MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

Mgr. Barbora HAVÍŘOVÁ

Metody neanalytických výpočtů v eukleidovské geometrii

Disertační práce
opravy k 21.2.2012

Školitel: doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc. Brno, 2011

Obsah

Úvod

Následující řádky krátkého vstupního textu přibližují, jak je v souladu se zadáním projektu celá předložená práce sestavena. Po popisu jejích kapitol po obsahové i formální stránce stručně nastíním, jak jsem v průběhu přípravy postupovala.

V první, teoreticky zaměřené kapitole jsou přehledně shrnuty nejdůležitější poznatky školské planimetrie a trigonometrie potřebné pro řešení geometrických výpočtových úloh. Některé z těchto poznatků jsou dokázány odděleně ve druhé části kapitoly. Při rozhodování, které důkazy do textu zařadit, jsem posuzovala, které postupy jsou poučné a užitečné i z hlediska dalšího uplatnění při řešení úloh.

Druhá kapitola je v práci stěžejní. Ze značného množství obtížnějších výpočtových úloh, které jsem s rozmyslem vybrala po prostudování dostupné české i zahraniční literatury, jsou v kapitole metodicky sdružovány úlohy řešitelné jedním prostředkem bez většího provázání s dalšími tématy. Případní uživatelé našeho textu tak budou mít možnost osvojovat si umění geometrických výpočtů co nejpřístupněji – po etapách podle jednotlivých témat a metod.

Třetí kapitola obsahuje další zajímavá tvrzení a vztahy mezi základními prvky trojúhelníků a čtyřúhelníků. I přesto, že nejsou běžně zařazovány v učebnicích pro gymnázia, dokážeme je elementárními postupy. Tato část práce může posloužit jako přehled méně známých poznatků i jako zdroj na ně navazujících řešených úloh.

Všechny úlohy zařazené v práci jsou vyřešeny, několikrát je postup řešení zcela převzatý ze zdroje, většinou je však upraven nebo nově vytvořen – zejména u zdrojů, které obsahují pouze zadání. Řešení téměř všech úloh jsou opatřena obrázky, na které v textu neodkazuji, není-li to nezbytné např. kvůli upřesnění způsobu značení či popisu situace. K zadání většiny úloh je připojena poznámka pod čarou s odkazem na použitou literaturu ve formátu [zdroj, str. X/Y], kde X je číslo strany a Y číslo nebo jiné označení zadání úlohy. Odkazy chybí u námětů a výsledků, které jsou všeobecně známé (a přesto jsem považovala jejich zařazení za účelné). Na několika místech práce se objevují původní náměty, není však vyloučeno, že jsou již publikovány v literatuře, kterou jsem neměla k dispozici.

Na počátku přípravy práce jsem prošla učebnice ([Pom–93], [Odv–94], [Pom–95]) a knihy o geometrii ([Bra–05], [Cox–67], [Joh–60] a další), abych získala přehled o poznatcích a potřebný nadhled. Dlouhou a náročnou etapu shromažďování jednotlivých úloh jsem zahájila studiem sbírek [Šar–86], [Eng–98], [Pra–86a] a [Pra–86b]. Teprve poté jsem přistoupila k vyhledávání jednotlivých úloh, které jsou rozptýleny ve všeobecně zaměřených knihách o elementární matematice a ročenkách matematických soutěží z různých zemí celého světa. Konečně jsem se v omezeném rozsahu věnovala vlastní úlohové tvorbě, abych osobním příspěvkem doplnila některé tematické celky úloh, zejména ve třetí kapitole práce.

Kapitola 1

Základní pojmy a výsledky

V této úvodní kapitole shrneme nejdůležitější poznatky, jejichž zvládnutí je nutné pro úspěšné řešení obtížnějších úloh na planimetrické výpočty. Text si neklade za cíl úplnost seznamu všech definic, zejména jsou vynechány pojmy známé ze základní školy. Tvrzení jsou nejprve předkládána bez důkazu, aby byla zachována stručnost a přehlednost, v podkapitole 1.10 jsou pak některé poučné důkazy uvedeny samostatně.

Členění textu

Pro zpřehlednění textu jsou používány následující zvýrazňující prvky:

D Definice pojmů často používaných v úlohách.

i Informace o obvyklém značení nebo použití.

Tvrzení potřebná pro řešení úloh (axiomy a věty).

Definice a tvrzení celé kapitoly jsou převzaty z učebnic [Pom–93] a [Odv–94]. Ostatní texty a uspořádání celé kapitoly jsou původní.

1.1 Zařazení tématu v učebnicích gymnázia

Řešení výpočtových úloh v eukleidovské geometrii je zařazeno na několika místech učebnic pro gymnázia. Nejprve jsou v učebnici Planimetrie [Pom–93] budovány a upevňovány základní pojmy geometrie v rovině a odvozeny důležité vlastnosti a vztahy. Po probrání tématu elementárních funkcí je geometrické učivo rozšířeno o trigonometrii v učebnici Goniometrie [Odv–94] a získané poznatky jsou následně uplatněny v prostoru v učebnici Stereometrie [Pom–95].

1.2 Úhly, kružnice

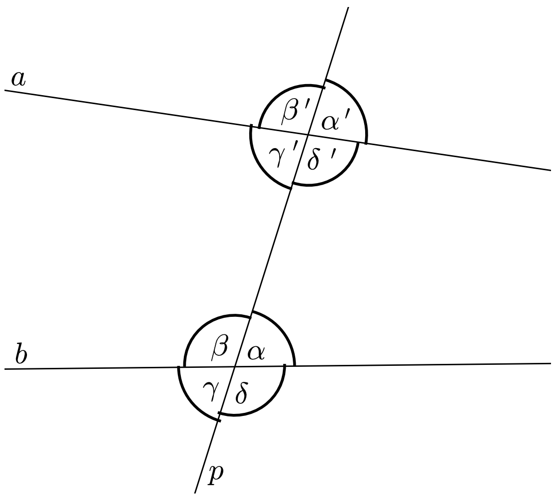
Dvojice úhlů

K vyřešení mnoha úloh postačí základní vlastnosti významných dvojic úhlů:

$\boxed{\text{D}}$ Dva konvexní úhly AVB, AVC, které mají společné rameno VA a ramena VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají **úhly vedlejší**.

$\boxed{\text{D}}$ Dva konvexní úhly AVB, CVD, jejichž ramena VA, VD a rovněž tak VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají **vrcholové úhly**.

Pomocí obrázku 1 představujícího dvě přímky a, b proťaté příčkou p jsou zavedeny pojmy střídavé a souhlasné úhly:



Obr. 1 – souhlasné a střídavé úhly

$\boxed{\text{D}}$ Dvojice úhlů α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' se nazývají **úhly souhlasné**. Nahradíme-li jeden ze dvou souhlasných úhlů úhlem k němu vrcholovým, dostaneme dvojici **střídavých úhlů**. Dvojice střídavých úhlů jsou tedy α, γ'; β, δ'; γ, α'; δ, β'.

Konkrétní využití v úlohách přináší následující tvrzení:

Vrcholové úhly jsou shodné.

Součet vedlejších úhlů je úhel přímý.

Jestliže jedna dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné, pak přímky a, b jsou rovnoběžné.

Jsou-li přímky a, b rovnoběžné, pak každá dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné.

Úhly příslušné k oblouku kružnice

$\boxed{\text{D}}$ Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.

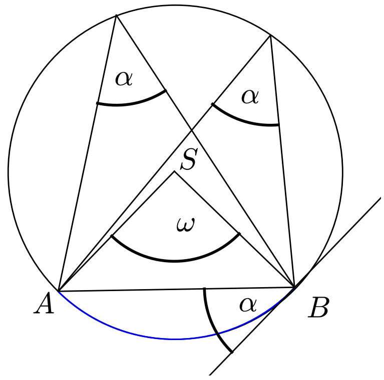
$\boxed{\text{D}}$ Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá **obvodový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné.

K menšímu z obou oblouků AB kružnice přísluší konvexní středový úhel a ostrý obvodový úhel. K většímu oblouku AB přísluší nekonvexní středový úhel a tupý obvodový úhel. K půlkružnici přísluší přímý středový úhel a pravý obvodový úhel. Součet středových úhlů příslušných k oběma obloukům AB je úhel plný, a proto je součet obvodových úhlů příslušných k oběma obloukům AB úhel přímý.

Je dán oblouk AB kružnice k a bod C v opačné polorovině s hraniční přímkou AB. Je-li velikost úhlu ACB rovna velikosti obvodového úhlu příslušného k oblouku AB, pak bod C leží na kružnici k.



Obr. 2 – obvodový, středový a úsekový úhel

Thaletova věta. Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

D Konvexní úhel BAX (příp. ABX), jehož jedním ramenem je polopřímka AB (popř. BA), kde A, B jsou krajní body oblouku AB kružnice k a druhým ramenem je polopřímka AX (popř. BX), ležící v tečně ke kružnici v bodě A (popř. B), se nazývá **úsekový úhel příslušný k oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.

Úsekový úhel příslušný k danému oblouku je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.

Situace je znázorněna na obr. 2. Platí $\omega = 2\alpha$.

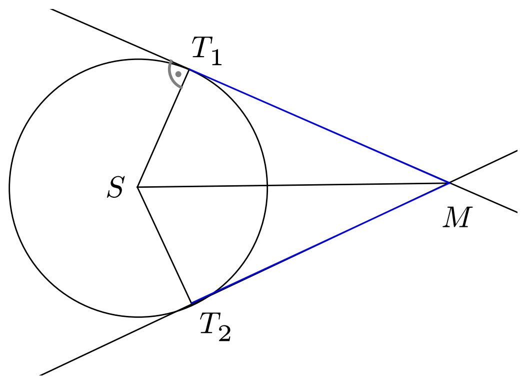
Další vlastnosti kružnice

Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem tětivy AB.

Tečna kružnice je kolmá ke spojnici bodu dotyku a středu kružnice.

D Délka úsečky spojující bod vně kružnice a bod dotyku tečny vedené z tohoto bodu ke kružnici se nazývá **délka tečny**.

Bodem ležícím vně kružnice procházejí právě dvě tečny kružnice. Délka tečny vedené z vnějšího bodu ke kružnici je pro obě tečny shodná.



Obr. 3 – tečny z vnějšího bodu ke kružnici

Na obr. 3 jsou pravoúhlé trojúhelníky SMT_1 a SMT_2 souměrně sdružené podle přímky SM.

D Libovolnému bodu M roviny lze přiřadit skalární veličinu m, pro niž platí

1. $|m| = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky dané kružnice k s libovolnou její sečnou procházející bodem M. Hodnota uvedeného součinu na výběru sečny nezávisí, je tedy určena daným bodem M.

2. $m > 0$ pro body M vně kružnice,
   $m = 0$ pro body $M \in k$,
   $m < 0$ pro body M uvnitř kružnice.

Hodnota m se nazývá **mocnost bodu M ke kružnici k**.[1]

Je-li v ($v \geq 0$) vzdálenost bodu M od středu S kružnice k o poloměru r, pak pro mocnost m platí $m = v^2 - r^2$.

Pro délku tečny z bodu M vně kružnice k s bodem dotyku T platí

$$|MT|^2 = m,$$

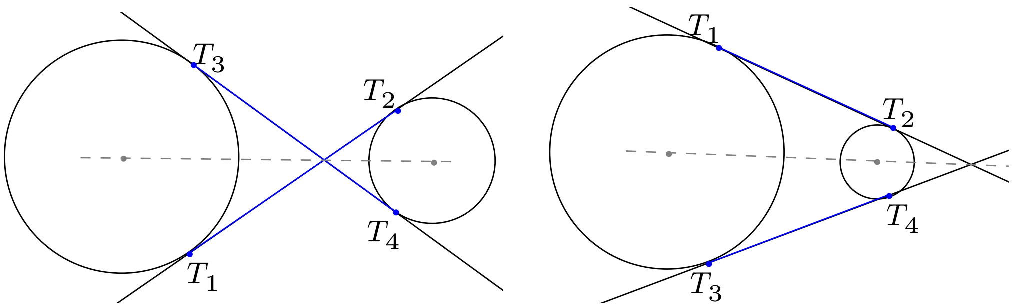
neboli

$$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|,$$

kde body A, B jsou průsečíky kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem M.

Společné tečny dvou kružnic

Na obr. 4 jsou zobrazeny **vnitřní** (resp. **vnější**) **společné tečny** dvou kružnic, vyznačené vzdálenosti bodů dotyku se nazývají **délky společných tečen**.



Obr. 4 – společné tečny dvou kružnic (vlevo vnitřní a vpravo vnější)

Existují-li dvě vnitřní (resp. vnější) společné tečny dvou kružnic, mají shodnou délku.

Na obr. 4 jsou v obou případech úsečky T_1T_2 a T_3T_4 souměrně sdružené podle přímky procházející středy obou kružnic.

[1] Znění definice bylo oproti učebnici [Pom–93] upraveno.

1.3 Trojúhelník

D **Trojúhelník** ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB; přitom body A, B, C (zvané vrcholy trojúhelníku ABC) neleží v jedné přímce. Konvexní úhly BAC, ABC, BCA nazýváme **vnitřní úhly trojúhelníku** ABC. Vedlejší úhly k vnitřním úhlům trojúhelníku ABC nazýváme **vnější úhly trojúhelníku** ABC.

i Strany BC, CA, AB trojúhelníku ABC značíme obvykle a, b, c. Toto označení často užíváme i pro délky uvedených stran. Vnitřní úhly BAC, ABC, BCA trojúhelníku ABC (i jejich velikosti) obvykle značíme po řadě α, β, γ.

Úhly v trojúhelníku

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý.

V každém trojúhelníku ABC tedy platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Vnější úhel trojúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících dvou vrcholech.

Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti delší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel a naopak, proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.

Trojúhelníková nerovnost

Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

Pro strany každého trojúhelníku ABC tedy platí tři nerovnosti

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Vyjádříme-li a ze všech tří nerovností, dojdeme k úspornějšímu zápisu téhož

$$|b - c| < a < b + c.$$

Úsečky o délkách a, b, c jsou stranami trojúhelníku, právě když platí

$$|b - c| < a < b + c.$$

Základní prvky v trojúhelníku

D **Střední příčka trojúhelníku** je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníku.

Každá střední příčka je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany.

D **Výška trojúhelníku** je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku.

i Paty výšek v_a, v_b, v_c z vrcholů A, B, C trojúhelníku ABC obvykle označujeme po řadě A_0, B_0, C_0. Často se pro zjednodušení jazyka používá názvu výška nejen pro *úsečku*, ale i pro její *délku* a někdy i pro *přímku*, jejíž částí tato úsečka je.

Výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě, zvaném **ortocentrum trojúhelníku**.

D **Těžnice trojúhelníku** je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany.

i Středy stran $\triangle ABC$ obvykle označujeme A_1, B_1, C_1 a těžnice t_a, t_b, t_c.

Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě, zvaném **těžiště trojúhelníku**. Vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice.

D **Kružnice opsaná trojúhelníku** je kružnice procházející všemi vrcholy trojúhelníku. Její poloměr zpravidla označujeme r. **Kružnice vepsaná trojúhelníku** je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku. Její poloměr zpravidla označujeme ρ.

Osy stran trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané.

Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané.

D **Kružnice připsaná** je kružnice, která se dotýká jedné strany trojúhelníku a přímek, v nichž leží zbývající strany, v bodech, které na těchto stranách neleží.

Osa vnitřního úhlu a osy vnějších úhlů u zbývajících dvou vrcholů trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem jedné ze tří kružnic připsaných.

1.4 Shodnost a podobnost

D Dva trojúhelníky jsou **shodné**, když je lze přemístěním ztotožnit.

i Shodnost dvou trojúhelníků zapisujeme znakem $\cong$ s dodržením pořadí odpovídajících si vrcholů obou shodných trojúhelníků.

Věty o shodnosti trojúhelníků

Věta sss: Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.

Věta usu: Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně, jsou shodné.

Věta sus: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.

Věta Ssu: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Obráceně, pokud jsou dva trojúhelníky shodné, shodují se ve všech stranách a úhlech, výškách, těžnicích, poloměru kružnice opsané i vepsané.

Podobnost trojúhelníků

$\boxed{\text{D}}$ **Trojúhelník** $A'B'C'$ **je podobný trojúhelníku** ABC, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro jejich strany platí

$$|A'B'| = k|AB|, \quad |B'C'| = k|BC|, \quad |C'A'| = k|CA|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti daných trojúhelníků.

$\boxed{\textbf{i}}$ Podobnost dvou trojúhelníků zapisujeme znakem $\sim$ s dodržením pořadí odpovídajících si vrcholů podobných trojúhelníků.

Věta uu: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

Věta sus: Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

Věta Ssu: Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu proti větší z nich, jsou podobné.

Obráceně, pokud jsou dva trojúhelníky podobné, shodují se ve všech úhlech a jejich odpovídající si strany, výšky, těžnice, poloměr opsané i vepsané kružnice jsou ve stejném poměru (rovném koeficientu podobnosti).

1.5 Čtyřúhelník, mnohoúhelník

$\boxed{\text{D}}$ Uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná, spolu s částí roviny ohraničenou touto lomenou čárou se nazývá **mnohoúhelník**. Mnohoúhelníku o n vrcholech říkáme n-úhelník.

Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku se rovná

$$(n-2)\cdot 180^\circ.$$

Čtyřúhelník

D **Různoběžník** je čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné.

D **Lichoběžník** je čtyřúhelník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany nejsou rovnoběžné. Rovnoběžné strany se nazývají **základny**, zbývající dvě **ramena**. Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, nazýváme **rovnoramenný lichoběžník**. Lichoběžník, jehož jedno rameno je kolmé k základnám, nazýváme **pravoúhlý lichoběžník**. **Střední příčka lichoběžníku** je úsečka spojující středy jeho ramen.

Střední příčka lichoběžníku je rovnoběžná s oběma základnami. Její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.

D **Rovnoběžník** je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné. **Obdélník** je rovnoběžník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé (pravoúhlý rovnoběžník). **Čtverec** je obdélník, jehož všechny strany mají stejnou délku (je rovnostranný). **Kosodélník** je rovnoběžník, jehož vnitřní úhly nejsou pravé (kosoúhlý rovnoběžník). **Kosočtverec** je kosodélník, jehož všechny strany mají stejnou délku (je rovnostranný).

Protější strany rovnoběžníku jsou shodné.

Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.

Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí, jejich společný bod se nazývá střed rovnoběžníku.

Úhlopříčky obdélníku jsou shodné.

Úhlopříčky kosočtverce půlí jeho vnitřní úhly a jsou k sobě kolmé.

D Čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, se nazývá **tětivový**.

Čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici, se nazývá **tečnový**.

Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, se nazývá **dvojstředový**.

Součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je úhel přímý.

Obráceně, každý konvexní čtyřúhelník, jehož součet protějších vnitřních úhlů je úhel přímý, je tětivový.

Součty délek dvojic protějších stran tečnového čtyřúhelníku jsou si rovny.

Obráceně, každý konvexní čtyřúhelník, jehož součty délek protějších stran se rovnají, je tečnový.

$\boxed{\text{D}}$ **Deltoid** je čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé a právě jedna z nich prochází středem druhé.

Deltoid je tečnový čtyřúhelník (obrácené tvrzení obecně neplatí).

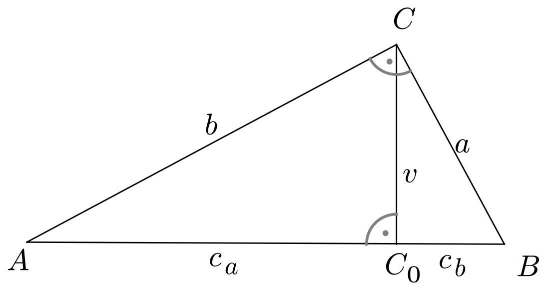
1.6 Pravoúhlý trojúhelník

Pravoúhlý trojúhelník má jeden vnitřní úhel pravý. Stranám, které tvoří ramena pravého úhlu, říkáme **odvěsny**, strana ležící naproti pravému úhlu se nazývá **přepona**.

Eukleidovy věty

$\boxed{\text{D}}$ Označme C_0 patu výšky z vrcholu C na přeponu AB pravoúhlého trojúhelníku. Úsečku AC_0 (resp. BC_0) nazýváme **úsek přepony přilehlý k odvěsně** AC (resp. BC).

$\boxed{\textbf{i}}$ Délky úseků přepony obvykle značíme $|AC_0| = c_b$, $|BC_0| = c_a$, místo v_c píšeme v (viz obr. 5).



Obr. 5 – označení úseků přepony

Eukleidova věta o výšce: V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony.

Při označení z obr. 5 tedy platí $v^2 = c_a \cdot c_b$.

Eukleidova věta o odvěsně: V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a jejího úseku k odvěsně přilehlého.

Při označení z obr. 5 tedy platí $a^2 = c \cdot c_a,\ b^2 = c \cdot c_b$.

Pythagorova věta

Pythagorova věta: V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

Při označení z obr. 5 tedy platí $c^2 = a^2 + b^2$.

Obráceně, platí-li pro délky stran trojúhelníku ABC rovnost $c^2 = a^2 + b^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý.

Goniometrické funkce ostrého úhlu

Při řešení mnoha úloh týkajících se pravoúhlého trojúhelníku jsou používány goniometrické funkce ostrého úhlu v této podobě:

V pravoúhlém trojúhelníku je dán jeden jeho ostrý vnitřní úhel α.

Sinus α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony.

Kosinus α je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony.

Tangens α je poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu α a odvěsny přilehlé.

Kotangens α je poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a odvěsny protilehlé.

Nejdůležitější vztahy mezi goniometrickými funkcemi uvedeme v paragrafu 1.9. Velmi užitečné je znát hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 30°, 45°, 60°:

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.7 Obecný trojúhelník

Základními prostředky výpočtů v geometrii obecného trojúhelníka jsou zejména sinová a kosinová věta. Tyto věty ukazují souvislosti mezi délkami stran a velikostmi úhlů v trojúhelníku.

Sinová věta

Sinová věta: Pro trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany mají délky a, b, c, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

V sinové větě se porovnávají délky stran a siny vnitřních úhlů proti nim, proto sinovou větu používáme, známe-li

- délku jedné strany a velikosti dvou úhlů (známe-li velikosti dvou úhlů, můžeme automaticky dopočítat třetí) a potřebujeme-li vypočítat délku jiné strany,
- délku dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich a potřebujeme-li vypočítat velikost úhlu proti druhé z nich. V tomto případě vychází dvě řešení, jeden ostrý a jeden tupý úhel (jediné řešení vychází pouze v případě pravého úhlu). Počítáme-li úhel proti kratší straně, víme jistě, že je ostrý, a proto můžeme druhé řešení zavrhnout.

Sinová věta existuje také v rozšířeném a velmi užitečném tvaru, kde je do vzorce zahrnut navíc poloměr kružnice opsané.

Sinová věta v rozšířeném tvaru: Pro trojúhelník ABC, jehož poloměr kružnice opsané je r, vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany mají délky a, b, c, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Kosinová věta

Kosinová věta: Pro trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany mají délky a, b, c, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

V každé z rovností figurují délky všech tří stran a velikost jednoho vnitřního úhlu, proto kosinovou větu používáme, známe-li

- délky všech tří stran a potřebujeme-li vypočítat velikost libovolného vnitřního úhlu,
- délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného a potřebujeme-li vypočítat délku zbývající strany.

1.8 Obsahy rovinných útvarů

V této kapitole jsou na jednom místě shrnuty vztahy pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku, kruhu a jeho částí. Obsahy ostatních útvarů jsou počítány rozdělením na zmíněné útvary.

Obsah trojúhelníku

Základní vztah pro obsah S *obecného trojúhelníku* ABC je

$$S = \tfrac{1}{2} a \cdot v_a = \tfrac{1}{2} b \cdot v_b = \tfrac{1}{2} c \cdot v_c.$$

Pro *pravoúhlý trojúhelník* s odvěsnami a, b odtud plyne

$$S = \tfrac{1}{2} a \cdot b.$$

V *rovnostranném trojúhelníku* platí $v_a = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, a tedy

$$S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Trigonometrické vyjádření obsahu S obecného trojúhelníku ABC:

$$S = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2} bc \sin\alpha = \tfrac{1}{2} ac \sin\beta.$$

Heronův vzorec ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ je polovina obvodu):

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Je-li ρ poloměr kružnice vepsané, pak

$$S = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\rho = \rho s.$$

Je-li r poloměr kružnice opsané, pak

$$S = \frac{abc}{4r}.$$

Obsah čtyřúhelníku

Pro obsah S *čtverce* o straně délky a platí

$$S = a^2.$$

Pro obsah S *obdélníku* o stranách délek a, b platí

$$S = a \cdot b.$$

Pro obsah S *kosodélníku* o stranách délek a, b a výškách v_a, v_b platí

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b.$$

Pro obsah S *kosočtverce* o straně délky a, výšce v a úhlopříčkách e, f platí

$$S = a \cdot v = \tfrac{1}{2} e \cdot f.$$

Pro obsah S *lichoběžníku* o základnách délek a, c a výšce v platí

$$S = \tfrac{1}{2}(a + c)v.$$

Pro obsah S tečnového čtyřúhelníku (a obecně tečnového mnohoúhelníku), v němž s je polovina obvodu a ρ poloměr kružnice vepsané, platí

$$S = \rho s.$$

Obsah kruhu a jeho částí

Pro obsah S *kruhu* o poloměru r platí

$$S = \pi r^2.$$

Pro obsah S *mezikruží* o poloměrech r_1, r_2 $(r_1 > r_2)$ platí

$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2).$$

Pro obsah S *kruhové výseče* o poloměru r a vnitřním úhlu α vyjádřeným ve stupňové míře platí

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2.$$

1.9 Goniometrické vzorce

V úlohách vyžadujících během řešení nebo pro zpřehlednění výsledku úpravu výrazu s goniometrickými funkcemi jsou využívány základní goniometrické vzorce a vlastnosti goniometrických funkcí (definovaných pomocí kartézských souřadnic bodu na jednotkové kružnici).

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\
\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1 \quad \left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}\right), \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\
\left|\sin \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\
\left|\cos \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.
\end{aligned}$$

Pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$ platí součtové vzorce

$$\begin{aligned}
\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\
\sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\
\cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

Pro všechna x, $y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, pro která $x + y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$, platí

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Pro všechna x, $y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, pro která $x - y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq -1$, kde $k \in \mathbb{Z}$, platí

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}, \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.
\end{aligned}$$

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x,\\
\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x,\\
\sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x.
\end{aligned}
$$

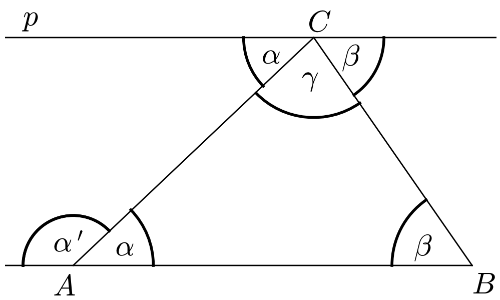
1.10 Důkazy vybraných vět

V uvedených důkazech jsou použity obvyklé středoškolské postupy. Proto jsou tyto důkazy vhodné i jako úlohy k procvičení a jsou také jako úlohy formulovány. Základními stavebními kameny, ze kterých jejich řešení vychází, jsou vlastnosti dvojic úhlů a věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.

Trojúhelník

Úloha 1.10.1. *Dokažte, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý.*

Řešení:
Vrcholem C trojúhelníku ABC veďme rovnoběžku p se stranou ABC (viz obrázek). Úhel sevřený přímkou p a stranou CA je shodný s vnitřním úhlem při vrcholu A (střídavé úhly), analogicky je úhel sevřený přímkou p a stranou CB shodný s vnitřním úhlem při vrcholu B. Z uvedeného je již tvrzení zřejmé. □



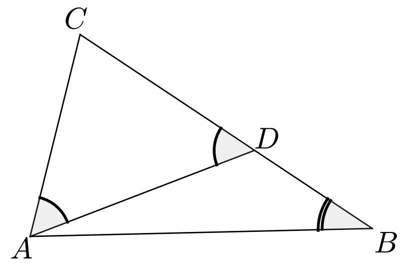
Obr. k úloze 1.10.1

Úloha 1.10.2. *Dokažte, že vnější úhel trojúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.*

Řešení:
Opět využijeme obrázek k úloze 1.10.1, z něhož je tvrzení úlohy očividné. □

Úloha 1.10.3. *Dokažte, že proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti delší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel a naopak, proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.*

Řešení:
Je-li v trojúhelníku ABC strana AC shodná se stranou BC, pak je trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem BAC (sss), a proto jsou také úhly ABC a BAC shodné.



Obr. k úloze 1.10.3

Je-li například $|AC| < |BC|$, můžeme na delší straně BC sestrojit bod D, pro který je $|AC| = |CD|$ (viz obrázek). Pak

$$|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DBA| > |\sphericalangle DBA|,$$

neboť úhel CDA je vnějším úhlem v trojúhelníku ABD.

Kdyby proti většímu úhlu neležela delší strana, pak by delší strana ležela proti menšímu úhlu, což je spor s právě dokázaným tvrzením a celý důkaz je hotov. □

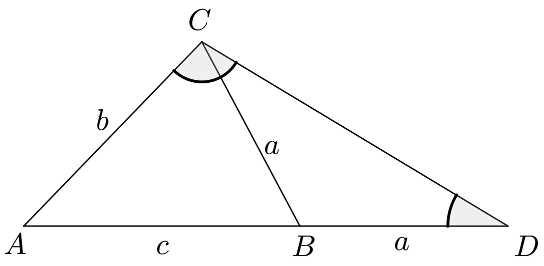
Úloha 1.10.4. *Dokažte trojúhelníkovou nerovnost.*

Řešení:
Uvažujme trojúhelník ABC a zvolme bod D na polopřímce opačné k polopřímce BA tak, že $|BC| = |BD|$ (viz obrázek). Trojúhelník BCD je rovnoramenný, proto $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BCD| < |\sphericalangle ACD|$. Proti většímu úhlu leží větší strana, tedy v trojúhelníku ADC je $|AD| > |AC|$, neboli $|AB| + |BC| > |AC|$, což jsme měli dokázat. □

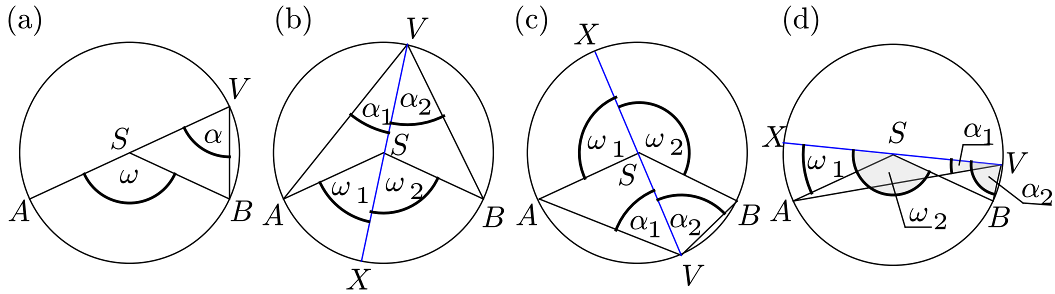
Úhly, kružnice

Úloha 1.10.5. *Dokažte, že velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.*

Řešení:
Označme A, B krajní body oblouku kružnice k se středem S, V bod kružnice k různý od bodů A, B, dále označme příslušný obvodový a středový úhel $\alpha = |\sphericalangle AVB|$, $\omega = |\sphericalangle ASB|$. Rozlišíme tři případy:



Obr. k úloze 1.10.4



Obr. k úloze 1.10.5 – obvodový a středový úhel

1. $S \in AV$ (analogicky $S \in BV$), viz obr. (a).
   $\triangle VSB$ je rovnoramenný ($|SV| = |SB|$), proto $|\sphericalangle SBV| = \alpha$ a $|\sphericalangle VSB| = 180° - 2\alpha$ (součet úhlů v trojúhelníku). Konečně $|\sphericalangle ASB| = 180° - |\sphericalangle VSB| = 2\alpha$ (vedlejší úhly).

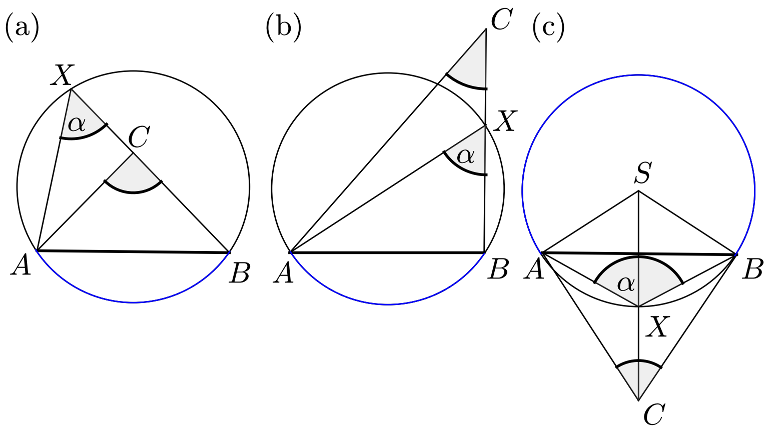
2. $S \in \sphericalangle AVB$ (vnitřní bod), viz obr. (b), (c).
   Tento postup zahrnuje i obvodový úhel příslušný většímu oblouku AB. Označme $X \in k \cap \overrightarrow{VS}$, $\alpha_1 = |\sphericalangle AVX|$, $\alpha_2 = |\sphericalangle XVB|$, $\omega_1 = |\sphericalangle ASX|$, $\omega_2 = |\sphericalangle XSB|$. V prvním kroku jsme dokázali, že $\omega_1 = 2\alpha_1$ a $\omega_2 = 2\alpha_2$. Celkem $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$.

3. $S \notin \sphericalangle AVB$, viz obr. (d).
   Postupujeme podobně jako v předchozím kroku. Označme $X \in k \cap \overrightarrow{VS}$, $\alpha_1 = |\sphericalangle AVX|$, $\alpha_2 = |\sphericalangle XVB|$, $\omega_1 = |\sphericalangle ASX|$, $\omega_2 = |\sphericalangle XSB|$. Z prvního kroku znovu dostáváme $\omega_1 = 2\alpha_1$ a $\omega_2 = 2\alpha_2$. Nyní platí $\omega = |\omega_1 - \omega_2| = |2\alpha_1 - 2\alpha_2| = 2\alpha$.

Tímto postupem je automaticky dokázana i shodnost všech obvodových úhlů příslušných témuž oblouku a Thaletova věta. □

Úloha 1.10.6. *Je dán oblouk AB kružnice k a bod C v opačné polorovině s hraniční přímkou AB. Je-li velikost úhlu ACB rovna velikosti obvodového úhlu příslušného ke zmíněnému oblouku, pak bod C leží na kružnici k. Dokažte.*

Řešení:
Označme α obvodový úhel příslušný uvažovanému oblouku AB. Bod C leží buď na, vně nebo uvnitř kružnice k. Dokážeme, že leží-li bod C uvnitř kružnice, pak je $|\sphericalangle ACB| > \alpha$, naopak leží-li vně, je $|\sphericalangle ACB| < \alpha$. Tím bude tvrzení dokázáno.



Obr. k úloze 1.10.6

a) Uvažujme nejprve případ, kdy bod C leží uvnitř kružnice (viz obr. a). Označme X průsečík přímky BC a kružnice (různý od B). Úhel ACB je vnější úhel v trojúhelníku ACX, proto

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AXB| + |\sphericalangle XAC| = \alpha + |\sphericalangle XAC| > \alpha.$$

b) V případě, že bod C leží vně kružnice a přímka BC není její tečnou (obr. b), postupujeme obdobně. Označíme X průsečík přímky BC a kružnice. Platí

$$\alpha = |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle CAX| > |\sphericalangle ACB|.$$

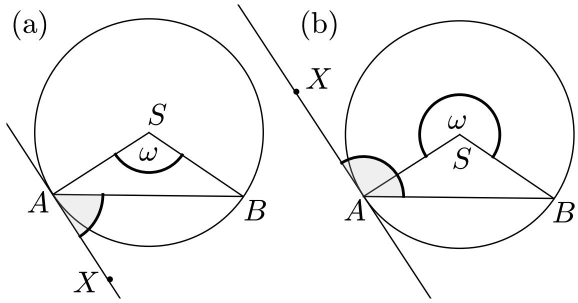
Je-li přímka BC tečnou kružnice a přímka AC není tečnou, zaměníme A a B a postupujeme stejně.

c) Jsou-li AC i BC tečnami kružnice (obr. c), označíme X průsečík kružnice k s úsečkou spojující střed S kružnice a bod C. Pak

$$\alpha = |\sphericalangle AXB| = 2|\sphericalangle AXS| = 2(|\sphericalangle ACX| + |\sphericalangle XAC|) > 2|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle ACB|. \quad \square$$

Úloha 1.10.7. *Dokažte, že úsekový úhel příslušný k danému oblouku je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.*

Řešení:
Označme A, B krajní body oblouku kružnice k se středem S, příslušný středový úhel $\omega = |\sphericalangle ASB|$, velikost příslušných obvodových úhlů α. Dále označme X bod tečny ke



Obr. k úloze 1.10.7 – úsekový úhel

kružnici procházející bodem A takový, že $\sphericalangle BAX$ je úsekový úhel příslušný zvolenému oblouku AB (viz obrázek).

Vyšetřeme nejprve situaci, kdy $\omega \leq 180°$. $\triangle BSA$ je rovnoramenný, proto

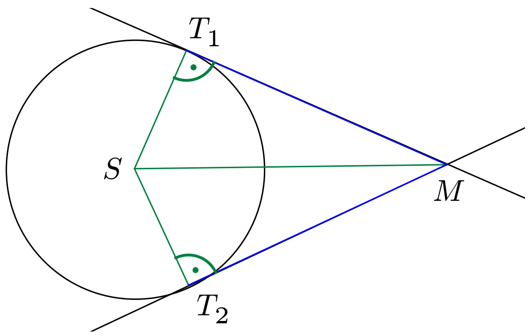
$$|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2}(180° - \omega) = 90° - \frac{1}{2}\omega = 90° - \alpha.$$

Dále $AS \perp AX$, proto $|\sphericalangle BAX| = 90° - |\sphericalangle SAB| = \alpha$. Je-li naopak $\omega > 180°$, platí

$$|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2}(180° - (360° - \omega)) = \frac{1}{2}\omega - 90° = \alpha - 90°.$$

Odtud již $|\sphericalangle BAX| = 90° + |\sphericalangle SAB| = \alpha$. □

Úloha 1.10.8. *Dokažte, že délka tečny vedené z vnějšího bodu ke kružnici je pro obě tečny shodná.*



Obr. k úloze 1.10.8

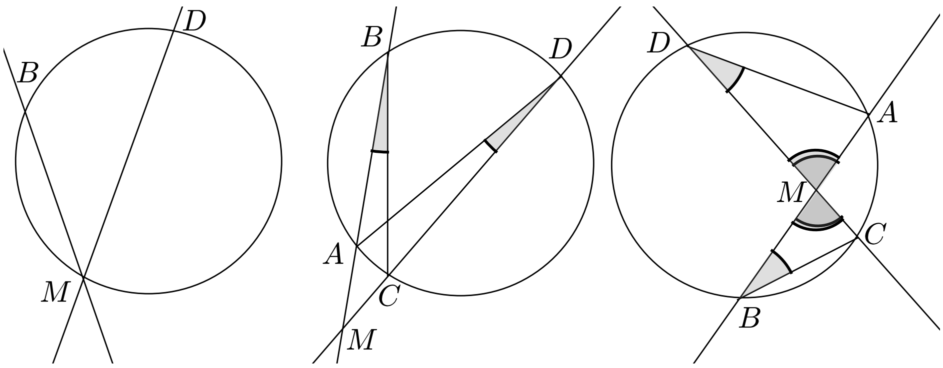
Řešení:
Na obrázku jsou trojúhelníky SMT_1 a SMT_2 shodné (Ssu), neboť se shodují v pravém úhlu u vrcholu T_1 resp. T_2, delší straně SM proti němu a $|ST_1| = |ST_2|$ je poloměr kružnice. Proto jsou i zbývající strany shodné. □

Úloha 1.10.9. *Dokažte korektnost definice mocnosti bodu ke kružnici ze str. 14.*

Řešení:
Uvažujme kružnici k se středem S a poloměrem r a libovolný bod M, kterým vedeme dvě libovolné sečny kružnice k. Označme A, B průsečíky první sečny s kružnicí k, C, D průsečíky druhé sečny s kružnicí k. Definice mocnosti m bude korektní, pokud bude platit

$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|.$$

Důkaz rozdělíme na tři případy podle polohy bodu M. V prvním a druhém případě zvolíme označení průsečíků tak, že $|MA| < |MB|$, $|MC| < |MD|$ (viz obrázek).



Obr. k úloze 1.10.9

1. $M \in k$
   Pak $A = C = M$ a $|MA| = |MC| = 0$, takže i $|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD| = 0$ $(= m)$.

2. M leží vně kružnice k
   Platí $\triangle MCB \cong \triangle MAD$ (uu: $|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle CBM|$ – obvodové úhly příslušné k oblouku AC, úhel BMD je společný), proto

$$|MC| : |MA| = |MB| : |MD|, \quad \text{odkud} \quad |MC| \cdot |MD| = |MA| \cdot |MB|.$$

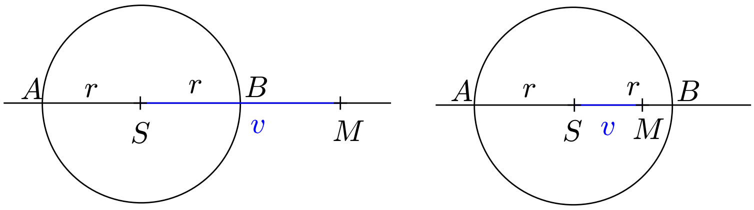
3. M leží uvnitř kružnice k
   Platí $\triangle MCB \cong \triangle MAD$ (uu: $|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle CBM|$ – obvodové úhly příslušné k oblouku AC, úhly CMB a DMA jsou vrcholové), proto

$$|MC| : |MA| = |MB| : |MD|, \quad \text{odkud} \quad |MC| \cdot |MD| = |MA| \cdot |MB|. \qquad \square$$

Úloha 1.10.10. *Je-li v ($v \geq 0$) vzdálenost bodu M od středu S kružnice k o poloměru r, pak pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí $m = v^2 - r^2$. Dokažte.*

Řešení:
Označme A, B průsečíky přímky MS s kružnicí k. Leží-li bod M vně kružnice k, platí (viz obr.)

$$m = |MA| \cdot |MB| = (v + r)(v - r) = v^2 - r^2.$$



Obr. k úloze 1.10.10

Leží-li bod M uvnitř kružnice k, platí

$$m = -|MA| \cdot |MB| = -(r+v)(r-v) = v^2 - r^2.$$

Je-li konečně $M \in k$, platí $v = r$ a $m = 0$ a rovnost platí. □

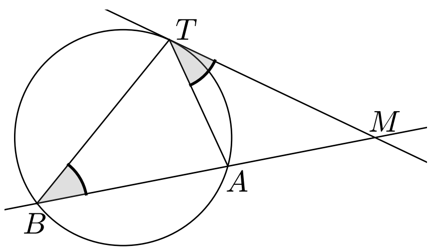
Úloha 1.10.11. *Bez užití výsledků předchozích úloh dokažte, že pro délku tečny z bodu M vně kružnice k s bodem dotyku T platí*

$$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|,$$

kde body A, B jsou průsečíky kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem M.

Řešení:
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|MA| < |MB|$. Úhel MTA je úsekový úhel příslušný menšímu oblouku TA, úhel TBM je obvodový úhel příslušný témuž oblouku. Trojúhelníky MTA a MBT jsou podobné (uu, společný úhel u vrcholu M, viz obrázek). Platí proto

$$|MA| : |MT| = |MT| : |MB|, \quad \text{odkud} \quad |MT|^2 = |MA| \cdot |MB|. \qquad \square$$



Obr. k úloze 1.10.11

Čtyřúhelník, mnohoúhelník

Úloha 1.10.12. *Dokažte, že součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku se rovná* $(n-2)\cdot 180°$.

