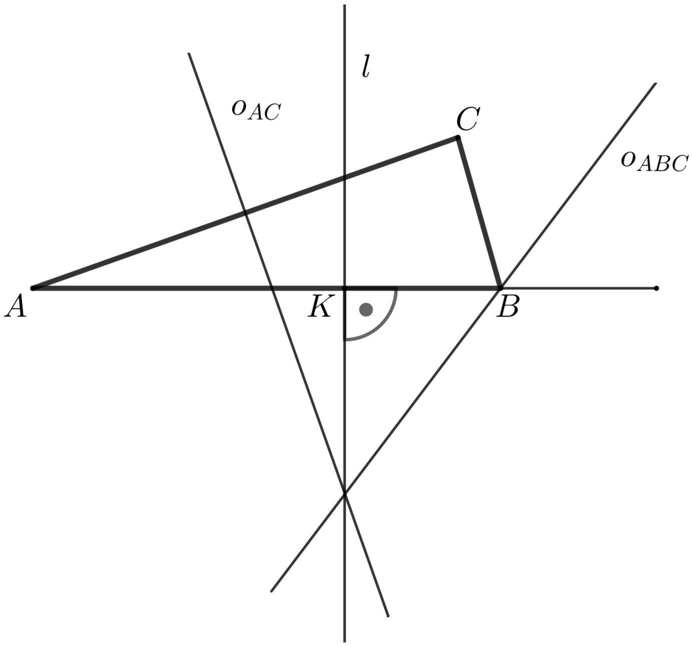
ZADÁNÍ IX[9]:
Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, bod M je střed strany AC a CF je výška na stranu AB. Dokažte, že platí: $|AM| = |AF|$ právě tehdy, když $|\sphericalangle BAC| = 60°$.



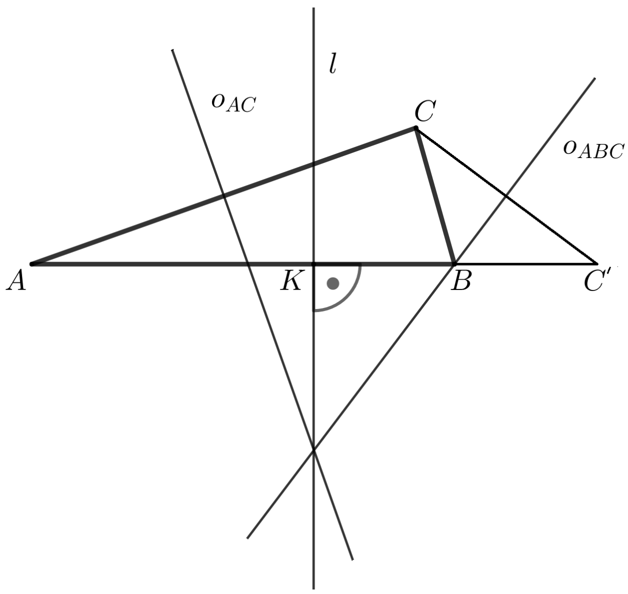
ŘEŠENÍ:
Dokážeme oba směry ekvivalence:
1. $|AM| = |AF| \Rightarrow |\sphericalangle BAC| = 60°$
Nechť $|AM| = |AF|$. Protože je trojúhelník AFC pravoúhlý, platí podle našeho předpokladu a Thaletovy věty $|MF| = |AM| = |AF|$. Trojúhelník AFM je tedy rovnostranný, a proto platí $|\sphericalangle FAM| = |\sphericalangle BAC| = 60°$.
2. $|\sphericalangle BAC| = 60° \Rightarrow |AM| = |AF|$
Nechť $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Protože je trojúhelník AFC pravoúhlý, platí podle Thaletovy věty $|AM| = |MF|$. Trojúhelník FAM je tedy rovnoramenný se základnou AF, a platí $|\sphericalangle FAM| = |\sphericalangle BAC| = 60°$. Úhly u základny každého rovnoramenného trojúhelníka mají stejnou velikost, platí tedy následující $|\sphericalangle AFM| = |\sphericalangle FAM| = 60°$. Z toho plyne, že i $|\sphericalangle AMF| = 60°$. Trojúhelník AFM je tudíž rovnostranný, to znamená $|AM| = |FM|$, a proto i $|AM| = |MF|$.

[9]Ve sborníku [4] str.15

ZADÁNÍ X[10]:
Je dán trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| > |BC|$, a bod $K \in AB$ takový, že $|AK| = |BC| + |BK|$. Přímka l procházející bodem K je kolmá k AB. Dokažte, že přímka l, osa strany AC a osa vnějšího úhlu ABC procházejí jedním bodem.



ŘEŠENÍ:
Nejprve zvolíme pomocný bod C', který leží na polopřímce AB tak, že platí $|AB| < < |AC'|$ a $|BC| = |BC'|$. Potom osa vnějšího úhlu ABC je zároveň osou úsečky CC'. Tuto osu označíme o_{ABC} a osu úsečky AC označíme o_{AC}.



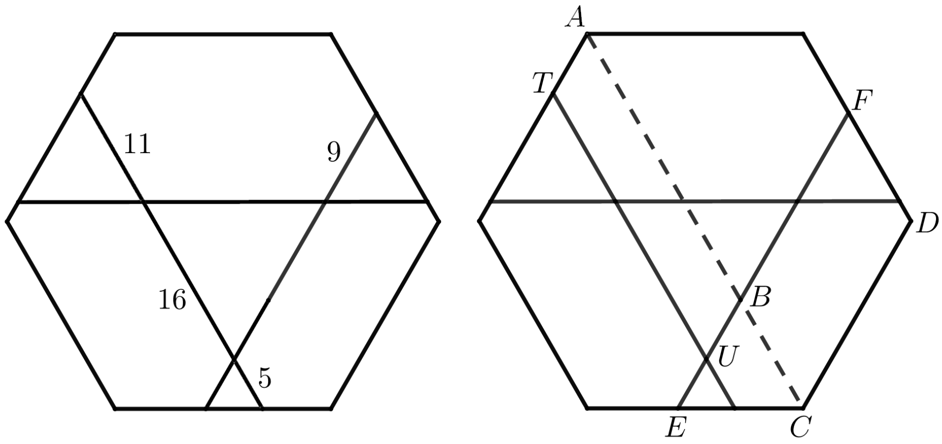
---
[10]Ve sborníku [3] str.1

Dále protože $|AK| = |BC| + |BK|$ a $|BC| = |BC'|$, platí také $|AK| = |BC'| + |BK|$, odkud dostáváme $|AK| = |KC'|$. Bod K je tedy středem úsečky AC'. Bodem K (středem úsečky AC') prochází přímka l, která je kolmá k AB, a tedy i k AC'. Přímka l je tedy osou úsečky AC'.

Uvažujme nyní trojúhelník ACC'. Přímka l je osou strany AC', přímka o_{ABC} je osou strany CC' a přímka o_{AC} je osou strany AC tohoto trojúhelníka. Je všeobecně známo, že osy stran každého trojúhelníka se protínají v jednom bodě (ve středu kružnice opsané danému trojúhelníku). Pro trojúhelník ACC' to znamená, že i přímky o_{ABC}, o_{AC} a l se protínají v jednom bodě, jak jsme měli dokázat.

ZADÁNÍ XI[11]:

Pravidelný šestiúhelník je rozdělen na sedm částí pomocí třech přímek, které jsou rovnoběžné se stranami šestiúhelníku (viz obrázek). Čtyři tyto části jsou rovnostranné trojúhelníky, jejichž délky stran jsou vyznačeny v obrázku. Jak dlouhá je strana pravidelného šestiúhelníka?



ŘEŠENÍ:

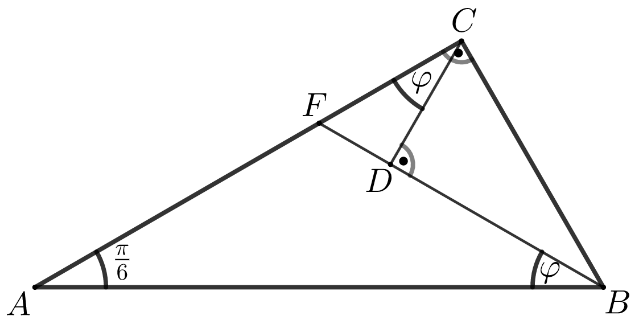
Zvolíme označení některých bodů podle obrázku. Úlohu vyřešíme, když spočítáme součet $|AB|+|BC|+|CD|$, který činí trojnásobek hledané délky strany šestiúhelníka. Nejprve zjistíme délku úsečky AB, která příhodně tvoří jednu ze stran rovnoběžníka $ABTU$. Platí $|AB| = |TU| = 16 + 11 = 27$. V šestiúhelníku vznikl ještě další rovnoběžník, a to $BCDF$, to znamená $|CD| = |BF|$.
Protože trojúhelník BCE je rovnostranný, platí $|BC| = |BE|$. Z obrázku také vidíme, že $|BE|+|BF| = |EF|$, přitom délku EF můžeme dopočítat pomocí zadaných délek rovnostranných trojúhelníků: $|EF| = 5+16+9 = 30$. Dohromady $|BE|+|BF| = 30$.
Pokud zkombinujeme všechna tato fakta, zjistíme, že trojnásobek strany pravidelného šestiúhelníka je roven:

$$|AB| + |BC| + |CD| = 27 + |EB| + |BF| = 27 + 30 = 57.$$

Délka strany pravidelného šestiúhelníka je tudíž $57 : 3 = 19$.

[11] Ve sborníku [5] str.11

ZADÁNÍ XII[12]:
Délka odvěsny AC pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem u vrcholu C je 1 dm, dále platí $|\sphericalangle BAC| = \frac{\pi}{6}$. Označme D bod uvnitř trojúhelníka ABC takový, že $|\sphericalangle BDC| = \frac{\pi}{2}$ a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DBA|$. Dále označme F průsečík strany AC a přímky BD. Určete délku úsečky AF.



ŘEŠENÍ:
Nejprve vyjádříme délku odvěsny BC pomocí délky odvěsny AC:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{|BC|}{|AC|} \qquad \Rightarrow \qquad |BC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|.$$

Označme $\varphi = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DBA|$. Pak zřejmě platí:

$$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle ACD| = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

a odtud plyne:

$$|\sphericalangle CBD| = \pi - |\sphericalangle BDC| - |\sphericalangle BCD| = \pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi.$$

Protože známe velikost úhlu ABC, můžeme dopočítat velikost φ. Platí tedy:

$$\frac{\pi}{3} = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = \varphi + \varphi = 2\varphi,$$

odkud dostáváme: $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
Nyní víme, že $|\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle DBC| = \frac{\pi}{6}$. Jelikož jsou trojúhelníky BFC a ABC pravoúhlé a u jednoho z vrcholů mají úhel o velikosti $\frac{\pi}{6}$, platí:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{|CF|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|},$$

z čehož díky dřívějšímu vyjádření délky BC plyne:

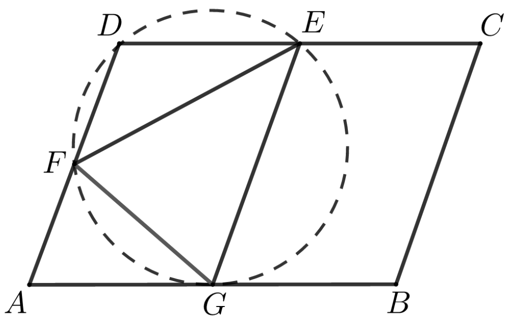
$$|CF| = \frac{|BC|^2}{|AC|} = \frac{\frac{1}{3}|AC|^2}{|AC|} = \tfrac{1}{3}|AC|$$

Nakonec vyjádříme délku úsečky AF a dopočítáme její hodnotu:

$$|AF| = |AC| - |CF| = |AC| - \tfrac{1}{3}|AC| = \tfrac{2}{3}|AC| = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{dm}.$$

[12] Ve sborníku [1] str.5

ZADÁNÍ XIII[13]:
Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechť E, F a G označují postupně středy stran CD, AD a AB. Kružnice k opsaná trojúhelníku DFE se dotýká úsečky AB v bodě G. Dokažte, že $|AB| = \sqrt{2}|AD|$.



ŘEŠENÍ:
Označme $\alpha = |\sphericalangle BAD|$. Zřejmě platí $\alpha = |\sphericalangle EGB|$ a $|\sphericalangle ADE| = \pi - \alpha$.
Protože je čtyřúhelník $DEGF$ tětivový, platí:

$$|\sphericalangle FGE| = \pi - |\sphericalangle FDE| = \pi - |\sphericalangle ADE| = \pi - \big(\pi - \alpha\big) = \alpha.$$

Odtud postupně dostáváme:

$$|\sphericalangle FGA| = \pi - |\sphericalangle FGE| - |\sphericalangle EGB| = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha,$$

$$|\sphericalangle GFA| = \pi - |\sphericalangle GAF| - |\sphericalangle FGA| = \pi - \alpha - \big(\pi - 2\alpha\big) = \alpha.$$

Dostáváme tak, že trojúhelník AGF je rovnoramenný s hlavním vrcholem G.
Úsekový úhel EGB sevřený tětivou EG a tečnou AB kružnice k je roven obvodovému úhlu GFE, tedy $|\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle EGB| = \alpha = |\sphericalangle FGE|$. Z toho plyne, že trojúhelník EFG je rovnoramenný s hlavním vrcholem E. Porovnáme-li úhly rovnoramenných trojúhelníků AGF a EFG, zjistíme, že jsou podobné podle věty *uu*. Pro jejich poměry ramen a základen tedy platí následující: $\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|}$.
Označíme-li $a = |AB|$ a $b = |AD|$, potom platí vztahy:

$$a = |EG|, \quad \frac{a}{2} = |FG|, \quad \frac{a}{2} = |AG|, \quad \frac{b}{2} = |AF|.$$

A jejich dosazením dostáváme:

$$\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$2b^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}b \quad \Rightarrow \quad |AB| = \sqrt{2}|AD|.$$

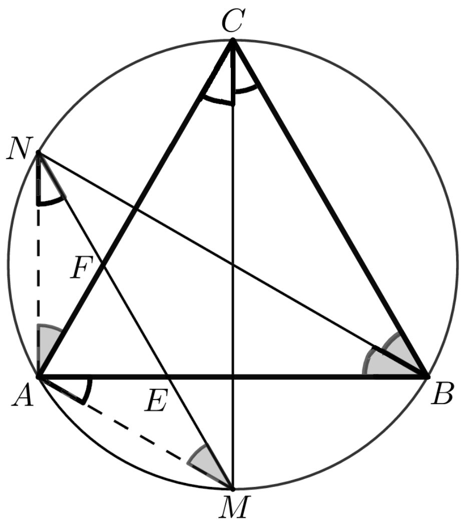
Dokázat poslední rovnost byl náš úkol.

[13] Ve sborníku [5] str.16

Kapitola 3

Složitější úlohy

ZADÁNÍ I[1]:
Je dán trojúhelník ABC a kružnice k opsaná tomuto trojúhelníku. Nechť M a N jsou průsečíky os úhlů ACB a CBA s kružnicí k. Označme postupně E a F průsečíky přímky MN se stranami AB a AC trojúhelníka ABC. Dokažte, že jestliže platí $|ME| = |EF| = |FN|$, potom je trojúhelník ABC rovnostranný.