ŘEŠENÍ:
Zvolíme jeden z vrcholů n-úhelníka a vedeme z něj všech $n-3$ úhlopříček. Tím rozdělíme n-úhelník na $n-2$ trojúhelníků. Součet velikostí vnitřních úhlů v každém z nich je $180°$, proto je celkový výsledek

$$(n-2)\cdot 180°. \qquad \square$$

Úloha 1.10.13. *Dokažte, že součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je úhel přímý.*

ŘEŠENÍ:
Úhly ABC a ADC jsou obvodové úhly příslušné opačným obloukům AC, proto je jejich součet úhel přímý. Analogicky pro úhly BCD a BAD nad oblouky BD. □

Úloha 1.10.14. *Je-li v konvexním čtyřúhelníku součet protějších vnitřních úhlů úhel přímý, pak je tento čtyřúhelník tětivový. Dokažte.*

ŘEŠENÍ:
K danému čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojme kružnici k opsanou trojúhelníku ABC. Velikost obvodového úhlu příslušného k oblouku AC, na němž leží bod B, je $180° - |\sphericalangle ABC|$. Protože předpokládáme, že také $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ABC|$, leží podle úlohy 1.10.6 bod D na kružnici k a čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. □

Úloha 1.10.15. *Dokažte, že součty délek dvojic protějších stran tečnového čtyřúhelníku jsou si rovny.*

ŘEŠENÍ:
Označme T_a, T_b, T_c, T_d body dotyku stran a, b, c, d čtyřúhelníku $ABCD$ a vepsané kružnice. Platí

$$|AT_a| = |AT_d|, \quad |BT_b| = |BT_a|, \quad |CT_c| = |CT_b|, \quad |DT_d| = |DT_c|,$$

neboť se jedná o délky tečen z vnějšího bodu ke kružnici. Odtud

$$\begin{aligned} a + c &= |AT_a| + |BT_a| + |CT_c| + |DT_c| = \\ &= |AT_d| + |BT_b| + |CT_b| + |DT_d| = b + d. \end{aligned} \qquad \square$$

Úloha 1.10.16. *Jsou-li si v konvexním čtyřúhelníku součty délek dvojic protějších stran rovny, pak je tento čtyřúhelník tečnový. Dokažte.*

Řešení:
Sestrojme kružnici k dotýkající se stran AB, BC a CD čtyřúhelníku $ABCD$. Veďme bodem A druhou tečnu k této kružnici, která protne přímku CD v některém bodě X. Pak čtyřúhelník $ABCX$ je tečnový a platí

$$|AB| + |CX| = |BC| + |XA|.$$

Podle předpokladu úlohy víme, že

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|.$$

Odečtením obou rovností dostáváme

$$|CX| - |CD| = |XA| - |DA|,$$

neboli $|CX| - |CD| = |XD|$. Proto bod X leží na úsečce CD a platí $X = D$, tudíž čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový. □

Úloha 1.10.17. *Dokažte, že deltoid je tečnový čtyřúhelník.*

Řešení:
Zvolme označení $ABCD$ daného deltoidu tak, aby úhlopříčka BD procházela středem S (k ní kolmé) úhlopříčky AC. Pak $|AB| = |BC|$ a $|AD| = |DC|$, neboť $\triangle ABS \cong \triangle CBS$ (sus) a $\triangle ADS \cong \triangle CDS$ (sus). Proto $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ a deltoid $ABCD$ je skutečně tečnový čtyřúhelník. □

Pravoúhlý trojúhelník

Úloha 1.10.18. *Dokažte Eukleidovu větu o výšce.*

Řešení:
Využijeme obrázek. Trojúhelníky ACC_0, CBC_0 jsou podobné (uu), proto

$$c_b : v = v : c_a, \quad \text{odtud přímo} \quad v^2 = c_a \cdot c_b.$$ □

Úloha 1.10.19. *Dokažte Eukleidovu větu o odvěsně.*

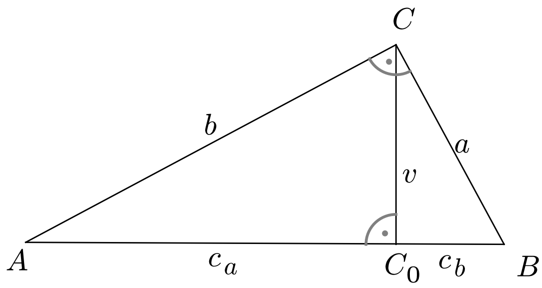
Řešení:
Opět využijeme obrázek. Trojúhelníky ABC a CBC_0 jsou podobné (uu), proto

$$a : c_a = c : a, \quad \text{odtud přímo} \quad a^2 = c \cdot c_a.$$

Analogicky pro druhou odvěsnu z podobnosti trojúhelníků ABC a ACC_0 (uu) plyne

$$b : c_b = c : b, \quad \text{neboli} \quad b^2 = c \cdot c_b.$$ □

Úloha 1.10.20. *Dokažte Pythagorovu větu.*



Obr. k úloze 1.10.18

Řešení:
Pythagorovu větu lze odvodit z Eukleidové věty o odvěsně, podle které

$$a^2 = c \cdot c_a \quad \text{a} \quad b^2 = c \cdot c_b,$$

když obě vyjádření sečteme

$$a^2 + b^2 = c(c_a + c_b),$$

a upravíme s využitím rovnosti $c_a + c_b = c$ do konečného tvaru

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad \square$$

Obráceně, nechť délky stran trojúhelnáku ABC splňují rovnost $a^2 + b^2 = c^2$. Uvažme pomocný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b, pro jehož přeponu podle dokázaného platí $a^2 + b^2 = c_1^2$. Je tedy $c^2 = c_1^2$, neboli $c = c_1$, takže podle věty sss jsou uvažované trojúhelníky shodné a trojúhelník ABC je pravoúhlý.

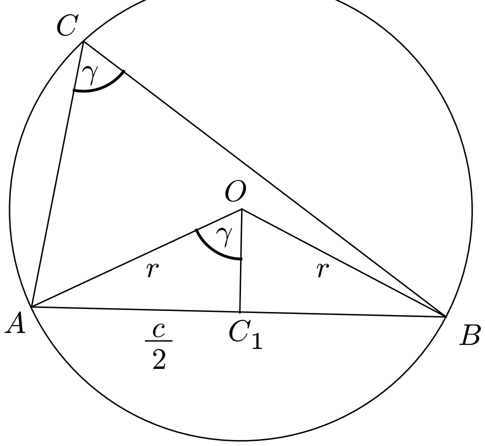
Obecný trojúhelník

Úloha 1.10.21. *Dokažte sinovou větu v rozšířeném tvaru.*

Řešení:
Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Důkaz nyní rozvětvíme podle velikosti úhlu γ.

1. Úhel γ je pravý.
   Pak O je středem AB a $c = 2r$, $\sin\gamma = 1$. Proto platí
   $$\frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

2. Úhel γ je ostrý.
   Trojúhelník ABO je rovnoramenný s délkou ramene r. Úhel AOB je středový úhel příslušný k oblouku AB, úhel ACB je odpovídající obvodový úhel. Proto platí
   $$|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB| = 2\gamma.$$



Obr. k úloze 1.10.21

V trojúhelníku AOC_1 (C_1 je střed AB, viz obr.) platí $|\sphericalangle AC_1O| = 90°$, $|\sphericalangle AOC_1| = $
$= \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB| = \gamma$. Proto

$$\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{r} = \frac{c}{2r}, \quad \text{neboli} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

3. Úhel γ je tupý.
   Postupujeme obdobně jako v předchozím případě. Platí

$$|\sphericalangle AOB| = 360° - 2\gamma.$$

   V trojúhelníku AOC_1 platí $|\sphericalangle AOC_1| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB| = 180° - \gamma$, a proto opět

$$\sin\gamma = \sin(180° - \gamma) = \frac{\frac{1}{2}c}{r} = \frac{c}{2r}, \quad \text{neboli} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Analogickým postupem pro úhly α a β dostáváme celkově

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$ □

Úloha 1.10.22. *Dokažte kosinovou větu.*

Řešení:
V trojúhelníku ABC označme C_0 patu výšky na stranu AB. Je-li úhel α ostrý, platí

$$\begin{aligned}|CC_0| &= b\sin\alpha,\\ |AC_0| &= b\cos\alpha,\\ |BC_0| &= c - |AC_0| = c - b\cos\alpha.\end{aligned}$$

Je-li úhel α tupý, platí

$$\begin{aligned}|CC_0| &= b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha,\\ |AC_0| &= b\cos(180^\circ - \alpha) = -b\cos\alpha,\\ |BC_0| &= c + |AC_0| = c - b\cos\alpha.\end{aligned}$$

Nyní použijeme Pythagorovu větu v $\triangle AC_0C$:

$$\begin{aligned}a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2,\\ a^2 &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.\end{aligned}$$

Je-li úhel α pravý, platí $\cos\alpha = 0$ a kosinová věta přejde ve větu Pythagorovu.

Cyklickou záměnou dostaneme i další dvě rovnosti. □

Obsahy rovinných útvarů

Úloha 1.10.23. *Dokažte Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku.*

Řešení:
Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Vztah nejprve umocníme na druhou

$$S^2 = \left(\tfrac{1}{2}ab\right)^2 \sin^2\gamma$$

a dosadíme $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$

$$S^2 = \left(\tfrac{1}{2}ab\right)^2 (1 - \cos^2\gamma) = \left(\tfrac{1}{2}ab\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}ab\cos\gamma\right)^2,$$

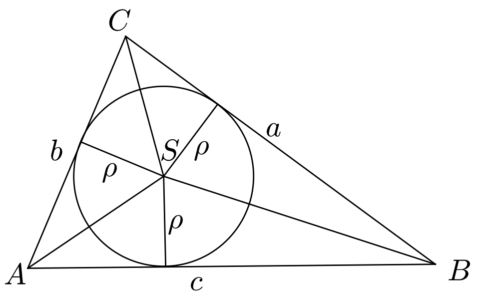
dále za $ab\cos\gamma$ dosadíme z kosinové věty a upravíme

$$\begin{aligned}S &= \left(\tfrac{1}{2}ab\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)\right)^2 =\\ &= \left(\tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)\right)\left(\tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)\right) =\\ &= \tfrac{1}{4}\left(c^2 - (a-b)^2\right)\tfrac{1}{4}\left((a+b)^2 - c^2\right) =\\ &= \tfrac{1}{2}(c - a + b)\tfrac{1}{2}(c + a - b)\tfrac{1}{2}(a + b - c)\tfrac{1}{2}(a + b + c) =\\ &= (s-a)(s-b)(s-c)s.\end{aligned}$$

Po odmocnění získáme požadovaný vzorec

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ □

Úloha 1.10.24. *Dokažte vzorec $S = \rho s$ pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí poloměru kružnice vepsané.*



Obr. k úloze 1.10.24

Řešení:
Obsah trojúhelníku ABC určíme jako součet obsahů trojúhelníků ABS, BCS, CAS, kde S je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Spojnice středu kružnice a bodu dotyku je vždy kolmá na tečnu v tomto bodě, proto má výška na stranu AB (resp. BC, resp. CA) v trojúhelníku ABS (resp. BCS, resp. ACS) velikost ρ (viz obrázek).
Celkem platí

$$\begin{aligned} S &= S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CAS} = \\ &= \tfrac{1}{2}a\rho + \tfrac{1}{2}b\rho + \tfrac{1}{2}c\rho = \\ &= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\rho = \rho s. \end{aligned}$$

Analogicky se dokáže vzorec $S = \rho s$ pro obsah S libovolného tečnového mnohoúhelníku s vepsanou kružnicí o poloměru ρ a obvodem $2s$, který je uveden v paragrafu. □

Úloha 1.10.25. *Dokažte vzorec* $S = \dfrac{abc}{4r}$ *pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí poloměru kružnice opsané.*

Řešení:
Do vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ dosadíme za $\sin\gamma$ z rozšířeného tvaru sinové věty $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ a dostaneme přímo požadovaný vzorec. □

Kapitola 2

Aplikace základních poznatků

Následující podkapitoly představují hlavní náplň disertační práce. V české i zahraniční liteartuře, jako jsou sbírky, ročenky a matematické časopisy, se objevují obtížnější výpočtové úlohy, v jejichž řešení jsou sice využity elementární prostředky, avšak často různě vzájemně provázané. Cílem práce bylo vybrat a uspořádat úlohy využívající pouze jednu metodu, neboť takové úlohy lépe poslouží při zdokonalování dovedností žáků.

Podle metody jejich řešení jsme vytvořili osm podkapitol s názvy uvedenými v obsahu. Jednotlivé podkapitoly dále ještě členíme na nečíslované odstavce, jejichž názvy (vyjmenované vždy v úvodu podkapitoly) vystihují detailnější námět zařazených úloh, kterým předchází krátký metodický komentář.

Obsahem zařazených úloh jsou často jednoduchá tvrzení na využití základních poznatků shrnutých v první kapitole. Tato tvrzení lze jednak přímo využít k řešení obtížnějších úloh, jednak je možné inspirovat se jejich důkazy a uplatnit použitou metodu v obdobných situacích.

Není-li uvedeno jinak, je ve všech úlohách využito běžné značení prvků v trojúhelníku ABC popsané v podkapitole 1.3 na stranách 16 a 17.

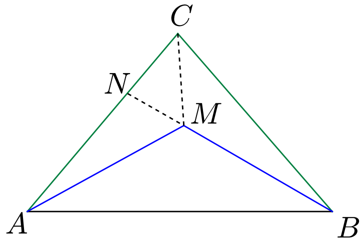
2.1 Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost (viz str. 16) je silným nástrojem při řešení úloh o délkách, vzdálenostech a obvodech útvarů. Na úvod dokážeme tři související nerovnosti pro obecný trojúhelník. Pak se budeme věnovat různým postupům uplatnění trojúhelníkových nerovností v odstavcích pod názvy:

▷ Prosté sčítání trojúhelníkových nerovností
▷ Doplnění vhodného trojúhelníku
▷ Sčítání nerovností v upraveném tvaru
▷ Konfigurace s minimálním součtem vzdáleností

Úloha 2.1.1. *Dokažte, že pro libovolný bod M uvnitř trojúhelníku ABC platí*[1]

$$|CA| + |CB| > |MA| + |MB|.$$



Obr. k úloze 2.1.1

Řešení:
Označme N průsečík přímky BM a strany AC (viz obrázek). V trojúhelníku NBC platí $|NB| < |NC| + |CB|$, v trojúhelníku AMN platí $|MA| < |AN| + |NM|$. Celkem

$$\begin{aligned} |CA| + |CB| = |AN| + |NC| + |CB| > |AN| + |NB| = \\ = |AN| + |NM| + |MB| > |MA| + |MB|. \end{aligned}$$ □

Úloha 2.1.2. *Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod M trojúhelníku ABC platí*[2]

$$|MA| + |MB| + |MC| < a + b + c.$$

Řešení:
Třikrát použijeme výsledek úlohy 2.1.1 a sečteme:

$$a + b > |MA| + |MB|, \quad b + c > |MB| + |MC|, \quad c + a > |MC| + |MA|,$$

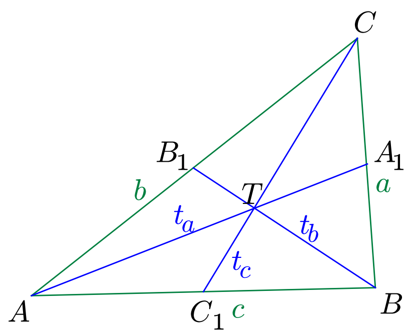
celkem $2(a + b + c) > 2(|MA| + |MB| + |MC|)$. □

Úloha 2.1.3. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí*

$$t_a + t_b + t_c < \tfrac{3}{2}(a + b + c)$$

Řešení:
Podle předchozí úlohy víme, že pro těžiště T jakožto vnitřní bod trojúhelníku ABC platí $|TA| + |TB| + |TC| < a + b + c$ (viz obrázek). Stačí sem dosadit $|TA| = \frac{2}{3}t_a$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b$, $|TC| = \frac{2}{3}t_c$ a tvrzení je dokázáno. □

[1] [And–04, str. 36/3]
[2] [Pra–86b, str. 9/15.7]



Obr. k úloze 2.1.3

Prosté sčítání trojúhelníkových nerovností

Prvním krokem řešení geometrické úlohy by mělo být načrtnutí situace, neboť dobře nakreslený obrázek může napovědět, kterými trojúhelníky se zabývat. Chceme-li dokázat některý odhad užitím trojúhelníkových nerovností a připadá-li podle zadání v úvahu více trojúhelníků, jedním z nejjednodušších a přitom dobře použitelných postupů je několik trojúhelníků *vhodně vybrat* a jim odpovídající nerovnosti *sečíst*.

Úloha 2.1.4. *Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod M trojúhelníku ABC platí*[3]

$$|MA| + |MB| + |MC| > \frac{a+b+c}{2}.$$

Řešení:
Sečteme trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelnících ABM, BCM, CAM:

$$|MA| + |MB| > c, \quad |MB| + |MC| > a, \quad |MC| + |MA| > b,$$

celkem $2(|MA| + |MB| + |MC|) > a + b + c$. □

Úloha 2.1.5. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku platí*[4]

$$t_c > \frac{a+b-c}{2}.$$

Řešení:
Při označení podle obr. k úloze 2.1.3 sečteme trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelnících CBC_1, CAC_1:

$$\begin{matrix} t_c + \frac{c}{2} > a, \\ t_c + \frac{c}{2} > b, \end{matrix} \quad \text{proto} \quad 2t_c + c > a + b \quad \text{a konečně} \quad t_c > \frac{a+b-c}{2}.$$ □

[3] [Pra–86b, str. 9/15.17]
[4] [Pra–86b, str. 8/15.1]

Úloha 2.1.6. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí*[5]

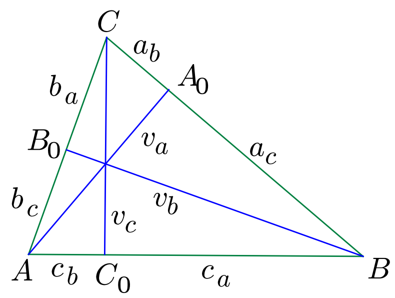
$$\frac{1}{4} < \frac{a + t_b}{b + t_a} < 4$$

Řešení:
Využijeme obrázek k úloze 2.1.3. V trojúhelníku AA_1C platí $\frac{1}{2}a < b + t_a$, v trojúhelníku TB_1A zase $\frac{1}{3}t_b < \frac{1}{2}b + \frac{2}{3}t_a$. První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a jejich následným sečtením dostaneme

$$a + t_b < 2b + 2t_a + \tfrac{3}{2}b + 2t_a = \tfrac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a),$$

což je pravá nerovnost z tvrzení. Záměnou stran a, b obdržíme i levou nerovnost. □

Úloha 2.1.7. *Dokažte, že součet velikostí výšek ostroúhlého trojúhelníku je větší než polovina jeho obvodu.*



Obr. k úloze 2.1.7

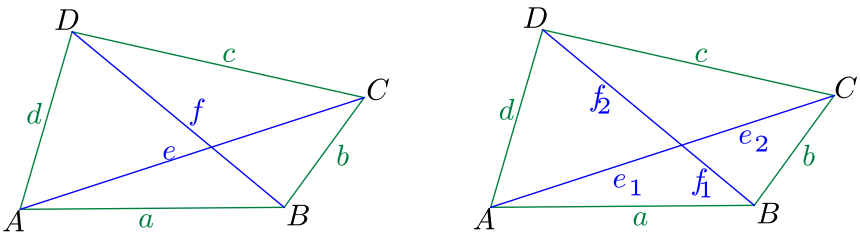
Řešení:
Při označení podle obrázku použijeme šestkrát trojúhelníkovou nerovnost

$$v_a + a_b > b, \quad v_b + b_a > c, \quad v_c + c_a > a,$$
$$v_a + a_c > c, \quad v_b + b_c > a, \quad v_c + c_b > b.$$

Všechny nerovnosti sečteme a po dosazení $a = a_b + a_c$, $b = b_a + b_c$, $c = c_a + c_b$ získáme nerovnost $2(v_a + v_b + v_c) > a + b + c$. □

Úloha 2.1.8. *Dokažte, že součet délek úhlopříček konvexního čtyřúhelníku je menší než jeho obvod a větší než polovina jeho obvodu.*[6]

[5] Zjednodušené zadání úlohy [MO, 57–A–III–6].
[6] [Kuř–96, str. 42/20]



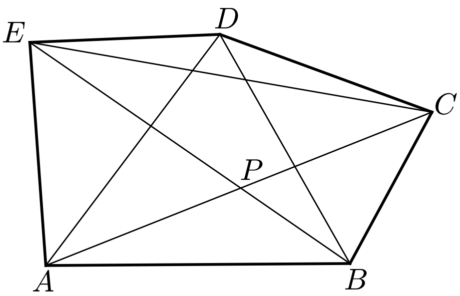
Obr. k úloze 2.1.8

Řešení:
Při označení podle obrázku sečteme trojúhelníkové nerovnosti:

$$\begin{array}{cc}
a+b>e & f_1+e_1>a \\
c+d>e & f_1+e_2>b \\
a+d>f & f_2+e_2>c \\
\underline{b+c>f} & \underline{f_2+e_1>d} \\
2(a+b+c+d)>2(e+f) & 2(e+f)>a+b+c+d
\end{array}$$

□

Úloha 2.1.9. *Rozhodněte, zda existuje konvexní pětiúhelník, jehož žádná úhlopříčka není delší než protější strana (tj. strana, jež nemá s danou úhlopříčkou společný bod).*[7]



Obr. k úloze 2.1.9

Řešení:
Označme P průsečík úhlopříček AC a BE. Sečtením dvou trojúhelníkových nerovností $|AP|+|PE|>|AE|$ a $|BP|+|PC|>|BC|$ získáme nerovnost $|AC|+|BE|>|AE|+|BC|$ zahrnující dvě strany pětiúhelníku a dvě protínající se úhlopříčky spojující krajní body těchto stran. Analogicky pro zbývající dvojice nesousedních stran

$$|BD|+|CA|>|BA|+|CD|, \quad |CE|+|DB|>|CB|+|DE|,$$
$$|DA|+|EC|>|DC|+|EA|, \quad |EB|+|AD|>|AB|+|ED|.$$

[7] [Aga-10, str. 65/194]

Těchto pět nerovností nyní sečteme:

$$2(|AC| + |BD| + |CE| + |DA| + |EB|) > 2(|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|).$$

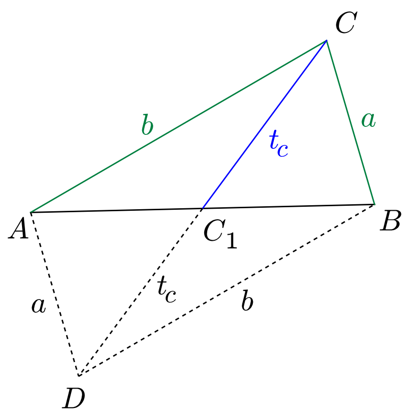
Kdyby existoval pětiúhelník požadované vlastnosti, součet délek jeho úhlopříček by nebyl větší než součet délek jeho stran, což odporuje dokázané nerovnosti. Proto takový pětiúhelník neexistuje. □

Doplnění vhodného trojúhelníku

Ne ve všech úlohách je již v zadání popsán trojúhelník, ve kterém je třeba uplatnit trojúhelníkovou nerovnost. Následující úlohy ukazují, jak se vyrovnat s různými situacemi, ve kterých musíme vhodný trojúhelník vytvořit doplněním některých jeho vrcholů. Výpočty přitom využíváme jen sporadicky, avšak uvedené postupy jsou důležitým základem řešení mnoha dalších výpočtových úloh.

Úloha 2.1.10. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí* [8]

$$a)\ t_c < \frac{a+b}{2}, \qquad b)\ \frac{|a-b|}{2} < t_c.$$



Obr. k úloze 2.1.10

Řešení:
Doplňme trojúhelník ABC bodem D na rovnoběžník $ADBC$ (viz obrázek). V trojúhelníku ADC, ve kterém je $|AD| = a$, $|CD| = 2t_c$, užijeme úspornější zápis trojúhelníkových nerovností, jak je uveden na str. 16, a tím dokážeme obě tvrzení současně:

$$||AD| - |AC|| < |CD| < |AD| + |AC|, \text{ neboli } |a - b| < 2t_c < a + b. \qquad \square$$

[8] Obměna úloh [Eng–98, str. 320/34, 35].

Úloha 2.1.11. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí* [9]

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

Řešení:
Využijeme opakovaně výsledek úlohy 2.1.10:

$$t_a < \frac{b+c}{2}, \quad t_b < \frac{a+c}{2}, \quad t_c < \frac{a+b}{2}.$$

Zbývá sečíst uvedené nerovnosti a důkaz je hotov.

□

Sčítání nerovností v upraveném tvaru

V úlohách o nerovnostech, ve kterých vystupují pouze délky stran jednoho trojúhelníku (a případně velikosti jeho vnitřních úhlů), náčrtek trojúhelníku neposkytuje žádnou nápovědu. V takovém případě se snažíme upravit dokazované tvrzení, nebo naopak, jako v následujících úlohách, upravit výchozí poznatek, tedy trojúhelníkovou nerovnost, do jiného ekvivalentního tvaru, vhodného pro další úpravy nebo početní manipulace, nejčastěji sčítání s jinými nerovnostmi.

Úloha 2.1.12. *Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníku ABC platí*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 3$$

Řešení:
Jedná se o jednoduchou aplikaci trojúhelníkové nerovnosti. Protože $a < b + c$, platí

$$\frac{a}{b+c} < 1, \quad \text{analogicky} \quad \frac{b}{c+a} < 1, \quad \frac{c}{a+b} < 1$$

a sečtením uvedených tří nerovností získáme požadované tvrzení. □

Úloha 2.1.13. *Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníku ABC platí* [10]

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Řešení:
Vyjdeme z trojúhelníkové nerovnosti a několika vhodně zvolenými úpravami dokážeme pomocné tvrzení:

$$a < b + c \ \Rightarrow\ a + b + c < 2(b + c) \ \Rightarrow\ \frac{1}{b+c} < \frac{2}{a+b+c} \ \Rightarrow\ \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$$

[9] [Bot–69, str. 73/8.1], [Pra–86b, str. 8/15.2]
[10] [Bot–69, str. 15/1.16]

Analogicky

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Součet těchto tří pomocných nerovností dává požadovaný výsledek:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

□

Úloha 2.1.14. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí* [11]

$$\frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{a+b+c} < 90°.$$

Řešení:
Uvažovanou nerovnost přepíšeme do výhodného tvaru

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot \alpha + \frac{b}{a+b+c} \cdot \beta + \frac{c}{a+b+c} \cdot \gamma < 90°.$$

Vyjdeme z trojúhelníkové nerovnosti $a < b + c$ a pokusíme se odhadnout zastoupené zlomky.

$$\frac{a}{a+b+c} = 1 - \frac{b+c}{a+b+c} < 1 - \frac{a}{a+b+c}, \quad \text{takže} \quad \frac{a}{a+b+c} < \frac{1}{2}.$$

Analogicky platí $\frac{b}{a+b+c} < \frac{1}{2}$, $\frac{c}{a+b+c} < \frac{1}{2}$. Celkem dostáváme

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot \alpha + \frac{b}{a+b+c} \cdot \beta + \frac{c}{a+b+c} \cdot \gamma < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°.$$

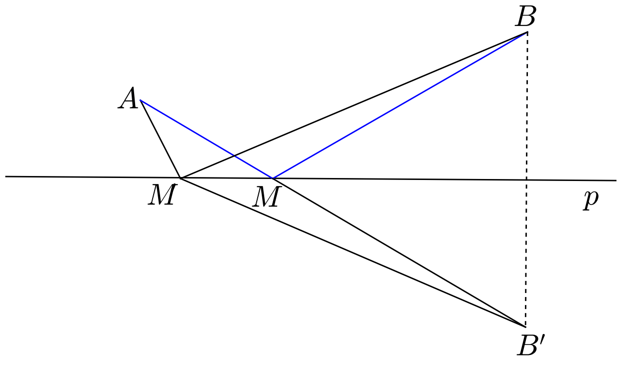
□

Konfigurace s minimálním součtem vzdáleností

Na závěr podkapitoly o trojúhelníkové nerovnosti jsme vybrali zajímavé úlohy, jejichž společným znakem je hledání polohy bodů, která minimalizuje zadaný součet vzdáleností. Hlavní částí řešení takových úloh je důkaz, že zvolená konfigurace je skutečně optimální. V případě, že by tyto vybrané úlohy byly zadány jako *výpočtové*, tj. s požadavkem na určení popsané minimální vzdálenosti, předcházely by uvedené důkazy vlastnímu výpočtu.

Úloha 2.1.15. *Je dána přímka p a body A, B ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Určete polohu bodu M na přímce p tak, aby součet $|AM| + |BM|$ byl minimální.*[12]

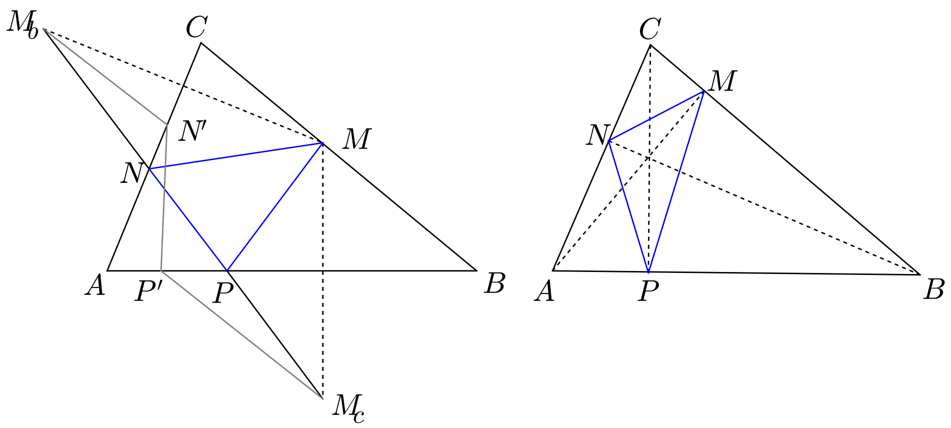
[11] [Cal–10]
[12] [Pom–93, str. 127/3]



Obr. k úloze 2.1.15

ŘEŠENÍ:
Ukážeme, že hledaný bod M je průsečíkem přímky p a úsečky AB', kde B' je obrazem bodu B v osové souměrnosti s osou p (viz obrázek). Pro libovolný jiný bod M' na přímce p platí $|AM'|+|BM'| = |AM'|+|B'M'| > |AB'| = |AM|+|B'M| = |AM|+|BM|$. □

Úloha 2.1.16. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Určete polohu bodů M, N, P po řadě na stranách BC, CA, AB trojúhelníku tak, aby byl obvod trojúhelníku MNP minimální.*[13]



Obr. k úloze 2.1.16

ŘEŠENÍ:
Představme si nejprve, že známe polohu bodu M na straně BC a hledáme body N, P. Zobrazme bod M v osových souměrnostech s osami AB a AC, získáme tak body M_b a M_c

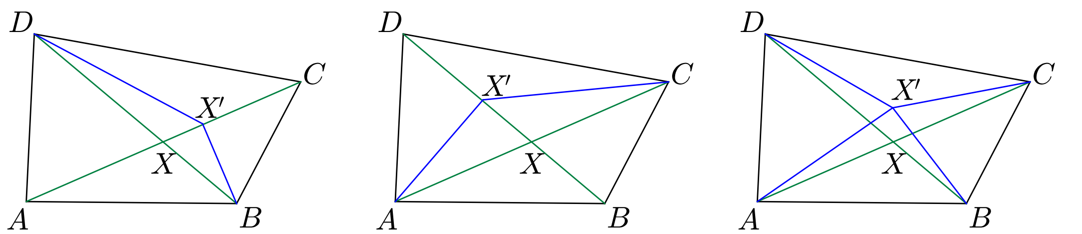
[13] [And–04, str. 39/15]

(viz obr. vlevo). Vysvětlíme, že body N a P musí být průsečíky úsečky M_bM_c se stranami AC a AB. Obvod trojúhelníku MNP je tedy roven $|M_bN| + |NP| + |PM_c| = |M_bM_c|$. Pro jinou polohu bodů N, P (označme je N', P' jako na obrázku) je totiž

$$|M_bN'| + |N'P'| + |P'M_c| > |M_bP'| + |P'M_c| > |M_bM_c|.$$

Nyní zbývá nalézt polohu bodu M tak, aby vzdálenost $|M_bM_c|$ byla nejmenší. Vzhledem k užitým souměrnostem platí $|\sphericalangle M_bAM_c| = |\sphericalangle M_bAC| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle M_cAB| = |\sphericalangle MAC| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle MAB| = 2|\sphericalangle CAB|$, $|AM_b| = |AM| = |AM_c|$. Trojúhelník AM_bM_c je tedy rovnoramenný s konstantním vnitřním úhlem u vrcholu A. Všechny takové trojúhelníky jsou podobné. Základna M_bM_c bude tudíž nejkratší, pokud obě ramena budou nejkratší možná, tedy pokud bude vzdálenost $|MA|$ nejmenší. To nastane, když je bod M patou výšky na stranu BC. Úvaha bude stejná, ať začneme od libovolného bodu, proto i hledané body N a P musí být patami výšek na strany CA a AB. Trojúhelník MNP s nejmenším obvodem je proto tzv. trojúhelník *ortický* k původnímu (ostroúhlému) trojúhelníku ABC (viz obr. vpravo) tedy trojúhelník, jehož vrcholy jsou patami výšek původního trojúhelníku. □

Úloha 2.1.17. *Který bod daného konvexního čtyřúhelníku má minimální součet vzdáleností od jeho vrcholů? Tvrzení dokažte.*[14]



Obr. k úloze 2.1.17

Řešení:
Hledaným bodem je průsečík X úhlopříček AC a BD daného čtyřúhelníku $ABCD$. Pro libovolný jiný bod X' totiž platí (viz obrázek)

$$|AX'| + |X'C| > |AC| \text{ a } |BX'| + |X'D| = |BD|, \text{ leží-li } X \text{ na úhlopříčce } BD,$$

$$|AX'| + |X'C| = |AC| \text{ a } |BX'| + |X'D| > |BD|, \text{ leží-li } X \text{ na úhlopříčce } AC,$$

$$|AX'| + |X'C| > |AC| \text{ a } |BX'| + |X'D| > |BD|, \text{ neleží-li } X \text{ na } AC \text{ ani na } BD.$$

Sečtením ve všech třech případech dostáváme ostrou nerovnost

$$|AX'| + |BX'| + |CX'| + |DX'| > |AC| + |BD| = |AX| + |BX| + |CX| + |DX|,$$

která dokazuje, že hledaným bodem skutečně je právě průsečík úhlopříček. □

[14] [Kuř–96, str. 42/18]

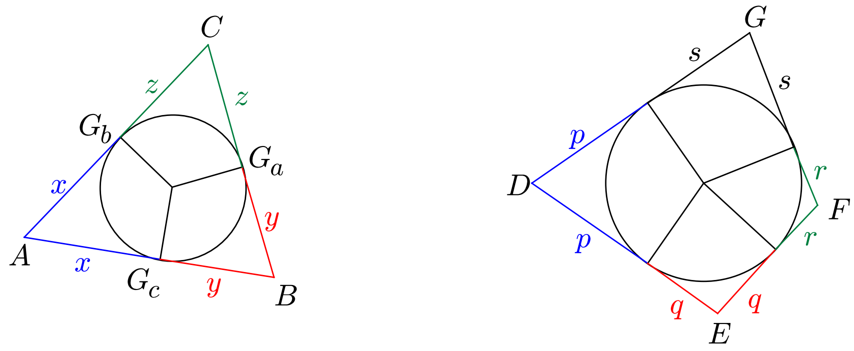
2.2 Délky tečen ke kružnici

Na str. 14 jsou shrnuty vlastnosti tečny kružnice, zejména je zaveden pojem *délka tečny* z bodu ke kružnici (vzdálenost tohoto bodu a bodu dotyku) a zmíněna shodnost délek dvou tečen z bodu k téže kružnici (souměrnost úseků tečen), která je stěžejním základem řešení většiny úloh celé podkapitoly rozdělené do odstavců

▷ Kružnice vepsaná
▷ Shodné úseky tečen
▷ Kružnice připsaná

Kružnice vepsaná

Pracujeme-li s kružnicí vepsanou mnohoúhelníku, stačí si u některých úloh uvědomit, že strany mnohoúhelníku leží na tečnách z vrcholů k vepsané kružnici (z toho důvodu takový mnohoúhelník nazýváme *tečnový*), a proto můžeme využít shodnosti délek úseků tečen. Například na obr. 6 v trojúhelníku ABC platí $|AG_b| = |AG_c|$, $|BG_a| = |BG_c|$ a $|CG_a| = |CG_b|$, v tečnovém čtyřúhelníku $DEFG$ je situace obdobná.



Obr. 6 – tečnové mnohoúhelníky

Úloha 2.2.1. *Kružnice vepsaná libovolnému trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran v bodech, které rozdělují jeho strany na šest úseček. Vyjádřete jejich délky pomocí délek celých stran.*

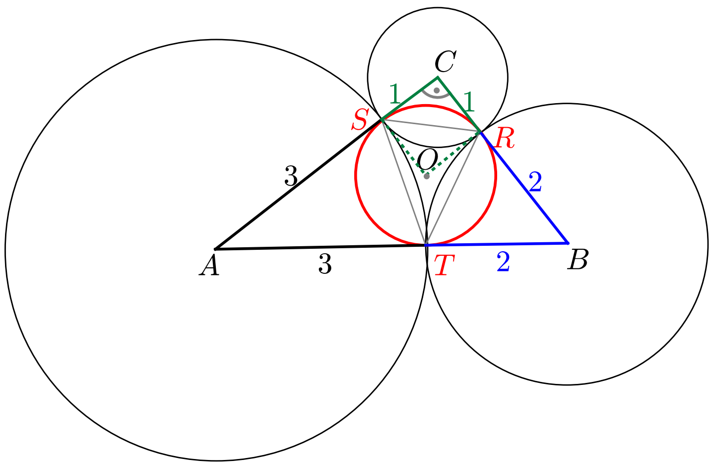
Řešení:
Využijeme označení z obr. 6, podle kterého

$$x = |AG_c| = |AG_b|, \quad y = c - x = |BG_c| = |BG_a|, \quad z = b - x = |CG_b| = |CG_a|,$$

celkem $a = |BG_a| + |CG_a| = c - x + b - x$, odkud již vyjádříme $x = \frac{1}{2}(-a + b + c)$. Dosazením do vztahů $y = c - x$, $z = b - x$ při označení $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ dostaneme

$$|AG_b| = |AG_c| = \tfrac{1}{2}(-a+b+c) = s-a, \quad |BG_c| = |BG_a| = \tfrac{1}{2}(a-b+c) = s-b,$$
$$|CG_a| = |CG_b| = \tfrac{1}{2}(a+b-c) = s-c. \qquad \square$$

Úloha 2.2.2. *Tři kružnice o poloměrech 1, 2, 3 mají po dvou vnější dotyk. Určete poloměr kružnice, která prochází všemi třemi body dotyku.*[15]



Obr. k úloze 2.2.2

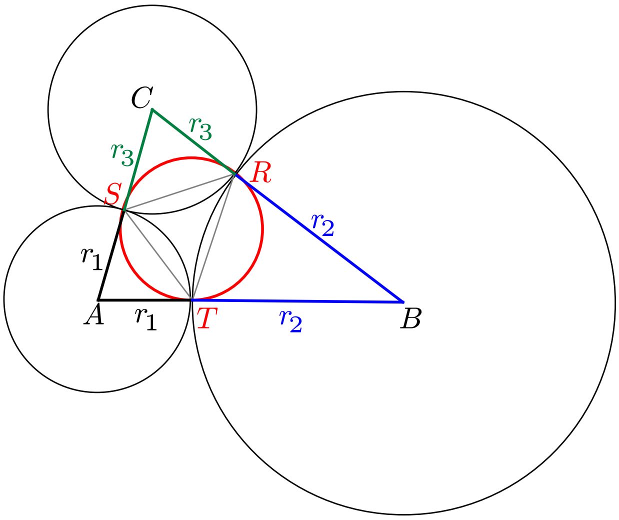
Řešení:
Označíme-li A, B, C středy kružnic, a R, S, T body jejich dotyku (viz obr.), zjistíme, že trojúhelník ABC má strany délek 3, 4, 5, a je tedy pravoúhlý. Strany trojúhelníku ABC jsou rozděleny body R, S, T tak, jako je dělí body dotyku vepsané kružnice (srov. obr. 6, takové rozdělení je právě jedno, jak je dokázáno v úloze 2.2.1). Kružnice opsaná trojúhelníku RST je proto zároveň kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC. Označme O její střed. Zbývá uvážit, že čtyřúhelník $ORCS$ je čtverec, a proto je hledaný poloměr roven jedné. □

Předchozí úlohu nyní zobecníme pro kružnice libovolných poloměrů.

Úloha 2.2.3. *Tři kružnice se navzájem dotýkají vně. Pomocí jejich poloměrů r_1, r_2, r_3 vyjádřete poloměr kružnice, která prochází všemi třemi body dotyku.*[16]

Řešení:
Při řešení postupujeme stejně jako ve speciálním případě v předchozí úloze. Označíme

[15] [Pra–06, str. 296/12.86]
[16] Návrh autorky práce



Obr. k úloze 2.2.3

A, B, C středy kružnic, a R, S, T body jejich dotyku (viz obr.) a uvážíme, že kružnice opsaná trojúhelníku RST je nutně kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC.

Při výpočtu poloměru ρ kružnice vepsané vyjdeme ze vztahu $S = \rho s$ pro obsah S trojúhelníku RST, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3 + r_1 + r_3 + r_1 + r_2) = r_1 + r_2 + r_3$. Pro vyjádření obsahu S trojúhelníku dále užijeme Heronův vzorec $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}$. Porovnáním, vyjádřením ρ a úpravou získáme vzorec pro hledaný poloměr ve tvaru

$$\rho = \frac{\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}}{r_1+r_2+r_3} = \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}. \qquad \square$$

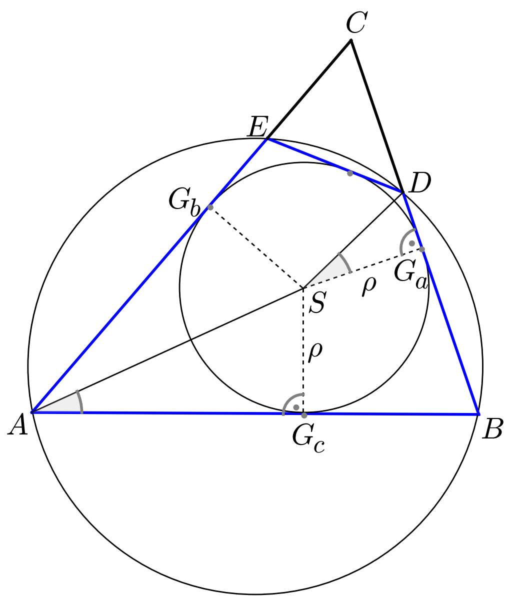
V poslední úloze bylo využito porovnání obsahu téhož útvaru vyjádřeného dvěma způsoby. Další příklady využívající tuto užitečnou metodu jsou sdruženy v samostatné části na str. 78. V průběhu řešení úlohy jsme odvodili následující tvrzení:

Pro poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC platí

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Úloha 2.2.4. *Je dán trojúhelník ABC. Na straně BC je sestrojen bod D a na straně AC bod E tak, že čtyřúhelníku $ABDE$ je možno opsat i vepsat kružnici (je tedy dvojstředový). Vyjádřete vzdálenosti $|CD|$, $|CE|$ i obvod čtyřúhelníku $ABDE$ pomocí délek a, b, c stran trojúhelníku ABC.* [17]

[17] [Boč–84, str. 28/81]



Obr. k úloze 2.2.4

Řešení:
Kružnice vepsaná čtyřúhelníku $ABDE$ je i kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC. Označme S její střed a G_a, G_b, G_c body jejího dotyku se stranami BC, AC, AB. Čtyřúhelník $ABDE$ je tětivový, takže $|\sphericalangle EDB| = 180° - |\sphericalangle BAE| = 180° - \alpha$. Protože bod S leží na osách úhlů BAC a EDB, je $|\sphericalangle G_cAS| = \frac{\alpha}{2}$ a v pravoúhlém trojúhelníku DSG_a je

$$|\sphericalangle G_aSD| = 90° - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle EDB| = 90° - \left(90° - \tfrac{\alpha}{2}\right) = \tfrac{\alpha}{2}.$$

Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky SAG_c, DSG_a podobné a při označení $\rho = |SG_a| = |SG_b| = |SG_c|$ platí $\rho : |AG_c| = |DG_a| : \rho$, neboli $|DG_a| = \dfrac{\rho^2}{|AG_c|}$. Z výsledku úlohy 2.2.1 víme, že $|AG_c| = s - a$, $|CG_a| = s - c$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, a za ρ^2 dosadíme $\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ podle vzorce před zadáním úlohy. Celkem

$$|CD| = |CG_a| - |DG_a| = (s-c) - \frac{(s-b)(s-c)}{s} = \frac{b(s-c)}{s},$$
$$|CE| = |CG_b| - |EG_b| = (s-c) - \frac{(s-a)(s-c)}{s} = \frac{a(s-c)}{s}.$$

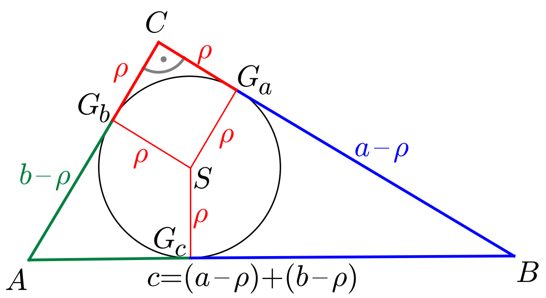
Obvod čtyřúhelníku $ABDE$ je proto

$$o = |AB| + |BG_a| + |AG_b| + 2|DG_a| + 2|EG_b| =$$
$$= 2c + 2\frac{(s-b)(s-c)}{s} + 2\frac{(s-a)(s-c)}{s} = 2c + \frac{2c(s-c)}{s} = \frac{2c(2s-c)}{s}. \qquad \square$$

Úloha 2.2.5. *Dokažte následující tvrzení.*[18]

Poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je dán vzorcem

$$\rho = \tfrac{1}{2}(a + b - c).$$



Obr. k úloze 2.2.5

Řešení:
Podle obr. označme G_a, G_b, G_c body dotyku kružnice vepsané. Stačí si uvědomit, že SG_aCG_b je čtverec, a proto $|CG_b| = |CG_a| = \rho$. Zbytek vyřešíme postupem identickým s řešením úlohy 2.2.1 (nebo pouze aplikujeme její výsledek) a obdržíme dokazovaný vzorec $\rho = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Jiný postup: Pro obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC platí $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)\rho$. Odtud $\rho = \frac{ab}{a+b+c}$. Rozšířením zlomku výrazem $a + b - c$ a aplikací Pythagorovy věty obdržíme výsledek, neboť $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)^2 - c^2 = 2ab$. □

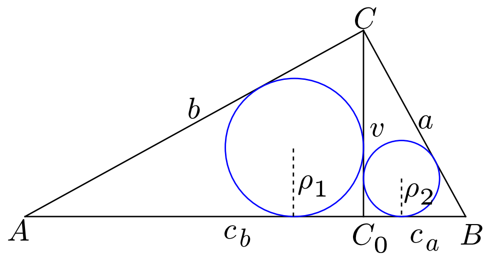
Úloha 2.2.6. *Pravoúhlý trojúhelník ABC je rozdělen výškou CC_0 na dva trojúhelníky AC_0C a CC_0B (viz obrázek). Dokažte, že součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, AC_0C a CC_0B se rovná výšce trojúhelníku ABC.*[19]

Řešení:
Označme ρ, ρ_1, ρ_2 poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AC_0C, CC_0B. Označme dále $c_a = |BC_0|$, $c_b = |AC_0|$, $v = |CC_0|$. Podle úlohy 2.2.5 v (pravoúhlých) trojúhelnících ABC, AC_0C a CC_0B platí

$$\rho = \tfrac{1}{2}(a + b - c), \quad \rho_1 = \tfrac{1}{2}(c_b + v - b), \quad \rho_2 = \tfrac{1}{2}(c_a + v - a).$$

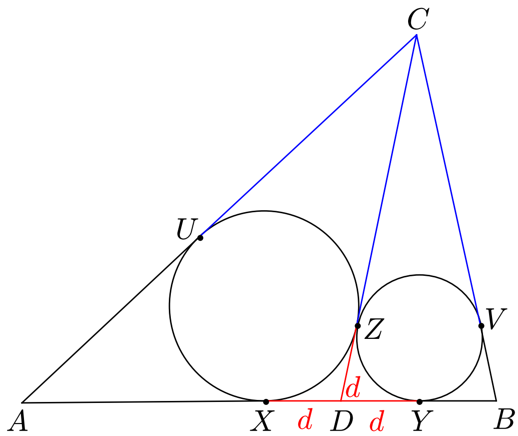
Celkem $\rho_1 + \rho_2 + \rho = \frac{1}{2}(c_b + v - b + c_a + v - a + a + b - c) = v$, neboť $c = c_a + c_b$. □

[18] [Šar–86, str. 8/16], [Pra–86a, str. 60/5a]
[19] [Eng–98, str. 322/63]



Obr. k úloze 2.2.6

Úloha 2.2.7. *Vnitřní bod D strany AB trojúhelníku ABC má tu vlastnost, že kružnice vepsané trojúhelníkům ACD a DCB mají společný bod. Dokažte, že bod D leží na kružnici vepsané trojúhelníku ABC.*[20]



Obr. k úloze 2.2.7

Řešení:
Situace je znázorněna na obrázku, společný bod Z kružnic vepsaných trojúhelníkům ADC a DCB musí být bodem jejich dotyku se stranou DC. Využijeme shodných délek úseků tečen

$$
\begin{aligned}
&|DX| = |DZ| = |DY| = d, && |AU| = |AX| = |AD| - d,\\
&|CV| = |CZ| = |CU| = b - |AD| + d, && |BY| = |BV| = a - b + |AD| - d.
\end{aligned}
$$

Víme, že $|AD| + |DY| + |BY| = c$, tedy

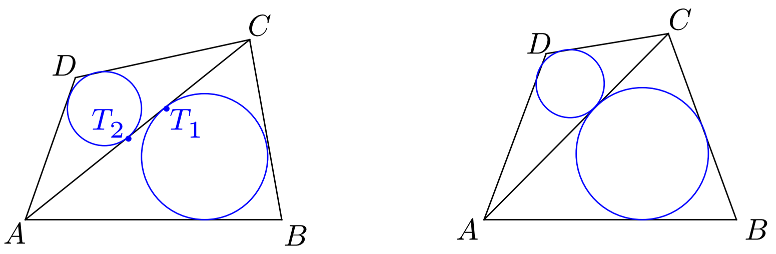
$$c = |AD| + d + a - b + |AD| - d, \quad \text{odkud} \quad |AD| = \tfrac{1}{2}(b + c - a).$$

[20] [Pra–86b, str. 86/17.44]

Bod D je podle výsledku úlohy 2.2.1 bodem dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou AB.