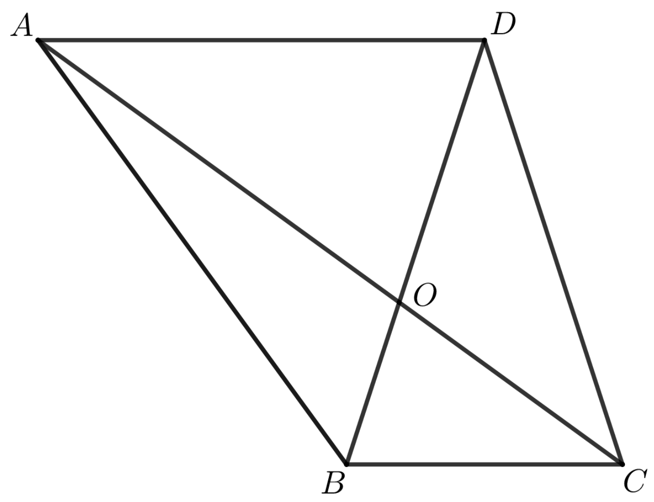
ŘEŠENÍ:
Nejprve označíme řeckými písmeny α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka ABC.
Protože body A, C, M a N leží na jedné kružnici a platí $|\sphericalangle ACM| = \frac{\gamma}{2}$, potom také $|\sphericalangle ANM| = \frac{\gamma}{2}$. Podobně protože body A, B, M a N leží na jedné kružnici a platí $|\sphericalangle ABN| = \frac{\beta}{2}$, potom také $|\sphericalangle NMA| = \frac{\beta}{2}$. Stejným způsobem odvodíme i následující rovnosti:

$$|\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle CBN| = \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle BCM| = \frac{\gamma}{2}.$$

[1] Ve sborníku [1] str.7

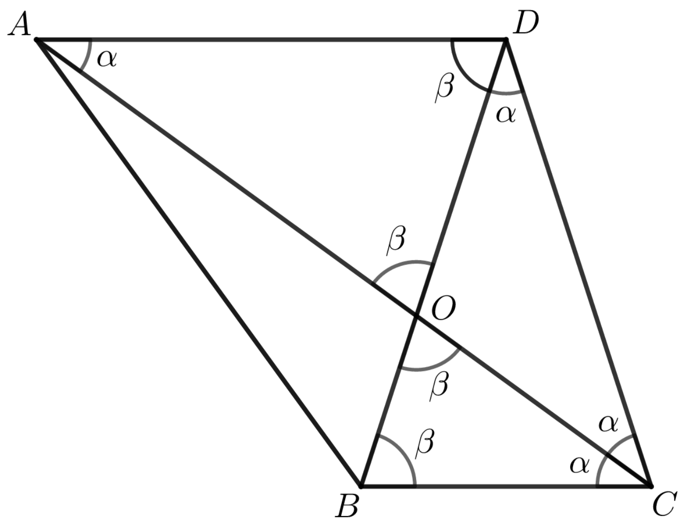
Z velikostí výše uvedených úhlů plyne, že trojúhelníky AME, NAF a NMA jsou navzájem podobné trojúhelníky.
Z podobnosti trojúhelníků AME a NAF plyne, že úhly AFN a MEA jsou shodné, a proto jsou shodné i k nim vedlejší úhly AFE a AEF. Z toho plyne, že trojúhelník AFE je rovnoramenný se základnou EF. (Zdůrazněme, že to platí v obecném trojúhelníku ABC. Dosud jsme totiž shodnost úseček ME, EF a FN nevyužili.)
Podobné trojúhelníky AME a NAF se shodují v poměru svých stran: $\frac{|AE|}{|ME|} = \frac{|NF|}{|AF|}$. Odtud díky obecně dokázané rovnosti $|AE| = |AF|$ plyne rovněž (obecná) rovnost $|ME| \cdot |NF| = |AE|^2$. Protože obě úsečky ME a NF jsou dle předpokladu úlohy shodné s úsečkou EF, plyne z poslední rovnosti vztah $|EF|^2 = |AE|^2$ neboli $|AE| = |EF|$. Zjistili jsme tak, že všech pět úseček AE, EF, AF, ME a NF má stejnou délku.
Podle předchozího je trojúhelník AEF rovnostranný, a proto $\alpha = \frac{\pi}{3}$, zatímco trojúhelník AEM je rovnoramenný s hlavním vrcholem E, a proto pro jeho dříve vyjádřené úhly při základně AM platí $\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$, tudíž $\beta = \gamma$. Dohromady dostáváme, že ABC je rovnoramenný trojúhelník s úhlem $\frac{\pi}{3}$ u svého hlavního vrcholu A, tudíž je rovnostranný.

ZADÁNÍ II[2]:
Je dán čtyřúhelník, jehož strany BC a AD jsou rovnoběžné a úhlopříčky se protínají v bodě O. Pro tento čtyřúhelník platí $|CD| = |AO|$ a $|BC| = |OD|$ a navíc úhlopříčka AC je osou úhlu BCD. Určete velikost úhlu ABC.



ŘEŠENÍ:
Nejprve dokážeme, že některé trojúhelníky na obrázku jsou rovnoramenné, přičemž je budeme označovat písmeny tak, že písmeno uprostřed názvu trojúhelníka označuje jeho hlavní vrchol.
Trojúhelník ADC je rovnoramenný, protože platí $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD|$. První rovnost platí, protože AD a BC jsou rovnoběžky, které protíná přímka AC. Druhá rovnost platí, protože ze zadání víme, že AC je osa úhlu BCD.
Trojúhelník DAO je rovnoramenný, protože $|AD| = |CD| = |AO|$. První rovnost platí, protože trojúhelník ADC je rovnoramenný, druhá rovnost je dána zadáním úlohy.
Trojúhelník BCO je rovnoramenný, protože $|\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle BOC|$. První rovnost platí, protože AD a BC jsou rovnoběžky, které protíná přímka BD. Druhá rovnost plyne z rovnoramenného trojúhelníka DAO. Třetí rovnost platí, protože úhly AOD a COB jsou vrcholové.
Trojúhelník COD je rovnoramenný, protože platí $|DO| = |BC| = |CO|$. První rovnost je dána zadáním úlohy. Druhá rovnost plyne z rovnoramenného trojúhelníka BCO.
Pro přehlednost si nyní do obrázku zaznačíme velikosti úhlů pomocí písmen řecké abecedy tak, že $\alpha = |\sphericalangle BCA|$ a $\beta = |\sphericalangle ADB|$.

[2]Ve sborníku [5] str.16



Nyní vypočteme velikosti úhlů α a β. Pro trojúhelníky BOC a COD využijeme poznatek o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka:

$$2\beta + \alpha = 180^\circ \quad \text{a} \quad 2\alpha + (180^\circ - \beta) = 180^\circ.$$

Z druhé rovnosti plyne $\beta = 2\alpha$. Dosazením do první rovnosti dostaneme $5\alpha = 180^\circ$, odkud $\alpha = 36^\circ$, a proto $\beta = 72^\circ$.
Všimněme si, že rovnost $\beta = 2\alpha$ znamená, že také trojúhelník BDC je rovnoramenný. Proto platí $|BD| = |CD|$, zároveň však z rovnoramenného trojúhelníka ADC plyne $|AD| = |CD|$, tudíž $|BD| = |AD|$, a proto i trojúhelník ADB je rovnoramenný, přitom u hlavního vrcholu D má úhel β. Proto jeho vnitřní úhly u základny AB mají velikost:

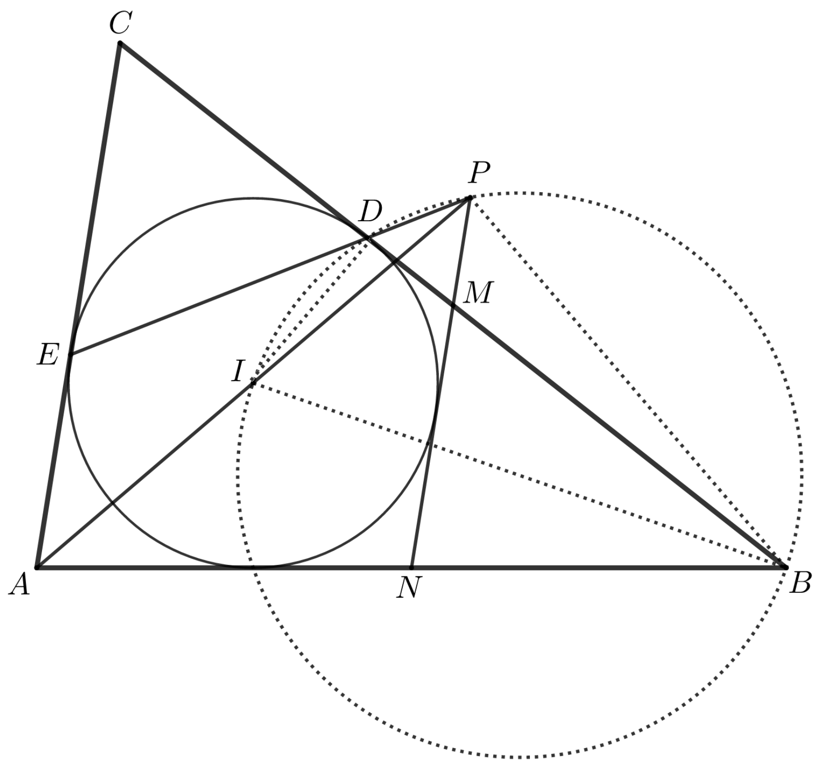
$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAD| = \tfrac{180^\circ - \beta}{2} = \tfrac{108^\circ}{2} = 54^\circ.$$

Hledaná velikost úhlu ABC má tedy hodnotu:

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle CBD| = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ.$$

ZADÁNÍ III[3]:

Je dán trojúhelník ABC a střed I kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, která se dotýká strany BC v bodě D a strany AC v bodě E. Bod P je průsečík přímek AI a DE, bod M je střed strany BC a bod N je střed strany AB. Dokažte, že body M, N a P leží na jedné přímce.



ŘEŠENÍ:

V případě $|AB| = |AC|$ platí $D = M = P$, body M, N a P pak tedy leží na jedné přímce. Dále dokážeme kolineárnost bodů P, M a N v případě $|AB| > |AC|$, pro případ $|AB| < |AC|$ je důkaz analogický.

Označme vnitřní úhly trojúhelníka ABC: u vrcholu A úhel α, u vrcholu B úhel β, u vrcholu C úhel γ. Potom platí:

1. $|\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ (z rovnoramenného trojúhelníka CDE).
2. $|\sphericalangle BIA| = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$ (z trojúhelníka ABI), a proto $|\sphericalangle BIP| = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

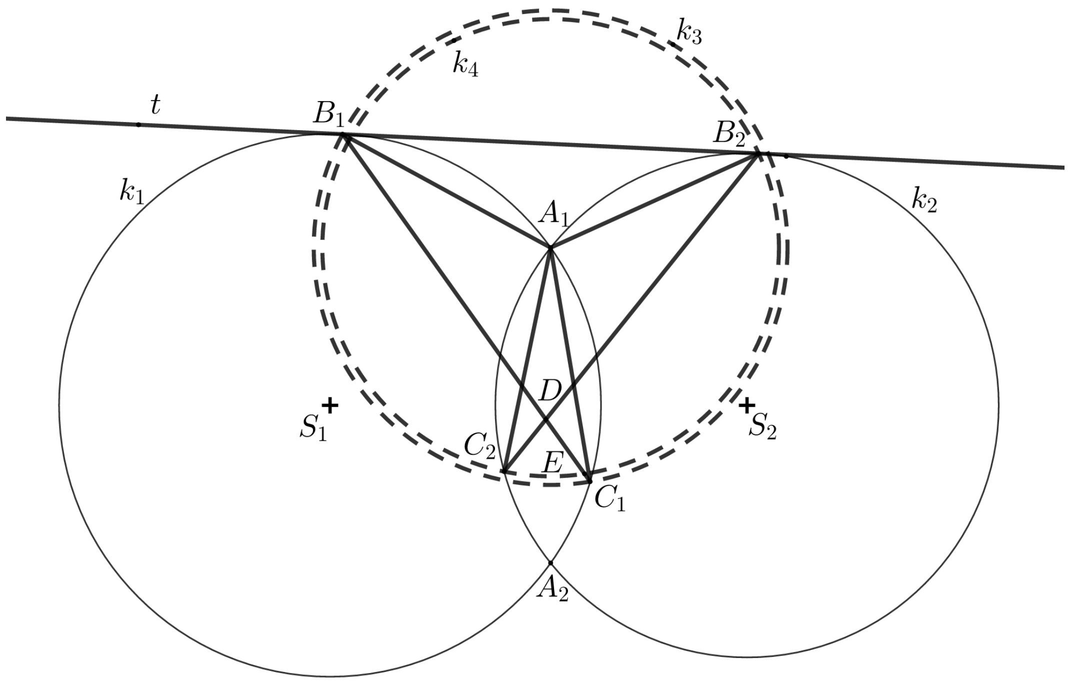
To znamená, že čtyřúhelníku $BPDI$ můžeme opsat kružnici (úsečku PB totiž vidíme z bodu D i z bodu I pod úhlem $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$). Této kružnici je vepsaný pravoúhlý trojúhelník BDI s pravým úhlem u vrcholu D. Z toho plyne, že také trojúhelník BPI je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu P. Protože je trojúhelník BPI pravoúhlý,

[3] Ve sborníku [4] str.9

je také trojúhelník ABP pravoúhlý. Jelikož N je střed úsečky AB, je zároveň středem přepony trojúhelníka ABP a podle Thaletovy věty i středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Z toho plyne, že $|\sphericalangle BNP| = 2|\sphericalangle BAP| = \alpha$ (podle věty o obvodovém a středovém úhlu s přihlédnutím k tomu, že úsečku BP vidíme z bodu A pod úhlem $\frac{\alpha}{2}$). Dostáváme tak, že přímka PN je rovnoběžná s přímkou AC, a protože přímka MN je také rovnoběžná s AC (úsečka MN je totiž střední příčka trojúhelníka ABC), platí, že přímka určená body P, N je touž přímkou jako přímka určená body M, N. Z toho plyne, že body P, M, N jsou kolineární.

ZADÁNÍ IV[4]:

Kružnice k_1 a k_2 různých poloměrů se protínají v bodech A_1 a A_2. Nechť t je společná tečna těchto kružnic taková, že vzdálenost tečny t od bodu A_1 je kratší než vzdálenost tečny t od bodu A_2. Označme B_1 a B_2 body dotyku přímky t po řadě s kružnicemi k_1 a k_2. Dále nechť k_3 a k_4 jsou kružnice se společným středem A_1 a poloměry po řadě A_1B_1 a A_1B_2. Kružnice k_1 a k_3 se navíc protínají v bodě $C_1 \neq B_1$ a kružnice k_2 a k_4 se navíc protínají v bodě $C_2 \neq B_2$. Označme D průsečík přímek B_1C_1 a B_2C_2 a E průsečík přímky B_1C_1 a kružnice k_4, který leží ve stejné polorovině vyťaté přímkou B_2C_2 jako bod C_1. Dokažte, že přímka A_1D je kolmá k přímce C_2E.