Poznámka:
Mohli bychom také využít řešení úlohy 2.2.1 k určení $|AX| = \frac{1}{2}(|AD| + |AC| - |DC|)$ a $|XD| = |YD| = \frac{1}{2}(|DB| + |DC| - |BC|)$, odkud již přímo plyne $|AD| = |AX| + |XD| = \frac{1}{2}(b + c - a)$. □

Úloha 2.2.8. *Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA se dotýkají.*[21]



Obr. k úloze 2.2.8

Řešení:
Podle obr. označme T_1, T_2 body dotyku strany AC s kružnicemi vepsanými trojúhelníkům ABC a ACD. Nejprve vyřešíme případ, kdy $|AT_2| \leq |AT_1|$. Pak $|T_1T_2| = |AC| - |AT_2| - |CT_1|$ a můžeme využít výsledek úlohy 2.2.1: $|AT_2| = \frac{1}{2}(|AC| + |AD| - |CD|)$, $|CT_1| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC| - |AB|)$. Celkem

$$|T_1T_2| = \frac{1}{2}(|AB| - |BC| + |CD| - |AD|).$$

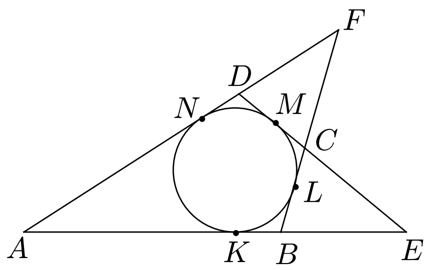
V případě $|AT_2| > |AT_1|$ postupujeme analogicky a dojdeme k výsledku s opačným znaménkem. U tečnového čtyřúhelníku je však $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, a proto v obou případech platí $|T_1T_2| = 0$. □

Shodné úseky tečen

V řešeních úloh tohoto odstavce jsou využity souměrnosti úseků tečen z bodu ke kružnici, v poslední úloze navíc souměrnost společných tečen dvou kružnic (viz str. 15). Úlohy jsou řešeny úplně, tj. bez odkazů na výsledky úloh předchozího odstavce.

Úloha 2.2.9. *V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ se polopřímky AB a DC protínají v bodě E, polopřímky AD a BC se protínají v bodě F. Dokažte, že platí* [22]

$$a)\ |BE| + |BF| = |DE| + |DF|, \quad b)\ |AE| - |AF| = |CE| - |CF|.$$



Obr. k úloze 2.2.9

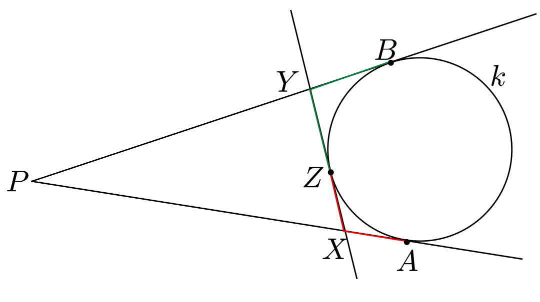
Řešení:
Podle obr. označme K, L, M, N po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD, AD. S ohledem na rovnosti $|BK| = |BL|$, $|EK| = |EM|$, $|LF| = |NF|$, $|ND| = |MD|$ platí

$$
\begin{aligned}
|BE| + |BF| &= |EK| - |BK| + |BL| + |LF| = |EK| + |LF| = |EM| + |NF| = \\
&= |EM| + |ND| + |DF| = |EM| + |MD| + |DF| = |DE| + |DF|.
\end{aligned}
$$

Analogicky

$$
\begin{aligned}
|AE| - |AF| &= |AK| + |EK| - |AN| - |NF| = |EK| - |NF| = \\
&= |EM| - |LF| = |CE| + |CM| - |CL| - |CF| = |CE| - |CF|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Úloha 2.2.10. *Tečny z bodu P vedené ke kružnici k mají body dotyku A, B. Třetí tečna protíná úsečky AP, BP v bodech X, Y. Dokažte, že obvod trojúhelníku PXY nezávisí na výběru třetí tečny.*



Obr. k úloze 2.2.10

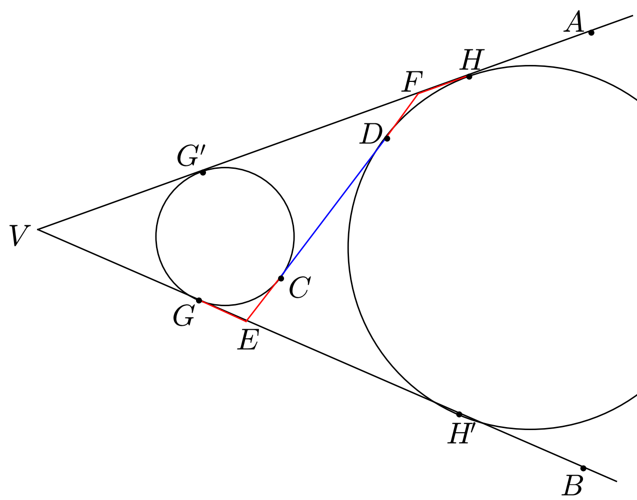
[21][Eng–98, str. 335/16]
[22][And–04, str. 68/3]

Řešení:
Označme Z bod dotyku třetí tečny s kružnicí k (viz obrázek). Při určování obvodu trojúhelníku PXY využijeme shodnosti délek úseků tečen:

$$\begin{aligned}|PX| + |XY| + |YP| &= |PX| + |XZ| + |ZY| + |YP| = \\ &= |PX| + |XA| + |BY| + |YP| = \\ &= |PA| + |PB| = 2|PA|\end{aligned}$$

Délka úsečky PA na výběru třetí tečny nezávisí, důkaz je tedy hotov. □

Úloha 2.2.11. *Do úhlu AVB jsou vepsány dvě kružnice bez společného bodu. Jejich společná vnitřní tečna s body dotyku C, D protíná ramena úhlu v bodech E, F. Dokažte, že $|EC| = |FD|$.*[23]



Obr. k úloze 2.2.11

Řešení:
Situace je znázorněna na obr. (G, G', H, H' jsou body dotyku). Na pořadí označení bodů C, D a E, F nezáleží, neboť dokážeme-li $|EC| = |FD|$, bude platit také $|FC| = |ED|$. Využijeme shodných délek úseků tečen $|EG| = |EC|$, $|FD| = |FH|$, $|ED| = |EH'|$, $|FC| = |FG'|$ a rovnosti $|GH'| = |G'H|$ plynoucí opět ze shodných délek úseků tečen z bodu V k oběma kružnicím:

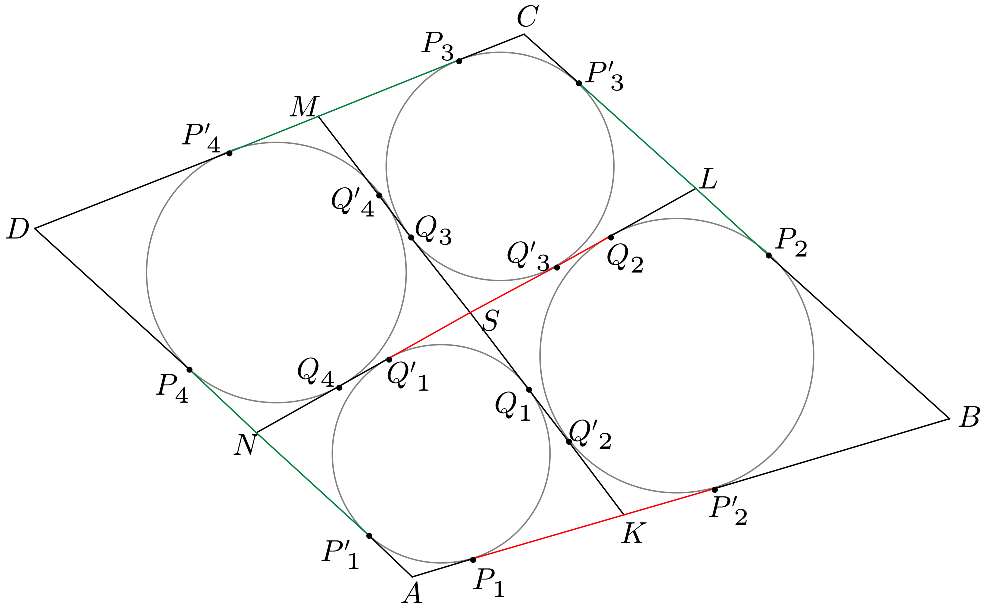
$$\begin{aligned}|GH'| &= |GE| + |EH'| = |EC| + |ED| = 2|EC| + |CD|,\\ |G'H| &= |G'F| + |FH| = |CF| + |FD| = |CD| + 2|FD|.\end{aligned}$$

Odtud $2|EC| + |CD| = |CD| + 2|FD|$ neboli $|EC| = |FD|$. □

[23] [Pra–86a, str. 61/3.2a], [Hon–91, str. 4/2]

Poznámka:
V případě, že by zadání poslední úlohy připouštělo vnější dotyk kružnic nebo dokonce shodné kružnice dotýkající se rovnoběžných přímek, platí tvrzení také a důkaz je snadný.

Úloha 2.2.12. *Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte.*[24]



Obr. k úloze 2.2.12

Řešení:
Předpokládejme, že zmíněným čtyřem čtyřúhelníkům lze vepsat kružnice a označme body dotyku těchto kružnic podle obrázku. Čtyřúhelníku $ABCD$ lze vepsat kružnici, právě když pro délky jeho stran platí $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Díky souměrnosti tečen $|AP_1| = |AP_1'|$, $|BP_2| = |BP_2'|$, $|CP_3| = |CP_3'|$, $|DP_4| = |DP_4'|$ můžeme uvedenou rovnost, kterou potřebujeme dokázat, přepsat nejprve do tvaru

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|$$

a následně – na základě souměrnosti společných vnějších tečen dvou kružnic $|P_1P_2'| = |Q_1'Q_2|$, $|P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|$, $|P_3P_4'| = |Q_3'Q_4|$, $|P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|$ – do tvaru

$$|Q_1'Q_2| + |Q_3'Q_4| = |Q_2'Q_3| + |Q_4'Q_1|,$$

[24] [MO, 51–B–II–3]

který snadno dokážeme pomocí souměrnosti tečen z bodu S k jednotlivým kružnicím:

$$\begin{aligned}|Q_1'Q_2| + |Q_3'Q_4| &= |Q_1'S| + |SQ_2| + |Q_3'S| + |SQ_4| = \\ &= |Q_1S| + |SQ_2'| + |Q_3S| + |SQ_4'| = |Q_2'Q_3| + |Q_4'Q_1|.\end{aligned}$$

□

Poznámka:
Za povšimnutí stojí, že za předpokladu úlohy platí také rovnost $|KM| = |NL|$, kterou je možné dokázat úpravou výše popsaného postupu.

Následující část shrnuje vlastnosti, které byly postupně objevovány v předchozích úlohách, při výkladu o kružnicích, kterým říkáme *připsané* stranám daného trojúhelníku.

Kružnice připsaná

Kružnice připsaná trojúhelníku se dotýká jedné jeho strany a přímek, v nichž leží zbývající dvě strany, v bodech, které na těchto stranách neleží. Pro každý trojúhelník existují tři kružnice připsané, každá jedné jeho straně, zobrazeny jsou na obrázku k úloze 2.2.14. Při řešení úloh s tématikou těchto kružnic je velmi často využívána shodnost délek úseků jejich tečen z vrcholů trojúhelníku.

Úloha 2.2.13. *Dokažte, že poloměr kružnice připsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, která se dotýká přepony AB a prodloužení odvěsen, je dán vzorcem*[25]

$$\rho_c = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

Řešení:
Vyjdeme z obrázku. Čtyřúhelník $A_cS_cB_cC$ je čtverec, proto $\rho_c = |CA_c| = |CB_c|$. Využijeme shodných délek úseků tečen $|AA_c| = |AN_c|$ a $|BB_c| = |BN_c|$:

$$a + b + c = a + b + |AN_c| + |BN_c| = a + |AA_c| + b + |BN_c| = |CA_c| + |CB_c| = 2\rho_c.$$

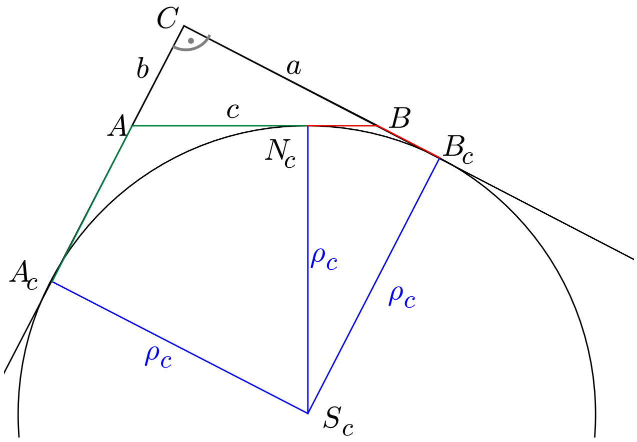
□

Úloha 2.2.14. *Kružnice připsané libovolnému trojúhelníku ABC se dotýkají jeho stran v bodech, které rozdělují jeho strany na šest úseček. Vyjádřete jejich délky pomocí délek celých stran.*

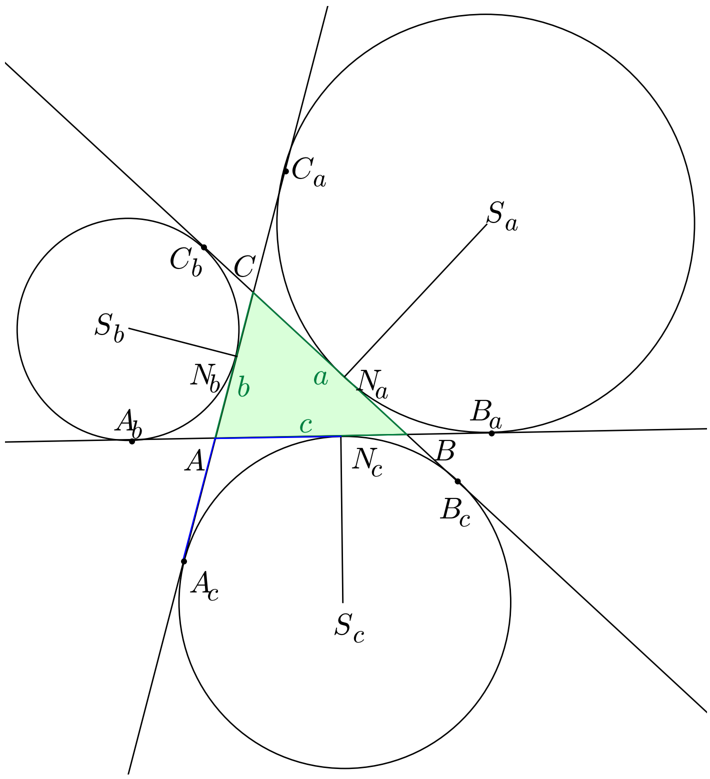
Řešení:
Body dotyku připsaných kružnic s prodlouženými stranami označme jako na obrázku a využijme nejprve shodnosti délek úseků tečen $|AA_c| = |AN_c|$, $|BB_c| = |BN_c|$. Dojdeme k tomu, že

$$|CA_c| + |CB_c| = b + |AA_c| + a + |BB_c| = b + |AN_c| + a + |BN_c| = a + b + c.$$

[25] [Pra–86a, str. 60/5b]



Obr. k úloze 2.2.13



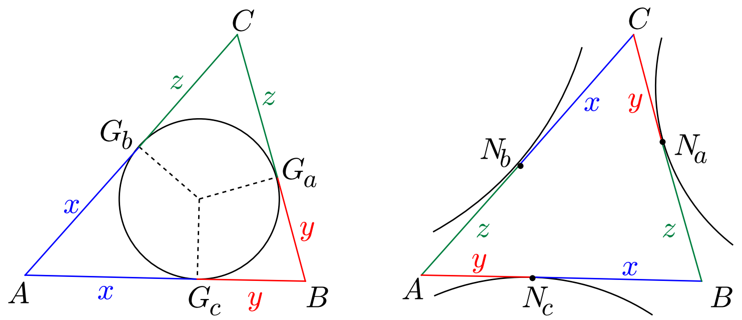
Obr. k úloze 2.2.14

Odtud s uvážením rovnosti $|CA_c| = |CB_c|$ plyne $|CA_c| = |CB_c| = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$. Analogicky zjistíme, že také $|AC_a| = |AC_a| = |BA_b| = |AC_b| = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$. Nyní již můžeme určit délku $|BN_c| = |BB_c| = |CB_c| - a = s - a$, podobný výsledek vyjde u ostatních úseků:

$$
\begin{aligned}
|BN_c| = |CN_b| = s - a = \tfrac{1}{2}(-a + b + c),\\
|AN_c| = |CN_a| = s - b = \tfrac{1}{2}(a - b + c),\\
|AN_b| = |BN_a| = s - c = \tfrac{1}{2}(a + b - c).
\end{aligned}
$$

□

Poznamenejme, že hledané délky úseků tečen v řešení obou úloh 2.2.1 a 2.2.14 mají stejné vyjádření, z čehož plyne zajímavý poznatek o poloze bodů dotyku vepsané a připsané kružnice. Na obr. 7 vlevo jsou v trojúhelníku ABC vyznačeny body G_a, G_b, G_c dotyku kružnice vepsané, na stejném obrázku vpravo pak v tomtéž trojúhelníku body N_a, N_b, N_c dotyku kružnic připsaných, shodné úseky jsou vyznačeny v obou obrázcích stejnou barvou. Je patrné, že body dotyku kružnice vepsané a připsané se zvolenou stranou trojúhelníku (např. body G_c a N_c na straně AB) jsou souměrně sdružené podle středu této strany.



Obr. 7 – body dotyku kružnice vepsané a kružnic připsaných

2.3 Obsah trojúhelníku

Protože *obsah* je vedle obvodu nejvýznamnější skalární veličina, již rovinným útvarům obecně přiřazujeme, tvoří výpočty obsahů jedno z hlavních témat početní planimetrie. Při určování obsahu složitějšího útvaru nejprve útvar rozdělíme na jednodušší, což jsou – kromě některých speciálních čtyřúhelníků a částí kruhů – především trojúhelníky. Jejich obsahům proto věnujeme celou tuto podkapitolu, tvořenou odstavci

- ▷ Určování obsahů
- ▷ Poměry obsahů
- ▷ Podobnost
- ▷ Nerovnosti

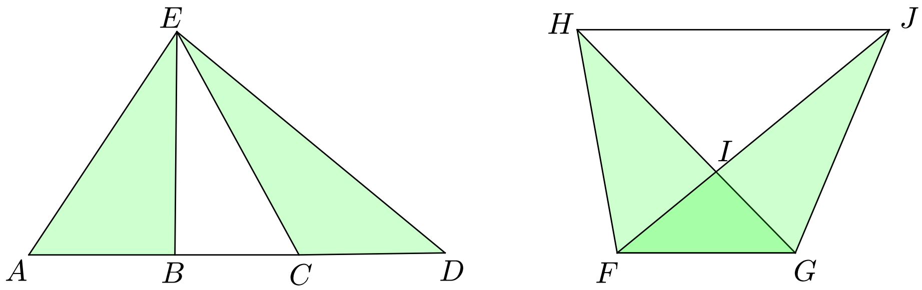
▷ Metoda porovnání obsahů
Pro zjednodušení zápisů budeme používat symbol S_{ABC} pro obsah trojúhelníku ABC, analogicky pro čtyřúhelník a další útvary.

Určování obsahů

V úlohách, jejichž cílem je vyjádřit obsah zadaného útvaru pomocí obsahu jiného útvaru, často porovnáváme obsahy různých trojúhelníků, abychom tak našli souvislost mezi zadaným a hledaným obsahem. Přímo ze základního vzorce pro obsah trojúhelníku ($S = \frac{1}{2}av_a$) plyne:

Mají-li dva trojúhelníky shodnou jednu stranu a výšku na tuto stranu, mají stejný obsah.

Například na obrázku 8 vlevo předpokládáme, že úsečky AB a CD jsou shodné a leží na jedné přímce. Protože výška z vrcholu E je společná, mají trojúhelníky ABE, CDE stejný obsah.



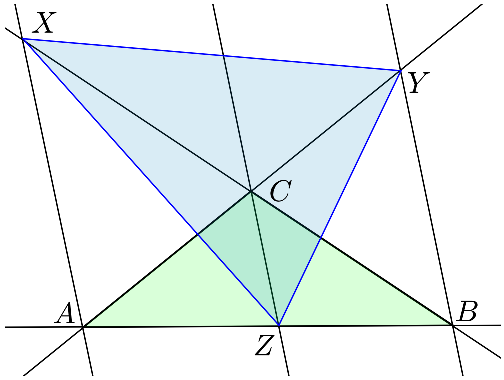
Obr. 8 – trojúhelníky se stejnými obsahy

Také trojúhelníky FGH a FGJ na obrázku vpravo mají stejný obsah, pokud jsou úsečky FG a HJ rovnoběžné.

Víme-li již, že dva překrývající se útvary mají stejný obsah, pak i jejich nepřekrývající se části musí mít stejný obsah. Například typicky pro lichoběžník rozdělený úhlopříčkami jako na obr. 8 je $S_{FIH} = S_{GIJ}$, neboť platí $S_{FIH} = S_{FGH} - S_{FGI} = S_{FGJ} - S_{FGI} = S_{GIJ}$. Naopak z rovnosti $S_{FIH} = S_{GIJ}$ plyne rovnoběžnost úseček FG a HJ.

Úloha 2.3.1. *Vrcholy trojúhelníku ABC procházejí tři rovnoběžky. Přímka procházející vrcholem A protíná přímku BC v bodě X, přímka procházející bodem B protíná přímku AC v bodě Y a přímka procházející bodem C protíná přímku AB v bodě Z. Vyjádřete obsah trojúhelníku XYZ pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[26]

[26] [Bra–05, str. 67/7]



Obr. k úloze 2.3.1

Řešení:
Předpokládejme nejprve, že bod Z je vnitřním bodem strany AB a body X, Y leží vně trojúhelníku (viz obrázek). Opakovaně nalezneme trojúhelníky se stejným obsahem:

$$\begin{aligned} &S_{BYX} = S_{BYA}, \quad \text{proto} \quad S_{CYX} = S, \\ &S_{ZCX} = S_{ZCA}, \quad S_{ZCY} = S_{ZCB}. \end{aligned}$$

Celkem $S_{XYZ} = S_{CYX} + S_{ZCX} + S_{ZCY} = S + S_{ZCA} + S_{ZCB} = 2S$. Tento závěr platí, ať jsou body X, Y, Z umístěny na příslušných přímkách jakkoliv, neboť uvedený postup vždy vede ke stejnému výsledku. □

Úloha 2.3.2. *Pomocí obsahu S trojúhelníku ABC vyjádřete obsah trojúhelníku $A'B'C'$, jsou-li body A, B, C po řadě středy úseček CC', AA', BB'.*[27]

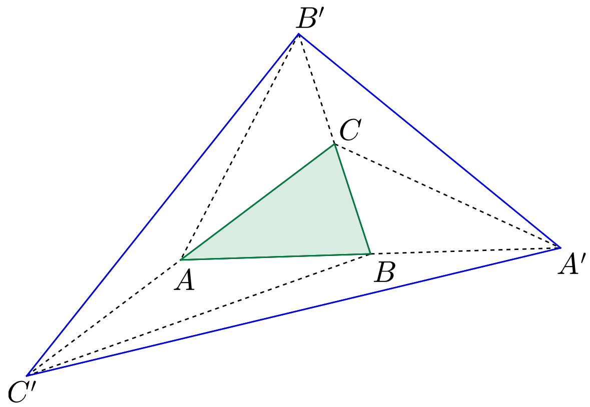
Řešení:
Spojíme-li vhodnými úsečkami vrcholy obou trojúhelníků (viz obrázek), zjistíme, že trojúhelník $A'B'C'$ je rozdělen na sedm částí se stejným obsahem. Platí totiž

$$\begin{aligned} &S_{A'BC} = S, \quad S_{A'BC'} = S_{ABC'} \quad \text{(neboť } |AB| = |BA'| \text{ a výšky z } C \text{ a } C' \text{ jsou stejné)}, \\ &S_{AB'C} = S, \quad S_{A'B'C} = S_{A'BC} \quad \text{(analogicky)}, \\ &S_{ABC'} = S, \quad S_{AB'C'} = S_{ABC'} \quad \text{(analogicky)}. \end{aligned}$$

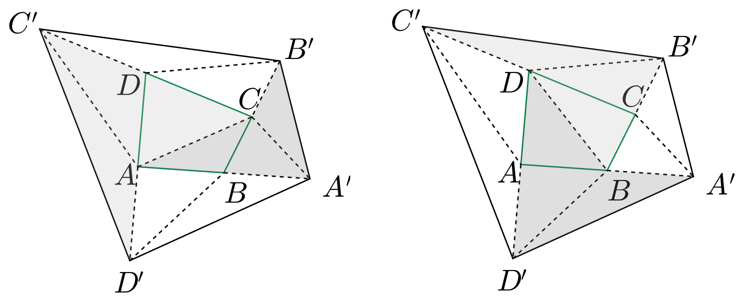
Celkem tedy $S_{A'B'C'} = 7S$. □

Úloha 2.3.3. *Pomocí obsahu S daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ vyjádřete obsah čtyřúhelníku $A'B'C'D'$, jsou-li body A, B, C, D po řadě středy úseček DD', AA', BB', CC'.*[28]

[27] [Eng–98, str. 320/38]
[28] [Pra–86a, str. 76/4.5]



Obr. k úloze 2.3.2



Obr. k úloze 2.3.3

Řešení:
Spojíme vrcholy obou čtyřúhelníků úsečkami jako na obrázku a najdeme trojúhelníky se stejným obsahem. Zjistíme, že

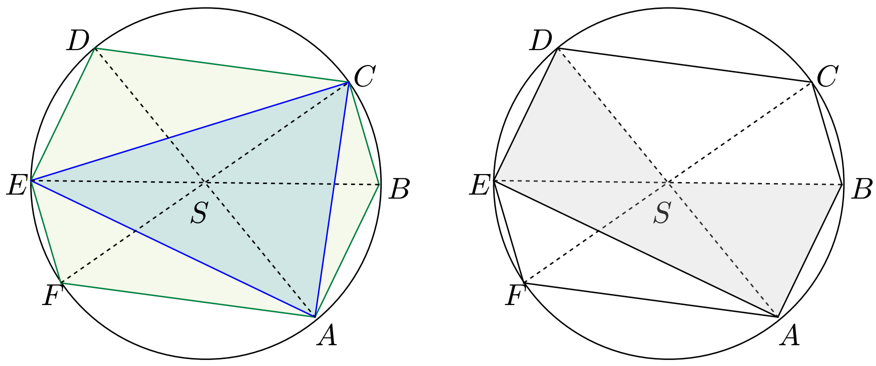
$$S_{AD'C'} = S_{ADC'} = S_{ADC}, \qquad S_{CB'A'} = S_{CBA'} = S_{CBA},$$
$$S_{BA'D'} = S_{BAD'} = S_{BAD}, \qquad S_{DC'B'} = S_{DCB'} = S_{DCB}.$$

Obsah čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ je proto roven

$$S + S_{AD'C'} + S_{ADC'} + S_{CB'A'} + S_{CBA'} + S_{BA'D'} + S_{BAD'} + S_{DC'B'} + S_{DCB'} =$$
$$= S + 2S_{ADC} + 2S_{CBA} + 2S_{BAD} + 2S_{DCB} = 5S. \qquad \square$$

Úloha 2.3.4. *Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice tak, že úhlopříčky AD, BE, CF jsou jejími průměry. Dokažte, že obsah S šestiúhelníku je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku ACE.*[29]

[29] [Pra–86a, str. 76/4.6]



Obr. k úloze 2.3.4

Řešení:
Označme S střed opsané kružnice. Z obrázku vidíme, že

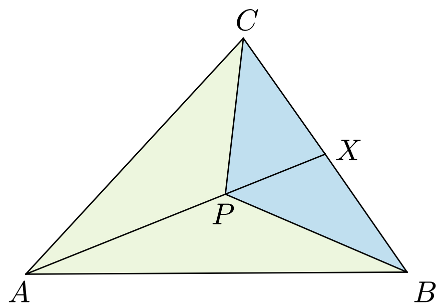
$$S_{ABS} = S_{AES} = S_{DES}, \quad S_{BCS} = S_{CES} = S_{EFS}, \quad S_{CDS} = S_{ACS} = S_{AFS}.$$

Výsledek dostaneme sečtením obsahů jednotlivých trojúhelníků:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABS} + S_{DES} + S_{BCS} + S_{EFS} + S_{CDS} + S_{AFS} = \\ &= 2S_{AES} + 2S_{CES} + 2S_{ACS} = 2S_{ACE}. \end{aligned}$$

□

Úloha 2.3.5. *Vnitřní bod P trojúhelníku ABC má tu vlastnost, že trojúhelníky ABP, BCP a ACP mají stejné obsahy. Dokažte, že P je těžiště trojúhelníku ABC.*[30]



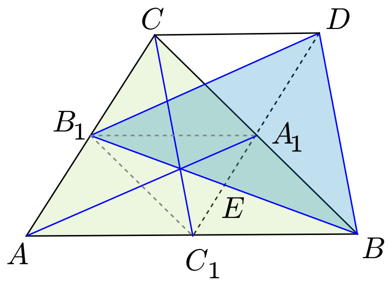
Obr. k úloze 2.3.5

Řešení:
Označme X průsečík přímky AP se stranou BC. Obsahy trojúhelníků APC a APB

[30] [Pra–86a, str. 76/4.2]

jsou shodné, mají tedy shodné výšky na stranu AP. Stejnou velikost však mají i výšky na stranu PX v trojúhelnících PXC a PXB, proto mají trojúhelníky PXC a PXB stejné obsahy. Proto je bod X středem strany BC. Analogickou úvahu provedeme pro ostatní strany a zjistíme, že bod P je průsečíkem těžnic a tedy těžiště. □

Úloha 2.3.6. *Dokažte, že obsah trojúhelníku se stranami shodnými s těžnicemi daného trojúhelníku ABC je roven $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníku ABC.* [31]



Obr. k úloze 2.3.6

Řešení:
Středy stran trojúhelníku ABC označme A_1, B_1, C_1 jako na obr. a sestrojme bod D tak, aby čtyřúhelník C_1BDC byl rovnoběžník. Dalšími rovnoběžníky na obrázku jsou

- AC_1DC, neboť $CD \parallel C_1B$ a $|AC_1| = |C_1B| = |CD|$,
- AA_1DB_1, neboť $C_1D \parallel AC$, $|C_1D| = |AC|$ a bod A_1 je jako průsečík úhlopříček rovnoběžníku C_1BDC středem strany C_1D,
- $C_1BA_1B_1$, neboť dvě jeho strany jsou středními příčkami trojúhelníku ABC,

Strany trojúhelníku BDB_1 jsou tedy shodné s těžnicemi trojúhelníku ABC. Označme E průsečík úhlopříček BB_1 a C_1A_1 rovnoběžníku $C_1BA_1B_1$. Bod E je středem BB_1 a $2|EA_1| = |A_1D|$, takže bod A_1 je těžištěm trojúhelníku BDB_1. Nyní již stačí uvážit, že $S_{BDB_1} = 3S_{BA_1B_1}$ a $S_{ABC} = 2S_{BCB_1} = 4S_{BA_1B_1}$, a tvrzení je dokázáno. □

Poměry obsahů

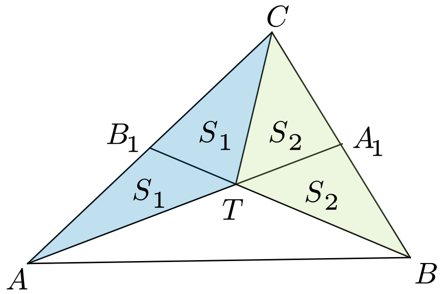
Zobecněním úvodního poznatku o *rovnosti* obsahů dvou trojúhelníků jsou dvě jednoduchá a přitom velmi užitečná tvrzení o *poměru* jejich obsahů, která plynou také přímo ze základního vzorce pro obsah trojúhelníku.

Mají-li dva trojúhelníky shodnou jednu stranu, pak jejich výšky na tuto stranu jsou ve stejném poměru jako obsahy obou trojúhelníků.

[31] [And–03, str. 87/2]

Mají-li dva trojúhelníky shodnou jednu výšku, pak jejich strany, na které tato výška směřuje, jsou ve stejném poměru jako obsahy obou trojúhelníků.

Úloha 2.3.7. *Pouze pomocí úvah o obsazích trojúhelníků dokažte, že těžnice libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem a rozdělují trojúhelník na šest částí o stejném obsahu.*[32]



Obr. k úloze 2.3.7

Řešení:
Označme T průsečík těžnic AA_1 a BB_1, dále označme S_1 shodné obsahy trojúhelníků ATB_1 a CTB_1 a S_2 shodné obsahy trojúhelníků BTA_1 a CTA_1 (viz obrázek). Obsah trojúhelníku AA_1C je roven obsahu trojúhelníku BB_1C, neboť jsou oba rovny polovině obsahu trojúhelníku ABC. Platí tedy

$$2S_1 + S_2 = 2S_2 + S_1.$$

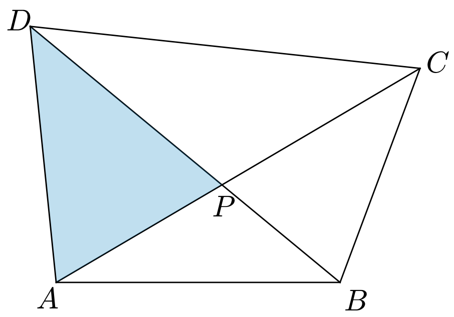
Odtud plyne $S_1 = S_2$ (trojúhelníky AA_1C a BB_1C se překrývají, můžeme tedy alternativně přímo z obrázku určit, že obsahy trojúhelníků ATB_1 a BTA_1 jsou shodné). Úsečka CT proto dělí obsah trojúhelníku AA_1C v poměru $2:1$, takže i $|AT| : |A_1T| = 2:1$. Pokud bychom na počátku zvolili místo BB_1 těžnici CC_1, došli bychom k témuž poměru. Bod T je tedy průsečíkem všech tří těžnic a dělí je vždy v poměru $2:1$. □

Úloha 2.3.8. *Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Pomocí obsahů trojúhelníků ABP, BCP, CDP vyjádřete obsah trojúhelníku ADP.*[33]

Řešení:
Trojúhelníky ABP a BCP mají společnou výšku z vrcholu B, stejně tak trojúhelníky CDP a ADP mají společnou výšku z vrcholu D, proto

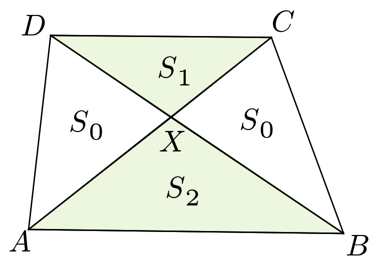
$$\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{|AP|}{|CP|} = \frac{S_{ADP}}{S_{CDP}}, \quad \text{odtud} \quad S_{ADP} = \frac{S_{ABP} \cdot S_{CDP}}{S_{BCP}}.$$ □

[32] [Kuř–90, str. 69]
[33] [Pra–86a, str. 79/4.26]



Obr. k úloze 2.3.8

Úloha 2.3.9. *Obsahy trojúhelníků tvořených průsečíkem úhlopříček a základnami lichoběžníku jsou S_1 a S_2. Určete obsah S celého lichoběžníku.*[34]



Obr. k úloze 2.3.9

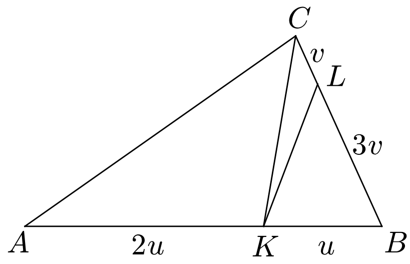
Řešení:
Zvolme označení $S_1 = S_{CDX}$, $S_2 = S_{ABX}$, $S_0 = S_{ADX} = S_{BCX}$ jako na obrázku. (Obsahy trojúhelníku ADX a BCX jsou stejné, neboť se jedná o nepřekrývající se části trojúhelníků ABC a ABD se shodným obsahem.) Stejně jako v úloze 2.3.8 pro poměry zkoumaných obsahů platí

$$\frac{S_2}{S_0} = \frac{|AX|}{|CX|} = \frac{S_0}{S_1}, \quad \text{takže} \quad S_0 = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Nyní již můžeme určit výsledek:

$$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \qquad \square$$

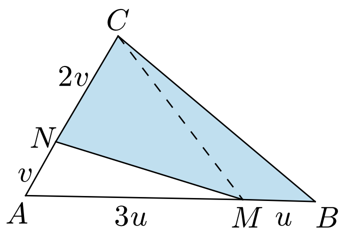
Úloha 2.3.10. *Je dán trojúhelník ABC a body K, L po řadě uvnitř stran AB a BC tak, že platí $|AK| : |KB| = 2 : 1$, $|BL| : |LC| = 3 : 1$. Vyjádřete obsahy všech tří částí, na něž je trojúhelník ABC rozdělen úsečkami KC a KL pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[35]



Obr. k úloze 2.3.10

Řešení:
Trojúhelníky AKC a ABC mají shodnou výšku z vrcholu C, proto jsou jejich obsahy v poměru $|AK| : |AB|$, tedy $S_{AKC} = \frac{2}{3}S$. Nyní se zaměříme na trojúhelník KBL, jehož obsah je z téhož důvodu roven $S_{KBL} = \frac{3}{4}S_{KBC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{4}S$. Konečně $S_{KLC} = \frac{1}{4}S_{KBC} = \frac{1}{12}S$. □

Úloha 2.3.11. *Na straně AB trojúhelníku ABC leží bod M, na straně AC bod N, přičemž $|AM| = 3|MB|$ a $2|AN| = |NC|$. Vyjádřete obsah čtyřúhelníku $MBCN$ pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[36]



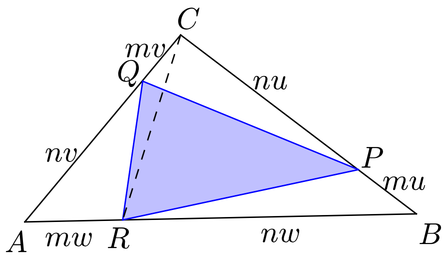
Obr. k úloze 2.3.11

Řešení:
Nejprve určíme obsah trojúhelníku AMN (viz obrázek). Trojúhelníky AMN a AMC mají shodnou výšku z vrcholu M, proto $S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{AMC}$. Stejnou úvahou určíme $S_{AMC} = \frac{3}{4}S$, takže celkem $S_{AMN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}S = \frac{1}{4}S$. Hledaný obsah čtyřúhelníku $MBCN$ je

$$S_{MBCN} = S_{ABC} - S_{AMN} = \frac{3}{4}S.$$ □

[34] [Šar–86, str. 10/45]
[35] [Lei–xx, str. 31/8], upraveno.
[36] [Šar–86, str. 15/104]

Úloha 2.3.12. *Body P, Q, R leží po řadě na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC, tak, že $|BP| : |PC| = |CQ| : |QA| = |AR| : |RB| = m : n$, kde m, n jsou daná přirozená čísla. Vyjádřete obsah trojúhelníku PQR pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[37]



Obr. k úloze 2.3.12

Řešení:
Postupujme podobně jako v předchozí úloze:

$$S_{RBP} = \frac{m}{m+n} S_{RBC} = \frac{m}{m+n} . \frac{n}{m+n} S = \frac{mn}{(m+n)^2} S.$$

Výpočet obsahů trojúhelníků PCQ a QAR dává stejný výsledek. Celkem

$$S_{PQR} = S - 3\frac{mn}{(m+n)^2} S = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} S. \qquad \square$$

Úloha 2.3.13. *Body D, E, F leží po řadě na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC, tak, že $|BD| : |DC| = |CE| : |EA| = |AF| : |FB| = 1 : 2$. Vyjádřete obsah trojúhelníku ohraničeného přímkami AD, BE, CF pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[38]

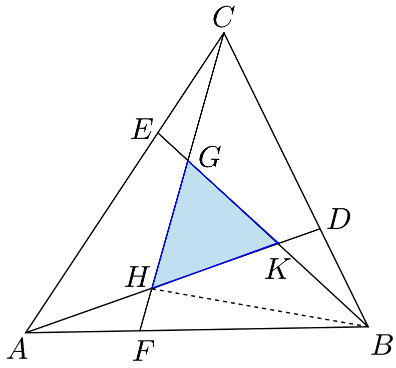
Řešení:
Označme G, H, K vrcholy popsaného trojúhelníku jako na obrázku. Využijeme-li tři dvojice trojúhelníků se shodnou výškou a poměrem příslušných stran $1 : 2$, získáme vztahy $S_{ADC} = 2S_{ABD}$, $S_{HDC} = 2S_{HBD}$ a konečně $S_{BHF} = 2S_{AFH}$, které uplatníme při výpočtu:

$$\begin{aligned} S_{CAH} &= S_{ADC} - S_{HDC} = 2(S_{ABD} - S_{HBD}) = 2S_{ABH} = 2(S_{AFH} + S_{BHF}) = \\ &= 2(S_{AFH} + 2S_{AFH}) = 6S_{AFH}. \end{aligned}$$

Dále (opět pomocí poměrů stran) zjistíme, že $S_{CAF} = \frac{1}{3}S$, avšak také $S_{CAF} = S_{CAH} + S_{AHF} = S_{CAH} + \frac{1}{6}S_{CAH} = \frac{7}{6}S_{CAH}$. Odtud $S_{CAH} = \frac{2}{7}S$. Analogickým postupem dostaneme $S_{ABK} = S_{BCG} = \frac{2}{7}S$. Zbývá dopočítat hledaný obsah

$$S_{GHK} = S - S_{CAH} - S_{ABK} - S_{BCG} = S - 3 \cdot \tfrac{2}{7}S = \tfrac{1}{7}S.$$

[37] [Bra–05, str. 67/12]
[38] Tato úloha je spojována se jménem známého fyzika R. Feynmana, který ji vyřešil.



Obr. k úloze 2.3.13

Za pozornost stojí srovnání s úlohou 2.3.2. Bližším rozborem zjistíme, že tam počítáme stejný poměr obsahů, neboť lze ukázat, že například průsečík přímky BB' a strany $A'C'$ dělí tuto stranu v poměru $1 : 2$. □

Úloha 2.3.14. *Body D, E, F leží po řadě na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC, tak, že $|BD| : |DC| = r$, $|CE| : |EA| = s$, $|AF| : |FB| = t$. Vyjádřete obsah trojúhelníku ohraničeného přímkami AD, BE, CF pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.*[39]

Řešení:
Budeme postupovat stejně jako v předchozí úloze a také využijeme příslušný obrázek. Nejprve uplatníme vztahy $S_{ADC} = \frac{1}{r} S_{ABD}$, $S_{HDC} = \frac{1}{r} S_{HBD}$ a $S_{BHF} = \frac{1}{t} S_{AFH}$:

$$S_{CAH} = S_{ADC} - S_{HDC} = \frac{S_{ABD} - S_{HBD}}{r} = \frac{S_{ABH}}{r} = \frac{S_{AFH} + S_{BHF}}{r} = \\ = \frac{S_{AFH} + \frac{1}{t} S_{AFH}}{r} = \frac{t+1}{tr} S_{AFH}.$$

Dále $S_{CAF} = \frac{t}{1+t} S$, a také $S_{CAF} = S_{CAH} + S_{AHF} = S_{CAH} + \frac{tr}{t+1} S_{CAH} = \frac{tr+t+1}{t+1} S_{CAH}$. Odtud

$$S_{CAH} = \frac{t}{tr+t+1} S, \quad \text{analogicky} \quad S_{ABK} = \frac{r}{rs+r+1} S \quad \text{a} \quad S_{BCG} = \frac{s}{st+s+1} S.$$

Zbývá dopočítat hledaný obsah

$$S_{GHK} = S - S_{CAH} - S_{ABK} - S_{BCG} = \\ = \left(1 - \frac{t}{tr+t+1} - \frac{r}{rs+r+1} - \frac{s}{st+s+1}\right) S = \\ = \frac{(rst-1)^2}{(tr+t+1)(rs+r+1)(st+s+1)} S.$$ □

[39] Toto zobecnění předchozí úlohy se někdy nazývá *Routhova věta (Routh's theorem)*, [Ros–92]

Podobnost

Vyskytují-li se v úloze o obsazích podobné trojúhelníky, můžeme využít následující tvrzení.