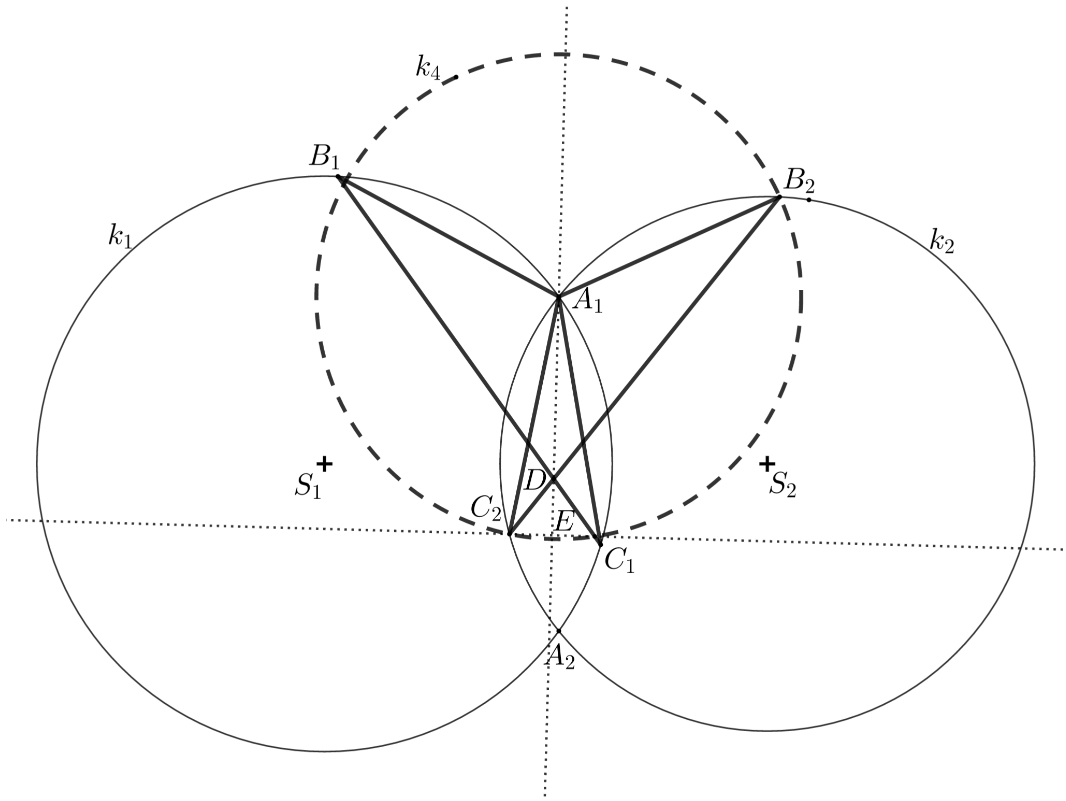


ŘEŠENÍ:

Úhel $B_2B_1A_1$ mezi tečnou t a tětivou B_1A_1 kružnice k_1 je roven obvodovému úhlu $B_1C_1A_1$, a tedy i úhlu $A_1B_1C_1$, protože trojúhelník $B_1A_1C_1$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem A_1. Takže platí $|\sphericalangle B_2B_1A_1| = |\sphericalangle A_1B_1C_1|$, tudíž polopřímka B_1A_1 je osou úhlu $B_2B_1C_1$, tedy úhlu B_2B_1D.

Analogicky dostáváme, že také polopřímka polopřímka B_2A_1 je osou úhlu B_1B_2D. Dohromady to znamená, že bod A_1 je středem kružnice vepsané trojúhelníku B_1B_2D a že polopřímka DA_1 je osa jeho třetího úhlu B_1DB_2. Označme ještě F průsečík přímek A_1D a C_2E.

[4] Ve sborníku [1] str.25



Z rovností vrcholových úhlů a vlastnosti osy úhlu máme

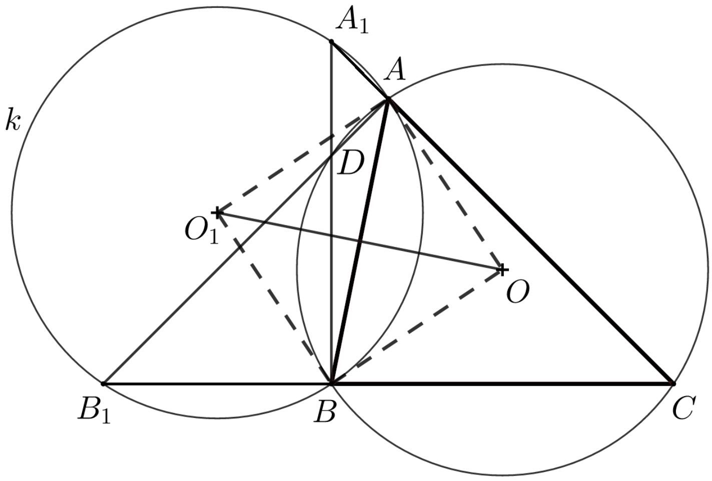
$$|\sphericalangle C_1DF| = |\sphericalangle B_1DA_1| = |\sphericalangle A_1DB_2| = |\sphericalangle FDC_2|,$$

z čehož plyne:

$$|\sphericalangle C_2DA_1| = \pi - |\sphericalangle FDC_2| = \pi - |\sphericalangle C_1DF| = |\sphericalangle A_1DC_1| = |\sphericalangle A_1DE|.$$

Vidíme, že úhel C_2DA_1 je tupý, protože $|\sphericalangle FDC_2| = \frac{|\sphericalangle B_1DB_2|}{2} < \frac{\pi}{2}$.
Trojúhelníky C_2DA_1 a EDA_1 mají oba tento tupý úhel u společného vrcholu D, společnou stranu A_1D, shodné strany C_2A_1 a C_1A_1 protilehlé jejich vrcholu D. To znamená, že jsou podle věty Ssu shodné. Z toho plyne, že $|\sphericalangle C_2A_1F| = |\sphericalangle C_2A_1D| = |\sphericalangle DA_1E| = |\sphericalangle FA_1E|$. Dostáváme tak, že polopřímka A_1F je osa úhlu u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku C_2A_1E, takže A_1F je zároveň výškou na základnu toho trojúhelníka. Přímka A_1D je tedy kolmá na přímku C_2E, jak jsme měli dokázat.

ZADÁNÍ V[5]:
Označme O střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Nechť O_1 je bod na ose úsečky AB takový, že O_1 a O leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB. Nechť k je kružnice se středem O_1 a poloměrem AO_1. Body A_1 a B_1 označují další průsečíky kružnice k s přímkami AC a BC. Dokažte, že pokud se úsečky A_1B a AB_1 protínají v některém bodě kružnice opsané trojúhelníku ABC, potom AO_1BO je tětivový čtyřúhelník.



ŘEŠENÍ:
Označme D průsečík přímek A_1B a AB_1 a α velikost úhlu A_1AB_1. Potom vedlejší úhel CAD má velikost $\pi - \alpha$. Protože podle předpokladu ze zadání je čtyřúhelník $ADBC$ tětivový, platí:

$$|\sphericalangle CBD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = \pi - \big(\pi - \alpha\big) = \alpha.$$

Úhel A_1BB_1, který je vedlejší k úhlu CBD, má tedy velikost $\pi - \alpha$.
Úhly A_1AB_1 a A_1BB_1 nad tětivou A_1B_1 kružnice k však mají stejnou velikost, takže platí:

$$\pi - \alpha = |\sphericalangle A_1BB_1| = |\sphericalangle A_1AB_1| = \alpha, \qquad \text{odtud} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Označme γ velikost úhlu ACB. Potom podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. Zároveň z trojúhelníku AB_1C plyne:

$$|\sphericalangle AB_1C| = \pi - |\sphericalangle B_1AC| - |\sphericalangle ACB_1| = \pi - \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

[5]Ve sborníku [1] str.15

Odtud určíme velikost středového úhlu AO_1B:

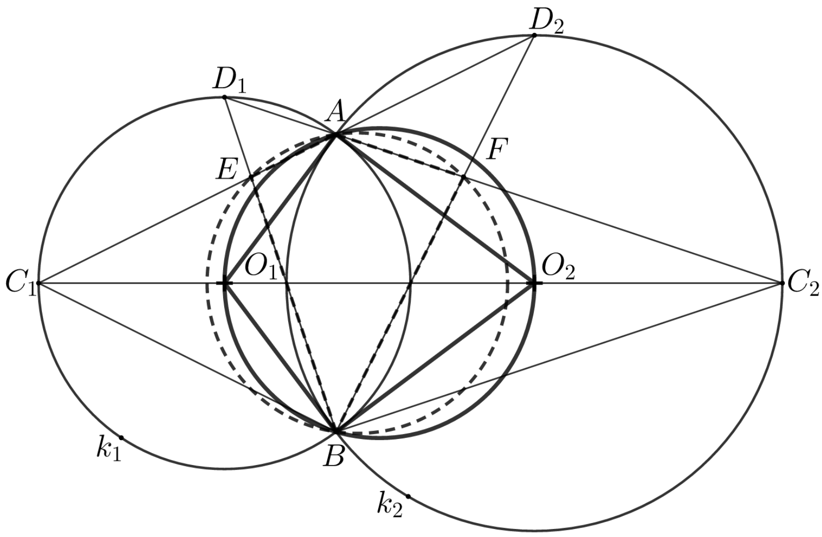
$$|\sphericalangle AO_1B| = 2|\sphericalangle AB_1B| = 2|\sphericalangle AB_1C| = 2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi - 2\gamma.$$

Abychom ověřili, zda je čtyřúhelník AO_1BO tětivový, zkontrolujeme, zda součet úhlů u protilehlých vrcholů O a O_1 je π:

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AO_1B| = 2\gamma + \big(\pi - 2\gamma\big) = \pi.$$

Dokázali jsme tedy, že čtyřúhelník AO_1BO je tětivový.