Je-li trojúhelník DEF podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti k, pak

$$S_{DEF} = k^2 S_{ABC}.$$

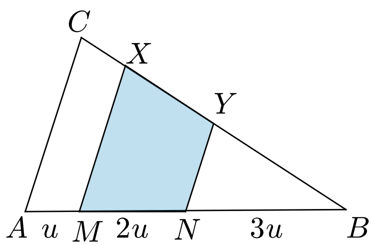
DŮKAZ:
Platí $|DE| = k|AB|$ a také velikost výšky v_f na stranu DE je k-násobkem výšky v_c na stranu AB, proto $S_{DEF} = \frac{1}{2}|DE|v_f = k^2\frac{1}{2}|AB|v_c = k^2 S_{ABC}$. □

Dokázané tvrzení platí nejen pro trojúhelníky, ale pro libovolné dva podobné rovinné útvary.

Úloha 2.3.15. *Na straně AB trojúhelníku ABC leží body M, N tak, že*

$$|AM| : |MN| : |NB| = 1 : 2 : 3.$$

Body M, N vedeme rovnoběžky se stranou AC. Pomocí obsahu S trojúhelníku ABC vyjádřete obsah jeho části omezené těmito rovnoběžkami .[40]



Obr. k úloze 2.3.15

ŘEŠENÍ:
Označme X, Y průsečíky strany BC s rovnoběžkami procházejícími body M, N (viz obrázek). Trojúhelníky ABC, MBX, NBY jsou podobné (uu) v poměru

$$|AB| : |MB| : |NB| = 6 : 5 : 3.$$

Proto

$$S_{MNYX} = S_{MBX} - S_{NBY} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 S - \left(\frac{3}{6}\right)^2 S = \frac{16}{36}S = \frac{4}{9}S. \qquad \square$$

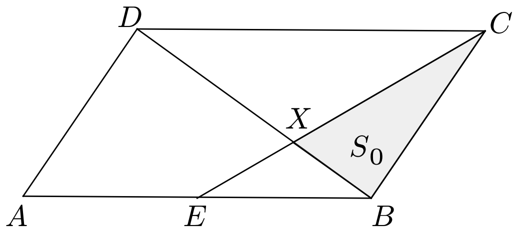
[40][Šar–86, str. 11/55]

Úloha 2.3.16. *Určete obsahy čtyř trojúhelníků, na které dělí lichoběžník o obsahu S jeho úhlopříčky, je-li dán poměr k délek jeho základen.*

Řešení:
Využijeme označení z obrázku k úloze 2.3.9. Trojúhelníky ABX a CDX jsou podobné (uu) s koeficientem podobnosti $\frac{|AB|}{|CD|} = k$. Proto pro jejich obsahy platí $S_2 = k^2 S_1$. Podle úlohy 2.3.9 také víme, že pro stejný obsah S_0 obou trojúhelníků ADX a BCX platí $S_0 = \sqrt{S_1 S_2} = kS_1$. Celkem $S = S_1 + S_2 + 2S_0 = S_1 + k^2 S_1 + 2kS_1 = (1+k)^2 S_1$, a proto

$$S_1 = \frac{1}{(1+k)^2} S, \quad S_2 = \frac{k^2}{(1+k)^2} S, \quad S_0 = \frac{k}{(1+k)^2} S. \qquad \square$$

Úloha 2.3.17. *Je dán rovnoběžník $ABCD$ a střed E jeho strany AB. Úsečky CE a BD rozdělují daný čtyřúhelník na čtyři části. Vyjádřete jejich obsahy pomocí obsahu S rovnoběžníku $ABCD$.*[41]



Obr. k úloze 2.3.17

Řešení:
Zřejmě $S = 2S_{BCD} = 2S_{ABC} = 4S_{EBC}$. Obsah trojúhelníku BCX, kde X je průsečík úseček CE a BD, označme S_0 a vyjádřeme pomocí něj obsahy trojúhelníků CDX a EBX (viz obrázek):

$$\begin{aligned} S_{CDX} &= S_{BCD} - S_{BCX} = \tfrac{1}{2}S - S_0, \\ S_{EBX} &= S_{EBC} - S_{BCX} = \tfrac{1}{4}S - S_0. \end{aligned}$$

Trojúhelníky CDX a EBX jsou podobné s koeficientem podobnosti $\frac{|CD|}{|EB|} = 2$, proto je obsah trojúhelníku CDX roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku EBX:

$$\tfrac{1}{2}S - S_0 = 4\left(\tfrac{1}{4}S - S_0\right),$$

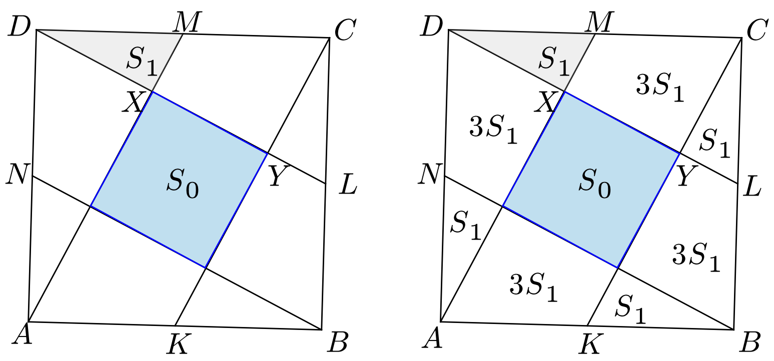
takže $S_0 = \frac{1}{6}S$. Dosazením

$$\begin{aligned} S_{CDX} &= \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{6}S = \tfrac{1}{3}S, \quad S_{EBX} = \tfrac{1}{4}S - \tfrac{1}{6}S = \tfrac{1}{12}S, \\ S_{AEXD} &= S - \left(\tfrac{1}{6}S + \tfrac{1}{3}S + \tfrac{1}{12}S\right) = \tfrac{5}{12}S. \end{aligned}$$

[41] [Lei–xx, str. 32/15]

Obsah čtyřúhelníku $AEXD$ bychom mohli určit také jako součet obsahu trojúhelníku AED ($\frac{1}{4}S$) a obsahu trojúhelníku EXD (S_0). □

Úloha 2.3.18. *Jakou část obsahu S čtverce $ABCD$ tvoří obsah S_0 čtyřúhelníku omezeného přímkami AM, BN, CK a DL, kde K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA?* [42]



Obr. k úloze 2.3.18

Řešení:
Označme jako na obr. X, Y průsečíky přímky DL s přímkami AM a CK a S_1 obsah trojúhelníku DXM. Obsah pravoúhlého trojúhelníku DCL je roven $\frac{1}{4}S$. Trojúhelníky DYC a DXM jsou podobné (uu) s koeficientem 2, neboť mají jeden úhel společný a $AM \parallel CK$, proto je obsah trojúhelníku DYC roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku DXM. Celkem je obsah trojúhelníku DCL roven $5S_1$, tedy $5S_1 = \frac{1}{4}S$, a proto $S_1 = \frac{1}{20}S$. Nyní již můžeme podle obrázku vpravo určit hledaný obsah:

$$S_0 = S - 16S_1 = S - \tfrac{16}{20}S = \tfrac{1}{5}S.$$

□

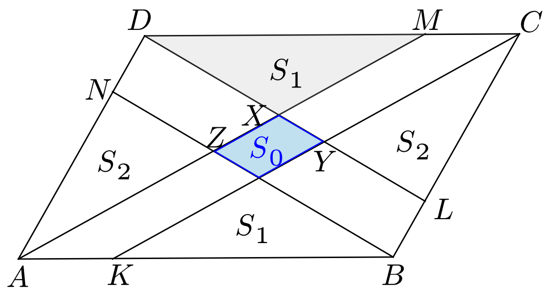
Poznámka:
Za povšimnutí stojí, že vymezený čtyřúhelník je čtverec, což plyne ze symetrie celého problému (obrázek se při otočení o 90° kolem středu čtverce $ABCD$ nezmění). Kolmost přímek (např. CK a DL) můžeme také dokázat výpočtem úhlů: $|\sphericalangle DYC| = 180° - (|\sphericalangle LDC| + |\sphericalangle KCD|) = 180° - (|\sphericalangle LDC| + |\sphericalangle LDA|) = 180° - 90° = 90°$. Ze zjištěného obsahu můžeme snadno určit délku strany čtverce. Zajímavé je také, že trojúhelník DCL je podobný trojúhelníku DXM (uu) s koeficientem $\sqrt{5}$. Následuje zobecnění úlohy.

Úloha 2.3.19. *Určete, jakou část obsahu S rovnoběžníku $ABCD$ tvoří obsah S_0 čtyřúhelníku omezeného přímkami AM, BN, CK a DL, kde K, L, M, N jsou po řadě*

[42] [Pra–86a, str. 75/5]

vnitřní body stran AB, BC, CD, DA takové, že

$$\frac{|AB|}{|KB|} = \frac{|BC|}{|LC|} = \frac{|CD|}{|MD|} = \frac{|DA|}{|NA|} = k > 1.$$



Obr. k úloze 2.3.19

Řešení:
Označení bodů (stejné jako v předchozí úloze) a obsahů některých útvarů je zakresleno na obrázku. Obsah trojúhelníku DCL je stejně jako obsah trojúhelníku AMD roven $\frac{1}{2k}S$, proto se rovnají také obsahy čtyřúhelníků $NZXD$ a $MXYC$. Trojúhelníky DYC a DXM jsou podobné (uu) s koeficientem k, proto je obsah trojúhelníku DYC roven k^2S_1, analogicky je obsah trojúhelníku AXD roven k^2S_2. Nyní snadno odvodíme, že $S_{NZXD} = (k^2-1)S_1$ a $S_{MXYC} = (k^2-1)S_2$. Celkem $S_1 = S_2$ a dál můžeme postupovat stejně jako v úloze 2.3.18. Obsah trojúhelníku DCL bude mít dvojí vyjádření

$$S_1(1+k^2) = \tfrac{1}{2k}S, \quad \text{a proto} \quad S_1 = \tfrac{1}{2k(1+k^2)}S.$$

Nyní již můžeme určit hledaný obsah:

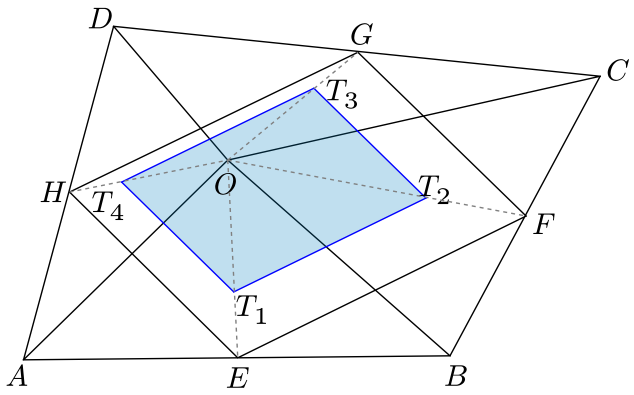
$$S_0 = S - 4k^2S_1 = S - \tfrac{4k^2}{2k(1+k^2)}S = S\left(1 - \tfrac{2k}{1+k^2}\right) = S\tfrac{(k-1)^2}{1+k^2}.$$

Dosazením $k = 2$ nám skutečně vyjde $S_0 = \frac{1}{5}S$ jako v úloze 2.3.18. □

Úloha 2.3.20. *Bod O leží uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, jehož obsah je S. Určete obsah čtyřúhelníku s vrcholy v těžištích trojúhelníků ABO, BCO, CDO, DAO.*[43]

Řešení:
Označme E, F, G, H po řadě středy stran AB, BC, CD, DA, dále označme T_1, T_2,

[43] [Eng–98, str. 322/69]



Obr. k úloze 2.3.20

T_3, T_4 těžiště trojúhelníků ABO, BCO, CDO, DAO (viz obrázek). Pro obsahy platí

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S_{AEH} = \frac{1}{4} S_{ABD} \\ S_{GFC} = \frac{1}{4} S_{DBC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AEH} + S_{GFC} = \frac{1}{4} S \\ \left.\begin{array}{l} S_{EBF} = \frac{1}{4} S_{ABC} \\ S_{HGD} = \frac{1}{4} S_{ACD} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{EBF} + S_{HGD} = \frac{1}{4} S \end{array}\right\} \Rightarrow S_{EFGH} = \frac{1}{2} S.$$

Čtyřúhelník $T_1T_2T_3T_4$ je stejnolehlý se čtyřúhelníkem $EFGH$ podle středu O s koeficientem $\frac{2}{3}$, proto pro jeho obsah platí

$$S_{T_1T_2T_3T_4} = \frac{4}{9} S_{EFGH} = \frac{2}{9} S.$$

Poznámka:
Rovnoběžník $EFGH$ se nazývá *Varignonův rovnoběžník*[44] čtyřúhelníku $ABCD$. □

Nerovnosti

Některé úlohy jsou zaměřeny na hledání nerovností, nejde v nich tedy o nalezení přesné hodnoty zkoumaného obsahu, ale o její omezení shora nebo zdola. V takových případech je často užitečná následující jednoduchá elegantní nerovnost.

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S \leq \tfrac{1}{2} ab.$$

[44] V roce 1731 byly publikovány přednášky [6] francouzského matematika Pierra Varignona (1654–1722), ve kterých je rovnoběžník – dnes známý jako Varignonův – popsán.

Důkaz:
Toto tvrzení plyne přímo ze vztahu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ pro obsah trojúhelníku ABC, případně ze základního vztahu $S = \frac{1}{2}av_a$, kde jistě $v_a \le b$. Rovnost nastává jedině u pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C. □

Důsledkem je obdobné tvrzení pro čtyřúhelník.

Pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$S \le \frac{ab+cd}{2}, \quad S \le \frac{ad+bc}{2}. \tag{$\star$}$$

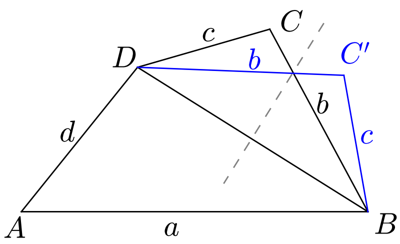
Důkaz:
Pro obsahy trojúhelníků ABC a ACD platí $S_{ABC} \le \frac{ab}{2}$, $S_{ACD} \le \frac{cd}{2}$, celkem tedy

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} \le \frac{ab+cd}{2}.$$

Odvozený vztah platí i pro nekonvexní čtyřúhelník, neboť je-li nekonvexní vnitřní úhel u bodu C nebo A, lze popsaný postup použít, je-li nekonvexní úhel u bodu B, platí přímo $S \le S_{ACD} \le \frac{cd}{2}$, a konečně je-li nekonvexní úhel u bodu D, platí $S \le S_{ABC} \le \frac{ab}{2}$. Druhou nerovnost obdržíme z první cyklickou záměnou vrcholů čtyřúhelníku. □

Úloha 2.3.21. *Dokažte, že pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí* [45]

$$S \le \frac{ac+bd}{2}.$$



Obr. k úloze 2.3.21

Řešení:
Čtyřúhelník $ABCD$ rozřízneme podél úhlopříčky BD a kolem její osy překlopíme trojúhelník BCD (viz obrázek). Tím vznikne čtyřúhelník $ABC'D$ se stranami v pořadí a, c, b, d a stejným obsahem S. Pro něj podle odhadu $(\star)$ platí

$$S \le \frac{ac+bd}{2}.$$ □

[45] [Eng–98, str. 319/9b]

Úloha 2.3.22. *Dokažte, že pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí* [46]

$$S \le \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \quad S \le \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}.$$

Řešení:
Požadované nerovnosti získáme úpravou pravých stran a užitím odhadů ($\star$) a výsledku úlohy 2.3.21:

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab+cd}{2} + \frac{ad+bc}{2}\right) \ge \frac{1}{2} \cdot 2S = S,$$
$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{ac+bd}{2} + \frac{ad+bc}{2}\right) \ge \frac{1}{2} \cdot 2S = S. \qquad \square$$

Odhady z předchozích úloh můžeme využít i v úlohách o nerovnostech, v jejichž zadáních obsah vůbec nevystupuje.

Úloha 2.3.23. *Dokažte, že poloměr kružnice vepsané (tečnovému) čtyřúhelníku nepřevyšuje osminu jeho obvodu.*[47]

Řešení:
Podle úlohy 2.3.22 pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí $S \le \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Navíc v tečnovém čtyřúhelníku je $a+c = b+d = \frac{1}{2}o$ (polovina obvodu), proto $S \le \frac{1}{16}o^2$. Na druhou stranu víme, že $S = \rho s = \frac{1}{2}\rho o$. Celkem

$$\frac{1}{2}\rho o \le \frac{1}{16}o^2, \text{ odkud } \rho \le \frac{1}{8}o. \qquad \square$$

Metoda porovnání obsahů

Řadu úloh lze nápaditě řešit vyjádřením obsahu téhož útvaru dvěma způsoby a jejich následným porovnáním. Tuto metodu jsme uplatnili již dříve při řešení zajímavé úlohy 2.2.3 o třech dotýkajících se kružnicích na straně 50.

Úloha 2.3.24. *Vyjádřete velikost výšky na přeponu pravoúhlého trojúhelníku pomocí délek odvěsen.*

Řešení:
Obsah trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C vyjádříme jednak pomocí délky přepony a výšky na ni jako $S = \frac{1}{2}cv$, jednak pomocí délek odvěsen jako $S = \frac{1}{2}ab$. Porovnáním a užitím Pythagorovy věty určíme

$$v = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \square$$

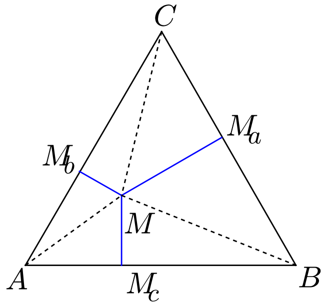
[46] [Eng–98, str. 319/9c], [Ars–04, str. 329]
[47] [Eng–98, str. 321/54], přeformulováno na návrh školitele.

Úloha 2.3.25. *Vyjádřete velikost výšky v_b na rameno rovnoramenného trojúhelníku pomocí délky a základny a délky b obou ramen.*

Řešení:
Velikost výšky v_a na základnu určíme pomocí Pythagorovy věty jako $v_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Porovnáme různá vyjádření obsahu $\frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b$ a získáme výsledek

$$v_b = \frac{av_a}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}. \qquad \square$$

Úloha 2.3.26. *Uvnitř rovnostranného trojúhelníku je dán bod M. Dokažte, že součet jeho vzdáleností od stran trojúhelníku je konstantní a je roven výšce trojúhelníku.*



Obr. k úloze 2.3.26

Řešení:
Označme (jako na obr.) M_a, M_b, M_c po řadě paty kolmic z bodu M na strany BC, AC, AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC o straně a a výšce v. Jeho obsah můžeme určit jako součet obsahů trojúhelníků ABM, BCM, CAM

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}|BC|\cdot|MM_a| + \tfrac{1}{2}|CA|\cdot|MM_b| + \tfrac{1}{2}|AB|\cdot|MM_c| = \\ &= \tfrac{1}{2}a(|MM_a| + |MM_a| + |MM_c|). \end{aligned}$$

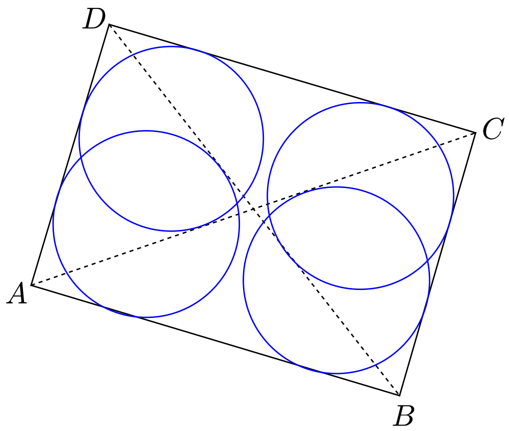
Protože také $S = \frac{1}{2}av$, porovnáním získáme $|MM_a| + |MM_a| + |MM_c| = v$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Úloha 2.3.27. *Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ má shodné úhlopříčky, jsou-li všechny čtyři kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, BCD, ACD, ABC navzájem shodné.*[48]

Řešení:
Označme ρ poloměr shodných kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, BCD, ACD, ABC. Pro obsah S celého čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$S = S_{ABC} + S_{CDA} = \tfrac{1}{2}\rho(|AB| + |BC| + |AC|) + \tfrac{1}{2}\rho(|CD| + |DA| + |AC|) = \rho s + \rho|AC|,$$

[48] [Aga-10, str. 63/174]



Obr. k úloze 2.3.27

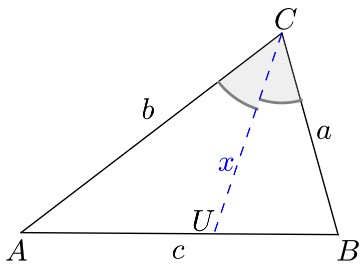
kde s je polovina jeho obvodu. Analogicky

$$S = S_{BCD} + S_{DAB} = \tfrac{1}{2}\rho(|BC| + |CD| + |BD|) + \tfrac{1}{2}\rho(|DA| + |AB| + |BD|) = \rho s + \rho|BD|.$$

Porovnáním obou vyjádření přímo dostáváme $|AC| = |BD|$. □

Úloha 2.3.28. *Označme U průsečík osy úhlu γ trojúhelníku ABC se stranou c. Dokažte vzorec*[49]

$$|CU| = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$



Obr. k úloze 2.3.28

Řešení:
Označme $x = |CU|$ hledanou délku. Obsah trojúhelníku ABC určíme dvěma způsoby. Nejprve jako součet obsahů trojúhelníků BCU a ACU, poté přímo s využitím vzorce

[49] [Doob–93, str. 2/5], o jiném vyjádření těchto úseků os pojednáváme v úloze 3.5.8 na straně 208.

pro sinus dvojnásobného úhlu:

$$S = \tfrac{1}{2}ax\sin\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{2}bx\sin\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}(a+b)x\sin\tfrac{\gamma}{2},$$
$$S = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}.$$

Hledaný vztah získáme porovnáním obou vyjádření:

$$\tfrac{1}{2}(a+b)x\sin\tfrac{\gamma}{2} = ab\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}$$
$$x = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

□

2.4 Výpočty úhlů v trojúhelníku

V této podkapitole se přesvědčíme, že i tak základní prostředky, jakými jsou poučky o úhlech v trojúhelníku a o dvojicích úhlů (vedlejších, vrcholových, souhlasných či střídavých), postačují k vyřešení rozmanitých úloh. Jsou zde zařazeny také úlohy využívající Thaletovu větu k nalezení vhodných rovnoramenných trojúhelníků. Podkapitola je členěna na odstavce s výmluvnými názvy:

- ▷ Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, dvojice úhlů
- ▷ Úhly v trojúhelníku a Thaletova kružnice
- ▷ Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

Později v samostatné podkapitole ukážeme, jaké uplatnění poskytují úhly v kružnici.

Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, dvojice úhlů

Nejprve uvedeme několik úloh, při jejichž řešení použijeme pouze následující dvě vlastnosti úhlů v trojúhelníku:

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý.

Vnější úhel trojúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících dvou vrcholech.

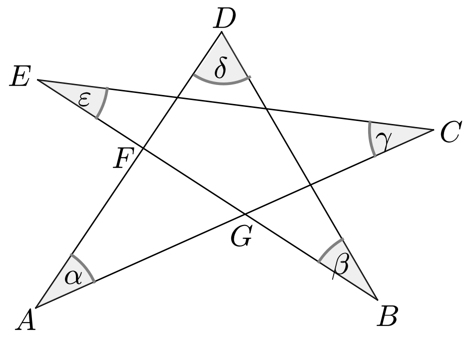
Úloha 2.4.1. *Dokažte, že součet úhlů při vrcholech libovolné pěticípé hvězdy (uzavřené lomené čáry z pěti úseček, viz obr.) je* $180°$.[50]

Řešení:
Označme A, B, C, D, E vrcholy hvězdy, α, β, γ, δ, ε vnitřní úhly u těchto vrcholů, F, G průsečíky úsečky BE po řadě s úsečkami AD a AC jako na obrázku. Pro vnější úhel u vrcholu F trojúhelníku BDF platí $|\sphericalangle AFB| = \beta + \delta$, pro vnější úhel u vrcholu G trojúhelníku CEG dále $|\sphericalangle EGA| = \gamma + \varepsilon$. Konečně v trojúhelníku AFG je

$$180° = |\sphericalangle GAF| + |\sphericalangle FGA| + |\sphericalangle AFG| = \alpha + (\gamma + \varepsilon) + (\beta + \delta),$$

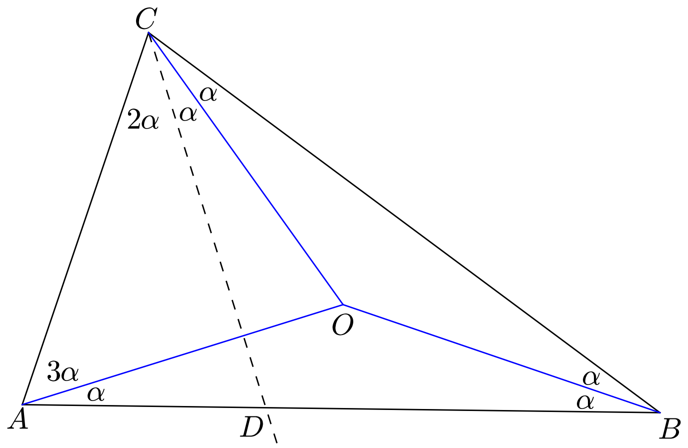
což jsme chtěli dokázat. □

[50] [Pra–86b, str. 88/17.55]



Obr. k úloze 2.4.1

Úloha 2.4.2. *Osa vnitřního úhlu ACB protne stranu AB trojúhelníku ABC v bodě D. Střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD splývá se středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Vypočtěte jeho vnitřní úhly.*[51]



Obr. k úloze 2.4.2

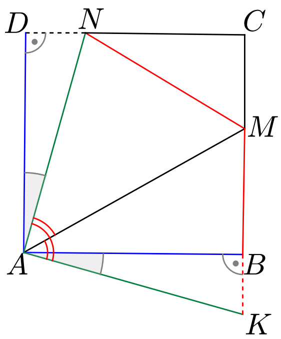
Řešení:
Podle zadání je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC vnitřním bodem trojúhelníku BCD, polopřímka BO je osou vnitřního úhlu ABC, polopřímka CO je osou vnitřního úhlu DCB. Trojúhelníky ABO, BCO, CAO jsou rovnoramenné, neboť $|AO| = |BO| = |CO|$. Při označení $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ tak postupně dostáváme

$$\alpha = |\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle DCO|,$$
$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB| = 2\alpha, \quad |\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle ACO| = 3\alpha.$$

[51] [Aga-10, str. 47/24]

Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je 10α, takže $\alpha = 18°$, z čehož plyne výsledek $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = 4\alpha = 72°$, $|\sphericalangle CBA| = 2\alpha = 36°$. □

Úloha 2.4.3. *Je dán čtverec $ABCD$ o straně 1. Na stranách BC, CD jsou po řadě zvoleny body M, N tak, že obvod trojúhelníku MCN je 2. Určete velikost úhlu MAN.*[52]



Obr. k úloze 2.4.3

Řešení:
Označme K bod na polopřímce CB za bodem B takový, že $|BK| = |DN|$. Podle zadání je $|MN| + |NC| + |CM| = 2$, avšak také $2 = |DC| + |CB| = |DN| + |NC| + |CM| + |MB| = |BK| + |NC| + |CM| + |MB| = |MK| + |NC| + |CM|$, z čehož plyne, že $|MK| = |MN|$. Trojúhelníky ADN a ABK jsou shodné (sus), proto $|AN| = |AK|$ a také trojúhelníky AMN a AMK jsou shodné (sss), odkud dostáváme $|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle MAN| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KAN|$. Ze shodnosti trojúhelníků ADN, ABK plyne shodnost úhlů KAB, NAD. Celkem

$$|\sphericalangle KAN| = |\sphericalangle KAB| + |\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle NAD| + |\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle BAD| = 90°,$$

a proto $|\sphericalangle MAN| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KAN| = 45°$. □

K vlastnostem vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku přidáme v následujících úlohách poučky o dvojicích úhlů (podrobněji na str. 12):

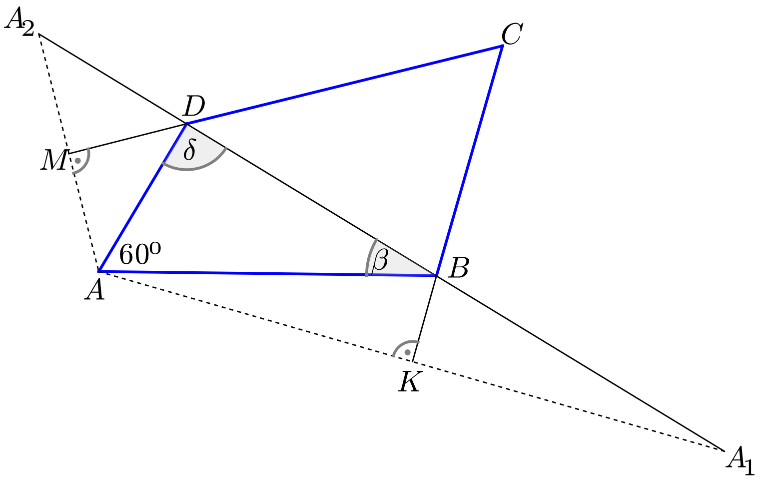
Vrcholové úhly jsou shodné. Součet vedlejších úhlů je úhel přímý.

Jestliže jedna dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné, pak přímky a, b jsou rovnoběžné.

Jsou-li přímky a, b rovnoběžné, pak každá dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné.

[52] [Gro–02, str. 153/8.2]

Úloha 2.4.4. *Ke konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ s vnitřním úhlem BAD velikosti $60°$ sestrojme body A_1, A_2 souměrně sdružené s vrcholem A podle přímek BC, resp. CD. Leží-li body A_1, A_2, B, D v jedné přímce, má úhel BCD velikost $60°$. Dokažte.*[53]



Obr. k úloze 2.4.4

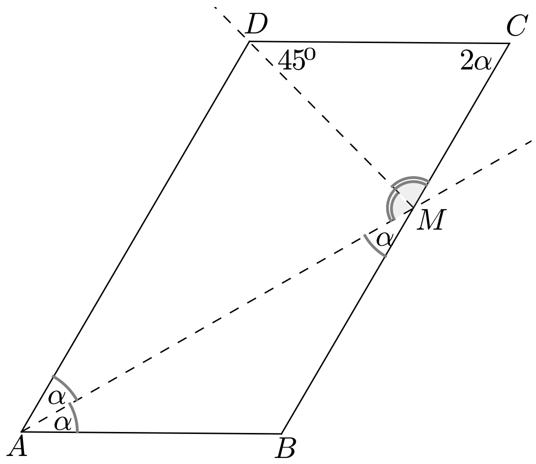
Řešení:
Označme K, M průsečíky přímek AA_1 a BC, resp. AA_2 a CD, dále označme $\beta = |\sphericalangle ABD|$, $\delta = |\sphericalangle BDA|$ Z trojúhelníku ABD máme $\beta+\delta = 120°$. Trojúhelník AA_1B je rovnoramenný ($|AB| = |A_1B|$) a z přímého úhlu A_1BD plyne $|\sphericalangle KBA_1| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABA_1| = \frac{1}{2}(180°-\beta)$. Analogicky z přímého úhlu A_2DB vyplývá $|\sphericalangle A_2DM| = \frac{1}{2}(180°-\delta)$. Nyní využijeme dvojice vrcholových úhlů CBD, KBA_1, resp. BDC, A_2DM a dopočítáme velikost úhlu BCD:

$$|\sphericalangle BCD| = 180° - |\sphericalangle CBD| - |\sphericalangle BDC| = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - \beta) - \tfrac{1}{2}(180° - \delta) = \\ = \tfrac{1}{2}(\beta + \delta) = \tfrac{1}{2} \cdot 120° = 60°. \qquad \square$$

Úloha 2.4.5. *V rovnoběžníku $ABCD$ protíná osa úhlu BAD stranu BC v bodě M a osa úhlu AMC prochází bodem D. Vypočtěte úhly rovnoběžníku $ABCD$, má-li úhel MDC velikost $45°$.*[54]

Řešení:
Označme $\alpha = |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MAD|$, takže $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BAD| = 2\alpha$. Úhly MAD a AMB jsou střídavé, proto $|\sphericalangle AMB| = \alpha$. S využitím dvojice vedlejších úhlů s vrcholem M dopočítáme $|\sphericalangle CMD| = \frac{1}{2}(180°-|\sphericalangle AMB|) = 90°-\frac{\alpha}{2}$. Součet úhlů v trojúhelníku MCD je $180° = 45° + 2\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} = 135° + \frac{3}{2}\alpha$, takže $\alpha = 30°$. Vnitřní úhly u vrcholů

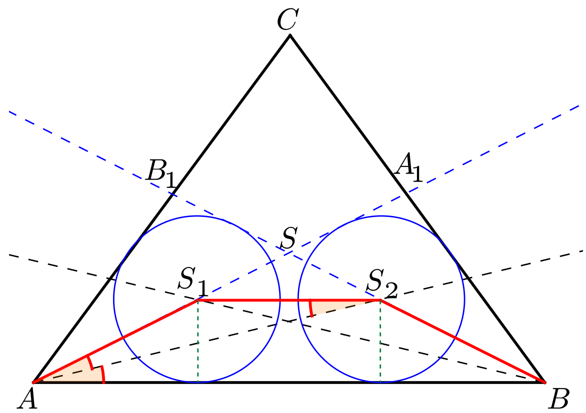
[53] [Aga-10, str. 49/47]
[54] [Aga-10, str. 52/74]



Obr. k úloze 2.4.5

A, C rovnoběžníku $ABCD$ proto mají velikost $2\alpha = 60°$, vnitřní úhly u vrcholů B, D mají velikost $180° - 2\alpha = 120°$. □

Úloha 2.4.6. *Osy vnitřních úhlů BAC, CBA protnou protější strany BC, AC trojúhelníku ABC po řadě v bodech A_1, B_1. Jsou-li kružnice vepsané trojúhelníkům AA_1B a BB_1A shodné, je trojúhelník ABC rovnoramenný, dokažte.*[55]



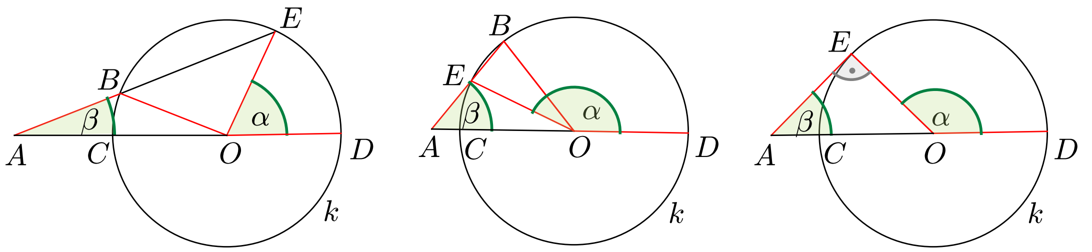
Obr. k úloze 2.4.6

Řešení:
Středy S_1, S_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ABB_1, ABA_1 mají od přímky AB stejnou vzdálenost (rovnou poloměru obou kružnic), takže $AB||S_1S_2$ (neboli ABS_2S_1

[55] [Aga-10, str. 56/113]

je lichoběžník). Bod S_1 leží na ose AA_1 úhlu BAC a polopřímka AS_2 je osou úhlu BAA_1, takže $|\sphericalangle S_2AS_1| = |\sphericalangle BAS_2| = \frac{1}{4}|\sphericalangle CAB|$. Úhly BAS_2 a S_1S_2A jsou střídavé, proto také $|\sphericalangle S_1S_2A| = |\sphericalangle BAS_2|$ a trojúhelník AS_2S_1 je tudíž rovnoramenný, $|AS_1| = |S_1S_2|$. Analogicky $|BS_2| = |S_1S_2|$ a lichoběžník ABS_2S_1 je proto rovnoramenný se shodnými vnitřními úhly BAS_1, ABS_2. Proto jsou také úhly BAC, ABC shodné a trojúhelník ABC je rovnoramenný. □

Úloha 2.4.7. *Nechť O je střed kružnice k nad průměrem CD a E její bod, pro který $|\sphericalangle DOE| = \alpha$. Prodlužme průměr CD za bod C do bodu A tak, aby polopřímka AE protala kružnici v bodě B s vlastností $|AB| = |OD|$. Vypočtěte velikost úhlu EAO.*[56]



Obr. k úloze 2.4.7

Řešení:

Označme β velikost hledaného úhlu. Podle zadání je $|AB| = |OD|$, protože body B a E leží na kružnici k, platí navíc $|OD| = |OB| = |OE|$.

Na obrázku jsou znázorněny tři možné situace. Mezní případ (na obr. vpravo) nastává, pokud je přímka AE tečnou ke kružnici k, potom body E a B splývají, v rovnoramenném trojúhelníku AEO je $|\sphericalangle AEO| = 90°$, proto $\beta = |\sphericalangle EAO| = |\sphericalangle AOE| = 45°$ a $\alpha = 180° - \beta = 135°$.

V případě, že $\alpha < 135°$ (na obr. vlevo), využijeme rovnoramenných trojúhelníků ABO a BOE a vlastnosti vedlejších úhlů k určení

$$|\sphericalangle BOA| = \beta, \quad |\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle EBO| = |\sphericalangle EAO| + |\sphericalangle BOA| = 2\beta.$$

Konečně z trojúhelníku AOE máme $\alpha = |\sphericalangle EAO| + |\sphericalangle BEO| = 3\beta$.

V poslední situaci (na obr. uprostřed), kdy $\alpha > 135°$, postupujeme podobně, opět využijeme rovnostranné trojúhelníky ABO a BOE:

$$|\sphericalangle BOA| = \beta, \quad |\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle ABO| = 180° - 2\beta, \quad |\sphericalangle AEO| = 180° - |\sphericalangle BEO| = 2\beta.$$

Celkem $\alpha = |\sphericalangle EAO| + |\sphericalangle AEO| = 3\beta$.

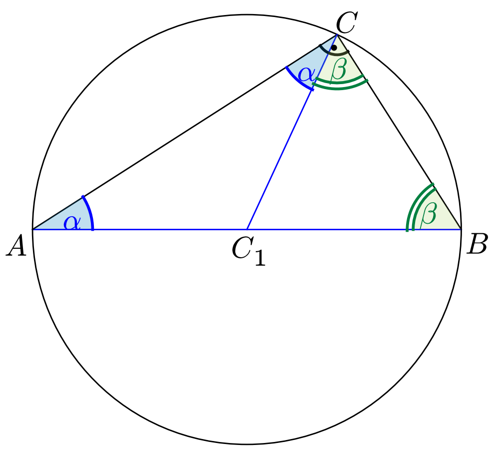
Ve všech třech případech tedy vychází $\beta = \frac{1}{3}\alpha$. Na první pohled se zdá, že by výsledek mohl být využit k řešení slavného problému trisekce daného úhlu α, bod A ze zadání úlohy však není eukleidovsky sestrojitelný. □

[56] Inspirováno [Pra–86b, str. 83/17.13], pro zjednodušení je možné zadat $\alpha < 135°$, stejný námět je také v [Gar–02, str. 40/15].

Úhly v trojúhelníku a Thaletova kružnice

Výpočty úhlů se zjednoduší, když při rozboru situace nalezneme rovnoramenný nebo pravoúhlý trojúhelník. V případě, že například v trojúhelníku ABC je $|AC| = |BC|$, a tedy i $\alpha = \beta$, využíváme pro dopočítání neznámého úhlu rovnosti $2\alpha+\gamma = 180°$. Pokud je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C, je $\alpha+\beta = 90°$ a opět stačí znalost velikosti jednoho ostrého vnitřního úhlu k výpočtu druhého.

Na dva rovnoramenné trojúhelníky můžeme rozdělit každý pravoúhlý trojúhelník, a to díky tomu, že těžnice na přeponu má délku rovnu polovině délky přepony, neboť vrchol, u něhož je pravý úhel, leží na Thaletově kružnici nad přeponou (Thaletova věta). Na obrázku 9 je tedy $|CC_1| = |AC_1| = |BC_1| = \frac{1}{2}|AB|$ a oba trojúhelníky AC_1C i BC_1C jsou skutečně rovnoramenné. Jejich úhly u vrcholu C znovu potvrzují, proč platí $\alpha + \beta = 90°$.



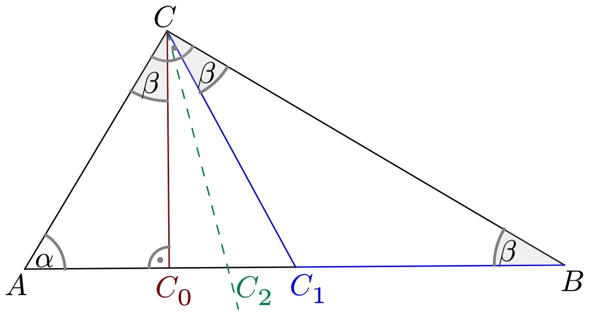
Obr. 9

Úloha 2.4.8. *Dokažte, že osa pravého úhlu různostranného pravoúhlého trojúhelníku půlí úhel, který svírají těžnice a výška na přeponu.*[57]

Řešení:
Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že v trojúhelníku ABC je $\gamma = 90°$ a $\beta < \alpha$. Na přeponě AB vyznačme C_0 patu výšky z vrcholu C, C_1 její střed a C_2 její průsečík s osou pravého úhlu ACB. Trojúhelník CC_1B je rovnoramenný, tudíž $|\sphericalangle BCC_1| = \beta$. Trojúhelník AC_0C je pravoúhlý, a proto $|\sphericalangle C_0CA| = 90° - \alpha = \beta$. Protože $|\sphericalangle C_0CA| + |\sphericalangle C_1CB| = 2\beta < 90° = |\sphericalangle ACB|$, leží bod C_2 mezi body C_0, C_1 a platí $|\sphericalangle C_0CC_2| = |\sphericalangle C_2CC_1| = 45° - \beta$. □

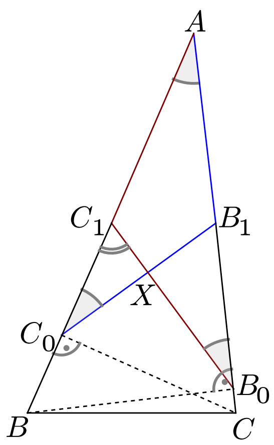
Úloha 2.4.9. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC s nejmenším vnitřním úhlem BAC velikosti* $30°$ *označme B_0, C_0 paty výšek po řadě z vrcholů B, C a B_1, C_1 středy stran AC,*

[57] [Šar–86, str. 10/35]



Obr. k úloze 2.4.8

resp. AB. Dokažte, že úsečky B_0C_1 a C_0B_1 jsou navzájem kolmé.[58]



Obr. k úloze 2.4.9

Řešení:
Označme X průsečík úseček B_0C_1, C_0B_1. Trojúhelník ABB_0 je pravoúhlý, bod C_1 je středem jeho přepony AB, tudíž je podle Thaletovy věty trojúhelník AB_0C_1 rovnoramenný, a proto podle zadaného úhlu BAC platí

$$|\sphericalangle AB_0C_1| = |\sphericalangle C_1AB_0| = 30° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BC_1B_0| = |\sphericalangle AB_0C_1| + |\sphericalangle C_1AB_0| = 60°.$$

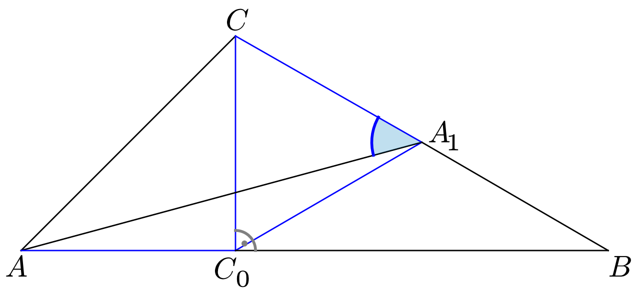
Trojúhelník AC_0B_1 je také rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle AC_0B_1| = |\sphericalangle C_0AB_1| = 30°$. Celkem v trojúhelníku C_0XC_1 je $|\sphericalangle C_0XC_1| = 180° - (|\sphericalangle BC_1B_0| + |\sphericalangle AC_0B_1|) = 90°$. □

Poznámka:
Pro uvedený výpočet byla podstatná pořadí bodů A, C_1, C_0 a A, B_1, B, která jsou

[58] [Fom–94, str. 16/20]

zaručena, když je strana BC v trojúhelníku ABC nejkratší, což bylo zadáním úlohy splněno. V obecném případě (ne nutně ostroúhlého) trojúhelníku ABC s úhlem α u vrcholu A a nejkratší stranou BC umožňuje uvedený postup získat závislost úhlu mezi úsečkami B_0C_1 a B_1C_0 ve tvaru $|\sphericalangle B_1XC_1| = 3\alpha$.

Úloha 2.4.10. *Označme A_1 střed strany BC trojúhelníku ABC, o kterém víme, že $|\sphericalangle CAB| = 45°$ a $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Určete velikost úhlu AA_1C.*[59]



Obr. k úloze 2.4.10

Řešení:
Při řešení úlohy využijeme patu C_0 výšky z bodu C na stranu AB. Velikost úhlu ACC_0 je rovna $90° - |\sphericalangle CAB| = 45°$, trojúhelník AC_0C je tedy rovnoramenný a $|AC_0| = |CC_0|$. Velikost úhlu BCC_0 je rovna $90° - |\sphericalangle ABC| = 60°$, navíc podle Thaletovy věty $|C_0A_1| = |CA_1|$, a trojúhelník CC_0A_1 je tedy rovnostranný.[60] Celkem $|AC_0| = |C_0A_1|$, takže v rovnoramenném trojúhelníku AC_0A_1 můžeme určit

$$|\sphericalangle AA_1C_0| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle AC_0A_1|) = \tfrac{1}{2}(180° - (90° + 60°)) = 15°.$$

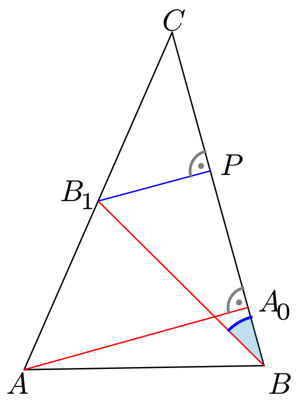
Konečně $|\sphericalangle AA_1C| = |\sphericalangle C_0A_1C| - |\sphericalangle AA_1C_0| = 60° - 15° = 45°$. □

Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

V poslední části podkapitoly spojíme výpočty úhlů s užitím hodnot goniometrických funkcí jako poměrů délek stran pravoúhlých trojúhelníků. Hlavní roli tyto funkce hrají až při výpočtech v obecných trojúhelnících – těm věnujeme celé podkapitoly 2.7 a 2.8.

Úloha 2.4.11. *V trojúhelníku ABC je výška AA_0 shodná s těžnicí BB_1. Vypočtěte velikost úhlu B_1BC.*[61]

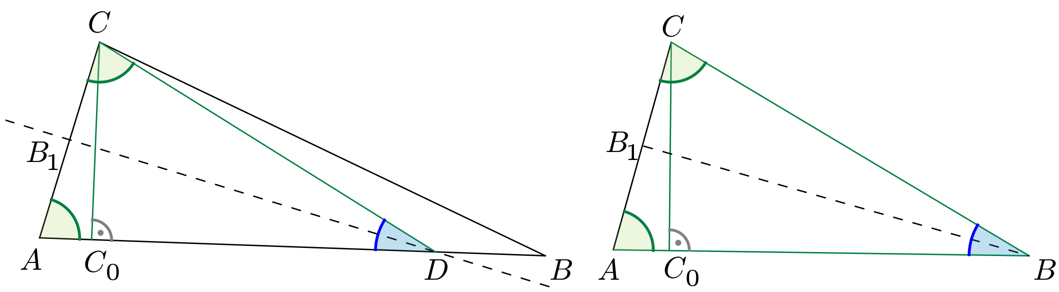
[59] [Gro–02, str. 87/8.2a]
[60] Jiná úvaha vedoucí k témuž závěru: $|CC_0| = |CB|\sin 30° = \frac{1}{2}|CB|$.
[61] [Pra–86b, str. 84/17.15]



Obr. k úloze 2.4.11

Řešení:
Označme P patu kolmice z bodu B_1 na přímku BC. Trojúhelník B_1PC je podobný trojúhelníku AA_0C (uu), $|B_1C| = \frac{1}{2}|AC|$, proto $|B_1P| = \frac{1}{2}|AA_0| = \frac{1}{2}|BB_1|$. V pravoúhlém trojúhelníku BPB_1 je $\sin|\sphericalangle B_1BC| = \frac{|B_1P|}{|B_1B|} = \frac{1}{2}$, a proto $|\sphericalangle B_1BC| = 30°$. □

Úloha 2.4.12. *V trojúhelníku ABC platí $2v_c = c$. Vypočtěte β, je-li $\alpha = 75°$.*[62]

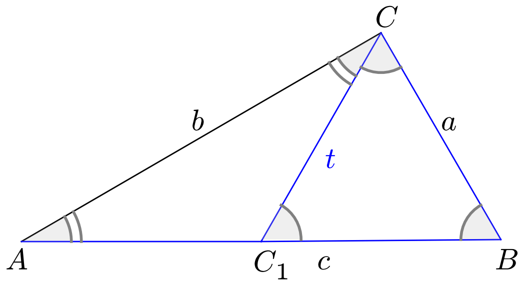


Obr. k úloze 2.4.12

Řešení:
Označme D průsečík osy strany AC s přímkou AB (viz obr. vlevo, pro další postup není podstatné, zda bod D padne na úsečku AB nebo na prodloužení úsečky AB za vrchol B). Trojúhelník ADC je rovnoramenný se základnou AC, proto $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\alpha = 30°$. V pravoúhlém trojúhelníku CC_0D je proto $v_c = |CD| \sin|\sphericalangle ADC| = \frac{1}{2}|CD|$, odkud $|AD| = |CD| = 2v_c$. Podle zadání je také $c = 2v_c$, takže $B = D$ (viz obr. vpravo) a $\beta = 30°$. □

[62] [Pra–86b, str. 84/17.17]

Úloha 2.4.13. *V pravoúhlém trojúhelníku dělí těžnice na přeponu pravý úhel sevřený odvěsnami v poměru* 1 : 2*. Vyjádřete obsah trojúhelníku pomocí délky t zmíněné těžnice.*[63]



Obr. k úloze 2.4.13

Řešení:
V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB délky c a těžnicí CC_1 délky t podle Thaletovy věty platí $t = \frac{c}{2}$. Těžnice CC_1 dělí podle zadání pravý úhel ACB v poměru 1 : 2, proto například $|\sphericalangle ACC_1| = 30°$ a $|\sphericalangle C_1CB| = 60°$. Protože však $|BC_1| = |CC_1|$, je také $\beta = |\sphericalangle C_1BC| = 60°$. Nyní již stačí vyjádřit délky a, b obou odvěsen pomocí délky přepony a dosadit do vztahu pro obsah:

$$a = t \quad \text{(neboť trojúhelník } CC_1B \text{ je rovnostranný)},$$
$$b = c \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}c = t\sqrt{3},$$
$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2.$$

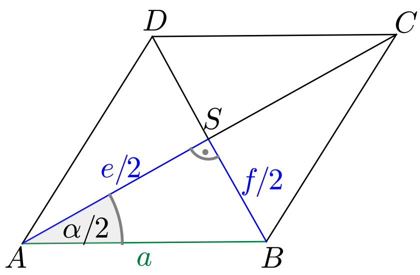
□

Úloha 2.4.14. *Určete ostrý úhel kosočtverce, ve kterém je velikost jeho strany rovna geometrickému průměru délek obou úhlopříček.*[64]

Řešení:
Označme jako obvykle a délku strany kosočtverce, e, f délky jeho úhlopříček. Ze zadání víme, že $a = \sqrt{ef}$, neboli $a^2 = ef$. Dále označme S průsečík úhlopříček. Úhlopříčky kosočtverce se vzájemně půlí a jsou na sebe kolmé, proto v trojúhelníku ABS platí

$$\frac{e}{2} = a \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{f}{2} = a \cos\frac{\alpha}{2}.$$

[63] [Šar–86, str. 9/24]
[64] [Šar–86, str. 9/31]



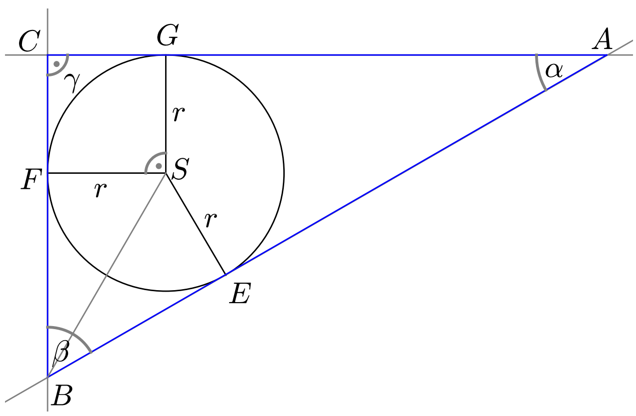
Obr. k úloze 2.4.14

Obě rovnosti mezi sebou vynásobíme, dosadíme $ef = a^2$ a upravíme

$$a^2 = 4a^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \text{odkud} \quad \frac{1}{2} = \sin\alpha.$$

Úhel α je ostrý, a proto z poslední rovnosti plyne $\alpha = 30°$. □

Úloha 2.4.15. *Tři body kružnice o poloměru r ji rozdělují na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $3:4:5$. Určete obsah trojúhelníku omezeného tečnami kružnice v těchto bodech.*[65]



Obr. k úloze 2.4.15

Řešení:
Jsou-li délky oblouků v poměru 3:4:5, pak jsou i velikosti příslušných středových úhlů v tomto poměru, jsou proto rovny 90°, 120° a 150°. Označme E, F, G zadané body na kružnici, S její střed tak, že $|\sphericalangle GSF| = 90°$, $|\sphericalangle FSE| = 120°$ a $|\sphericalangle ESG| = 150°$. Označme dále A, B, C vrcholy hledaného trojúhelníka ($E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CA$). Součet úhlů

[65] [Šar–86, str. 10/36]

ve čtyřúhelníku je úhel plný a tečny svírají se spojnicemi středu a bodů dotyku pravé úhly, proto můžeme dopočítat velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC:

$$\begin{aligned}\alpha &= 360° - (90° + 90° + 150°) = 30°\\ \beta &= 360° - (90° + 90° + 120°) = 60°\\ \gamma &= 360° - (90° + 90° + 90°) = 90°\end{aligned}$$

Čtyřúhelník $CGSF$ je čtverec, proto $|CF| = |CG| = r$. Přímka BS je osou úhlu β, a tudíž $|\sphericalangle SBF| = \frac{\beta}{2} = 30°$. V pravoúhlém trojúhelníku FSB platí

$$\begin{aligned}|FB| &= |FS| \operatorname{cotg} 30° = r\sqrt{3}, \quad \text{takže}\\ |BC| &= |CF| + |FB| = r + r\sqrt{3} = r(1+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Dále v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí

$$|AC| = |BC| \operatorname{tg} 60° = |BC|\sqrt{3} = r(\sqrt{3}+3),$$

a tak již můžeme určit hledaný obsah

$$S = \frac{1}{2}|BC|\cdot|AC| = \frac{1}{2}r^2(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+3) = r^2(2\sqrt{3}+3). \qquad \square$$

2.5 Výpočty úhlů v kružnici

Úhly mezi různými poloměry, tětivami a tečnami téže kružnice, souhrnně zvané *úhly v kružnici* jsou vděčným námětem pro dlouhou řadu úloh, proto je jim v práci vyčleněna samostatná podkapitola, rozdělená do těchto odstavců:

- ▷ Obvodové, středové a úsekové úhly
- ▷ Tětivový čtyřúhelník
- ▷ Úhly ve třech kružnicích se společným bodem

Obvodové, středové a úsekové úhly

V následujících úlohách si připomeneme důležité vlastnosti úhlů příslušných obloukům kružnice, které jsme přehledně uvedli na straně 13, zejména:

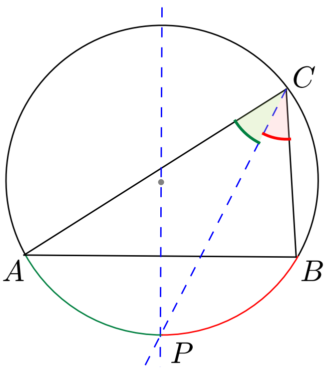
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku. Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné.

Úsekový úhel příslušný k danému oblouku je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.

Nezapomeňme, že obvodové úhly příslušné shodným obloukům (tj. obloukům o stejném poloměru a délce, ať již na stejné kružnici nebo na různých kružnicích) jsou také shodné.

Úloha 2.5.1. *Dokažte, že v libovolném trojúhelníku, který není rovnoramenný, osa libovolné strany protne osu protějšího vnitřního úhlu v bodě kružnice trojúhelníku opsané.*[66]

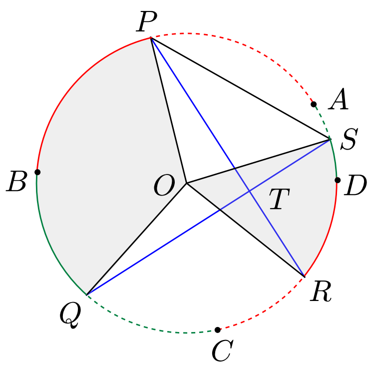
[66] [Kuř–90, str. 146/57]



Obr. k úloze 2.5.1

Řešení:
Označme P průsečík kružnice opsané trojúhelníku ABC s osou úhlu ACB ($P \neq C$). Oblouky AP a PB jsou shodné, neboť jsou shodné příslušné obvodové úhly ACP a PCB. Ze souměrnosti kružnice podle osy tětivy AB vyplývá, že tato přímka rozděluje oblouk APB na dvě shodné části, takže prochází bodem P. □

Úloha 2.5.2. *Čtyři body A, B, C, D leží v tomto pořadí na kružnici, takže ji rozdělují na čtyři oblouky AB, BC, CD, DA bez společných vnitřních bodů. Středy těchto oblouků označme po řadě P, Q, R, S. Dokažte, že $PR \perp QS$.*[67]



Obr. k úloze 2.5.2

Řešení:
Označme O střed zadané kružnice, T průsečík tětiv PR, QS (viz obrázek). V trojúhel-

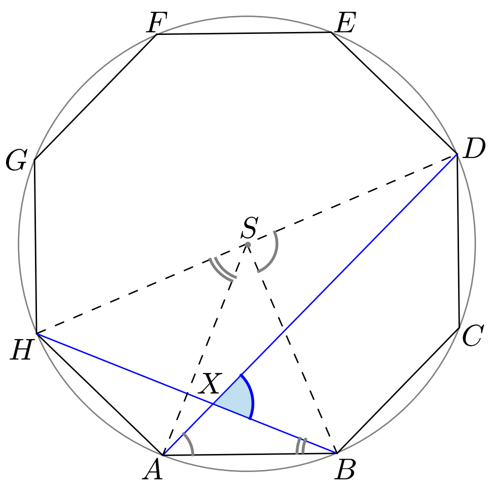
[67] [Doob–93, str. 77/5].

níku PTS je

$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle PTS| &= 180^\circ - (|\sphericalangle PSQ| + |\sphericalangle SPR|) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle POQ| + |\sphericalangle SOR|) = \\
&= 180^\circ - \tfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,
\end{aligned}
$$

protože příslušné oblouky PBQ a RDS společně tvoří polovinu kružnice. □

Úloha 2.5.3. *Úhlopříčky AD, BH pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ se protínají v bodě X. Určete velikost úhlu BXD.*[68]



Obr. k úloze 2.5.3

Řešení:
Pravidelný osmiúhelník má kružnici opsanou (její střed označme S), využijeme tedy vlastnosti obvodových a středových úhlů:

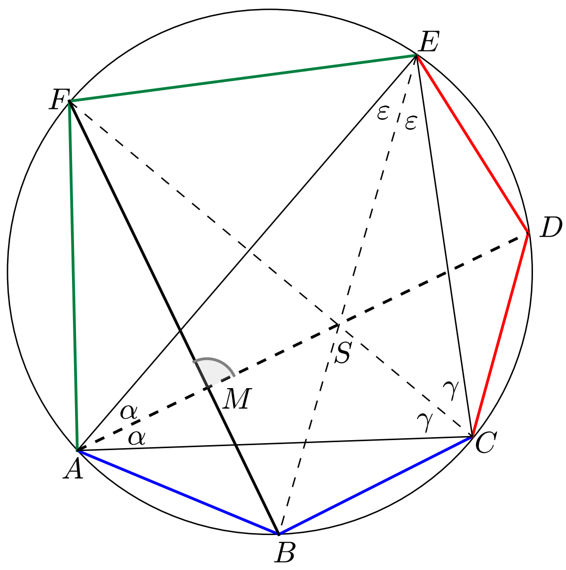
$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle ABH| &= \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ASH| = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 360^\circ = 22{,}5^\circ, \\
|\sphericalangle BAD| &= \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BSD| = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Úhel BXD je vnějším úhlem v trojúhelníku AXB, je tedy

$$|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle ABH| + |\sphericalangle BAD| = 67{,}5^\circ.$$ □

Úloha 2.5.4. *Do kružnice je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že platí $AD \perp BF$ (stejně jako $BE \perp DF$ a $CF \perp BD$).*[69]

[68] [Gar–02, str. 43/12]
[69] Přeformulováno podle [Tao–06, str. 50/4.1]



Obr. k úloze 2.5.4

Řešení:
Nejdříve ukážeme, že úhlopříčky AD, BE, CF procházejí jedním bodem. Ze shodnosti tětiv, a tedy i oblouků AB a BC, plyne shodnost obvodových úhlů $\varepsilon = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BEC|$, proto je polopřímka EB osou úhlu AEC. Analogicky $\gamma = |\sphericalangle ECF| = |\sphericalangle FCA|$ a polopřímka CF je osou úhlu ECA. Konečně $\alpha = |\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle DAC|$ a polopřímka AD je osou úhlu EAC. Úhlopříčky AD, BE, CF tedy leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku ACE a proto pocházejí jedním bodem – středem S kružnice vepsané tomuto trojúhelníku.

Označme M průsečík úhlopříček AD a BF. Zaměříme se na výpočet velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku FMS. Obvodový úhel BFC má velikost ε, úhel FSM je vnějším úhlem trojúhelníku ASC a jeho velikost tedy je $\alpha + \gamma$. Dopočítáme úhel u vrcholu M:

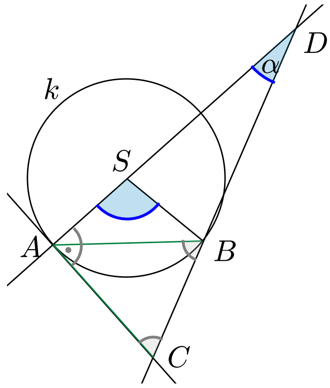
$$|\sphericalangle SMF| = 180^\circ - |\sphericalangle FSM| - |\sphericalangle MFS| = 180^\circ - (\alpha + \gamma + \varepsilon).$$

Zbývá uvážit, že v trojúhelníku ACE je $2\alpha + 2\gamma + 2\varepsilon = 180^\circ$, takže $|\sphericalangle SMF| = 90^\circ$, což jsme měli dokázat.

Vztahy $BE \perp DF$ a $CF \perp BD$ lze dostat ze vztahu $AD \perp BF$ cyklickým posunutím písmen u vrcholu šestiúhelníku vždy o dvě místa. □

Úloha 2.5.5. *Je dána kružnice k se středem S a její tětiva AB, která není průměrem. Na tečně kružnice k v bodě A sestrojme bod C tak, aby platilo $|AC| = |AB|$ a úhel BAC byl ostrý. Dokažte, že pro průsečík D přímek AS, BC platí $|\sphericalangle ASB| = 4|\sphericalangle ADB|$.*[70]

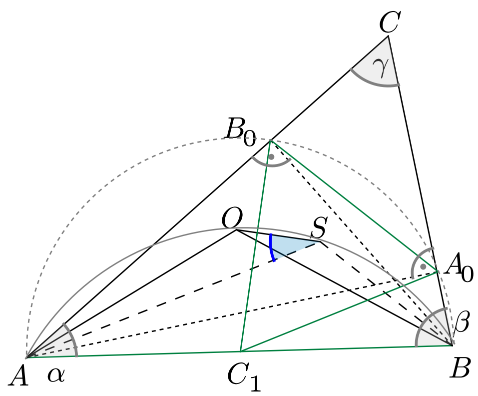
[70] [Kuř–96, str. 117/43]



Obr. k úloze 2.5.5

Řešení:
Označme α velikost úhlu ADB. Trojúhelník ACD je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A, proto $|\sphericalangle ACD| = 90° - \alpha$. Trojúhelník ACB je podle zadání rovnoramenný se základnou BC, a proto $|\sphericalangle CAB| = 180° - 2|\sphericalangle ACD| = 2\alpha$. Tento úhel CAB je úsekovým úhlem příslušným k oblouku AB, odpovídající středový úhel ASB má dvojnásobnou velikost, tedy $|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$. □

Úloha 2.5.6. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC je $|AC| > |BC|$ a $|AB| = 2|A_0B_0|$, kde A_0, B_0 jsou paty výšek z bodů A, B. Označme O resp. S střed kružnice opsané resp. vepsané trojúhelníku ABC. Určete velikost úhlu ASO.*[71]



Obr. k úloze 2.5.6

Řešení:
Označme C_1 střed strany AB. Body A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, proto $|C_1A_0| = |C_1B_0| = \frac{1}{2}|AB| = |A_0B_0|$ a trojúhelník $C_1A_0B_0$ je tudíž

[71] [Gro–02, str. 188/8.2]

rovnostranný. Trojúhelníky AC_1B_0, BC_1A_0 jsou ze stejného důvodu rovnoramenné, a proto

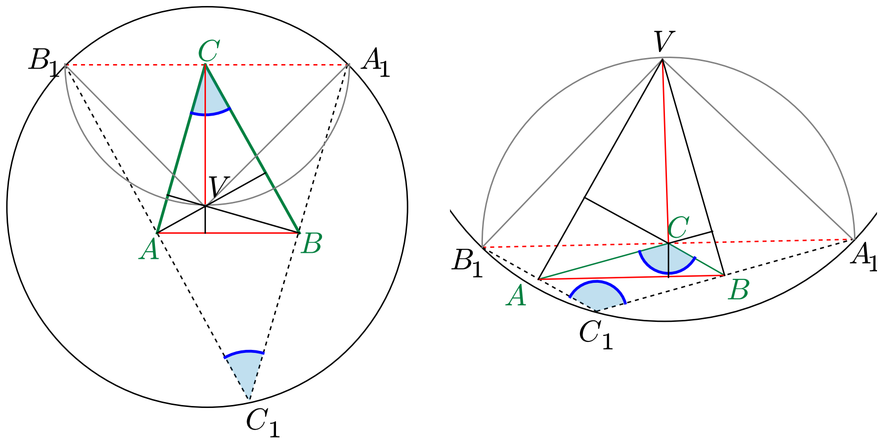
$$\begin{aligned}60^\circ = |\sphericalangle A_0C_1B_0| &= 180^\circ - (|\sphericalangle AC_1B_0| + |\sphericalangle BC_1A_0|) = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) = 2(\beta+\alpha) - 180^\circ = 180^\circ - 2\gamma,\end{aligned}$$

takže $\gamma = 60^\circ$. Úhel γ je obvodovým úhlem příslušným oblouku AB kružnice opsané, takže pro příslušný středový úhel platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma = 120^\circ$. Dále

$$|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - (|\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle ABS|) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma = 120^\circ,$$

Z bodů O i S je úsečku AB vidět pod shodným úhlem, takže body A, B, S, O leží na kružnici. Podle zadání je $|AC| > |BC|$, takže $\beta > \alpha$, a tedy i $|\sphericalangle ABS| > |\sphericalangle BAS|$. Nyní již můžeme využít shodnosti obvodových úhlů příslušných témuž oblouku AO k určení $|\sphericalangle ASO| = |\sphericalangle ABO| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle AOB|) = 30^\circ$. □

Úloha 2.5.7. *Pro průsečík výšek V ostroúhlého trojúhelníku ABC platí $|CV| = |AB|$. Vypočtěte velikost úhlu ACB. Rozeberte rovněž případ tupoúhlého trojúhelníku.*[72]



Obr. k úloze 2.5.7

Řešení:

Sestrojme pomocný trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby úsečky AB, BC, AC byly jeho středními příčkami. Bod V je průsečíkem os stran pomocného trojúhelníku, a tedy středem kružnice jemu opsané (viz obrázek).[73] Úhel A_1VB_1 je pravý, neboť $|CA_1| = |CB_1| = |AB| = |CV|$ (viz zadání úlohy), a tudíž bod V leží na Thaletově kružnici nad

[72] [Pra–86b, str. 83/17.14]

[73] Užití pomocného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je tak prostředkem k důkazu věty o existenci průsečíku výšek trojúhelníku, neboť tvrzení o existenci průsečíku os stran je triviální. Tento důkaz přisuzovaný L. Eulerovi velice obdivoval A. Einstein, viz [Kuř–90, str. 72].

průměrem A_1B_1. Úhel $A_1C_1B_1$ je obvodovým úhlem příslušným k oblouku A_1B_1, proto $|\sphericalangle A_1C_1B_1| = \frac{1}{2}|\sphericalangle A_1VB_1| = 45°$. Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A_1B_1C_1$, velikost úhlu ACB je tedy rovněž 45°. Ke stejnému výsledku dojdeme i v případě tupého úhlu u vrcholu A nebo B.

V případě, že u vrcholu C je tupý úhel, dojdeme analogickou úvahou k výsledku $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}(360° - 90°) = 135°$.

Z uvedeného postupu je rovněž patrná i platnost obráceného tvrzení: je-li u vrcholu C trojúhelníku ABC úhel 45° nebo 135°, splňuje jeho ortocentrum V rovnost $|CV| = |AB|$. □

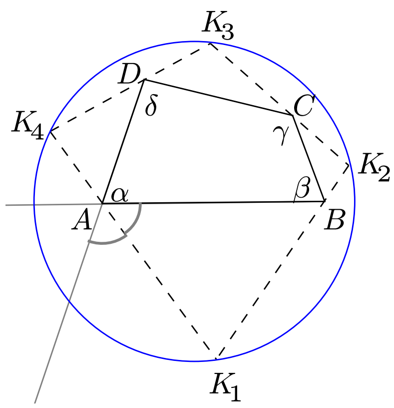
Tětivový čtyřúhelník

Celá řada úloh využívá základní vlastnosti vnitřních úhlů tětivových čtyřúhelníků (čtyřúhelníků vepsaných do kružnice, viz str. 19 a 33).

Součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je úhel přímý. Obráceně, každý konvexní čtyřúhelník, jehož součet protějších vnitřních úhlů je úhel přímý, je tětivový.

O dalších obecných vlastnostech těchto čtyřúhelníků pojednáme později v podkapitole 3.3.

Úloha 2.5.8. *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Osy jeho vnějších úhlů se protínají v bodech K_1, K_2, K_3, K_4 (viz obrázek). Dokažte, že čtyřúhelník $K_1K_2K_3K_4$ je tětivový.*[74]



Obr. k úloze 2.5.8

Řešení:
Ve vzniklém čtyřúhelníku $K_1K_2K_3K_4$ nejprve určíme velikost úhlu u vrcholu K_1:

$$|\sphericalangle AK_1B| = 180° - (|\sphericalangle BAK_1| + |\sphericalangle ABK_1|) = \\ = 180° - \left(\tfrac{1}{2}(180° - \alpha) + \tfrac{1}{2}(180° - \beta)\right) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

[74] [Hon–96, str. 63]

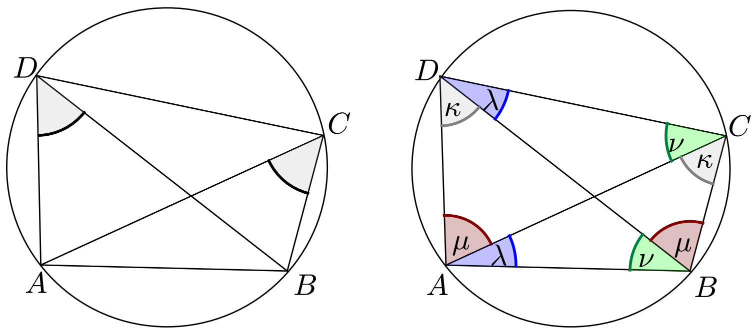
Stejným postupem určíme $|\sphericalangle CK_3D| = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$. Celkem

$$|\sphericalangle AK_1B| + |\sphericalangle CK_3D| = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ,$$

a čtyřúhelník $K_1K_2K_3K_4$ je proto tětivový. □

Použijeme-li v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ poznatek o shodnosti obvodových úhlů nad obloukem opsané kružnice, zjistíme, že například $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$ (viz obr. 10). Obecně platí:

Úhel mezi stranou a úhlopříčkou tětivového čtyřúhelníku je shodný s úhlem mezi jeho druhou úhlopříčkou a protější stranou.



Obr. 10 – shodné úhly v tětivovém čtyřúhelníku

Na obrázku vpravo je přitom rovnost $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = \mu + \lambda + \nu + \kappa = 180^\circ$ ihned vidět jako vlastnost součtu vnitřních úhlů čtyř trojúhelníků ABC, ABD, ACD, BCD.

Úloha 2.5.9. *Na stranách BC, AC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EA|$. Velikost vnitřního úhlu u vrcholu C je 60°. Dokažte, že průsečík P úseček AD, BE je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.*[75]

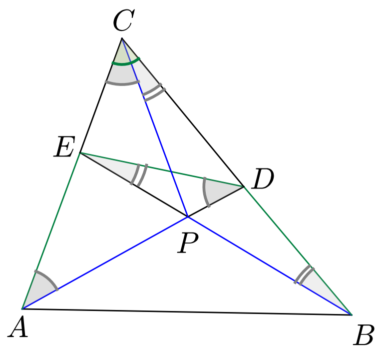
ŘEŠENÍ:
Trojúhelníky ABP a DEP se shodují ve vnitřním úhlu u vrcholu P, takže mají shodné i součty dalších dvou vnitřních úhlů:

$$|\sphericalangle BAP| + |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PED| + |\sphericalangle PDE| = |\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE|.$$

Ze shodnosti úseček BD, DE, EA plyne, že trojúhelníky ADE, BDE jsou rovnoramenné, proto $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle ADE|$, $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle BED|$. Dohromady

$$\begin{aligned}\alpha + \beta = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| &= |\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle BAP| + |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle EBD| = \\ &= |\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle BED| = 2(|\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE|),\end{aligned}$$

[75] [Hon–01, str. 64/19]



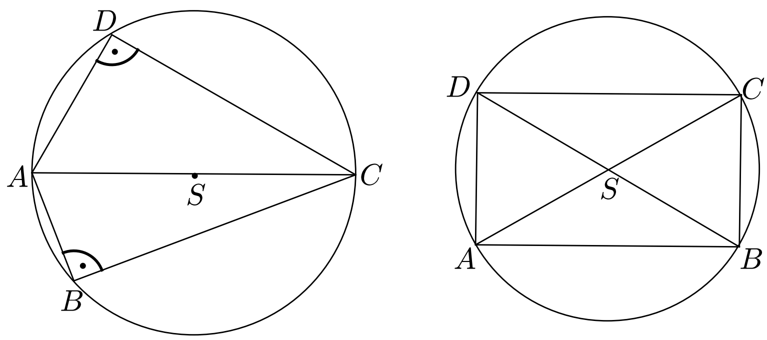
Obr. k úloze 2.5.9

odkud plyne rovnost $|\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE| = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, kterou spolu se zadanou hodnotou $\gamma = 60°$ využijeme k výpočtu

$$|\sphericalangle DPE| = 180° - (|\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE|) = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - \gamma) = 120°$$

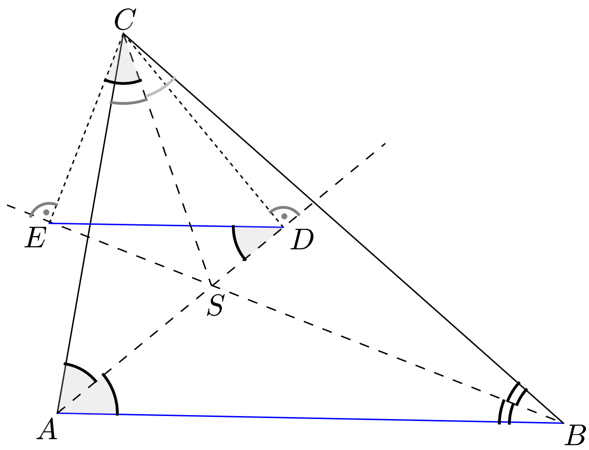
a vidíme, že čtyřúhelník $DCEP$ je tětivový. Nyní již stačí uvážit shodnost úhlů PCE, PDE, PAE a zjistíme, že trojúhelník APC je rovnoramenný a $|AP| = |PC|$, analogicky $|BP| = |CP|$ a bod P je tak středem kružnice trojúhelníku ABC opsané. □

Při řešení úloh je důležité všímat si zejména úhlů, které jsou pravé, neboť ty mohou napomoci při objevům Thaletových kružnic a potažmo i tětivových čtyřúhelníků. Čtyřúhelník, jehož dva protější vnitřní úhly jsou pravé, je totiž tětivový. Střed kružnice opsané takovému čtyřúhelníku je navíc středem jeho úhlopříčky, jež odděluje oba vrcholy pravých úhlů (viz obr. 11). Tětivové čtyřúhelníky, jejichž opsaná kružnice má střed v průsečíku úhlopříček, jsou právě obdélníky a čtverce.



Obr. 11 – tětivové čtyřúhelníky s pravými vnitřními úhly

Úloha 2.5.10. *Označme D, E paty kolmic z vrcholu C po řadě na osy úhlů α a β trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímka DE je rovnoběžná se stranou AB.*[76]



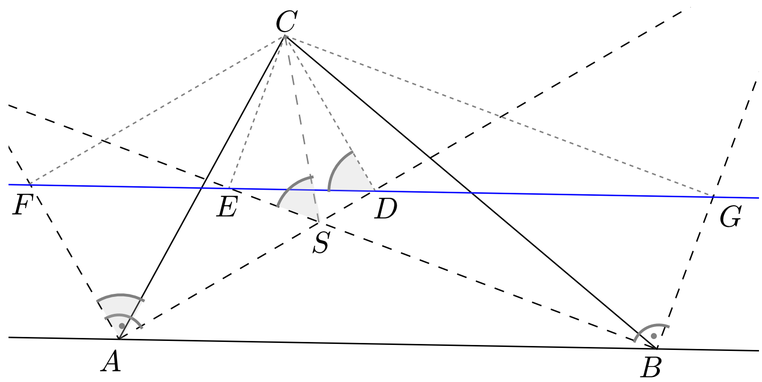
Obr. k úloze 2.5.10

Řešení:
Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají ve středu S kružnice vepsané, proto je polopřímka CS osou úhlu γ (viz obrázek). Protože úhly ASC a BSC jsou tupé, padnou body D, E na osách AS, BS až za bod S, takže jsou přímkou CS odděleny. Čtyřúhelník $SDCE$ je tětivový, neboť protější úhly SDC a CES jsou pravé, proto $|\sphericalangle SDE| = |\sphericalangle SCE|$. V pravoúhlém trojúhelníku BEC je $|\sphericalangle BCE| = 90° - \frac{\beta}{2}$, můžeme tedy určit $|\sphericalangle SCE| = |\sphericalangle BCE| - \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$, neboť v trojúhelníku ABC je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Celkem $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EDA| = \frac{\alpha}{2}$, tyto úhly jsou střídavé, a proto $AB \parallel DE$. □

Úloha 2.5.11. *Dokažte, že čtyři paty kolmic z vrcholu C trojúhelníku ABC na osy vnitřních a vnějších úhlů při vrcholech A a B leží na jedné přímce.*[77]

Řešení:
Paty zmíněných kolmic označme D, E, F, G v pořadí podle obrázku. Osy vnitřního a vnějšího úhlu u téhož vrcholu svírají pravý úhel (půlí oba vedlejší úhly, jejichž součet je úhel přímý), proto je $ADCF$ obdélník. Úhly CDF a CAF jsou tudíž shodné a jejich velikost je rovna $\frac{\gamma+\beta}{2}$, neboť úhel CAF je polovinou vnějšího úhlu u vrcholu A trojúhelníku ABC. Označme S průsečík os AD, BE vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (střed vepsané kružnice). Čtyřúhelník $CESD$ je tětivový, protože $|\sphericalangle SDC| = |\sphericalangle SEC| = 90°$. Odtud $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CSE| = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$ ($\sphericalangle CSE$ je vnější úhel v trojúhelníku CSB). Celkem $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle CDE|$, a proto body D, E, F leží na jedné přímce. Analogickým postupem dokážeme, že také body E, D, G leží na jedné přímce. □

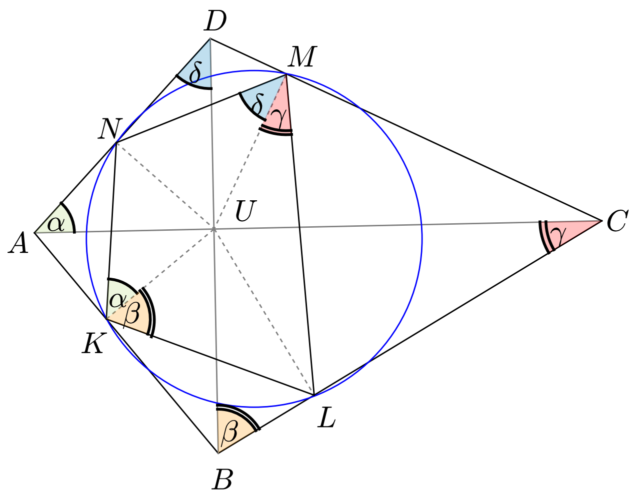
[76] [Hon–01, str. 6/5]
[77] [And–00, str. 8/4]



Obr. k úloze 2.5.11

Poznámka:
Řešení jsme mohli začít povšimnutím, že podle úlohy 2.5.10 je přímka DE rovnoběžná se stranou AB, v celém našem postupu jsme však tento poznatek nepotřebovali.

Úloha 2.5.12. *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s navzájem kolmými úhlopříčkami. Dokažte, že paty kolmic z jejich průsečíku na strany čtyřúhelníku leží na jedné kružnici.*[78]



Obr. k úloze 2.5.12

Řešení:
Označme U průsečík úhlopříček a K, L, M, N paty kolmic z bodu U po řadě na strany AB, BC, CD, AD (viz obrázek). Čtyřúhelníky $AKUN$, $BLUK$, $CMUL$, $DNUM$ jsou

[78] [Boč–84, str. 28/78], [And–00, str. 9/5] (upraveno)

tětivové, neboť vždy jejich dva protější vnitřní úhly jsou pravé. Proto

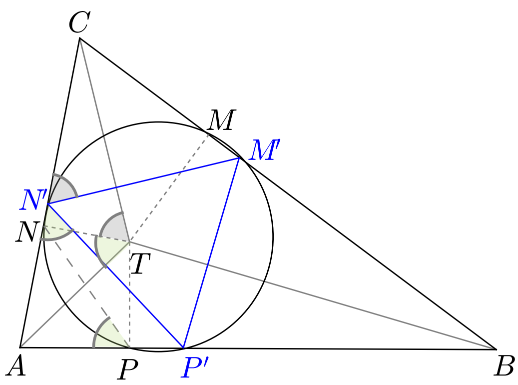
$$|\sphericalangle NKU| = |\sphericalangle NAU| = \alpha, \quad |\sphericalangle UKL| = |\sphericalangle UBL| = \beta,$$
$$|\sphericalangle LMU| = |\sphericalangle LCU| = \gamma, \quad |\sphericalangle UMN| = |\sphericalangle UDN| = \delta.$$

V pravoúhlém trojúhelníku AUD je $\alpha + \delta = 90°$, v pravoúhlém trojúhelníku CUB pak $\beta + \gamma = 90°$. Celkem

$$|\sphericalangle NKL| + |\sphericalangle LMN| = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 90° + 90° = 180°,$$

a čtyřúhelník $KLMN$ je proto tětivový. □

Úloha 2.5.13. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod T takový, že $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CTA|$ $(= 120°)$. Označme M, N, P paty kolmic z bodu T po řadě na strany BC, CA, AB. Kružnice opsaná trojúhelníku MNP protíná přímky BC, CA, AB podruhé po řadě v bodech M', N', P'. Dokažte, že trojúhelník $M'N'P'$ je rovnostranný.*[79]



Obr. k úloze 2.5.13

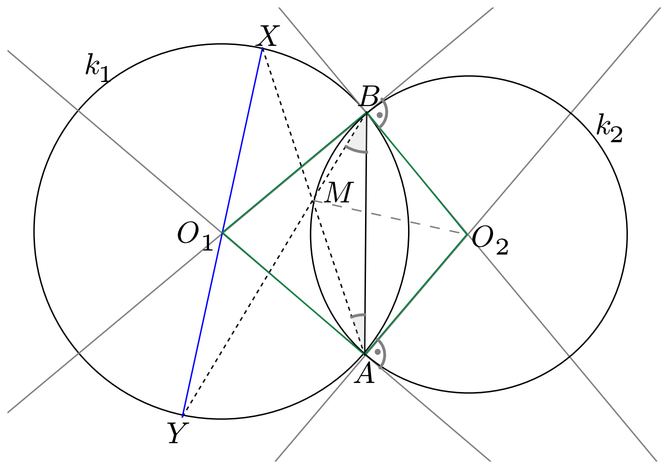
ŘEŠENÍ:
Body P, N', N, P' leží na kružnici, proto $|\sphericalangle AN'P'| = |\sphericalangle NN'P'| = 180° - |\sphericalangle NPP'| = |\sphericalangle APN|$, případně přímo $|\sphericalangle AN'P'| = |\sphericalangle NPP'| = |\sphericalangle APN|$ při jiném pořadí bodů na kružnici. Čtyřúhelník $APTN$ je tětivový, protože dva jeho protější vnitřní úhly jsou pravé, je tedy $|\sphericalangle APN| = |\sphericalangle ATN|$. Celkem $|\sphericalangle AN'P'| = |\sphericalangle ATN|$. Analogicky $|\sphericalangle CN'M'| = |\sphericalangle CTN|$. Odtud plyne, že

$$|\sphericalangle P'N'M'| = 180° - (|\sphericalangle AN'P'| + |\sphericalangle CN'M'|) = 180° - (|\sphericalangle ATN| + |\sphericalangle CTN|) =$$
$$= 180° - |\sphericalangle ATC| = 180° - 120° = 60°.$$

[79] [And–00, str. 9/11], takovému bodu T se říká *dopravní střed* (ostroúhlého) trojúhelníku ABC (též jeho *Fermatův* či *Torricelliův* bod). Je to totiž ten bod X roviny ABC, pro který má součet $|AX| + |BX| + |CX|$ nejmenší hodnotu.

Stejnými úvahami obdržíme také $|\sphericalangle N'P'M'| = |\sphericalangle N'M'P'| = 60°$, tudíž trojúhelník $M'N'P'$ je vskutku rovnostranný. □

Úloha 2.5.14. *Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B a jejich tečny v každém z těchto bodů jsou navzájem kolmé.*[80] *Na kružnici k_2 je zvolen bod M tak, aby ležel ve vnitřní oblasti kružnice k_1. Průsečíky přímek AM, BM s kružnicí k_1 (různé od A, B) jsou po řadě označeny X, Y. Dokažte že úsečka XY je průměrem kružnice k_1.*[81]



Obr. k úloze 2.5.14

Řešení:
Kolmice k tečně vedená bodem dotyku prochází středem kružnice, a proto tečny v bodech A, B ke kružnici k_1 procházejí středem O_2 kružnice k_2, stejně jako tečny v bodech A a B ke kružnici k_2 procházejí středem O_1 kružnice k_1 (viz obrázek). K důkazu, že úhel XO_1Y je přímý, opakovaně využijeme vlastností obvodových a středových úhlů a faktu, že dva z vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku AO_2BO_1 jsou pravé, takže zbylé dva úhly u vrcholů O_1, O_2 se doplňují do 180°:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle MAB| + |\sphericalangle MBA| &= \tfrac{1}{2}|\sphericalangle MO_2A| + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle MO_2B| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BO_2A|,\\
|\sphericalangle XO_1Y| &= |\sphericalangle XO_1B| + |\sphericalangle AO_1B| + |\sphericalangle YO_1A| =\\
&= 2|\sphericalangle XAB| + 2|\sphericalangle YBA| + |\sphericalangle AO_1B| =\\
&= 2(|\sphericalangle MAB| + |\sphericalangle MBA|) + 180° - |\sphericalangle BO_2A| =\\
&= |\sphericalangle BO_2A| + 180° - |\sphericalangle BO_2A| = 180°.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že body X, O_1, Y leží na jedné přímce a úsečka XY je tedy průměrem kružnice k_1. □

[80] Právě takové dvě kružnice se nazývají *k sobě kolmé*, viz [Boč–95, str. 34].

[81] [Fom–94, str. 7/26]

Úhly ve třech kružnicích se společným bodem

Úlohy v této části jsou vzájemně provázané a mají společný námět – tři kružnice protínající se v jednom bodě. Užitými prostředky však přímo navazují na předchozí část, neboť jsou při jejich řešení využívány vlastnosti úhlů příslušných oblouku kružnice.

Úplná řešení těchto úloh jsou poměrně zdlouhavá, protože vyžadují diskusi o všech možných vzájemných polohách (konfiguracích) zadaných kružnic. Při rozboru takové situace záleží na tom, jakou vzájemnou polohu mají čtyři body – průsečík P všech tří kružnic a jejich tři další (různé) průsečíky A, B, C po dvou z nich. Jejich možné vzájemné polohy (získané zafixováním dvou kružnic a změnou polohy třetí) ilustrujeme souborem obrázků na následující straně. Z důvodu rozsahu práce k řešení často vybíráme jen jednu z poloh, znázorněnou konkrétním obrázkem. Takové omezení nijak neubírá na instruktivnosti, neboť zbylé situace vedou k obdobným postupům řešení, a jsou proto vhodné jako náměty k procvičení tématiky.