ZADÁNÍ VI[6]:
Kružnice k_1 a k_2 se středy O_1 a O_2 se protínají v bodech A a B, přičemž vzdálenost středů O_1 a O_2 je větší než poloměry těchto kružnic. Nechť C_1 a C_2 označují takové průsečíky přímky O_1O_2 po řadě s kružnicemi k_1 a k_2, které nejsou body úsečky O_1O_2. Označme dále D_1 průsečík přímky AC_2 s kružnicí k_1 a D_2 průsečík přímky AC_1 s kružnicí k_2. Přímky D_1B a D_2A se protínají v bodě E a přímky D_1A a D_2B se protínají v bodě F. Dokažte: jestliže AO_1BO_2 je tětivový čtyřúhelník, potom také $AEBF$ je tětivový čtyřúhelník.



ŘEŠENÍ:
Předpokládejme podle zadání, že čtyřúhelník AO_1BO_2 je tětivový. Střed kružnice opsané tomuto čtyřúhelníku leží na ose úsečky AB, která splývá s přímkou O_1O_2. Z Thaletovy věty nyní plyne, že $|\sphericalangle O_1AO_2| = |\sphericalangle O_1BO_2| = \frac{\pi}{2}$. Trojúhelníky O_1O_2A a O_1O_2B jsou tedy pravoúhlé se společnou přeponou O_1O_2.
Označme $\alpha = |\sphericalangle AO_2O_1|$, potom platí $|\sphericalangle AO_2B| = 2\alpha$. Úhel AO_2B je zároveň středovým úhlem nad tětivou AB kružnice k_2, což znamená, že je zároveň dvakrát tak velký než úhly AD_2B a AC_2B. Shrňme zjištěné:

$$\alpha = |\sphericalangle AO_2O_1| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AO_2B| = |\sphericalangle AD_2B| = |\sphericalangle AC_2B|.$$

Protože je trojúhelník AO_1O_2 pravoúhlý, platí:

$$|\sphericalangle AO_1O_2| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle O_1O_2A| = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Z toho dále plyne:

$$|\sphericalangle AO_1B| = 2|\sphericalangle AO_1O_2| = \pi - 2\alpha,$$

[6]Ve sborníku [1] str.16

odkud podobně jako výše dostáváme:

$$|\sphericalangle BC_1A| = |\sphericalangle BD_1A| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AO_1B| = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Čtyřúhelník AC_1BC_2 je zřejmě deltoid, pro jehož úhly platí $|\sphericalangle AC_1B| = \frac{\pi}{2} - \alpha$ a $|\sphericalangle AC_2B| = \alpha$, takže můžeme dopočítat velikosti shodných úhlů C_2AC_1 a C_2BC_1:

$$|\sphericalangle C_2AC_1| = |\sphericalangle C_2BC_1| = \frac{2\pi - |\sphericalangle AC_1B| - |\sphericalangle AC_2B|}{2} = \frac{2\pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) - \alpha}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

K nim shodné vedlejší úhly D_1AC_1 a D_1BC_1 proto mají velikost $\frac{\pi}{4}$, stejně jako další vedlejší úhel D_2AC_2 a konečně i jako úhel D_2BC_2, který s úhlem D_2AC_2 přísluší v kružnici k_2 jako obvodové úhly témuž oblouku C_2D_2. Úhel FBE nyní můžeme vyjádřit pomocí úhlů C_2BC_1, C_2BD_2 a D_1BC_1 a dopočítat jeho velikost:

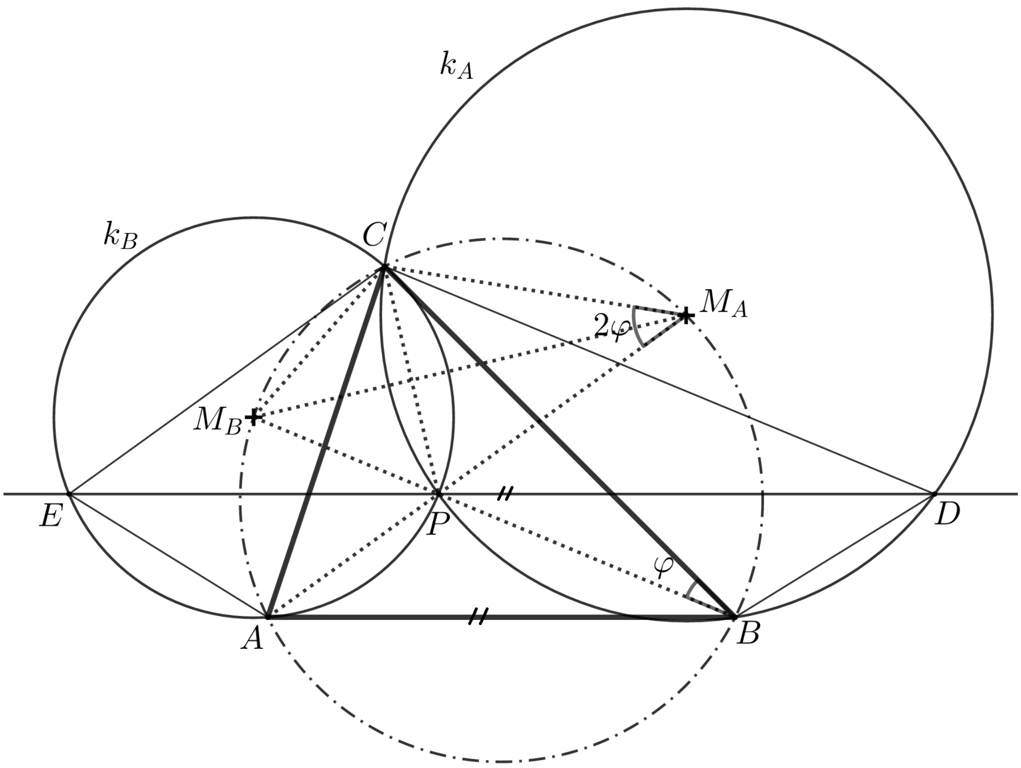
$$|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle C_2BC_1| - |\sphericalangle C_2BD_2| - |\sphericalangle D_1BC_1| = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Nakonec ověříme, zda je čtyřúhelník $AEBF$ tětivový díky součtu velikostí úhlů u jeho protilehlých vrcholů:

$$|\sphericalangle EAF| + |\sphericalangle FBE| = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Čtyřúhelník $AEBF$ je tedy tětivový, jak jsme měli dokázat.

ZADÁNÍ VII[7]:
Je dán trojúhelník ABC a bod P uvnitř tohoto trojúhelníka tak, že středy M_B a M_A kružnic k_B a k_A opsaných trojúhelníkům ACP a BCP leží vně trojúhelníka ABC. Navíc předpokládejme, že body A, P a M_A jsou kolineární stejně jako body B, P a M_B. Přímka, která prochází bodem P a je rovnoběžná s AB, protíná kružnici k_A v bodě D a kružnici k_B v bodě E (kde $D \neq P \neq E$). Dokažte, že $|DE| = |AC|+|BC|$.