Úloha 2.5.15. *Sestrojme trojúhelníky CBP, ACQ, BAR vně nad stranami trojúhelníku ABC tak, že součet jejich vnitřních úhlů při vrcholech P, Q, R je úhel přímý. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům CBP, ACQ, BAR procházejí jedním bodem.*[82]

Řešení:
Označme X ($X \neq C$) průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CBP a ACQ. Bod X může mít různou polohu vzhledem k trojúhelníku ABC, dvě základní jsou zakresleny na obrázku, dále mohou oba průsečíky splývat ($X = C$) a ostatní situace se liší pouze označením bodů. Postup je vždy podobný, cílem je dokázat, že bod X leží také na kružnici opsané trojúhelníku BAR, že tedy $|\sphericalangle AXB| = 180° - |\sphericalangle ARB|$. Využijme nyní vlastnosti obvodových úhlů nejprve na obrázku vlevo:

$$|\sphericalangle BXC| = 180° - |\sphericalangle BPC|, \quad |\sphericalangle CXA| = 180° - |\sphericalangle CQA|,$$

a proto díky podmínce ze zadání

$$|\sphericalangle AXB| = 360° - (|\sphericalangle BXC| + |\sphericalangle CXA|) = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle CQA| = 180° - |\sphericalangle ARB|.$$

Podobně na obrázku vpravo

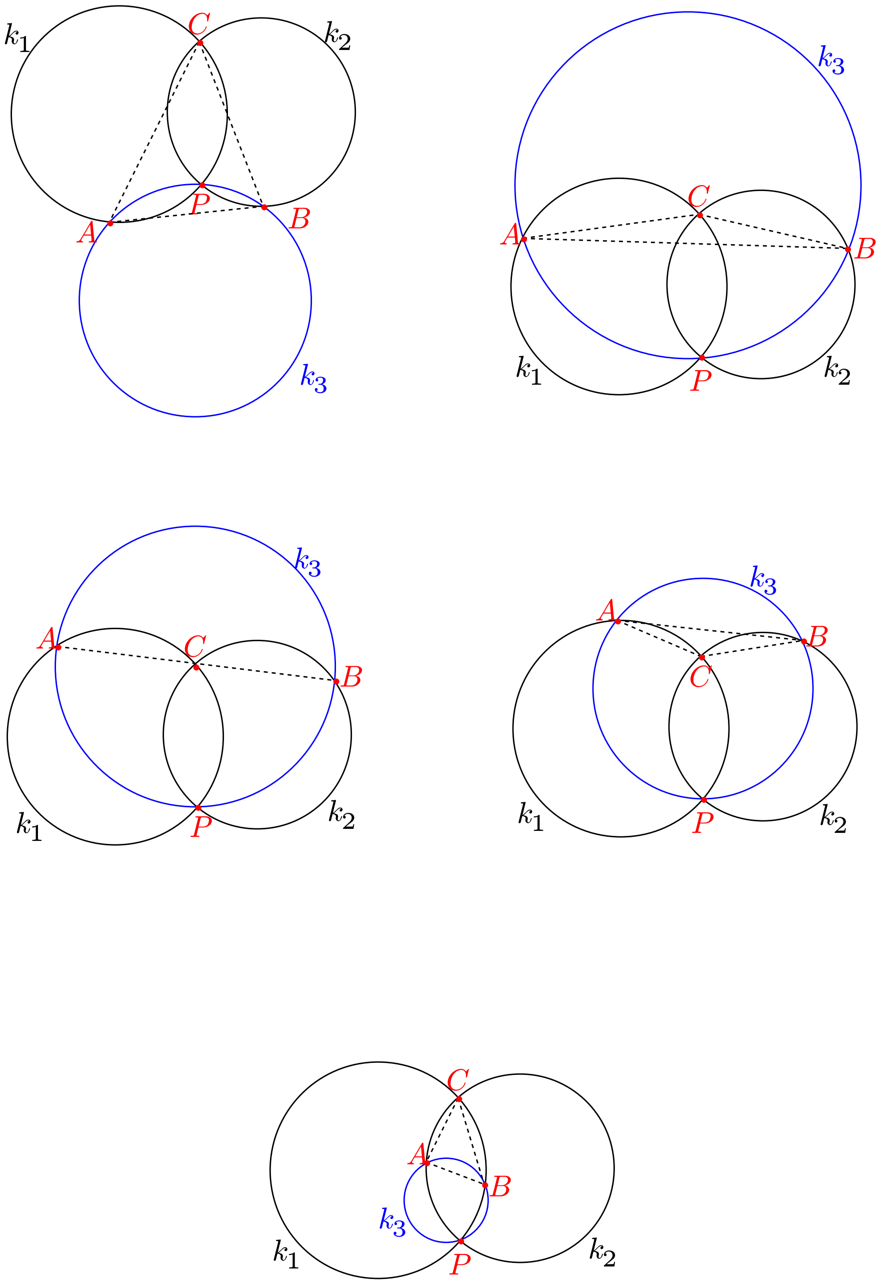
$$|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BPC|, \quad |\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CQA|,$$

a proto rovněž nyní

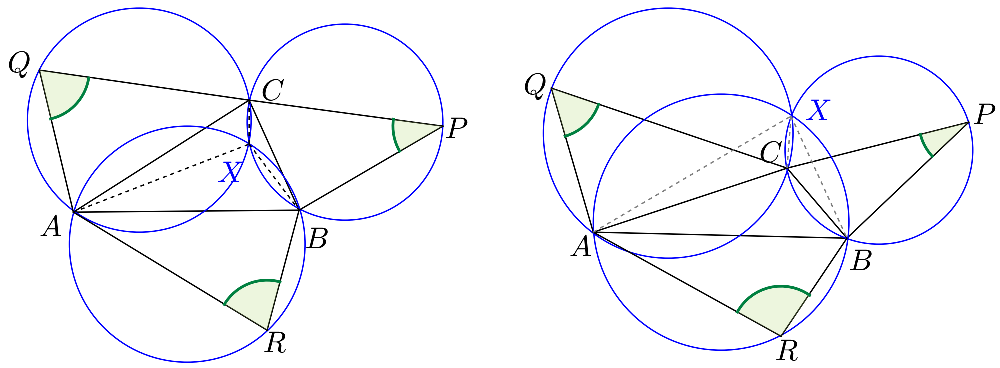
$$|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle CQA| = 180° - |\sphericalangle ARB|.$$

Nastane-li případ, kdy se kružnice opsané trojúhelníkům CBP, ACQ dotýkají, tedy $X = C$, zakreslíme jejich společnou tečnu a využitím vlastnosti úsekových úhlů opět dojdeme k požadovanému výsledku. □

[82] [Cox–67] str. 61/3.31

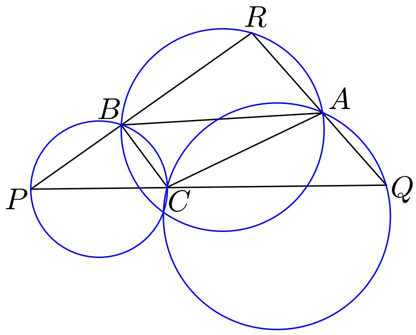


Obr. 12: Vzájemná poloha tří kružnic se společným bodem



Obr. k úloze 2.5.15

Úloha 2.5.16. *Leží-li vrcholy A, B, C trojúhelníku ABC po řadě na stranách QR, RP, PQ trojúhelníku PQR, pak kružnice opsané trojúhelníkům CBP, ACQ, BAR procházejí jedním bodem. Dokažte.*[83]

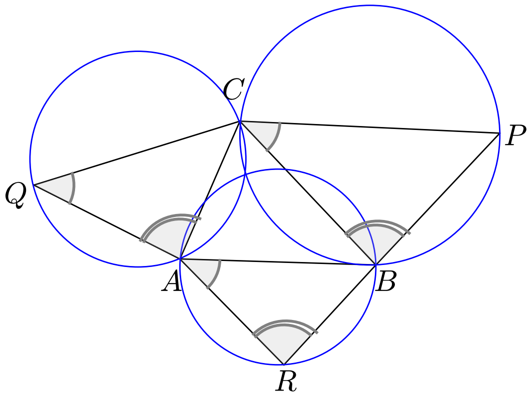


Obr. k úloze 2.5.16

Řešení:
Jedná se o přímý důsledek tvrzení z předchozí úlohy 2.5.15, neboť součet vnitřních úhlů v trojúhelníku PQR je úhel přímý. □

Úloha 2.5.17. *Sestrojme vně nad stranami trojúhelníku ABC tři navzájem podobné trojúhelníky PCB, CQA, BAR (vrcholy jsou zapsány v odpovídajícím si pořadí). Dokažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům procházejí jedním bodem.*[84]

[83] [Cox–67] str. 61/3.32, zobecněním připouštějícím body A, B, C na přímkách QR, RP, PQ je tzv. *Miquelova věta.*
[84] [Cox–67] str. 62/3.33



Obr. k úloze 2.5.17

Řešení:
Ukážeme, že se opět jedná o důsledek výsledku úlohy 2.5.15. Díky zadané podobnosti trojúhelníků (vrcholy P, Q, R si neodpovídají) je součet úhlů u vrcholů P, Q, R roven

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle CQA| + |\sphericalangle ARB| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle CBP| = 180°. \qquad \square$$

Úloha 2.5.18. *Sestrojme vně nad stranami trojúhelníku ABC tři navzájem podobné trojúhelníky PCB, CQA, BAR (v odpovídajícím si pořadí vrcholů). Dokažte, že trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy kružnic opsaných těmto podobným trojúhelníkům, je jim také podobný.*[85]

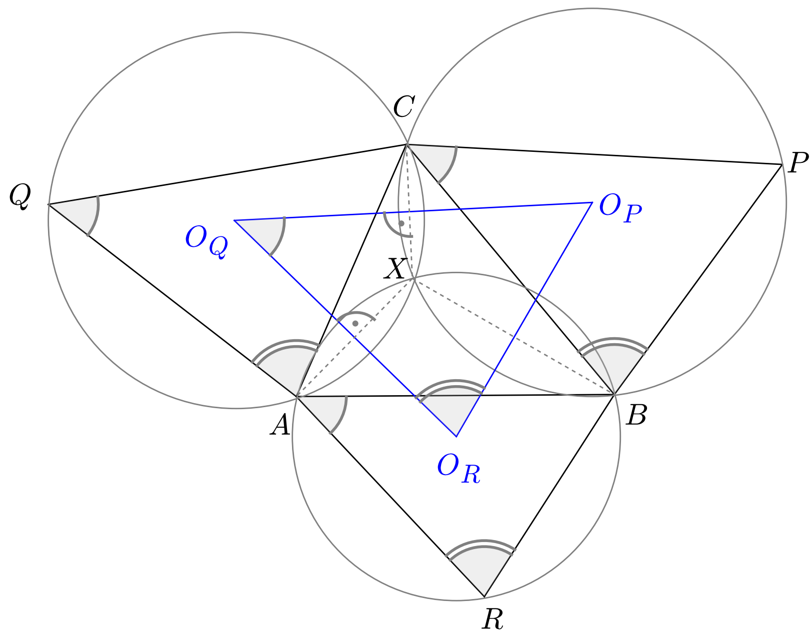
Řešení:
Označme O_P, O_Q, O_R po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům PCB, CQA, BAR, dále označme X společný bod těchto kružnic, který jistě existuje podle úlohy 2.5.17 (viz obrázek). Spojnice středů kružnic je vždy kolmá na společnou tětivu, proto

$$O_PO_Q \perp XC, \quad O_QO_R \perp XA, \quad O_RO_P \perp XB.$$

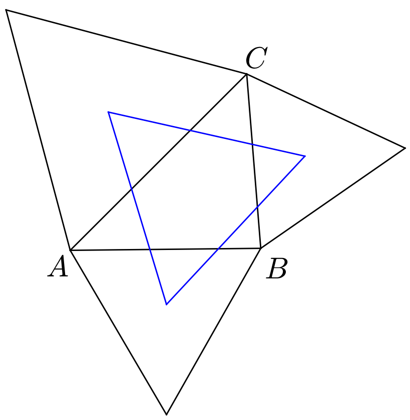
Ve čtyřúhelníku s vrcholy O_Q, střed CX, X, střed AX jsou dva vnitřní úhly pravé, proto pro zbývající úhly platí $|\sphericalangle O_PO_QO_R| = 180° - |\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AQC|$, neboť se jedná o obvodové úhly příslušné oběma obloukům AC téže kružnice. Analogicky $|\sphericalangle O_RO_PO_Q| = |\sphericalangle BPC|$, $|\sphericalangle O_QO_RO_P| = |\sphericalangle ARB|$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Úloha 2.5.19. *Sestrojme vně nad stranami trojúhelníku ABC rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že trojúhelník s vrcholy v těžištích těchto trojúhelníků je také rovnostranný.*[86]

[85] [Cox–67] str. 63/3.35
[86] [Cox–67, str. 63/3.36], tato vlastnost je známá jako *Napoleonova věta* a popsaný trojúhelník s vrcholy v těžištích jako *Napoleonův trojúhelník*. Přestože se Napoleon Bonaparte velmi zajímal o geometrii, podle [Cox–67] je uvedené tvrzení po něm pravděpodobně pouze pojmenováno, aniž by je sám Napoleon znal nebo dokonce dokázal.



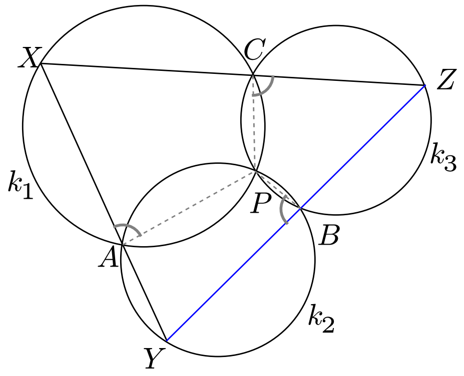
Obr. k úloze 2.5.18



Obr. k úloze 2.5.19

Řešení:
Těžiště rovnostranného trojúhelníku je také středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku a všechny rovnostranné trojúhelníky jsou si podobné, proto se jedná o speciální případ již vyřešené úlohy 2.5.18. □

Úloha 2.5.20. *Kružnice k_1, k_2, k_3 procházejí jedním bodem P. Druhý průsečík k_1 a k_2 je označen A, druhý průsečík k_2 a k_3 je označen B a konečně druhý průsečík k_3 a k_1 je* *označen C. Na kružnici k_1 je zvolen libovolný bod X, přímka XA protíná kružnici k_2 v bodě Y ($Y \neq A$), přímka XC protíná kružnici k_3 v bodě Z ($Z \neq C$). Dokažte, že body Y, B, Z leží v jedné přímce.*[87]



Obr. k úloze 2.5.20

Řešení:

Dva různé body na kružnici vymezují dva její oblouky, jimž přísluší obvodové úhly o součtu 180°. Stejný součet dávají také každé dva vedlejší úhly, proto v situaci znázorněné na obrázku postupně dostáváme:

$$|\sphericalangle YBP| = 180^\circ - |\sphericalangle YAP| = |\sphericalangle XAP| = 180^\circ - |\sphericalangle XCP| = |\sphericalangle ZCP| = 180^\circ - |\sphericalangle ZBP|$$

Z rovnosti krajních hodnot plyne $|\sphericalangle YBP| + |\sphericalangle ZBP| = 180^\circ$, a proto body Y, B, Z leží na jedné přímce. Ke stejnému závěru lze obdobnými postupy dospět i pro jiné konfigurace kružnic k_1, k_2, k_3; některé z nich ukazuje obrázek 13 na str. 112. □

Úloha 2.5.21. *Je-li P libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC, leží paty kolmic sestrojené z bodu P na přímky AB, AC, BC v přímce. Dokažte.*[88]

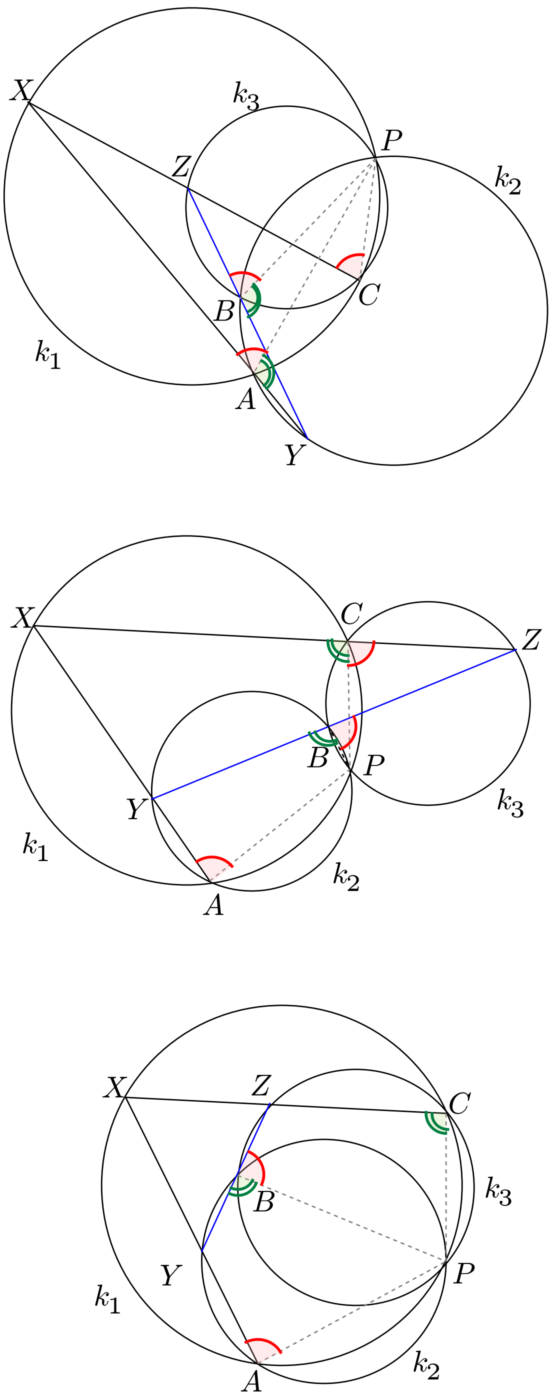
Řešení:

Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu P po řadě na přímky BC, AC, AB jako na obrázku. Body P_a, P_c leží na Thaletově kružnici τ_b nad průměrem PB a body P_a, P_b leží na Thaletově kružnici τ_c nad průměrem PC. Úhly P_bPC a P_bP_aC jsou tudíž shodné, stejně jako úhly P_cPB a P_cP_aB. Díky tomu, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, je v naší konfiguraci

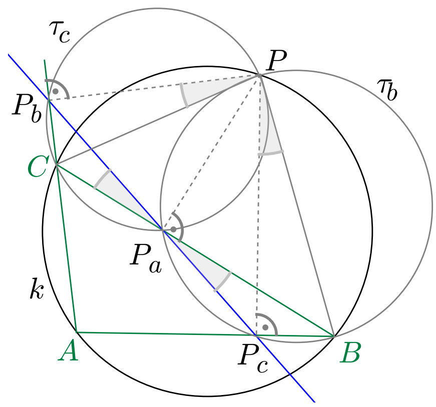
$$|\sphericalangle P_bPP_c| = 180^\circ - |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CPB|,$$

[87] [Hon–96, str. 49/8], také viz [Eng–98, str. 319/8].

[88] [Kuř–96, str. 82], taková přímka se nazývá *Simsonova přímka* (bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC).



Obr. 13 – k úloze 2.5.20



Obr. k úloze 2.5.21

a tedy také úhly P_bPC a P_cPB jsou shodné. Bod P_a leží na přímce BC, ze shodnosti úhlů P_bP_aC, P_cP_aB plyne, že bod P_a také leží na přímce P_bP_c (zmíněné úhly musí být vrcholové), což jsme měli dokázat. Podobně se postupuje i při jiných pořadích čtveřic uvažovaných bodů na kružnicích k, τ_b, τ_c. □

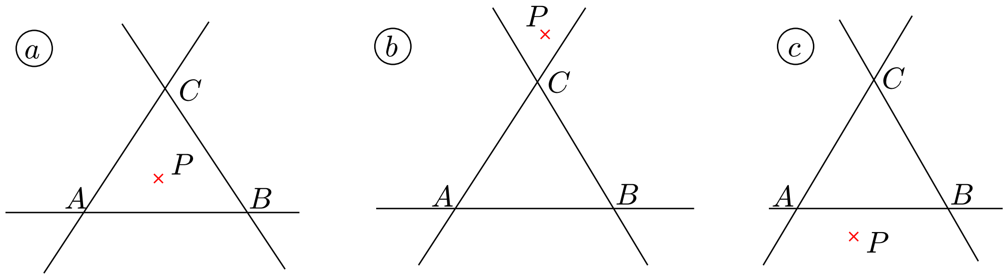
Poznámka:
K důkazu lze využít i postup z řešení předchozí úlohy 2.5.20, neboť bod P je společným bodem kružnice k opsané trojúhelníku ABC a kružnic τ_b a τ_c, dalšími průsečíky dvojic kružnic jsou body B, C a P_a.

Úloha 2.5.22. *Tři různé kružnice se stejným poloměrem procházejí bodem P. Jejich další průsečíky po dvou jsou označeny A, B, C. Dokažte, že bod P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC, jehož kružnice opsaná má stejný poloměr, jako dané tři kružnice.*[89]

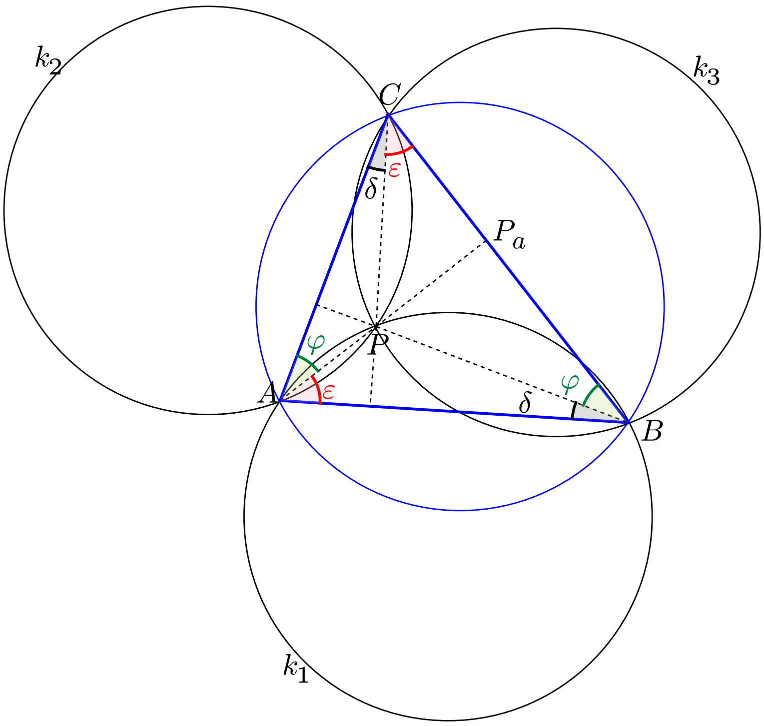
Obr. 14 – logo 40. mezinárodní matematické olympiády

Řešení:
Protože žádné tři body téže kružnice nejsou kolineární, neleží bod P na přímkách AB, AC, BC a má tak vůči nim jednu z poloh zobrazených na obrázku 15. Tyto situace postupně rozebereme. (Ukáže se, že třetí poloha je vyloučena.)

[89] Podle [Bech-99, str. 43] je autorem této úlohy známé z mnoha rumunských učebnic Gheorghe Ţiţeica. Obrázek čtveřice kružnic, které se po třech protínají ve čtyřech bodech, se stal námětem loga 40. mezinárodní matematické olympiády konané v Rumunsku roku 1999, viz obr. 14.



Obr. 15 – k úloze 2.5.22



Obr. 16 – situace a) v úloze 2.5.22

a) První možnost je podrobně rozkreslena na obrázku 16. Ze souměrné sdruženosti dvojice shodných kružnic k_1, k_2, resp. k_1, k_3, resp. k_2, k_3 podle přímek AP, resp. BP, resp. CP plyne shodnost obvodových úhlů

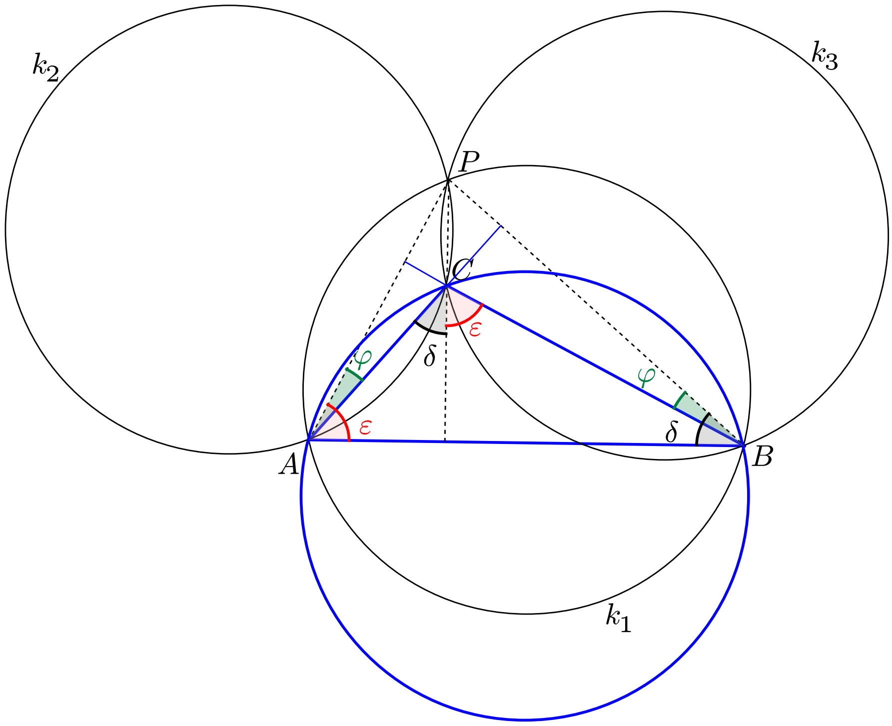
$$\delta = |\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle ABP|, \quad \varepsilon = |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BAP|, \quad \varphi = |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|.$$

Označíme-li standardně α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC, ze soustavy tří rovnic $\varepsilon + \varphi = \alpha$, $\delta + \varphi = \beta$, $\varepsilon + \delta = \gamma$ určíme

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\gamma + \beta - \alpha) = 90^\circ - \alpha, \quad \varepsilon = 90^\circ - \beta, \quad \varphi = 90^\circ - \gamma.$$

Protože bod P je v našem případě a) vnitřním bodem trojúhelníku ABC, mají úhly δ, ε, φ kladnou velikost a z vypočítaných vztahů vyplývá, že trojúhelník ABC je ostroúhlý (vnitřní úhly α, β, γ jsou menší než $90°$).

Z těchto výsledků dále plyne, že $AP \perp BC$, $BP \perp AC$, $CP \perp AB$ (například v trojúhelníku AP_aB je $|\sphericalangle AP_aB| = 180° - \varepsilon - \beta = 90°$, analogicky v ostatních případech), takže bod P je ortocentrum trojúhelníku ABC. Protože $|\sphericalangle APB| = 180° - (\varepsilon + \delta) = 180° - \gamma$, je kružnice opsaná trojúhelníku ABC obrazem kružnice k_1 v osové souměrnosti podle přímky AB, takže má stejný poloměr jako zadané kružnice k_1, k_2, k_3.



Obr. 17 – situace b) v úloze 2.5.22

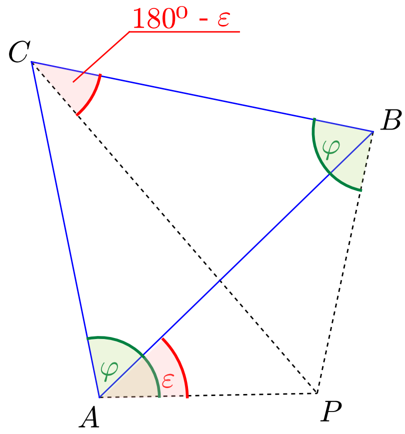
b) Druhá situace je podrobně rozkreslena na obrázku 16. Opět využijeme souměrné sdruženosti dvojic shodných kružnic, abychom nalezli dvojice shodných úhlů. Zjistíme, že

$$\begin{aligned} \delta &= 180° - |\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle ABP|, \\ \varepsilon &= 180° - |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BAP|, \\ \varphi &= |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|. \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy rovnic $\varepsilon - \varphi = \alpha$, $\delta - \varphi = \beta$, $\varepsilon + \delta = \gamma$ získáme vztahy

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\gamma + \beta - \alpha) = 90° - \alpha, \quad \varepsilon = 90° - \beta, \quad \varphi = \gamma - 90°.$$

Úhly δ, ε, φ jsou opět kladné, takže trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem u vrcholu C a platí $AP \perp BC$, $BP \perp AC$, $CP \perp AB$, takže bod P je ortocentrem trojúhelníku ABC. Můžeme také říci, že bod C je ortocentrem ostroúhlého trojúhelníku ABP. Další postup je stejný jako v části a).



Obr. 18 – situace c) v úloze 2.5.22

c) Připusťme, že bod P má polohu zakreslenou na obrázku 18. Označme k_1, k_2, k_3 shodné kružnice opsané po řadě trojúhelníků, ABP, ACP a BCP. Uvedené kružnice jsou podle zadání různé, tudíž musí být opět po dvou souměrně sdružené podle přímek AP, BP, CP. Pro obvodové úhly tedy platí

$$\begin{aligned}\varepsilon &= |\sphericalangle BAP| = 180^\circ - |\sphericalangle BCP|,\\ \varphi &= |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|.\end{aligned}$$

V trojúhelníku BCP je $|\sphericalangle BPC| = 180^\circ - (\varphi + 180^\circ - \varepsilon) = \varepsilon - \varphi$, současně je ale $\varphi = |\sphericalangle CAP| > |\sphericalangle BAP| = \varepsilon$, čímž docházíme ke sporu a danou polohu bodu P můžeme vyloučit.

□

2.6 Pythagorova věta

Pythagorova věta je základním, dobře známým a přitom velmi silným prostředkem řešení výpočtových úloh v geometrii. V analytické geometrii se její zásadní metrická role projevuje při výpočtu vzdálenosti dvou bodů z jednotlivých rozdílů jejich souřadnic. I v mnoha neanalytických řešeních vyjadřujeme délku úsečky pomocí jejích průmětů do dvou navzájem kolmých směrů a tím vlastně vhodné pravoúhlé souřadnice skrytě zavádíme. Úlohy řešené Pythagorovou větou jsme rozdělili do těchto odstavců:

▷ Úhlopříčka čtverce

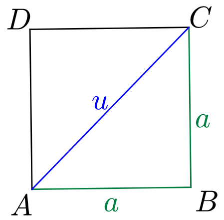
▷ Přímé použití Pythagorovy věty

▷ Společné tečny kružnic
▷ Rovnice sestavené pomocí Pythagorovy věty
▷ Důkazové úlohy

Úhlopříčka čtverce

V úvodních úlohách je použití Pythagorovy věty skryto v podobě důkazu následujícího jednoduchého tvrzení.

Pro délku u úhlopříčky čtverce o straně a (resp. pro délku u přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délky a) platí $u = a\sqrt{2}$.



Obr. 19 – úhlopříčka čtverce

Skutečně, užijeme-li Pythagorovu větu v rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC na obr. 19, dostáváme $u = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Již na těchto úvodních úlohách se také projeví důležitá metoda řešení spočívající ve vyjádření téže vzdálenosti dvěma různými způsoby, následném porovnání a vyjádření neznámé z takto vzniklé rovnice.

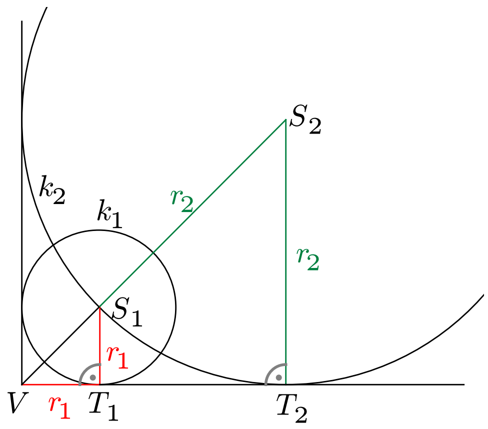
Úloha 2.6.1. *Každá ze dvou kružnic se dotýká obou ramen téhož pravého úhlu, větší z nich prochází středem menší kružnice. Najděte poměr poloměrů těchto dvou kružnic.*[90]

Řešení:
Při označení podle obrázku je $|VS_2| = r_2\sqrt{2}$, ale také $|VS_2| = |VS_1| + |S_1S_2| = r_1\sqrt{2} + r_2$. Porovnáním a úpravou získáme hledaný poměr

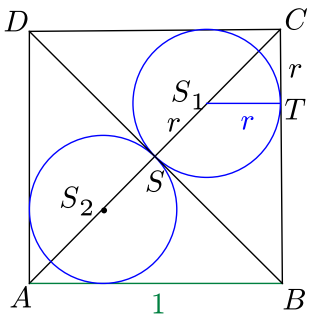
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

Úloha 2.6.2. *Ze čtverce papíru o straně* 1 *mají být vyříznuty dva shodné kruhy. Určete jejich největší možný poloměr.*[91]

[90] [Pra–86b, str. 87/17.50]
[91] [Gar–02, str. 55/16]



Obr. k úloze 2.6.1



Obr. k úloze 2.6.2

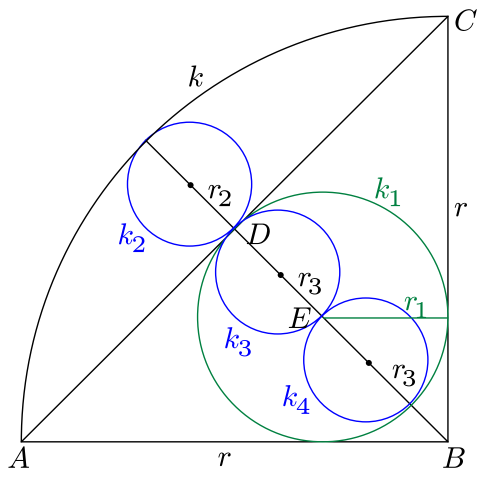
Řešení:
Zřejmá optimální konfigurace obou kruhů je zakreslena na obrázku, jejich hraniční kružnice se navzájem dotýkají ve středu S čtverce. Dvěma způsoby vyjádříme délku úsečky SC. Nejprve jako polovinu úhlopříčky čtverce o straně 1, tedy $|SC| = \sqrt{2}/2$, dále jako součet $|SC| = |SS_1| + |S_1C| = r + r\sqrt{2}$. Porovnáním a vyjádřením r získáme

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

Úloha 2.6.3. *Dokažte, že tři malé kružnice na obrázku jsou shodné.*[92]

Řešení:
Označme poloměry kružnic k, k_1, k_2, k_3 po řadě r, r_1, r_2, r_3 jako na obrázku. Protože

[92] [Yiu-98, str. 22/3], kde je podobně stručné zadání s odkazem na obrázek situace. Aby úloha měla smysl, mlčky se předpokládá, že platí vše, co obrázek naznačuje, že tedy např. úhel ABC je pravý a kružnice k_1 má střed v bodě E dotyku kružnic k_3, k_4.



Obr. k úloze 2.6.3

i kružnice k_4 má poloměr roven r_3, je naší úlohou dokázat rovnost $r_2 = r_3$. Vyjádříme proto oba poloměry r_2 a r_3 pomocí r. Průměr $2r_2$ kružnice k_2 je rozdílem poloměru r a délky úsečky BD, jež je polovinou úhlopříčky čtverce o straně r, tedy $|BD| = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$. Odtud

$$r_2 = \frac{r - \frac{1}{2}r\sqrt{2}}{2} = r\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Úsečka BE je úhlopříčkou čtverce o straně $r_1 = 2r_3$, takže $|BD| = |BE| + |ED| = 2r_3\sqrt{2} + 2r_3$, proto

$$r_3 = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = r\frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = r\frac{2-\sqrt{2}}{4} = r_2,$$

což jsme měli dokázat. □

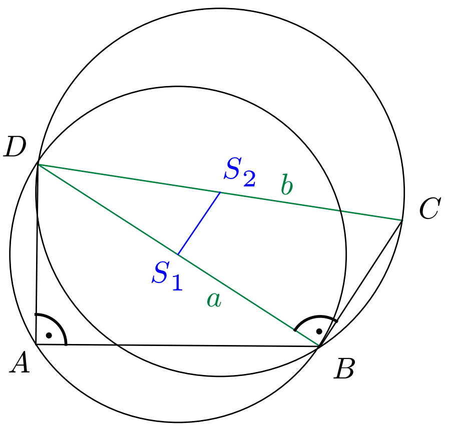
Přímé použití Pythagorovy věty

Úlohy na přímé použití Pythagorovy věty obvykle vyžadují účelný výběr pravoúhlého trojúhelníku a vhodné vyjádření délek jeho stran. Uvědomění si situace a její správné vyhodnocení je obvykle náročnější než samotný následný výpočet.

Úloha 2.6.4. *Ve čtyřúhelníku $ABCD$ je dáno: $|\sphericalangle DAB| = 90°$, $|\sphericalangle DBC| = 90°$, $|DB| = a$, $|DC| = b$. Vyjádřete pomocí délek a, b vzdálenost středů kružnic, z nichž jedna prochází body D, A, B a druhá body B, C, D.*[93]

Řešení:
Označme S_1 střed kružnice opsané trojúhelníku DAB, S_2 střed kružnice opsané trojúhelníku BCD (viz obrázek). Trojúhelník DAB je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu

[93][Šar–86, str. 11/53]



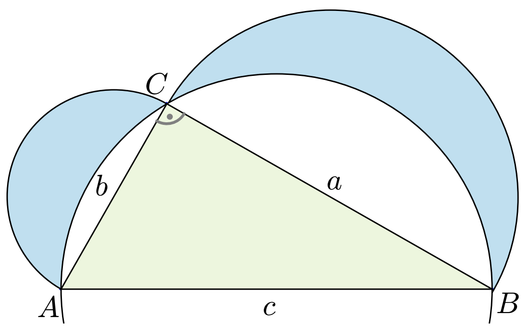
Obr. k úloze 2.6.4

A, proto je bod S_1 středem přepony BD, trojúhelník BCD je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B, proto je bod S_2 středem přepony CD. Úsečka S_1S_2 je střední příčkou trojúhelníku DBC, a proto $|S_1S_2| = \frac{1}{2}|BC|$. Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku DBC platí $|BC| = \sqrt{b^2 - a^2}$. Celkem

$$|S_1S_2| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

□

Úloha 2.6.5. *Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku jsou sestrojeny polokružnice, jak ukazuje obrázek. Dokažte, že součet obsahů vybarvených „měsíčků“ se rovná obsahu trojúhelníku.*[94]



Obr. k úloze 2.6.5

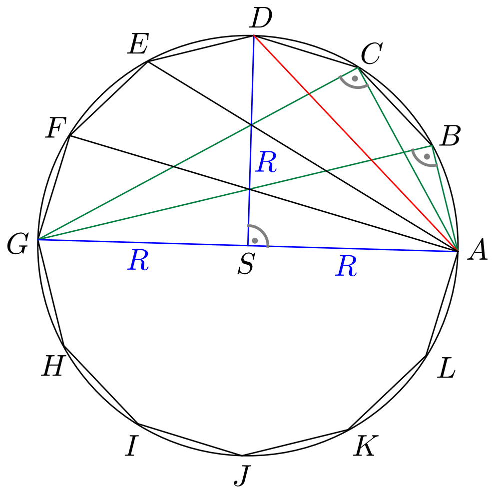
[94] Jedná se o jednu ze slavných planimetrických úloh známých pod názvem „Hippokratovy měsíčky“. Více informací o historickém pozadí úlohy je možné nalézt například v [Beč–94, str. 78–81].

Řešení:
Obsah S vybarvené plochy určíme sečtením obsahů obou polokruhů nad odvěsnami s obsahem trojúhelníku a odečtením obsahu polokruhu nad přeponou, kam přitom dosadíme $a^2 + b^2 = c^2$ z Pythagorovy věty:

$$S = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{1}{2}a)^2 + \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{1}{2}b)^2 + S_{ABC} - \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{1}{2}c)^2 = \tfrac{1}{8}\pi c^2 + S_{ABC} - \tfrac{1}{8}\pi c^2 = S_{ABC}. \qquad \square$$

Úloha 2.6.6. *Dokažte, že v pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFHGIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru R platí* [95]

$$|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |AE|^2 + |AF|^2 = 10R^2.$$



Obr. k úloze 2.6.6

Řešení:
Během řešení třikrát využijeme Pythagorovu větu. Předně v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku ASD (S je střed zmíněné kružnice) je $|AD|^2 = 2R^2$. Dále s přihlédnutím k souměrnostem máme

$$|AB|^2 + |AF|^2 = |AB|^2 + |BG|^2 = |AG|^2 = 4R^2 \quad \text{(pravoúhlý trojúhelník } ABG)$$

a podobně

$$|AC|^2 + |AE|^2 = |AC|^2 + |CG|^2 = |AG|^2 = 4R^2 \quad \text{(pravoúhlý trojúhelník } ACG).$$

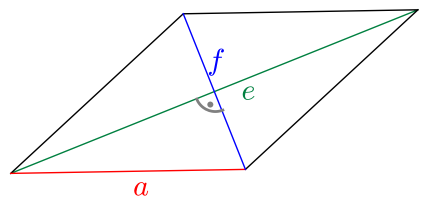
Sečtením uvedených tří rovností dostáváme zadaný vzorec. $\square$

[95] [And–03, str. 92/54], kde je úloha řešena pomocí sinové věty.

Poznámka:
Úlohu a postup řešení je možné zobecnit: pro pravidelný $2n$-úhelník $A_1A_2...A_{2n}$ vepsaný do kružnice o poloměru R platí rovnost

$$|A_1A_2|^2 + |A_1A_3|^2 + ... + |A_1A_{n-1}|^2 = 2(n-1)R^2.$$

Úloha 2.6.7. *Kosočtverec má obsah S, součet délek jeho úhlopříček je m. Vyjádřete pomocí S a m délku strany kosočtverce.*[96]



Obr. k úloze 2.6.7

Řešení:
Označme e, f, a velikost úhlopříček a strany kosočtverce (viz obrázek). Podle zadání je $e + f = m$, pro obsah kosočtverce platí $S = \frac{1}{2}ef$. Pro stranu a a rozpůlené úhlopříčky e, f z Pythagorovy věty dostáváme

$$a = \sqrt{(\tfrac{e}{2})^2 + (\tfrac{f}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(e+f)^2 - 2ef} = \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4S}. \qquad \square$$

Úloha 2.6.8. *Vyjádřete obsah rovnoramenného lichoběžníku, kterému lze vepsat kružnici, pomocí délky l jeho ramene a délky a jedné z jeho základen.*[97]

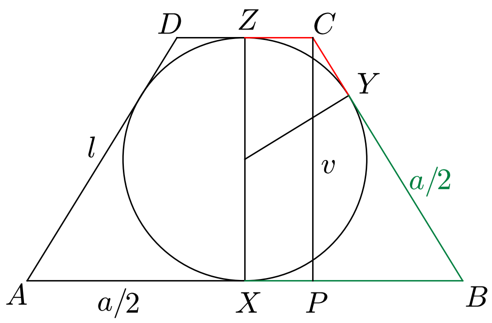
Řešení:
Zvolme označení lichoběžníku $ABCD$ tak, že $|AB| = a$ a $|BC| = |DA| = l$. Označme X, Y, Z body dotyku stran AB, BC, CD a vepsané kružnice. Bod X je středem základny AB, bod Z je středem základny CD (viz obrázek). Protože strany lichoběžníku leží na tečnách vepsané kružnice, platí

$$|YB| = |XB| = |XA| = \frac{a}{2}, \quad |ZC| = |CY| = l - |YB| = l - \frac{a}{2}.$$

Délka druhé základny je tedy $2|ZC| = 2l - a$ a zřejmě musí platit $2l > a$. Pokud by bylo a rovno l, byl by čtyřúhelník $ABCD$ čtverec. Je-li $2l > a > l$, je AB delší základna, pokud $a < l$, je AB kratší základna. Dále označme P patu kolmice z bodu C na základnu AB. Platí

$$|PB| = ||XB| - |XP|| = |\tfrac{a}{2} - (l - \tfrac{a}{2})| = |a - l|.$$

[96] [Šar–86, str. 12/59]
[97] [Šar–86, str. 10/37]



Obr. k úloze 2.6.8

Pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku PBC určíme výšku lichoběžníku

$$v = \sqrt{l^2 - |PB|^2} = \sqrt{l^2 - (a-l)^2} = \sqrt{2al - a^2} = \sqrt{a(2l-a)}.$$

Nyní již můžeme vypočítat obsah lichoběžníku podle známého vzorce

$$S = \tfrac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = \tfrac{1}{2}(a + (2l-a))\sqrt{a(2l-a)} = l\sqrt{a(2l-a)}.$$

Za povšimnutí stojí, že ve výsledku je pod odmocninou součin délek obou základen. Úloha by mohla být zadaná také tak, že místo a, l známe délky a, c obou základen, potom je $l = \frac{1}{2}(a+c)$ délka ramene a obsah lichoběžníku je $S = \frac{1}{2}(a+c)\sqrt{ac}$. □

Společné tečny kružnic

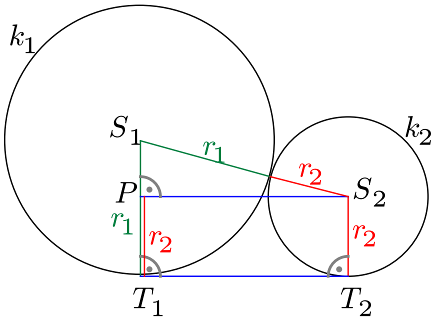
Vděčným tématem úloh na přímé použití Pythagorovy věty jsou kružnice a jejich vnitřní či vnější společné tečny. Při volbě vhodného pravoúhlého trojúhelníku využíváme poznatku, že tečna ke kružnici je vždy kolmá na spojnici středu kružnice a bodu dotyku.