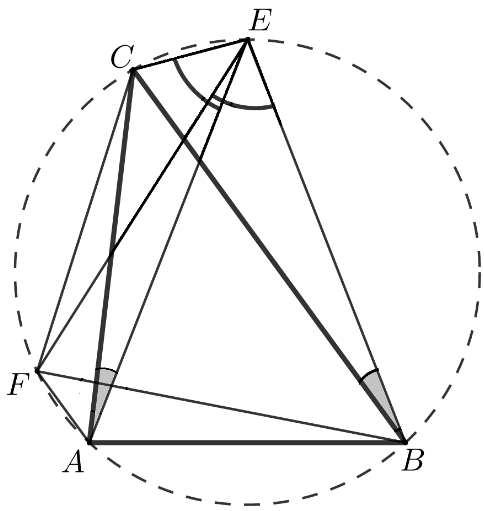


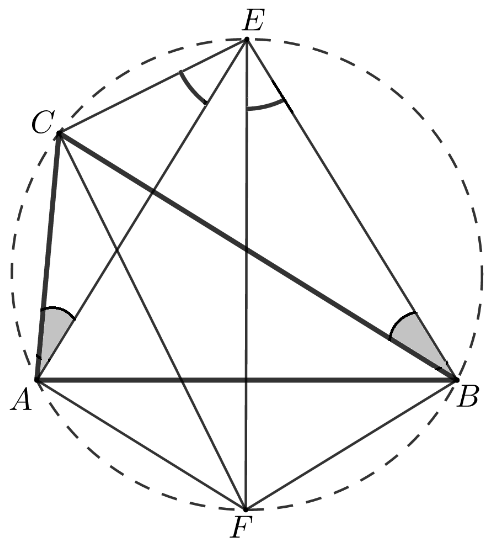
ŘEŠENÍ:
Nejprve dokážeme, že body M_A a M_B leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Označme $\varphi = |\sphericalangle CBP|$. Podle věty o středovém a obvodovém úhlu pro oblouk PC kružnice k_A platí rovnost $|\sphericalangle CM_AP| = 2\varphi$. Protože přímka M_AM_B je osou úsečky CP, je čtyřúhelník M_ACM_BP deltoid souměrný podle své úhlopříčky M_AM_B, z čehož plyne $|\sphericalangle CM_AM_B| = \varphi$. Protože B, P a M_B jsou kolineární, platí $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CBM_B| = \varphi$. Z toho plyne, že úsečka CM_B je vidět z bodů M_A a B pod stejným úhlem, tudíž body C, M_A, M_B a B leží na jedné kružnici. S ohledem na symetrii zadání se stejně tak dokáže, že rovněž body C, M_A, M_B a A leží na jedné kružnici. Dohromady dostáváme, že oba body A a B leží na kružnici opsané trojúhelníku CM_AM_B, která je tudíž opsaná i trojúhelníku ABC a prochází body M_A a M_B, jak jsme úvodem slíbili dokázat.

[7]Ve sborníku [4] str.13

V druhé části řešení dokážeme, že čtyřúhelníky $PBDC$ a $PCEA$ jsou rovnoramenné lichoběžníky. Tvrzení dokážeme pouze pro čtyřúhelník $PBDC$, pro čtyřúhelník $PCEA$ je důkaz analogický.
Úsečka AC je vidět z bodu M_A pod úhlem 2φ. Protože A, C, M_A a B leží v tomto pořadí na jedné kružnici, je také $|\sphericalangle ABC| = 2\varphi$. Protože $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CBM_B| = \varphi$, leží bod P na ose úhlu ABC, takže platí i $|\sphericalangle ABP| = \varphi$. Odtud díky rovnoběžnosti PD a AB dostáváme $|\sphericalangle BPD| = \varphi$. Obloukům BP a PC kružnice k_A tak odpovídá stejný obvodový úhel φ, takže tětivy BD a CP jsou shodné. To znamená, že $PBDC$ je rovnoramenný lichoběžník, neboť v souměrnosti kružnice k_A podle její tětivy BP přechází tětiva BD ve shodnou tětivu PC, a tedy bod D v bod C. Platí tedy $|PD|$=$|BC|$. Analogicky se odvodí i rovnost $|PE| = |AC|$ z rovnoramenného lichoběžníka $PCEA$.
Nakonec tedy dostáváme $|DE| = |PE| + |PD| = |BC| + |AC|$.

ZADÁNÍ VIII[8]:
Je dán trojúhelník ABC, pro který platí $|AC| < |BC|$ a $|AC| \neq |AB|$, a kružnice k opsaná tomuto trojúhelníku. Označme E střed toho kružnicového oblouku AB, který obsahuje bod C. Dále označme D bod na úsečce BC takový, že platí rovnost $|BD| = |AC|$. Přímka DE protíná kružnici k také v bodě $F \neq E$. Dokažte, že body A, B, C a F jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníka.



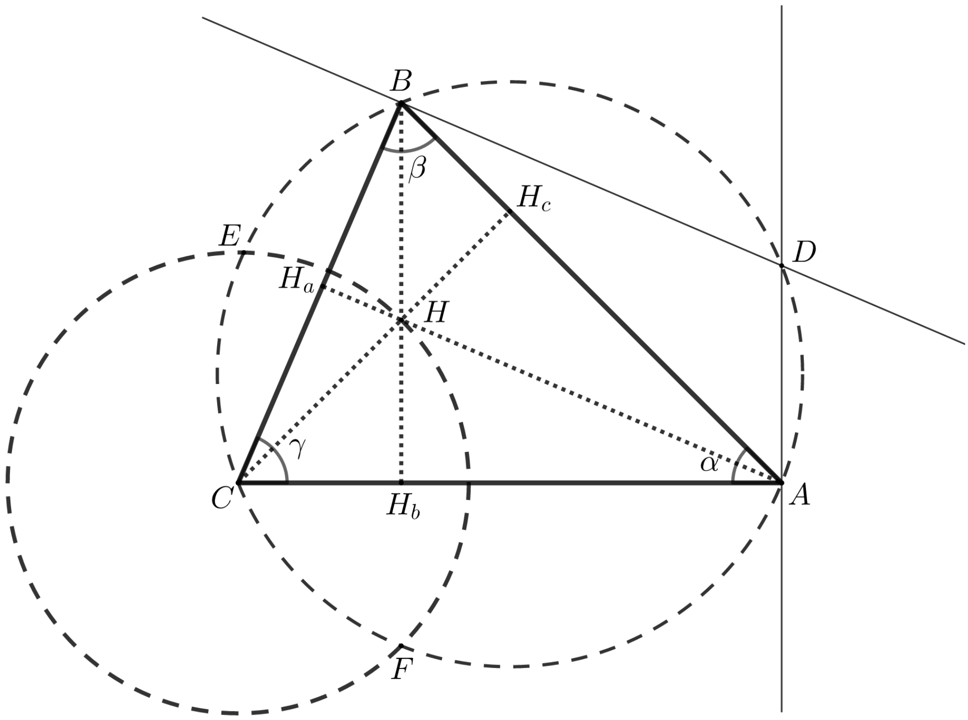


ŘEŠENÍ:
Rozlišíme jako na obrázcích dvě situace podle toho, zda bod F leží na oblouku BAC buď mezi body A a C (obrázek vlevo), nebo mezi body A a B (obrázek vpravo). Že je případ $A = F$ vyloučen, nám v závěru řešení vyplyne z podmínky $|AB| \neq |AC|$.
Protože E je střed oblouku ACB, platí $|AE| = |BE|$. Podle zadání platí rovněž $|AC| = |BD|$, a tak jsou trojúhelníky AEC a BED shodné podle věty sus, neboť se shodují i ve vnitřních úhlech u vrcholů A, B vybarvených na obou obrázcích, protože jde o dva obvodové úhly nad tětivou CE. Z dokázané shodnosti trojúhelníků AEC a BED plyne shodnost jejich úhlů u společného vrcholu E, které jsme na obrázcích vyznačili obloučky.
Ze získané shodnosti dvou obvodových úhlů s vrcholem E plyne shodnost odpovídajících tětiv AC a BF. V obou situacích je proto tětiva AC vidět z bodu B pod stejným úhlem, jako je shodná tětiva BF vidět z bodu C. Trojúhelníky ABC a FBC jsou proto souměrně sdružené podle osy společné strany BC, tudíž A, B, C a F jsou skutečně vrcholy rovnoramenného lichoběžníka, neplatí-li ovšem $A = F$. V případě $A = F$ by však z dokázané rovnosti $|AC| = |BF|$ plynulo $|AC| = |BA|$, což je zadáním úlohy vyloučeno.