Úloha 2.6.9. *Určete délku (vzdálenost bodů dotyku) vnější společné tečny dvou kružnic o poloměrech r_1, r_2, které mají vnější dotyk.*

Řešení:
Označme jako na obrázku S_1, S_2 středy kružnic, T_1, T_2 body dotyku kružnic se společnou tečnou, P patu kolmice ze středu S_2 na přímku S_1T_1. V případě $r_1 \neq r_2$ je S_1S_2P pravoúhlý trojúhelník a platí $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, $|S_1P| = |r_1 - r_2|$. K určení hledané délky užijeme Pythagorovu větu

$$|T_1T_2| = |PS_2| = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

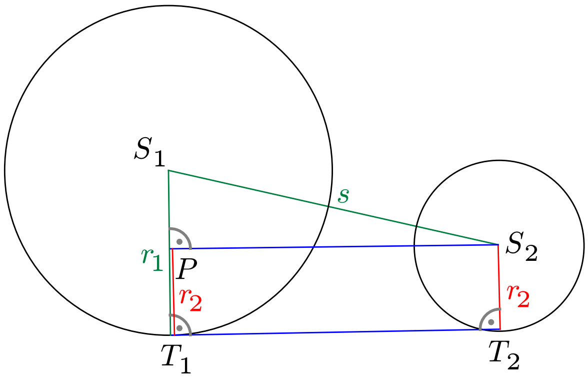
V případě $r_1 = r_2$ trojúhelník S_1S_2P neexistuje, neboť $P = S_1$ a z pravoúhelníku $S_1T_1T_2S_2$ určíme přímo $|T_1T_2| = r_1 + r_2 = 2r_1$, protože však $2\sqrt{r_1r_2} = 2r_1$, platí odvozený vztah $|T_1T_2| = 2\sqrt{r_1r_2}$ i v takovém případě. □



Obr. k úloze 2.6.9

Poznámka:
Zadáme-li (místo vnějšího dotyku kružnic) vzdálenost $s > |r_1 - r_2|$ jejich středů (viz obr. 20), určíme obdobným postupem délku vnější společné tečny

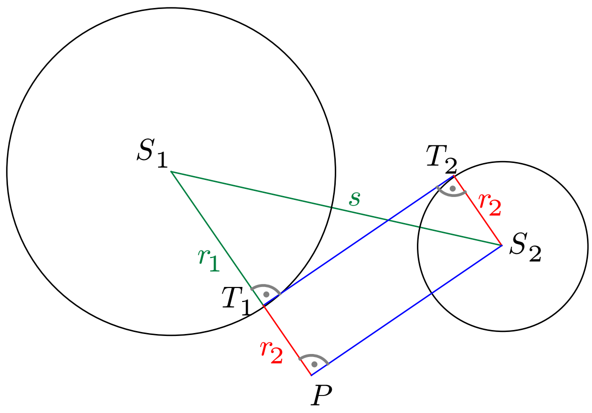
$$|T_1T_2| = |PS_2| = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(s + r_1 - r_2)(s - r_1 + r_2)}.$$



Obr. 20

Úloha 2.6.10. *Určete délku (vzdálenost bodů dotyku) vnitřní společné tečny dvou kružnic o poloměrech r_1, r_2, jejichž středy mají danou vzdálenost s.*

Řešení:
Úlohu má smysl řešit pouze za předpokladu, že společná tečna existuje a má nenulovou délku (kružnice leží navzájem vně), což můžeme vyjádřit podmínkou $s > r_1 + r_2$. Označme jako na obrázku S_1, S_2 středy kružnic, T_1, T_2 body dotyku kružnic se společnou vnitřní tečnou, P patu kolmice ze středu S_2 na přímku S_1T_1. Trojúhelník S_1PS_2



Obr. k úloze 2.6.10

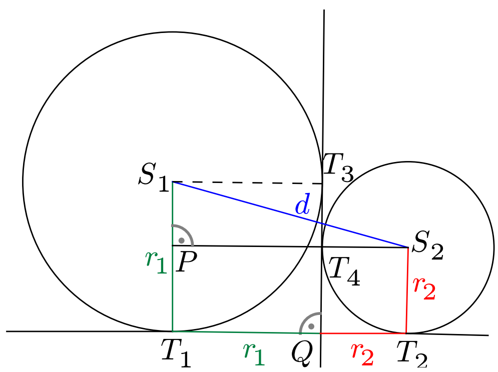
je pravoúhlý a podle Pythagorovy věty platí

$$|T_1T_2| = |PS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 - |S_1P|^2} = \sqrt{s^2 - (r_1+r_2)^2} = \sqrt{(s-r_1-r_2)(s+r_1+r_2)}$$

V případě vnějšího dotyku kružnic ($s = r_1 + r_2$) je délka vnitřní společné tečny nulová.

□

Úloha 2.6.11. *Jsou dány dvě kružnice o poloměrech r_1, r_2. Vyjádřete vzdálenost d jejich středů pomocí poloměrů, víte-li, že jejich společná vnitřní tečna je kolmá na jednu ze společných vnějších tečen.*[98]



Obr. k úloze 2.6.11

Řešení:
Při označení podle obrázku nejprve uvážíme čtverce $S_1T_1QT_3$, $S_2T_4QT_2$ a obdélník

[98] [Zim–95, str. 57/T8]

$PT_1T_2S_2$ a určíme délku $|PS_2| = |T_1T_2| = r_1 + r_2$. V pravoúhlém trojúhelníku PS_1S_2 použijeme Pythagorovu větu

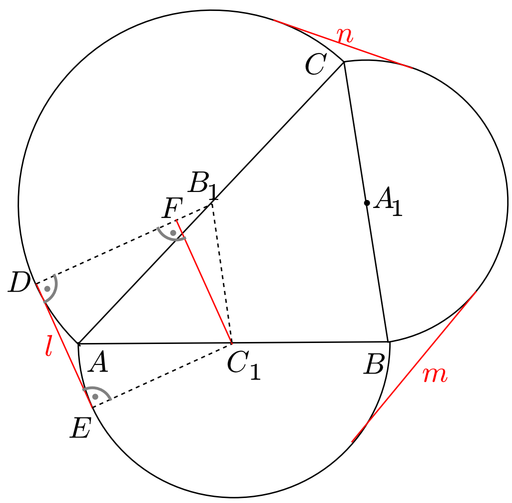
$$d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2}.$$

Tento vzorec evidentně platí i v případě $r_1 = r_2$, kdy $P = S_1$, a proto $d = 2r_1$. □

Úloha 2.6.12. *Nad stranami obecného trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny polokružnice. Jejich společné tečny mají (mezi body dotyku) délky l, m, n. Vyjádřete výraz*

$$\frac{lm}{n} + \frac{mn}{l} + \frac{nl}{m}$$

pomocí délek a, b, c stran výchozího trojúhelníku ABC.[99]



Obr. k úloze 2.6.12

Řešení:
Označme A_1, B_1, C_1 středy stran trojúhelníku (jež jsou středy sestrojených polokružnic), D, E body dotyku společné tečny polokružnic se společným krajním bodem A a F patu kolmice z bodu C_1 na přímku B_1D (viz obrázek). DEC_1F je pravoúhelník a platí $|C_1F| = |DE| = l$, B_1C_1 je střední příčkou trojúhelníku ABC, tedy $|B_1C_1| = \frac{1}{2}a$, dále $|B_1D| = \frac{1}{2}b$ a $|FD| = |C_1E| = \frac{1}{2}c$, takže $|B_1F| = \frac{1}{2}|b - c|$. Využijeme Pythagorovu větu v trojúhelníku C_1B_1F (závěr platí i v případě $b = c$, kdy $B_1 = F$):

$$l = |C_1F| = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{(b - c)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(a - b + c)(a + b - c)}.$$

[99] [Wil–96, str. 14/53]

Analogicky určíme zbývající dvě délky tečen

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)}, \quad n = \frac{1}{2}\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}.$$

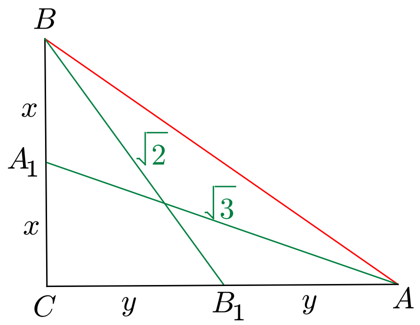
Nyní již můžeme dosadit do zadaného výrazu:

$$\frac{lm}{n} + \frac{mn}{l} + \frac{nl}{m} = \tfrac{1}{2}(a+b-c) + \tfrac{1}{2}(-a+b+c) + \tfrac{1}{2}(a-b+c) = \tfrac{1}{2}(a+b+c). \qquad \square$$

Rovnice sestavené pomocí Pythagorovy věty

Není-li zkoumaná úsečka přímo třetí stranou pravoúhlého trojúhelníku, jehož dvě strany známe, a nelze-li její délku ani jinak vyjádřit, užíváme (často opakovaně) Pythagorovy věty k sestavení rovnic, z nichž následně požadovanou délku vypočítáme. Také v těchto úlohách se často objevují kružnice a jejich tečny.

Úloha 2.6.13. *Těžnice z vrcholů proti odvěsnám pravoúhlého trojúhelníku mají délky $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$. Určete délku přepony.*[100]



Obr. k úloze 2.6.13

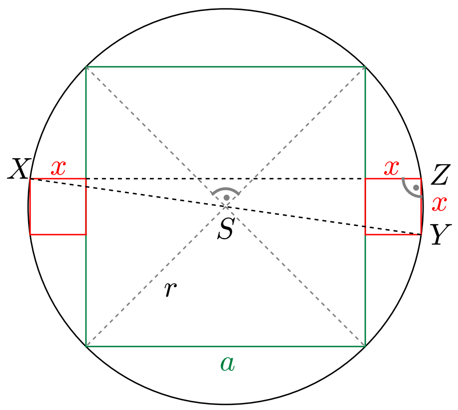
Řešení:
Zvolme označení trojúhelníku ABC podle obrázku. Použijeme Pythagorovu větu v trojúhelnících CB_1B a CAA_1:

$$4x^2 + y^2 = 2, \qquad x^2 + 4y^2 = 5,$$

sečtením těchto rovností a vydělením pěti dostáváme $x^2+y^2 = 1$. Zbývá uvážit, že podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC je $|AB|^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4$, tedy $|AB| = 2$. $\square$

Úloha 2.6.14. *Čtverci o straně a je opsána kružnice. Určete stranu menšího čtverce vepsaného do jedné ze čtyř vzniklých kruhových úsečí.*[101]

[100] [Gar–02, str. 51/22]
[101] [Šar–86, str. 12/60]



Obr. k úloze 2.6.14

Řešení:
Podle obrázku označme X, Y, Z tři vrcholy dvou zkoumaných čtverců o neznámé straně délky x. Poloměr r opsané kružnice určíme jako délku poloviny úhlopříčky čtverce, tedy $r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dále $|XZ| = a + 2x$, $|ZY| = x$ a pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku XYZ určíme $|XY| = \sqrt{|XZ|^2 + |ZY|^2} = \sqrt{a^2 + 4ax + 4x^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + 4ax + 5x^2}$. Současně platí $|XY| = 2r = a\sqrt{2}$, neboť body X, Y jsou souměrně sdružené podle středu S, takže XY je průměr kružnice. Porovnáním obou vztahů pro velikost úsečky XY a umocněním obou stran vzniklé rovnice na druhou, dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x

$$a^2 + 4ax + 5x^2 = 2a^2 \quad \text{neboli} \quad 5x^2 + 4ax - a^2 = 0,$$

jejímž jediným kladným řešením je $x = \frac{1}{5}a$. □

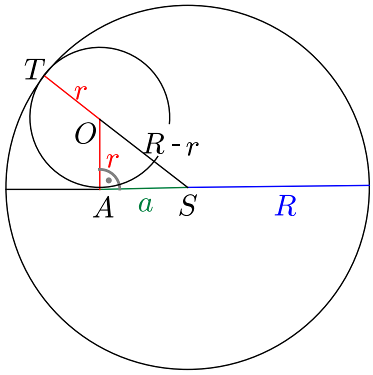
Úloha 2.6.15. *V kružnici o poloměru R je sestrojen jeden průměr a na něm je zvolen vnitřní bod A ve vzdálenosti a od středu. Určete poloměr r kružnice, která se dotýká průměru v bodě A a má s původní kružnicí vnitřní dotyk.*[102]

Řešení:
Označme S, O středy zadané, resp. hledané kružnice a T bod jejich vnitřního dotyku (viz obrázek). V pravoúhlém trojúhelníku OAS použijeme Pythagorovu větu, čímž získáme rovnici pro neznámou r, kterou rovnou vyřešíme:

$$\begin{aligned} (R-r)^2 &= r^2 + a^2, \\ R^2 - 2rR + r^2 &= r^2 + a^2, \\ r &= \frac{R^2 - a^2}{2R}. \end{aligned}$$

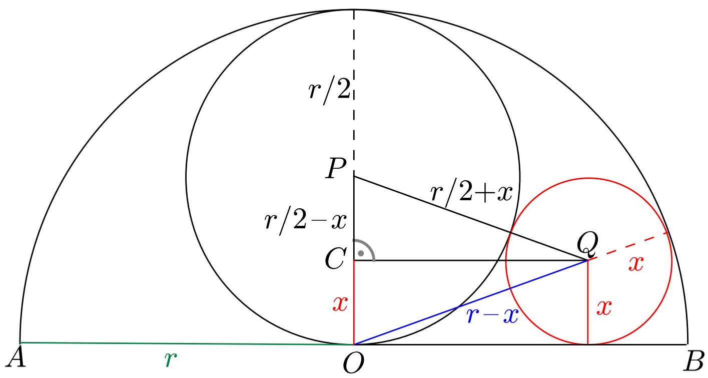
□

[102] [Šar–86, str. 13/75]



Obr. k úloze 2.6.15

Úloha 2.6.16. *Je dána kružnice se středem O a průměrem AB, dále druhá kružnice se středem P, která se dotýká úsečky AB v bodě O a má vnitřní dotyk s první kružnicí, a konečně třetí kružnice se středem Q, která se dotýká úsečky AB, první kružnice uvnitř a druhé kružnice vně (mimo bod O). Vyjádřete poloměr třetí (nejmenší) kružnice pomocí poloměru r první (největší) kružnice.*[103]



Obr. k úloze 2.6.16

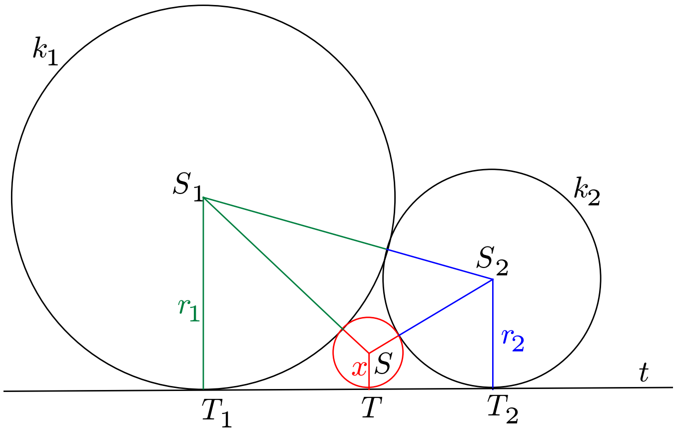
Řešení:
Označme C patu kolmice z bodu Q na poloměr PO druhé kružnice, který je zřejmě roven $\frac{1}{2}r$ (viz obrázek). Využijeme Pythagorovu větu v trojúhelnících PCQ a QCO k dvojímu vyjádření $|CQ|^2$ a pak je porovnáme:

$$|CQ|^2 = (\tfrac{1}{2}r + x)^2 - (\tfrac{1}{2}r - x)^2 = 2rx,$$
$$|CQ|^2 = (r - x)^2 - x^2 = r^2 - 2rx.$$

[103] [Zim–95, str. 23/T9]

Z lineární rovnice $2rx = r^2 - 2rx$ určíme $x = \frac{1}{4}r$. □

Úloha 2.6.17. *Kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ mají vnější dotyk a dotýkají se přímky t jako na obrázku. Vypočítejte poloměr x menší kružnice, která se dotýká obou zadaných kružnic i přímky t.*[104]



Obr. k úloze 2.6.17

Řešení:
Využijeme výsledku úlohy 2.6.9. Pro vzdálenosti bodů dotyku kružnic s přímkou t (jejich vnější společnou tečnou) platí

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad |T_1T| = 2\sqrt{r_1 x}, \quad |T_2T| = 2\sqrt{r_2 x}.$$

Navíc $|T_1T_2| = |T_1T| + |T_2T|$, takže dosazením za vzdálenosti získáme rovnici pro neznámou x, jejímž řešením dostaneme hledaný poloměr:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r_1 r_2} &= 2\sqrt{r_1 x} + 2\sqrt{r_2 x}, \\ \sqrt{r_1 r_2} &= \sqrt{x}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}), \\ x &= \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}. \end{aligned}$$

Pro zajímavost uveďme, že vztah mezi poloměry kružnic je možné přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$ □

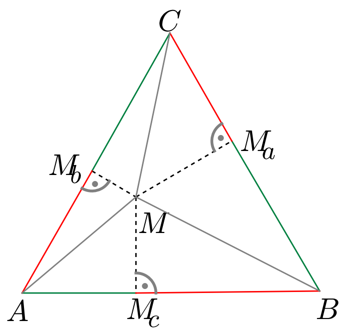
[104] [Kuř–96, str. 17/1.6], [Pra–06, str. 58/3.24]

Důkazové úlohy

Na závěr podkapitoly uveďme několik zajímavých důkazových úloh, jejichž řešení jsou celá založena na využití Pythagorovy věty.

Úloha 2.6.18. *Je dán bod M uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC. Označme M_a, M_b, M_c paty kolmic z bodu M po řadě na strany BC, AC, AB. Dokažte, že*[105]

$$|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b|.$$



Obr. k úloze 2.6.18

Řešení:
Označme a délku strany trojúhelníku ABC. Využijeme Pythagorovu větu v pravoúhlých trojúhelnících AMM_b, AMM_c, BMM_a, BMM_c, CMM_a a CMM_b (viz obrázek).

$$\begin{aligned}
|AM|^2 - |AM_c|^2 &= |MM_c|^2 = |BM|^2 - |BM_c|^2, \\
|BM|^2 - |BM_a|^2 &= |MM_a|^2 = |CM|^2 - |CM_a|^2, \\
|CM|^2 - |CM_b|^2 &= |MM_b|^2 = |AM|^2 - |AM_b|^2.
\end{aligned}$$

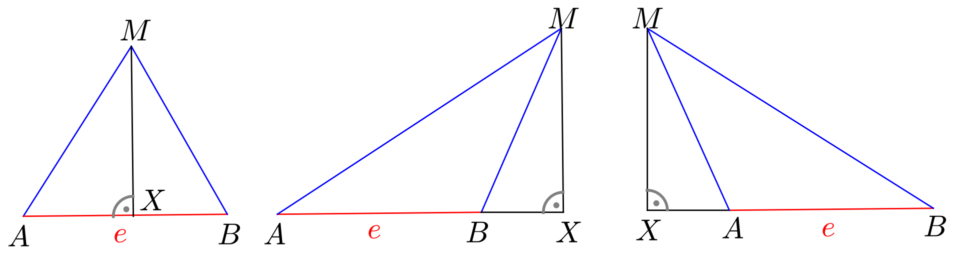
Úpravou rovností mezi krajními výrazy obdržíme

$$\begin{aligned}
|AM|^2 - |BM|^2 &= |AM_c|^2 - |BM_c|^2 = (|AM_c| - |BM_c|)(|AM_c| + |BM_c|) = \\
&= (|AM_c| - |BM_c|)a, \\
|BM|^2 - |CM|^2 &= (|BM_a| - |CM_a|)a, \\
|CM|^2 - |AM|^2 &= (|CM_b| - |AM_b|)a.
\end{aligned}$$

Sečtením uvedených rovností dostáváme

$$0 = (|AM_c| - |BM_c| + |BM_a| - |CM_a| + |CM_b| - |AM_b|)a,$$

odkud již plyne dokazované tvrzení. □



Obr. k úloze 2.6.19

Úloha 2.6.19. *Aplikací Pythagorovy věty dokažte: V rovině jsou dány dva různé body A, B. Všechny body M této roviny, pro které má výraz $|AM|^2 - |BM|^2$ jednu a tutéž hodnotu, tvoří přímku kolmou k přímce AB.*

Řešení:
K libovolnému bodu M sestrojme jeho kolmý průmět X na přímku AB. Tvrzení bude dokázáno, když ukážeme, že hodnotou $p = |AM|^2 - |BM|^2$ je bod X jednoznačně určen. Podle Pythagorovy věty platí

$$p = |AM|^2 - |BM|^2 = (|AX|^2 + |MX|^2) - (|BX|^2 + |MX|^2) =$$
$$= |AX|^2 - |BX|^2 = (|AX| + |BX|)(|AX| - |BX|)$$

Lze z hodnoty p odvozeného výrazu rekonstruovat polohu bodu X na přímce AB? Označme $e = |AB|$ a rozlišme situaci podle pořadí bodů A, B, X.

(1) Leží-li bod X na úsečce AB, platí

$$p = e(|AX| - (e - |AX|)) = e(2|AX| - e), \quad \text{odkud} \quad |AX| = \frac{p + e^2}{2e},$$

a z nerovností $0 \le |AX| \le e$ plyne, že v tomto případě platí $|p| \le e^2$.

(2) Leží-li bod X na polopřímce opačné k polopřímce BA, platí

$$p = (|AX| + (|AX| - e))e = e(2|AX| - e), \quad \text{a opět} \quad |AX| = \frac{p + e^2}{2e},$$

a z nerovnosti $|AX| \ge e$ plyne, že v tomto případě platí $p \ge e^2$.

(3) Leží-li bod X na polopřímce opačné k polopřímce AB, platí

$$p = (|AX| + (|AX| + e))(-e) = -e(2|AX| + e), \quad \text{takže} \quad |AX| = -\frac{p + e^2}{2e},$$

a z nerovnosti $|AX| \ge 0$ plyne, že v tomto případě platí $p \le -e^2$.

[105]Inspirováno [And–04, str. 59/3], [Pra–06, str. 104/5.28]

Vidíme, že srovnáním hodnot p a e^2 lze jednoznačně rozhodnout, který ze tří případů nastane. Vzorcem pro hodnotu $|AX|$ je už pak poloha bodu X určena. Pro kontrolu můžeme nyní vyzkoušet mezní případy, tedy pokud $p = e^2$, pak $X = B$ a vskutku vychází $|AX| = e$, naopak pokud $p = -e^2$, pak $X = A$ a $|AX| = 0$.

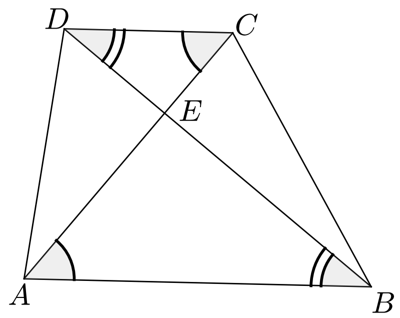
Pro pevně zvolený rozdíl $p = |AM|^2 - |BM|^2$ je tedy poloha bodu X na přímce AB dána jednoznačně. Odtud vyplývá, že všechny body M s konstantní hodnotou $|AM|^2 - |BM|^2$ pro pevně zvolené body A, B leží na jedné přímce kolmé k AB. □

Poznámka:
Důsledkem uvedeného tvrzení je poměrně známá vlastnost obecného (konvexního i nekonvexního) čtyřúhelníku, znovu uvedená a dokázaná na straně 186:

Úhlopříčky AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Při jejím důkazu pro konvexní čtyřúhelníky se obvykle (jako např. v [Boč–84, str. 28/80]) využívá kromě Pythagorovy věty i nerovností pro druhé mocniny stran ostroúhlých a tupoúhlých trojúhelníků, které plynou z kosinové věty.

Úloha 2.6.20. *Dokažte, že pokud v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD platí*
$$(|AB| + |CD|)^2 = |BD|^2 + |AC|^2,$$
pak jsou jeho úhlopříčky navzájem kolmé.[106]



Obr. k úloze 2.6.20

Řešení:
Označme E průsečík úhlopříček AC a BD (viz obrázek). Trojúhelníky ABE, CDE jsou podobné (uu), proto $|AE| : |CE| = |AB| : |CD|$, odkud plyne
$$|AE| = |AC|\frac{|AB|}{|AB| + |CD|}, \quad \text{analogicky} \quad |BE| = |BD|\frac{|AB|}{|AB| + |CD|}.$$

[106] [And–03, str. 90/36]

Dosaďme tato vyjádření do součtu $|AE|^2 + |BE|^2$ a upravujme:

$$|AE|^2 + |BE|^2 = |AC|^2 \frac{|AB|^2}{(|AB| + |CD|)^2} + |BD|^2 \frac{|AB|^2}{(|AB| + |CD|)^2} = \\ = \frac{|AB|^2}{(|AB| + |CD|)^2}(|AC|^2 + |BD|^2) = |AB|^2.$$

V posledním kroku jsme využili zadanou rovnost. Podle obrácené Pythagorovy věty je trojúhelník ABE pravoúhlý, takže skutečně $AC \perp BD$. □

2.7 Sinová věta

V celé podkapitole pod pojmem „sinová věta v základním tvaru“ rozumíme sinovou větu o poměrech stran a sinů vnitřních úhlů trojúhelníku bez využití poloměru kružnice opsané, tedy tak, jak je uvedena na straně 22. Naproti tomu pojem „sinová věta v rozšířeném tvaru“ (na straně 22) již s poloměrem kružnice opsané počítá. Toto rozlišení je účelné kvůli metodickému třídění úloh. Podkapitolu jsme rozdělili do odstavců s názvy:

- ▷ Sinová věta a výšky v trojúhelníku
- ▷ Přímé použití sinové věty v základním tvaru
- ▷ Přímé použití sinové věty v rozšířeném tvaru
- ▷ Sinová věta a Thaletova kružnice
- ▷ Využití sinové věty a vlastností goniometrických funkcí
- ▷ Sinová věta a úhly v kružnici

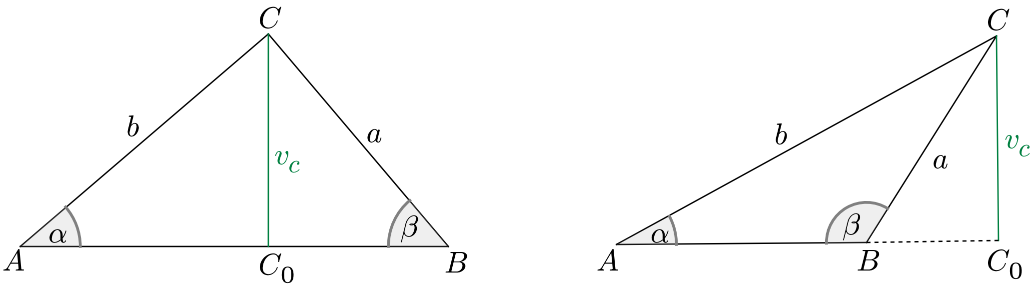
Sinová věta a výšky v trojúhelníku

Pro početní praxi je velice významná souvislost sinové věty s výškami trojúhelníku. V úloze 1.10.21 je sinová věta odvozena přímo v rozšířeném tvaru; pomocí dvojího vyjádření výšek trojúhelníku ABC je však možné okamžitě odvodit sinovou větu v základním tvaru. Z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0, kde C_0 je pata výšky na stranu AB (viz obr. 21), totiž určíme $v_c = b \sin \alpha$ a v pravoúhlém trojúhelníku BCC_0 je $v_c = a \sin \beta$. Rovnosti jsou splněny i pro tupoúhlý trojúhelník, neboť $\sin(180° - x) = \sin x$. Stejně můžeme vyjádřit i zbývající dvě výšky trojúhelníku a dostáváme rovnosti

$$(v_c =)\ a \sin \beta = b \sin \alpha, \quad (v_b =)\ a \sin \gamma = c \sin \alpha, \quad (v_a =)\ c \sin \beta = b \sin \gamma$$

Dosazením uvedených vztahů pro výšky do základního vyjádření obsahu $S = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} b v_b = \frac{1}{2} c v_c$ trojúhelníku ABC získáme trigonometrické vyjádření ze str. 23

$$S = \tfrac{1}{2} ab \sin \gamma = \tfrac{1}{2} ac \sin \beta = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha.$$



Obr. 21 – k odvození sinové věty přes výšku

Úloha 2.7.1. *Dokažte, že pro obsah S trojúhelníku ABC platí vzorce*[107]
a) $S = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$, *b)* $S = \dfrac{v_a^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}$.

c) Vyjádřete obsah S trojúhelníku ABC pomocí výšek v_a, v_b a sinu úhlu γ.[108]

Řešení:

a) Vyjdeme ze vzorce pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. Ze sinové věty v trojúhelníku ABC dostáváme $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Celkem

$$S = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

b) Za v_a v součinu $v_a{\cdot}v_a$ na pravé straně vzorce dosadíme jednou $b\sin\gamma$ a jednou $c\sin\beta$ a po zkrácení dostáváme trigonometrické vyjádření $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, takže uvedený vzorec platí.

c) Do základního vzorce $S = \frac{1}{2}av_a$ obsahu trojúhelníku ABC dosadíme $a = \dfrac{v_b}{\sin\gamma}$ a ihned obdržíme výsledek $S = \dfrac{v_a v_b}{2\sin\gamma}$.

□

Přímé použití sinové věty v základním tvaru

Řešení většiny následujících úloh potřebují skutečně pouze základní tvar sinové věty, výjimečně také vlastnosti úhlů v trojúhelníku, přitom se jedná o úlohy se zajímavým obsahem.

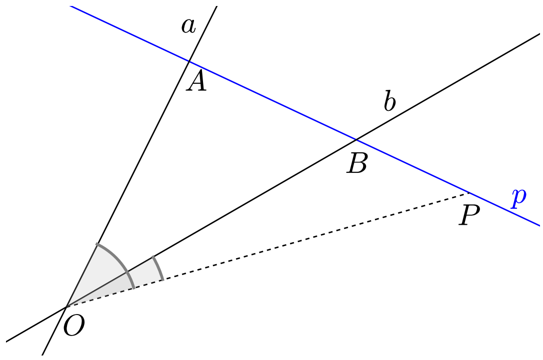
Úloha 2.7.2. *Jsou dány přímky a, b protínající se v bodě O a bod P (různý od O). Libovolná přímka p procházející bodem P (ne však bodem O) protíná přímky a, b po*

[107] [Šar–86, str. 8/15]
[108] Návrh školitele

řadě v bodech A, B. Dokažte, že hodnota poměru

$$\frac{|OA|}{|OB|} : \frac{|PA|}{|PB|}$$

nezávisí na volbě přímky p.[109]



Obr. k úloze 2.7.2

Řešení:
Využijeme sinovou větu v trojúhelnících OPA a OPB

$$\frac{|OA|}{|PA|} = \frac{\sin|\sphericalangle OPA|}{\sin|\sphericalangle POA|}, \quad \frac{|OB|}{|PB|} = \frac{\sin|\sphericalangle OPA|}{\sin|\sphericalangle POB|}$$

a dosadíme do zkoumaného poměru

$$\frac{|OA|}{|OB|} : \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|OA|\cdot|PB|}{|PA|\cdot|OB|} = \frac{\sin|\sphericalangle POB|}{\sin|\sphericalangle POA|}.$$

Hodnota získaného podílu na poloze bodů $A \in a$ a $B \in b$ skutečně nezáleží. □

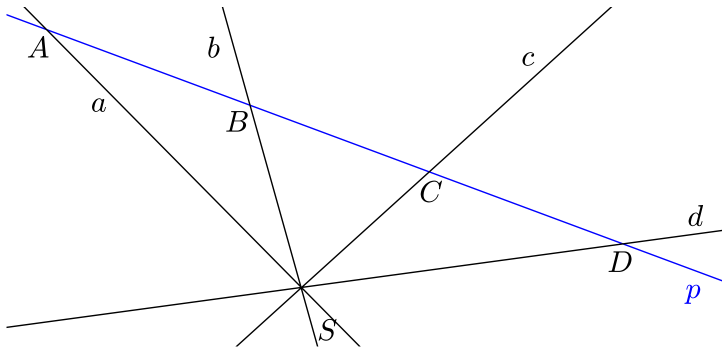
Úloha 2.7.3. *Bodem S procházejí dané přímky a, b, c, d, libovolná přímka p (která bodem S neprochází) je protíná po řadě v bodech A, B, C, D. Dokažte, že hodnoty tří součinů $|AB|\cdot|CD|$, $|AC|\cdot|BD|$ a $|AD|\cdot|BC|$ jsou ve stálém poměru nezávislém na volbě přímky p.*[110]

Řešení:
Tvrzení nejprve dokážeme pro poměr součinů $|AC|\cdot|BD|$ a $|BC|\cdot|AD|$. Pomocí sinové věty v trojúhelnících ACS, BCS, BDS a ADS určíme

$$|AC| = |AS|\cdot\frac{\sin|\sphericalangle ASC|}{\sin|\sphericalangle ACS|}, \qquad |BC| = |BS|\cdot\frac{\sin|\sphericalangle BSC|}{\sin|\sphericalangle BCS|},$$

$$|BD| = |BS|\cdot\frac{\sin|\sphericalangle BSD|}{\sin|\sphericalangle BDS|}, \qquad |AD| = |AS|\cdot\frac{\sin|\sphericalangle ASD|}{\sin|\sphericalangle ADS|}.$$

[109] [Pra–06, str. 289/12.7]
[110] [Pra–06, str. 289/12.6], upraveno.



Obr. k úloze 2.7.3

Úhly ACS, BCS, resp. ADS, BDS jsou v závislosti na rozmístění bodů A, B, C, D na přímce p buď totožné nebo vedlejší, jejich siny se tedy vždy rovnají. Po dosazení do zvoleného poměru a zkrácení dostáváme zlomek

$$(|AC|\cdot|BD|) : (|BC|\cdot|AD|) = \frac{\sin|\sphericalangle ASC|\sin|\sphericalangle BSD|}{\sin|\sphericalangle BSC|\sin|\sphericalangle ASD|},$$

jehož hodnota závisí pouze na úhlech mezi přímkami a, b, c, d, nikoliv na poloze přímky p. Prostou záměnou bodů B, C obdržíme podobný výsledek pro poměr součinů $|AB|\cdot|CD|$ a $|BC|\cdot|AD|$, takže celkem platí

$$\begin{gathered}(|AB|\cdot|CD|) : (|AC|\cdot|BD|) : (|BC|\cdot|AD|) = \\ = (\sin|\sphericalangle ASB|\sin|\sphericalangle CSD|) : (\sin|\sphericalangle ASC|\sin|\sphericalangle BSD|) : (\sin|\sphericalangle BSC|\sin|\sphericalangle ASD|). \quad \square\end{gathered}$$

Úloha 2.7.4. *Označme význačné body pěticípé hvězdy podle obrázku. Dokažte rovnost*

$$|A_1C|\cdot|B_1D|\cdot|C_1E|\cdot|D_1A|\cdot|E_1B| = |A_1D|\cdot|B_1E|\cdot|C_1A|\cdot|D_1B|\cdot|E_1C|$$

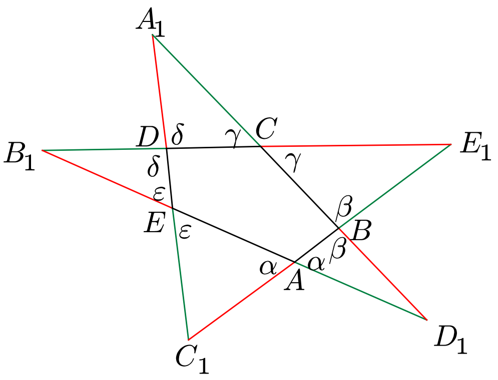
(úsečky z téže strany rovnosti jsou na obrázku vyznačeny stejnou barvou.) [111]

Řešení:
Využijeme sinovou větu v trojúhelnících A_1CD, B_1DE, C_1EA, D_1AB a E_1BC při označení úhlů podle obrázku (shodné vrcholové úhly jsou označeny stejným písmenem). Platí

$$\frac{|A_1C|}{\sin\delta} = \frac{|A_1D|}{\sin\gamma}, \quad \frac{|B_1D|}{\sin\varepsilon} = \frac{|B_1E|}{\sin\delta}, \quad \frac{|C_1E|}{\sin\alpha} = \frac{|C_1A|}{\sin\varepsilon},$$
$$\frac{|D_1A|}{\sin\beta} = \frac{|D_1B|}{\sin\alpha}, \quad \frac{|E_1B|}{\sin\gamma} = \frac{|E_1C|}{\sin\beta}.$$

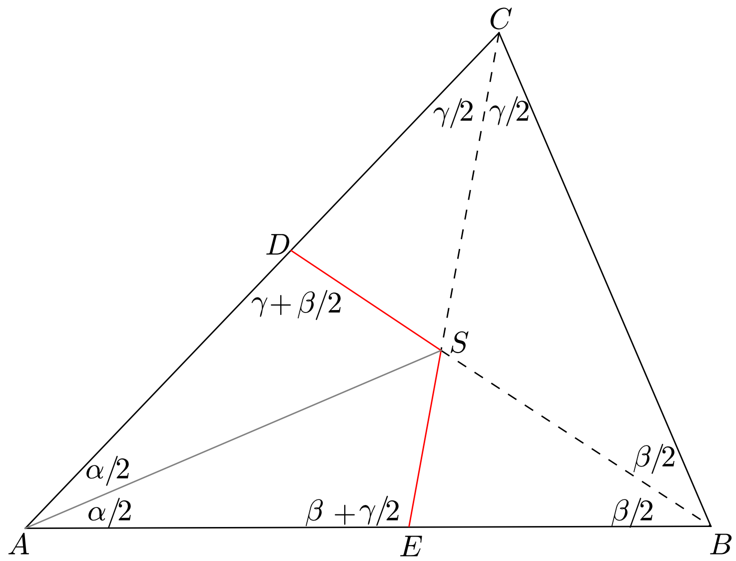
Vynásobíme-li nyní zvlášť levé a zvlášť pravé strany všech pěti rovností a porovnáme-li oba součiny, obdržíme (po odstranění sinů) dokazovanou rovnost. $\square$

[111] [Pra–06, str. 290/12.8]



Obr. k úloze 2.7.4

Úloha 2.7.5. *Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC je označen S. Osa vnitřního úhlu u vrcholu B protíná stranu AC v bodě D, osa vnitřního úhlu u vrcholu C protíná stranu AB v bodě E, přitom platí $|SD| = |SE|$. Dokažte, že platí $|\sphericalangle BAC| = 60°$ nebo je trojúhelník ABC rovnoramenný.*[112]



Obr. k úloze 2.7.5

Řešení:

Označme α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Pak $|\sphericalangle DAS| = \frac{\alpha}{2}$, úhel ASD je

[112] [Tao–06, str. 52/4.2]

vnějším úhlem trojúhelníku ABS, takže $|\sphericalangle ASD| = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ a

$$|\sphericalangle SDA| = 180^\circ - |\sphericalangle DAS| - |\sphericalangle ASD| = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \gamma + \frac{\beta}{2}.$$

Analogicky $|\sphericalangle EAS| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle ASE| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ a

$$|\sphericalangle SEA| = 180^\circ - |\sphericalangle EAS| - |\sphericalangle ASE| = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \beta + \frac{\gamma}{2}.$$

Využijeme sinovou větu v trojúhelnících ASD, ASE:

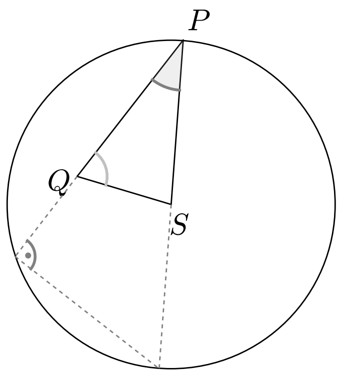
$$\frac{|SD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|SA|}{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}, \quad \frac{|SE|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|SA|}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Odkud zřejmě $|SD| = |SE|$ právě tehdy, když $\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$, což nastane ve dvou případech:

a) $\gamma + \frac{\beta}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2}$, odkud $\beta = \gamma$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC,

b) $\gamma + \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$, odkud $\beta + \gamma = 120^\circ$ neboli $\alpha = 60^\circ$. □

Úloha 2.7.6. *Ve vnitřní oblasti kružnice k se středem S je dán bod Q různý od S. Nalezněte bod P na kružnici k takový, aby byla velikost úhlu SPQ maximální.*[113]



Obr. k úloze 2.7.6

Řešení:
Pro každý bod $P \in k$ je zkoumaný úhel SPQ ostrý (nebo dokonce nulový), protože je vnitřním úhlem pravoúhlého trojúhelníku vyznačeného na obrázku. Jeho velikost

[113] [Gil–93, str. 60/29]

proto bude maximální, právě když bude maximální jeho sinus, neboť funkce sinus je na intervalu $\langle 0°, 90°)$ rostoucí. Využijeme sinovou větu v trojúhelníku SQP

$$\frac{|SP|}{\sin|\sphericalangle SQP|} = \frac{|SQ|}{\sin|\sphericalangle SPQ|}$$

a vyjádříme

$$\sin|\sphericalangle SPQ| = \frac{|SQ|}{|SP|}\sin|\sphericalangle SQP|.$$

Protože $|SQ|$ a $|SP|$ ($|SQ| < |SP|$) jsou pro libovolnou polohu bodu P konstantní veličiny, výraz na pravé straně nabývá největší hodnoty pro $|\sphericalangle SQP| = 90°$. Hledané body P jsou tedy dva průsečíky kružnice k s kolmicí k úsečce SQ vedenou bodem Q. □

Přímé použití sinové věty v rozšířeném tvaru

Obdobně jako v předchozí části uvádíme základní úlohy, při jejichž řešení je využita pouze sinová věta v rozšířeném tvaru.

Úloha 2.7.7. *Dokažte následující vzorec pro obsah S trojúhelníku ABC s obvyklým značením (r je poloměr opsané kružnice):*[114]

$$S = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Řešení:
Ze sinové věty v rozšířeném tvaru dosadíme vyjádření $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$ do vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ a dostáváme přímo

$$S = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$ □

Úloha 2.7.8. *Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod D základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCD shodné.*[115]

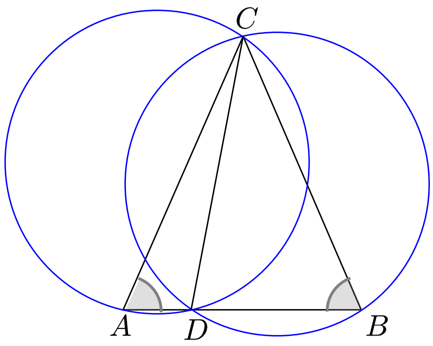
Řešení:
Poloměry obou kružnic určíme pomocí rozšířeného tvaru sinové věry v trojúhelnících ACD a BCD:

$$r_1 = \frac{|CD|}{2\sin|\sphericalangle DAC|}, \quad r_2 = \frac{|CD|}{2\sin|\sphericalangle DBC|}.$$

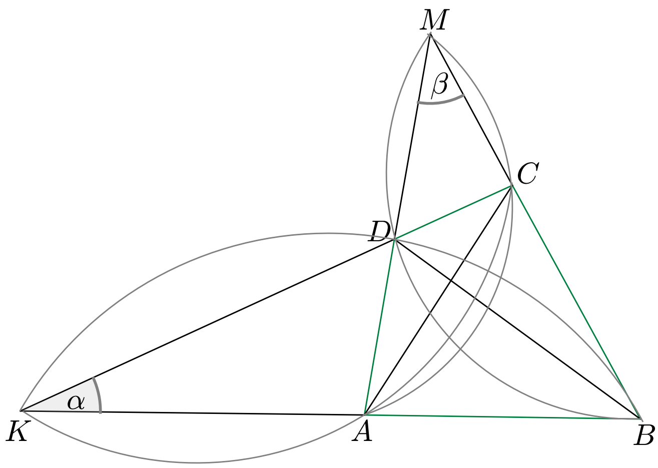
Úhly DAC a DBC u základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou shodné, proto jsou shodné i oba poloměry a tedy i kružnice. □

Úloha 2.7.9. *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že polopřímky BA, CD se protínají v bodě K a polopřímky BC, AD v bodě M. Dokažte, že pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ACM, BDK, ACK, BDM platí při zřejmém označení rovnost*[116]

$$r_{ACM} \cdot r_{BDK} = r_{ACK} \cdot r_{BDM}$$



Obr. k úloze 2.7.8



Obr. k úloze 2.7.9

Řešení:
Označme $\alpha = |\sphericalangle AKD|$, $\beta = |\sphericalangle AMB|$. Pro vyjádření poloměrů kružnic užijeme sinovou větu v příslušných trojúhelnících

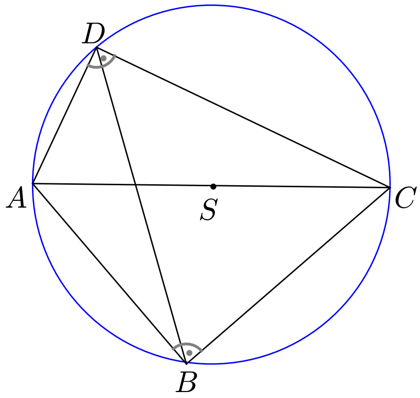
$$r_{ACM} = \frac{|AC|}{2\sin\beta}, \quad r_{BDK} = \frac{|BD|}{2\sin\alpha}, \quad r_{ACK} = \frac{|AC|}{2\sin\alpha}, \quad r_{BDM} = \frac{|BD|}{2\sin\beta}.$$

Po dosazení do levé i pravé strany dokazované rovnosti je zřejmé, že tvrzení platí. □

[114] [Šar–86, str. 8/15]
[115] [Pra–86b, str. 83/17.9]
[116] [Pra–86b, str. 87/17.51]

Sinová věta a Thaletova kružnice

Řada úloh v zadání neobsahuje zmínku o žádné kružnici, přesto při jejich řešení aplikujeme sinovou větu v rozšířeném tvaru. Pokud například během rozboru situace zjistíme, že je ze dvou různých bodů vidět určitou úsečku pod pravým úhlem, nabízí se zamyšlení nad možným využitím Thaletovy kružnice.



Obr. 22 – k sinové větě a Thaletově kružnici

Tak na obrázku 22 jsou úhly ABC a CDA pravé, body B, D proto leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Její poloměr je roven $\frac{1}{2}|AC|$, můžeme tedy podle sinové věty například pro trojúhelník BDA psát

$$\frac{|BD|}{\sin|\sphericalangle BAD|} = 2r = |AC|$$

a další podobné vztahy. Tato myšlenka je uplatněna v několika následujících úlohách.