[8]Ve sborníku [1] str.24
V původním zadání chybí předpoklad $|AC| \neq |AB|$. Pokud tento předpoklad v úloze chybí, body A, B, C a F mohou tvořit nejen vrcholy rovnoramenného lichoběžníka, ale také rovnoramenného trojúhelníka.

ZADÁNÍ IX[9]

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho ortocentrum je označeno písmenem H. Přímka kolmá k úsečce AC, která prochází bodem A, a přímka kolmá k úsečce BC, která prochází bodem B, se protínají v bodě D. Kružnice se středem C a poloměrem $|HC|$ protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC ve dvou bodech, které označíme E a F. Dokažte, že $|DE| = |DF| = |AB|$.



ŘEŠENÍ:

Trojúhelník ABC je ostroúhlý, proto je bod H jeho vnitřním bodem. Předpokládejme, že bod E leží na kratším oblouku BC a F leží na kratším oblouku AC kružnice opsané.

V následující části dokážeme, že bod E (resp. F) je obrazem ortocentra H trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle strany BC (resp. AC). S ohledem na symetrii celé situace dokážeme pouze tuto vlastnost bodu F, pro bod E je důkaz analogický.

Nejprve označíme H_a, H_b, H_c paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C a $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|, \gamma = |\sphericalangle BCA|$ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC.

Nyní si určíme velikosti dalších úhlů potřebných pro důkaz. Protože trojúhelník AH_cC je pravoúhlý, platí, že $|\sphericalangle ACH_c| = 90° - \alpha$. Z trojúhelníku AH_aC plyne, že $|\sphericalangle CAH_a| = 90° - \gamma$.

Protože známe velikosti $\sphericalangle ACH_c$ a $\sphericalangle CAH_a$, můžeme také dopočítat velikost $\sphericalangle AHC$:

[9] Ve sborníku [5] str.7

$$|\sphericalangle AHC| = 180^\circ - (|\sphericalangle ACH_c| + |\sphericalangle CAH_a|) =$$
$$= 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \gamma) = \alpha + \gamma.$$

Dále víme, že body A, B, C a F v tomto pořadí leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Z toho plyne, že tyto čtyři body tvoří vrcholy tětivového čtyřúhelníka $ABCF$, k jehož vlastnostem patří, že součet velikostí vnitřních úhlů protilehlých vrcholů je roven 180°. Můžeme tedy vyjádřit velikost $\sphericalangle AFC$, $|\sphericalangle AFC| = 180^\circ - \beta$, a protože součet velikostí úhlů libovolného trojúhelníka je 180° (tedy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), platí $|\sphericalangle AFC| = 180^\circ - \beta = \alpha + \gamma$.

Z těchto poznatků plyne, že $|\sphericalangle AFC| = \alpha + \gamma = |\sphericalangle AHC|$, tudíž úsečka AC je vidět z bodů F a H pod stejným úhlem. To jak známo pro body F a H z opačným polorovin vyťatých přímkou AC nastane, jen když kružnicové oblouky AFC a AHC jsou souměrně sdružené podle přímky AC.

Protože podle této přímky je souměrná i kružnice se středem C, na níž oba body F a H leží, jsou i tyto dva body (jakožto její průsečíky s oběma zmíněnými oblouky) souměrně sdružené. Bod F je tedy obrazem bodu H v osové souměrnosti podle přímky AC, jak jsme chtěli dokázat.

Jelikož je bod F obrazem bodu H v osové souměrnosti podle přímky AC, jsou FH a BH jedna a tatáž přímka kolmá na stranu AC. Podobně EH a AH jsou jedna a tatáž přímka kolmá na stranu BC.

Podle zadání platí, že $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD| = 90^\circ$, což podle Thaletovy věty znamená, že čtyřúhelník $ADBC$ je tětivový. Z toho dále plyne, že i bod D, stejně jako bod F, leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Čtyřúhelník $ADBF$ je tedy tětivový a jeho protější strany AD a BF, jakožto tětivy opsané kružnice, tak mají společnou osu, neboť jsou obě kolmé k úsečce AC, a tudíž jde o dvě rovnoběžné tětivy. Podle této osy jsou proto souměrně sdružené také úhlopříčky AB a DF (rovnoramenného) lichoběžníku $ADBF$. Tím je dokázána rovnost $|AB| = |DF|$. Druhá požadovaná rovnost $|AB| = |DE|$ se analogicky dokáže úvahou o tětivovém čtyřúhelníku $ADBE$.

Závěr

Ve své bakalářské práci jsem řešila planimetrické úlohy ze zahraničních matematických soutěží. Mým cílem bylo vytvořit sbírku planimetrických úloh, která poslouží jako cvičebnice nadaných žáků v matematických kroužcích nebo jako studijní materiál při přípravě na matematické olympiády, proto jsou řešení těchto úloh vypracovaná obdobně jako vzorové texty Matematické olympiády ČR. Úlohy jsem rozdělila do dvou skupin – jednodušší a obtížnější – a všechny je posléze seřadila podle obtížnosti, aby čtenář této práce mohl postupovat od méně náročných úloh k těm komplikovanějším. Celý text je uveden kapitolou Teoretické minimum za účelem seznámit čtenáře se základními pojmy a poznatky, které jsou klíčové pro řešení uvedených úloh.

Úlohy jsem čerpala z anglicky psaných sborníků zahraničních matematických soutěží, seznámila jsem se tak s anglicky psanou matematickou literaturou. Sborníky obsahovaly nejen zadání, ale také řešení soutěžních úloh. Tato řešení však nebyla úplná a v některých případech zcela chyběla. Během své práce jsem tedy překládala vybraná zadání a přepracovávala řešení úloh tak, aby byla kompletní. V některých případech stačilo pouze poupravit nebo doplnit řešení uvedené ve sborníku, v dalších případech jsem celé řešení přepsala podle sebe a rad svého vedoucího, aby bylo řešení co nejsrozumitelnější a především úplné.

Při psaní této práce jsem se také učila sázet text v programu LaTeX a vytvářet obrázky v programu GeoGebra. Neseznámila jsem se tak pouze s řešením planimetrických úloh zahraničních matematických soutěží, ale také jsem obohatila své dovednosti při vytváření elektronických obrázků a při sázení textů v matematickém prostředí. Mimo to jsem oprášila své překladatelské dovednosti a obohatila je o odbornou slovní zásobu matematických textů.

Seznam použité literatury

[1] ŽELJKO, Matjaž. *51st National Math Olympiad in Slovenia*. Ljubljana: Formatisk, 2007.

[2] GRBAC, Neven a Željko HANJŠ. *Mathematical Competitions in Croatia*. Zagreb: ELEMENT, 2007.

[3] BOYVALENKOV, Peter, Nikolay NIKOLOV, Oleg MUSHKAROV a Emil KOLEV. *Bulgarian Mathematical Competitions 2007*. Union of Bulgarian Mathematicians, 2007.

[4] *Problems of the 49th Austrian Mathematical Olympiad 2018*.
Úlohy dostupné také online: `www.math.aau.at/OeMO/problems/`

[5] JIN, Jinbi a Raymond van BOMMEL. *52nd Dutch Mathematical Olympiad 2013*. Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, 2014.

[6] HAVÍŘOVÁ, Barbora. *Metody neanalytických výpočtů v eukleidovské geometrii*. Brno: 2011. Disertační práce. Masarykova univerzita. Fakulta přírodovědecká. Vedoucí práce: Jaromír ŠIMŠA.

[7] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000 . Učebnice pro střední školy. ISBN 8071961744.

[8] *MO: Matematická olympiáda* [online]. [cit. 2020-05-07].
Dostupné z: `www.matematickaolympiada.cz`

[9] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh*. 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 278 s. ISBN 8021012021.