Úloha 2.7.10. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.*[117]

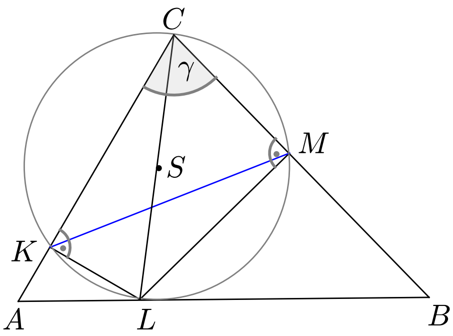
Řešení:

Úhly LKC a LMC jsou pravé, proto body K a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem CL (viz obrázek). Z rozšířeného tvaru sinové věty pro trojúhelník KMC plyne $|KM| = |CL| \sin\gamma$. Velikost úhlu γ je pro daný trojúhelník konstantní, úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL, což nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB. □

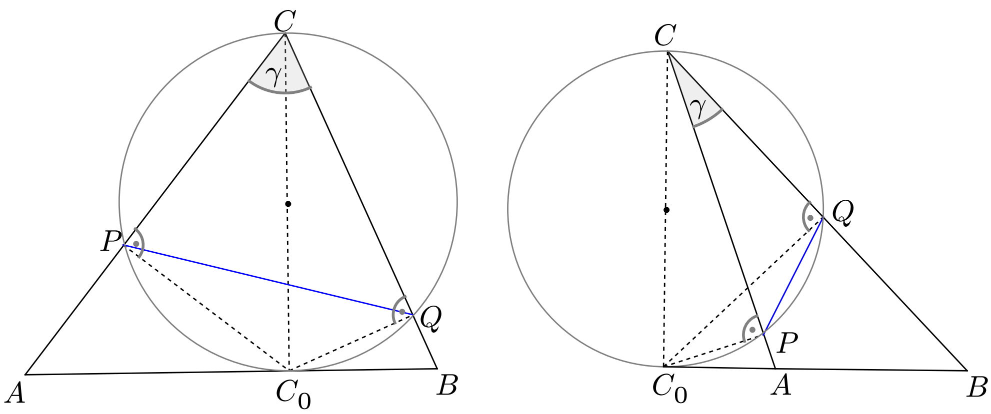
Úloha 2.7.11. *Patou výšky na libovolnou stranu trojúhelníku ABC veďme kolmice na zbývající dvě strany. Ukažte, že paty těchto dvou kolmic (tzv. druhotné paty původní výšky) mají pro všechny tři výšky stejnou vzdálenost rovnu $\frac{S}{r}$, kde S je obsah a r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.*[118]

[117] [MO, úloha 56–B–II–4]

[118] Inspirováno [Hon–95, str. 96]



Obr. k úloze 2.7.10



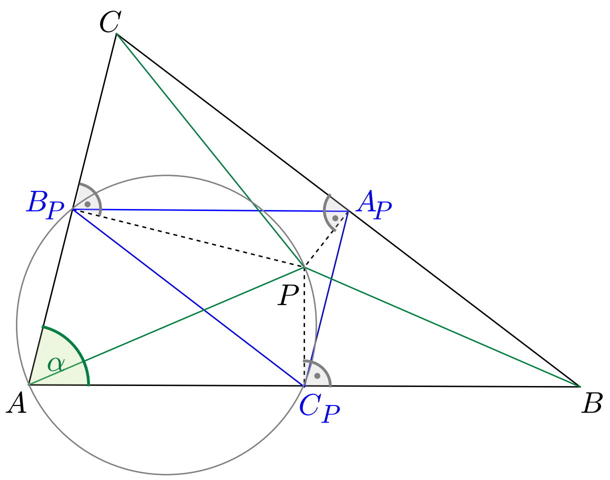
Obr. k úloze 2.7.11

Řešení:
Označme C_0 patu výšky z vrcholu C, P patu kolmice z bodu C_0 na stranu AC, Q patu kolmice z bodu C_0 na stranu BC. Úhly CQC_0, CPC_0 jsou pravé, proto body P, Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem CC_0. Z rozšířeného tvaru sinové věty v trojúhelníku PQC plyne $|PQ| = |CC_0| \sin\gamma$. Opět použijeme sinovou větu, tentokrát v trojúhelníku ABC, k vyjádření $\sin\gamma = \frac{|AB|}{2r}$, dosadíme a nahrazením výrazu $\frac{1}{2}|AB|\cdot|CC_0|$ za obsah S trojúhelníku získáme dokazované tvrzení

$$|PQ| = |CC_0| \sin\gamma = \frac{|CC_0| \cdot |AB|}{2r} = \frac{S}{r}. \qquad \square$$

Úloha 2.7.12. *Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC je dán bod P. Označme A_P, B_P, C_P paty kolmic z bodu P po řadě na strany BC, AC, AB. Určete všechny body P, pro které je trojúhelník $A_PB_PC_P$ podobný trojúhelníku ABC.*[119]

[119] Inspirováno [Pra–86b, str. 83/17.10]



Obr. k úloze 2.7.12

Řešení:
Úhly AB_PP, AC_PP jsou pravé, proto body B_P, C_P leží na Thaletově kružnici nad průměrem AP (viz obrázek). K vyjádření $|B_PC_P|$ užijeme rozšířeného tvaru sinové věty v trojúhelnících AB_PC_P a ABC

$$|B_PC_P| = |AP| \sin\alpha = |AP|\frac{a}{2r},$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Analogicky platí

$$|A_PC_P| = |BP|\frac{b}{2r}, \quad |A_PB_P| = |CP|\frac{c}{2r}.$$

Trojúhelník $A_PB_PC_P$ je podobný trojúhelníku ABC právě tehdy, když existuje kladné číslo k takové, že

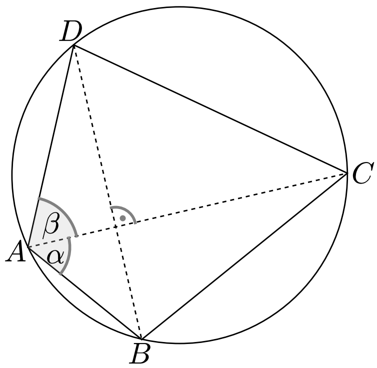
$$\frac{|B_PC_P|}{a} = \frac{|A_PC_P|}{b} = \frac{|A_PB_P|}{c} = k.$$

Takové k podle odvozených vzorců existuje pouze v případě, že $|AP| = |BP| = |CP|$, tedy pokud je bod P středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pak je $k = \frac{1}{2}$ a trojúhelník $A_PB_PC_P$ je tzv. příčkový trojúhelník, jehož vrcholy A_P, B_P, C_P jsou středy stran trojúhelníku ABC. □

Využití sinové věty a vlastností goniometrických funkcí

Při používání sinové věty je užitečné mít na paměti základní vlastnosti goniometrických funkcí, neboť díky nim můžeme řešit více úloh. V první z následujících úloh je kupříkladu využito vztahu $\cos x = \sin(90° - x)$ mezi funkcemi sinus a kosinus a tzv. goniometrické jedničky $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, které platí pro libovolný úhel x. V řešení dalších dvou úloh uplatníme goniometrické funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku, základní dobře známé goniometrické hodnoty a navíc také Pythagorovu větu. Poslední zařazená úloha překvapivě vede na řešení goniometrické rovnice užitím goniometrických vzorců.

Úloha 2.7.13. *Čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami je vepsán do kružnice o poloměru r. Vyjádřete součet čtverců jeho stran pouze pomocí r.*[120]



Obr. k úloze 2.7.13

Řešení:
V uvažovaném čtyřúhelníku $ABCD$ označme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CAD| = \beta$ jako na obrázku. Využijme nyní rozšířeného tvaru sinové věty v trojúhelnících ABC a ABD:

$$|BC| = 2r \sin\alpha, \quad |AD| = 2r \sin|\sphericalangle ABD| = 2r\sin(90^\circ - \alpha) = 2r\cos\alpha.$$

Analogicky v trojúhelnících ACD a ABD je

$$|CD| = 2r \sin\beta, \quad |AB| = 2r \sin|\sphericalangle ADB| = 2r\sin(90^\circ - \beta) = 2r\cos\beta.$$

Celkem tedy

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 4r^2(\cos^2\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha) = 8r^2.$$

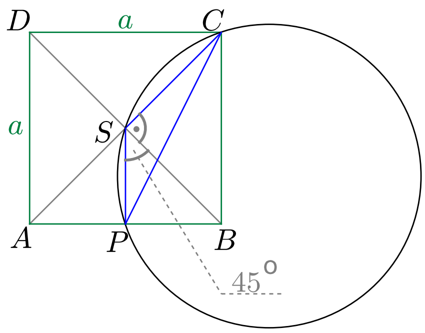
Pro zajímavost ještě uveďme, že z vypsaných vzorců navíc plynou rovnosti

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 = 4r^2,$$

přitom první z nich je ve shodě s výsledkem poznámky za úlohou 2.6.19. □

Úloha 2.7.14. *Je dán čtverec $ABCD$ o straně a. Určete poloměr kružnice procházející středem strany AB, středem čtverce a vrcholem C.*[121]

[120] [Gro–02, str. 63/11.2a]
[121] [Šar–86, str. 12/65]



Obr. k úloze 2.7.14

Řešení:
Označme S střed čtverce $ABCD$, r hledaný poloměr kružnice, P střed strany AB (viz obrázek). Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku PBC platí

$$|PC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Rozšířený tvar sinové věty v trojúhelníku PCS dává

$$2r = \frac{|PC|}{\sin|\sphericalangle PSC|},$$

odtud vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle PSC| = 135°$, vyplývá

$$r = \frac{a\frac{\sqrt{5}}{2}}{2\sin 135°} = a\frac{\sqrt{10}}{4}.$$ □

Úloha 2.7.15. *Je dána kružnice o poloměru r a tečna v jejím bodě M. Na této tečně leží body A, B tak, že $|MA| = |MB| = a$ (M je střed úsečky AB). Pomocí r, a vyjádřete poloměr kružnice procházející body A, B a dotýkající se dané kružnice.*[122]

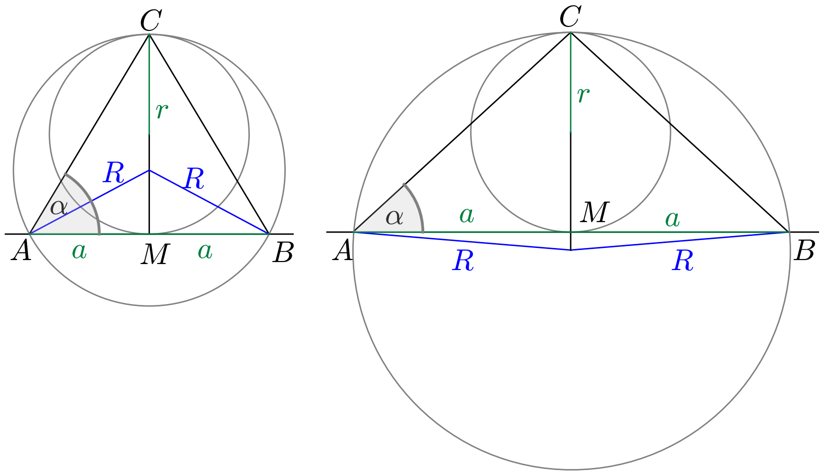
Řešení:
Označme R poloměr hledané kružnice a C bod dotyku obou kružnic (viz obrázek). Z rozšířeného tvaru sinové věty v trojúhelníku ABC dostáváme

$$2R = \frac{|BC|}{\sin\alpha},$$

kde α je úhel při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC. V pravoúhlém trojúhelníku AMC platí

$$\sin\alpha = \frac{|MC|}{|AC|}, \quad |MC| = 2r, \quad |AC| = \sqrt{a^2 + (2r)^2},$$

[122] [Šar–86, str. 12/68]

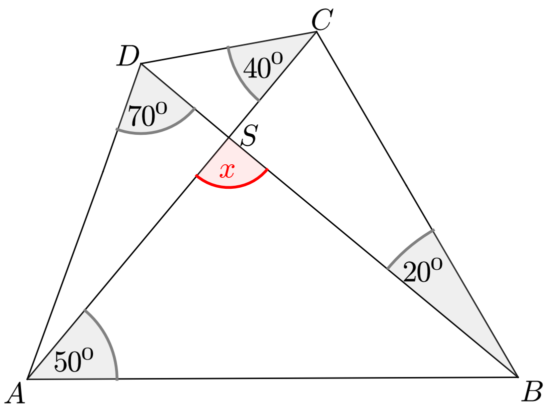


Obr. k úloze 2.7.15

odkud dohromady

$$R = \frac{|BC|}{2\sin\alpha} = \frac{|AC|}{2\sin\alpha} = \frac{|AC|^2}{2|MC|} = \frac{a^2 + 4r^2}{4r}. \qquad \square$$

Úloha 2.7.16. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ je dáno $|\sphericalangle CAB| = 50°$, $|\sphericalangle DBC| = 20°$, $|\sphericalangle ACD| = 40°$, $|\sphericalangle BDA| = 70°$. Určete velikost úhlu sevřeného úhlopříčkami.*[123]



Obr. k úloze 2.7.16

[123] [Mon–09, str. 76/C13]

Řešení:
Označme x hledaný úhel ASB, kde S je průsečík úhlopříček AC, BD. Vyjádříme neznámé velikosti úhlů u vrcholů čtyřúhelníku (viz obr.)

$$|\sphericalangle ABD| = 130^\circ - x, \quad |\sphericalangle BCA| = x - 20^\circ,$$
$$|\sphericalangle CDB| = 140^\circ - x, \quad |\sphericalangle DAC| = x - 70^\circ,$$

odkud plyne $70^\circ < x < 130^\circ$. Položme si otázku, proč vyhovující čtyřúhelník není možné sestrojit pro všechna x z uvedeného intervalu. Pro každé takové x lze jistě sestrojit trojici trojúhelníků ABS, BCS, CDS s uvedenými vnitřními úhly, stýkajících se podél společných stran BS, resp. CS. Bude však platit $|\sphericalangle ADS| = 70^\circ$? Je jasné, že bod S bude vždy průsečíkem úseček AC, BD a že úhel ASD bude mít velikost $180^\circ - x$, jež je menší než 110°. Můžeme proto sestrojit na polopřímce SA bod A' takový, že $|\sphericalangle A'DS| = 70^\circ$, a tedy $|\sphericalangle DA'S| = x - 70^\circ$. Zbývá nalézt hodnoty x, pro které bude $A' = A$. Pomocí sinové věty v trojúhelnících $DA'S$, CDS, BCS, ABS vyjádříme

$$|SA'| = |SD|\frac{\sin 70^\circ}{\sin(x - 70^\circ)}, \quad |SD| = |SC|\frac{\sin 40^\circ}{\sin(140^\circ - x)},$$
$$|SC| = |SB|\frac{\sin 20^\circ}{\sin(x - 20^\circ)}, \quad |SB| = |SA|\frac{\sin 50^\circ}{\sin(130^\circ - x)}.$$

Postupným dosazením získáme vztah

$$|SA'| = |SA|\frac{\sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\sin(130^\circ - x)\cdot\sin(x - 20^\circ)\cdot\sin(140^\circ - x)\cdot\sin(x - 70^\circ)},$$

který přejde v rovnost $|SA'| = |SA|$ pro všechna řešení rovnice

$$\sin(x - 20^\circ)\cdot\sin(140^\circ - x)\cdot\sin(130^\circ - x)\cdot\sin(x - 70^\circ) = \sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$$

z intervalu $(70^\circ, 130^\circ)$. Čtyřikrát využijeme vzorec $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ pro součin sinů (vždy první činitel se třetím a druhý se čtvrtým):

$$\frac{\cos(2x - 150^\circ) - \cos 110^\circ}{2}\cdot\frac{\cos(2x - 210^\circ) - \cos 70^\circ}{2} = \frac{\cos 30^\circ - \cos 70^\circ}{2}\cdot\frac{\cos 30^\circ - \cos 110^\circ}{2},$$

uvážíme, že $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$ a obě strany rovnice vynásobíme čtyřmi:

$$(-\cos(2x + 30^\circ) + \cos 70^\circ)(-\cos(2x - 30^\circ) - \cos 70^\circ) = (\cos 30^\circ - \cos 70^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 70^\circ),$$

na obou stranách rovnice roznásobíme závorky:

$$\cos(2x+30^\circ)\cos(2x-30^\circ)+\cos 70^\circ(\cos(2x+30^\circ)-\cos(2x-30^\circ))-\cos^2 70^\circ = \cos^2 30-\cos^2 70^\circ.$$

Rovnici anulujeme a použijeme vzorec $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ pro součin kosinů a vzorec $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ pro rozdíl kosinů:

$$\frac{\cos 4x + \cos 60^\circ}{2} - 2\cos 70^\circ \sin 2x \sin 30^\circ - \cos^2 30 = 0.$$

Po vyjádření $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$, dosazení známých hodnot $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$ a vytknutí $\sin 2x$ dostáváme již značně zjednodušenou rovnici

$$\sin 2x(\sin 2x + \cos 70°) = 0.$$

Rovnice $\sin 2x = 0$ má na intervalu $(70°, 130°)$ pouze řešení $x = 90°$. Rovnici

$$\sin 2x + \cos 70° = 0$$

upravíme užitím vzorce $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ do tvaru $\sin 2x = -\sin 20°$, abychom mohli na daném intervalu nalézt jediné řešení $x = 100°$.[124]

Poznámka:
Pro zjednodušení je možné úlohu zadat s požadavkem nalézt alespoň jedno řešení, neboť pouhým porovnáním (vhodně seřazených) argumentů ze sestavené goniometrické rovnice bez jakýchkoliv úprav uhodneme řešení $x = 90°$. □

Sinová věta a úhly v kružnici

Lineární závislosti mezi různými úhly v úlohách často umožňují zjednodušit rovnosti plynoucí ze sinové věty a tím dosáhnout potřebného výsledku. Kromě dvojic úhlů (vrcholové, vedlejší, souhlasné, střídavé) a úhlů v trojúhelníku jsou to zejména úhly v kružnici (obvodové, středové, úsekové), které mohou rozhodujícím způsobem pomoci.

V následujících úlohách jsou kromě sinové věty a vlastností úhlů v kružnici využívány také jednoduché goniometrické vzorce.

Úloha 2.7.17. *Rovnostranný trojúhelník ABC je vepsán do kružnice. Na jejím kratším oblouku BC je zvolen bod M. Dokažte, že $|MA| = |MB| + |MC|$.*[125]

ŘEŠENÍ:
Označme $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MAC| = \alpha$, $|MA| = x$, $|MB| = y$, $|MC| = z$, $|AB| = a$ (viz obrázek). Podle sinové věty v trojúhelnících MAB a MCA pro poloměr R kružnice opsané platí:

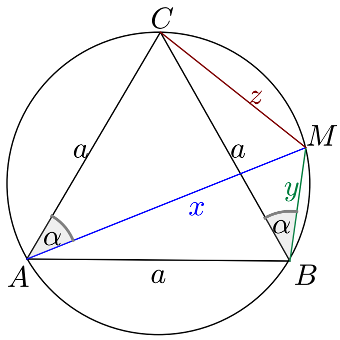
$$2R = \frac{x}{\sin(\alpha + 60°)} = \frac{y}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{z}{\sin\alpha}.$$

Odtud s využitím součtového vzorce pro funkci sinus plyne

$$\begin{aligned} x &= 2R\sin(\alpha + 60°) = R(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha),\\ y &= 2R\sin(60° - \alpha) = R(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha),\\ z &= 2R\sin\alpha. \end{aligned}$$

[124] Zatímco dosazení hodnoty $x = 90°$ do odvozené rovnice vede k triviální rovnosti, dosazením hodnoty $x = 100°$ získáme rovnost $\sin 80° \cdot \sin 40° \cdot \sin 30° \cdot \sin 30° = \sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°$, která po vyčíslení $\sin 30°$, náhradě $\sin 20° = 2 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10° = 2 \cdot \sin 10° \cdot \sin 80°$ a úpravě přejde ve známou goniometrickou identitu $\sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{1}{8}$, jejíž platnost jsme naším řešením rovnice cestou ekvivalentních úprav dokázali.

[125] [Hor–66, str. 39/13], [Eng–98, str. 321/53], [And–00, str. 4], řešení pomocí Ptolemaiovy věty je uvedeno v úloze 3.5.11 na straně 211, řešení pomocí kosinové věty je uvedeno v úloze 2.8.11 na straně 162. Úlohu je možno řešit i bez výpočtů užitím rotace o úhel 60° kolem středu B.



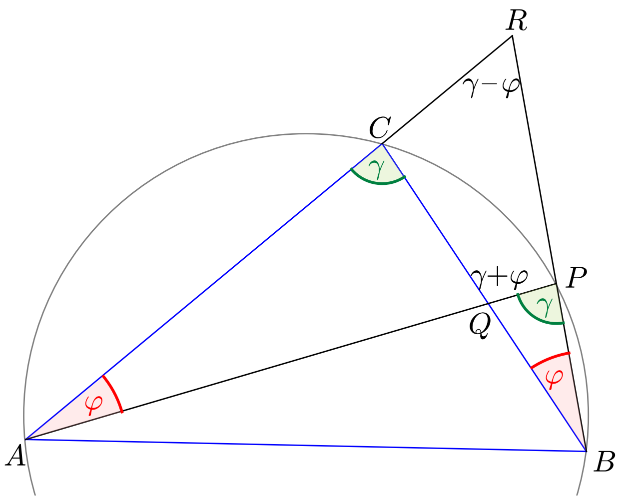
Obr. k úloze 2.7.17

Z těchto vyjádření je již rovnost $x = y + z$ zřejmá. □

Úloha 2.7.18. *Je dán trojúhelník ABC, ve kterém $\gamma \geq \alpha$. Na tom oblouku BC kružnice opsané, který neobsahuje bod A, je zvolen vnitřní bod P. Úsečka AP protíná stranu BC v bodě Q, polopřímka BP protíná polopřímku AC v bodě R. Dokažte, že hodnota výrazu*

$$\frac{|CA| \cdot |CR| - |CB| \cdot |CQ|}{|CQ| \cdot |CR|}$$

je na volbě bodu P nezávislá.[126]



Obr. k úloze 2.7.18

[126] [Mon–09, str. 64/C1]

Řešení:
Označme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle QPB| = \gamma$ a $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PBC| = \varphi$ (obvodové úhly). Úhel PQC je vnějším úhlem trojúhelníku AQC, proto $|\sphericalangle PQC| = \gamma+\varphi$, úhel ACB je vnějším úhlem trojúhelníku BRC, takže $|\sphericalangle CRB| = \gamma - \varphi$. Zadaný výraz nejprve upravíme do tvaru

$$\frac{|CA|}{|CQ|} - \frac{|CB|}{|CR|}$$

a využijeme sinovou větu v trojúhelnících AQC a BRC:

$$\frac{|CA|}{|CQ|} = \frac{\sin|\sphericalangle CQA|}{\sin|\sphericalangle QAC|} = \frac{\sin(180^\circ - (\gamma+\varphi))}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\varphi},$$
$$\frac{|CB|}{|CR|} = \frac{\sin|\sphericalangle CRB|}{\sin|\sphericalangle RBC|} = \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Dosadíme do upraveného výrazu a pak využijeme vzorce pro rozdíl sinů:

$$\frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\varphi} - \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\gamma+\varphi)-\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{2\cos\gamma\sin\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\gamma.$$

Úhel γ je konstantní, takže hodnota zadaného výrazu na poloze bodu P nezáleží. □

Úloha 2.7.19. *Středy oblouků BC, CA, AB kružnice opsané danému trojúhelníku ABC, na nichž neleží po řadě body A, B, C, označme po řadě P, Q, R a středy stran BC, CA, AB označme po řadě K, L, M. Nechť S je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Dokažte, že platí rovnost*[127]

$$|AS|\cdot|BS|\cdot|CS| = 8\cdot|KP|\cdot|LQ|\cdot|MR|.$$

Řešení:
Polopřímky AP, BQ, CR jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (viz úloha 2.5.1), využijeme proto shodných obvodových úhlů

$$|\sphericalangle ABR| = |\sphericalangle ACR| = |\sphericalangle RCB| = |\sphericalangle RAB| = \frac{\gamma}{2},$$

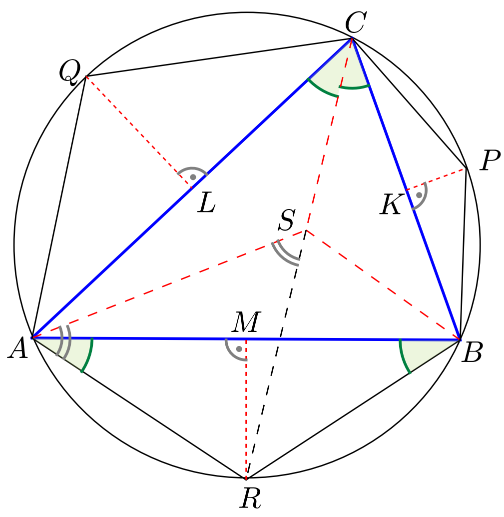
analogicky $|\sphericalangle CBP| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle ACQ| = \frac{\beta}{2}$. Můžeme také určit velikosti úhlů

$$|\sphericalangle RAS| = |\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle RAB| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \text{a}$$
$$|\sphericalangle ASR| = |\sphericalangle SAC| + |\sphericalangle ACS| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \text{(vnější úhel trojúhelníku } CAS\text{)}.$$

Trojúhelník SAR je tedy rovnoramenný se základnou AS a úhlem $|\sphericalangle SRA| = \beta$ při hlavním vrcholu R. Uplatníme v něm sinovou větu:

$$\frac{|AS|}{|AR|} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = 2\sin\frac{\beta}{2}.$$

[127] [Švr–07, str. 24/78]



Obr. k úloze 2.7.19

Užitím principu cyklické záměny obdržíme analogické vztahy

$$\frac{|BS|}{|BP|} = 2\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{|CS|}{|CQ|} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Vynásobením posledních tří rovností dostáváme po snadné úpravě a využití pravoúhlých trojúhelníků BPK, CQL, ARM

$$|AS|\cdot|BS|\cdot|CS| = 8\cdot|BP|\sin\frac{\alpha}{2}\cdot|CQ|\sin\frac{\beta}{2}\cdot|AR|\sin\frac{\gamma}{2} = 8\cdot|KP|\cdot|LQ|\cdot|MR|.$$

□

Úloha 2.7.20. *Je dán trojúhelník ABC ($|AB| \neq |BC|$). Označme D průsečík přímky BC a tečny v bodě A ke kružnici opsané trojúhelníku ABC. Kolmice k přímce BC vztyčené v bodech B, C protínají osy stran AB, resp. AC po řadě v bodech E, F. Dokažte rovnost*

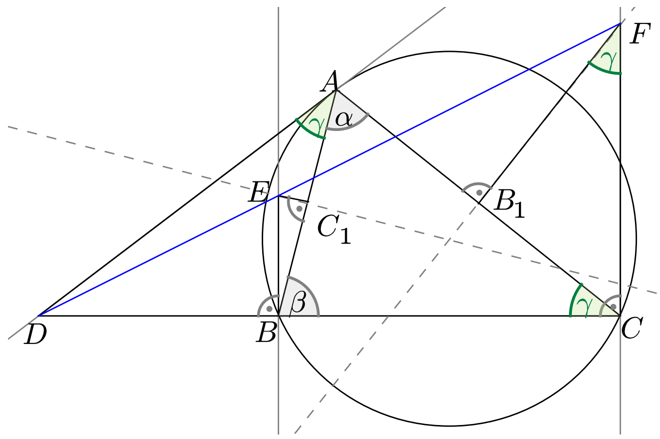
$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

(která bude znamenat, že body D, E, F leží v přímce).[128]

Řešení:

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|AC| > |BC|$ a bod D tedy leží na polopřímce CB za bodem B. Kdyby totiž platila obrácená nerovnost, stačí zaměnit B s C a také E s F a dostaneme stejné tvrzení.

[128] [Bech–07, str. 143/20.2]



Obr. k úloze 2.7.20

Označme C_1, B_1 po řadě středy stran AB, AC. V pravoúhlém trojúhelníku BC_1E je $|\sphericalangle C_1EB| = 90^\circ - |\sphericalangle EBC_1| = \beta$, takže $|BE| = \dfrac{|BC_1|}{\sin\beta} = \dfrac{|AB|}{2\sin\beta}$. Analogicky v pravoúhlém trojúhelníku CB_1F je $|CF| = \dfrac{|AC|}{2\sin\gamma}$. Nyní dosadíme do levé strany zadané rovnosti a využijeme sinovou větu v trojúhelníku ABC k vyjádření poměru $|AB| : |AC|$ pomocí poměru sinů:

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|AB|\sin\gamma}{|AC|\sin\beta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

Obdobně vyjádříme pravou stranu dokazované rovnosti. Opět využijeme sinovou větu, tentokrát v trojúhelnících ADB a ADC. Úhel BAD je úsekový úhel příslušný oblouku AB, jeho velikost je tedy γ, a proto

$$\frac{|BD|}{\sin\gamma} = \frac{|AD|}{\sin(180^\circ - \beta)}, \qquad \frac{|DC|}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{|AD|}{\sin\gamma}.$$

Zbývá uvážit, že $\sin(\alpha+\gamma) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$, a celkem dostáváme

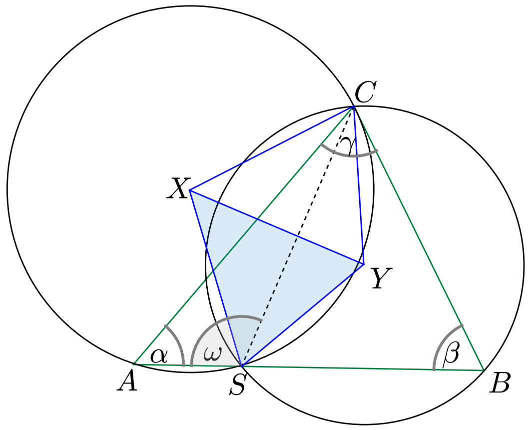
$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \frac{|BE|}{|CF|}. \qquad \square$$

Úloha 2.7.21. *Uvnitř strany AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolte bod S tak, aby trojúhelník SXY, kde X a Y jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC, měl nejmenší možný obsah.*[129]

Řešení:
Označíme-li ω velikost úhlu ASC, pomocí rozšířeného tvaru sinové věty určíme

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega}, \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180^\circ - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega}.$$

[129] [MO, úloha 52–A–II–2]



Obr. k úloze 2.7.21

Z věty o obvodovém a středovém úhlu v kružnici opsané trojúhelníku ASC (resp. BSC), s využitím souměrnosti průsečíků S a C kružnic podle přímky XY, určíme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku SXY pomocí úhlů α, β, γ trojúhelníku ABC:

$$|\sphericalangle SXY| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle SXC| = \alpha, \quad |\sphericalangle SYX| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle SYC| = \beta,$$
$$|\sphericalangle XSY| = 180^\circ - (|\sphericalangle SXY| + |\sphericalangle SYX|) = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma.$$

Trojúhelník SXY je tudíž podobný trojúhelníku CAB (uu) s koeficientem podobnosti $\dfrac{1}{2\sin\omega}$, jeho obsah je proto roven $\dfrac{S_{ABC}}{4\sin^2\omega}$. Bez užití podobnosti můžeme k témuž závěru dojít přímým výpočtem

$$S_{SXY} = \tfrac{1}{2}|SX|\cdot|SY|\sin|\sphericalangle XSY| = \frac{\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|\sin\gamma}{4\sin^2\omega} = \frac{S_{ABC}}{4\sin^2\omega}.$$

Odtud plyne nerovnost $S_{SXY} \geq \frac{1}{4}S_{ABC}$, přičemž rovnost nastane, právě když $\sin\omega = 1$, neboli $\omega = 90^\circ$. Obsah trojúhelníku SXY je proto nejmenší, právě když je bod S patou výšky z vrcholu C ke straně AB. (Tato pata je vnitřním bodem strany AB díky podmínce, že trojúhelník ABC je ostroúhlý.) □

2.8 Kosinová věta

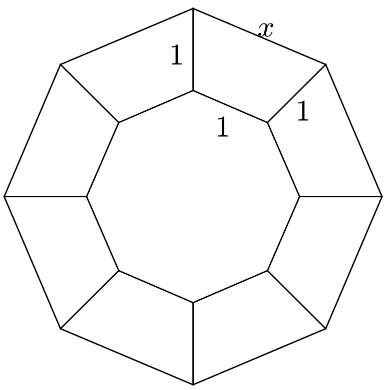
Pomocí kosinové věty můžeme určit velikost libovolného vnitřního úhlu v trojúhelníku, známe-li délky všech jeho tří stran; nebo délku strany, známe-li délky dvou zbývajících stran a velikost úhlu jimi sevřeného. Kromě uvedeného základního použití však tento silný výpočtový prostředek u složitějších situací užíváme často opakovaně, abychom mohli sestavit vhodné rovnice a teprve poté z nich určit hledanou neznámou. Obsah podkapitoly je následující:

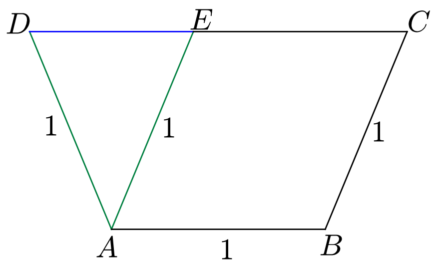
▷ Přímé použití s vyčíslením
▷ Sestavení rovnice
▷ Vyloučení kosinu
▷ Užití vzorců pro těžnice
▷ Náročnější úlohy na závěr

Přímé použití s vyčíslením

V této úvodní pasáži uvedeme několik úloh s číselným zadáním, u kterých je očekáván číselný výsledek. Pro úspěšné vyřešení je zejména nutné znát hodnoty goniometrických funkcí významných úhlů. Některé z těchto úloh mohou být snadno zobecněny, u některých je to právě uvedený speciální případ, který je touto cestou řešitelný. Vstupní sérii ukončíme poněkud odlišnou zajímavou úlohou 2.8.5, která má obecnější zadání.

Úloha 2.8.1. *Osmiúhelník na obrázku vlevo vznikl z osmi shodných rovnoramenných lichoběžníků. Určete délku delší základny lichoběžníku, je-li délka kratší základny i délka ramene rovna jedné.*[130]





Obr. k úloze 2.8.1

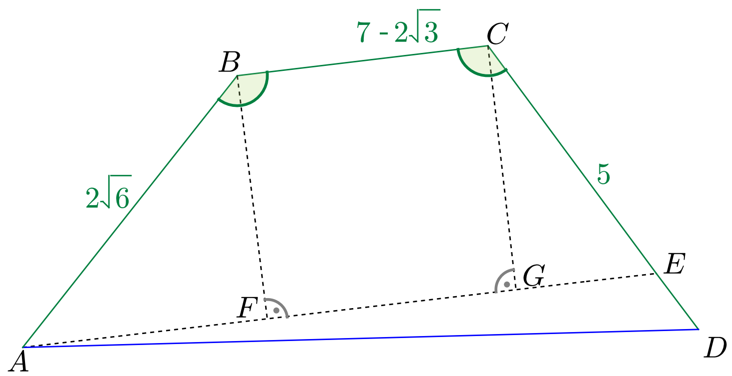
Řešení:
Na delší základně CD lichoběžníku $ABCD$ zvolíme bod E tak, že $ABCE$ je rovnoběžník (viz obr. vpravo). Podle zadání má úhel sevřený přímkami AD, BC velikost $360°/8 = 45°$, stejnou velikost má i úhel DAE. Můžeme využít kosinovou větu v trojúhelníku AED, podle které

$$|ED|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45° = 2 - \sqrt{2}.$$

Celkem $|CD| = |CE| + |ED| = |AB| + |ED| = 1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. □

130[Gar–02, str. 27/25]

Úloha 2.8.2. *Ve čtyřúhelníku ABCD je dáno* $|AB| = 2\sqrt{6}$, $|BC| = 7-2\sqrt{3}$, $|CD| = 5$, $|\sphericalangle ABC| = 135°$, $|\sphericalangle BCD| = 120°$. *Určete délku strany AD.*[131]



Obr. k úloze 2.8.2

Řešení:
Uvažme rovnoběžku se stranou BC procházející bodem A, její průsečík s polopřímkou CD označme E, paty kolmic z bodů B, C na úsečku AE označme po řadě F, G. Velikost úhlu ABF je $45°$, trojúhelník AFB je tedy pravoúhlý rovnoramenný s rameny délek

$$|BF| = |AF| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Dále $|CG| = |BF| = 2\sqrt{3}$ a $|\sphericalangle ECG| = 30°$, proto $|GE| = |CG| \operatorname{tg} 30° = 2$ a $|CE| = |CG|/\cos 30° = 4$. Nyní je již zřejmé, že bod E leží mezi body C a D. Celkem

$$|AE| = |AF| + |FG| + |GE| = 2\sqrt{3} + 7 - 2\sqrt{3} + 2 = 9,$$
$$|ED| = |CD| - |CE| = 1, \quad |\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle DCB| = 120°$$

a můžeme využít kosinovou větu v trojúhelníku ADE:

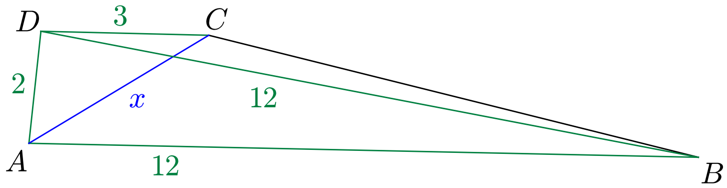
$$|AD|^2 = 9^2 + 1^2 - 18\cos 120° = 91, \quad \text{tedy} \quad |AD| = \sqrt{91}.$$ □

Úloha 2.8.3. *Základny lichoběžníku mají délky* 3 *a* 12, *jedno rameno má délku* 2 *a jedna úhlopříčka* 12. *Vypočítejte délku druhé úhlopříčky.*[132]

Řešení:
Lichoběžník $ABCD$ splňující podmínky zadání je znázorněn na obrázku; je zřejmé, že délka úhlopříčky AC je menší než $2 + 3 = 5$, je tedy $|BD| = 12$, hledaná délka druhé úhlopříčky AC je označena x. Z kosinové věty v trojúhelníku ABD vypočítáme

$$\cos|\sphericalangle BAD| = \frac{12^2 + 2^2 - 12^2}{2 \cdot 12 \cdot 2} = \frac{1}{12},$$

[131] [Zim–95, str. 11/T8]
[132] [Zim–95, str. 52/I6]

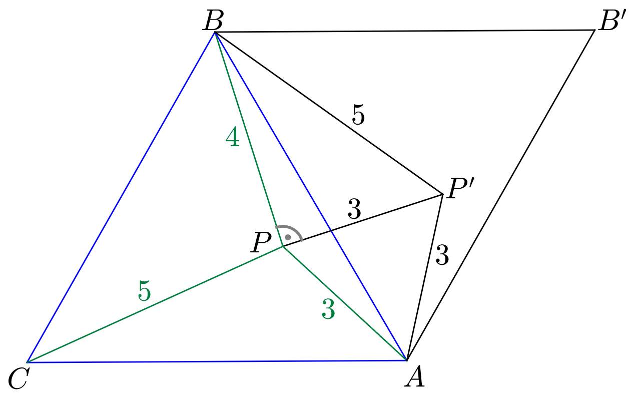


Obr. k úloze 2.8.3

uvážíme, že $\cos|\sphericalangle ADC| = \cos(180° - |\sphericalangle BAD|) = -\cos|\sphericalangle BAD| = -\frac{1}{12}$ a hledanou délku x vypočítáme užitím kosinové věty v trojúhelníku ACD:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 14, \quad \text{takže} \quad x = \sqrt{14}. \qquad \square$$

Úloha 2.8.4. *Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je bod P takový, že $|PA| = 3$, $|PB| = 4$, $|PB| = 5$. Určete délku strany trojúhelníku ABC.*[133]



Obr. k úloze 2.8.4

Řešení:
Zadané hodnoty 3, 4, 5 přímo vybízejí k nalezení pravoúhlého trojúhelníku. Pomůžeme si tedy otočením trojúhelníku ABC kolem bodu A o orientovaný úhel CAB velikosti 60° a označíme P', B' obrazy bodů P resp. B (viz obrázek). Trojúhelník $AP'P$ je rovnostranný, a proto je trojúhelník BPP' (díky délkám svých stran) pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu P. Celkem zjišťujeme, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APP'| + |\sphericalangle P'PB| = 150°$. Zbývá použít kosinovou větu v trojúhelníku ABP:

$$|AB| = \sqrt{|PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA|\cdot|PB| \cos 150°} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}. \qquad \square$$

[133] [And–00, str. 5/5]

Úloha 2.8.5. *Jakou podmínku splňují vnitřní úhly právě těch trojúhelníků ABC, pro jejichž strany platí*[134]

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}?$$

Řešení:
Zadanou rovnost pro kladné a, b, c ekvivalentně upravujeme:

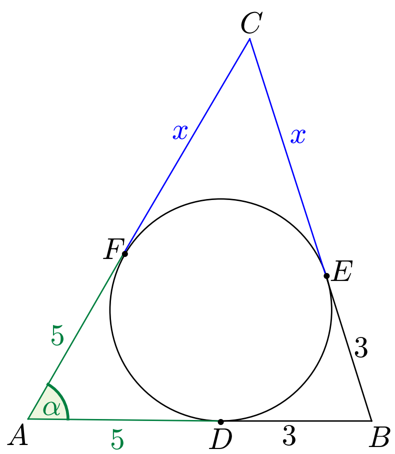
$$\begin{aligned}
3(a+b)(a+c) &= (a+b+c)[(a+b)+(a+c)],\\
3(a^2+ab+ac+bc) &= 2a^2+ab+ac+2ab+b^2+bc+2ac+bc+c^2,\\
3a^2+3ab+3ac+3bc &= 2a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc,\\
a^2 &= b^2+c^2-bc.
\end{aligned}$$

Takovou rovnost podle kosinové věty splňují právě trojúhelníky ABC s vnitřním úhlem $60°$ u vrcholu A, neboť z $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ plyne $\alpha = 60°$. □

Sestavení rovnice

V následujících úlohách vede jednorázové či opakované použití kosinové věty k sestavení jednoduché rovnice, ze které již hledanou neznámou vyjádříme vzorcem, nebo v případě číselného zadání přímo vypočítáme.

Úloha 2.8.6. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě D takovém, že $|AD| = 5$ a $|DB| = 3$. Určete délku strany BC, je-li $\alpha = 60°$.*[135]



Obr. k úloze 2.8.6

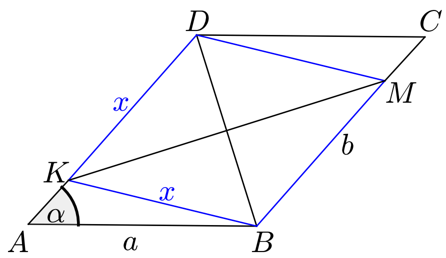
[134] [Bom–96, str. 60/6.9]
[135] [Fom–94, str. 34/28]

ŘEŠENÍ:
Označme E, F body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA. Pro shodné úseky tečen ke kružnici vepsané platí $|BE| = |BD| = 3$, $|AF| = |AD| = 5$. Neznámou délku $|CE| = |CF|$ označíme x. Nyní využijeme kosinovou větu v trojúhelníku ABC, dosadíme $\cos\alpha = 1/2$ a upravíme:

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB|\cdot|AC|\cos\alpha,\\ (x+3)^2 &= 64 + (x+5)^2 - 8(x+5),\\ x^2 + 6x + 9 &= 64 + x^2 + 10x + 25 - 8x - 40,\\ 4x &= 40.\end{aligned}$$

Řešením rovnice je $x = 10$, takže $|BC| = x + 3 = 13$. □

Úloha 2.8.7. *V rovnoběžníku $ABCD$ je dáno: $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(b > a)$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $(\alpha < 90^\circ)$. Na stranách AD, BC leží po řadě body K, M tak, že $BMDK$ je kosočtverec. Určete jeho stranu.*[136]



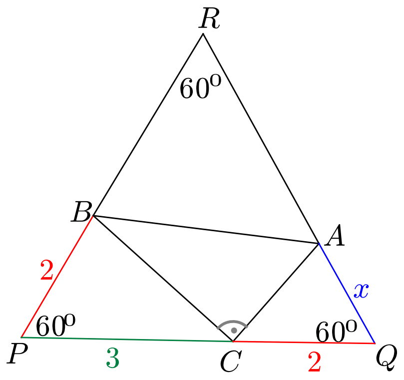
Obr. k úloze 2.8.7

ŘEŠENÍ:
Označme x hledanou stranu kosočtverce $BMDK$. V trojúhelníku ABK použijeme kosinovou větu:

$$\begin{aligned}x^2 &= (b-x)^2 + a^2 - 2(b-x)a\cos\alpha,\\ x^2 &= b^2 - 2bx + x^2 + a^2 - 2ba\cos\alpha + 2xa\cos\alpha,\\ x &= \frac{b^2 + a^2 - 2ba\cos\alpha}{2(b - a\cos\alpha)}.\end{aligned}$$ □

Úloha 2.8.8. *Pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C je vepsán do rovnostranného trojúhelníku PQR $(A \in QR,\ B \in PR,\ C \in PQ)$. Určete délku úsečky AQ, je-li dáno $|PC| = 3$, $|BP| = |CQ| = 2$.*[137]

[136] [Šar–86, str. 15/106]
[137] [Zim–95, str. 18/I7]



Obr. k úloze 2.8.8

Řešení:
Strana rovnostranného trojúhelníku PQR má délku $|PC| + |CQ| = 5$, takže $|BR| = 5 - |BP| = 3$ a $|AR| = 5 - x$, kde $x = |AQ|$ je hledaná délka. Užijme kosinovou větu v trojúhelnících PCB, CQA, ARB:

$$\begin{aligned}
|BC|^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7,\\
|CA|^2 &= 2^2 + x^2 - 4x \cos 60^\circ = x^2 - 2x + 4,\\
|AB|^2 &= (5 - x)^2 + 3^2 - 6(5 - x) \cos 60^\circ = x^2 - 7x + 19.
\end{aligned}$$

Zbývá aplikovat Pythagorovu větu v trojúhelníku ABC a vypočítat x:

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |BC|^2 + |CA|^2,\\
x^2 - 7x + 19 &= 7 + x^2 - 2x + 4,\\
x &= \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

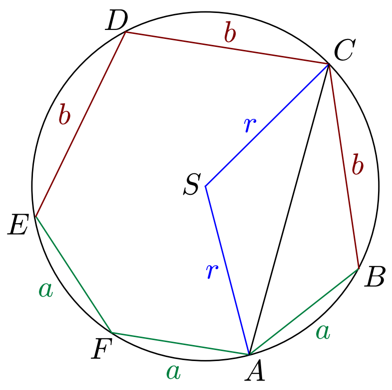
□

Úloha 2.8.9. *Šestiúhelník vepsaný do kružnice má tři sousedící strany délky a a zbylé tři sousedící strany délky b. Vyjádřete pomocí a, b poloměr r opsané kružnice.*[138]

Řešení:
Označme zadaný šestiúhelník $ABCDEF$ se stranami délek a, b podle obrázku. Kratší oblouk AC tvoří třetinu kružnice opsané, proto je $|\sphericalangle ASC| = 120^\circ$ (kde S je střed), odkud $|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}240^\circ = 120^\circ$. Druhou mocninu délky úsečky AC vyjádříme dvakrát pomocí kosinové věty v trojúhelnících ABC a ASC,

$$\begin{aligned}
|AC|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab,\\
|AC|^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ = 3r^2,
\end{aligned}$$

[138] [Eng–98, str. 338/77]

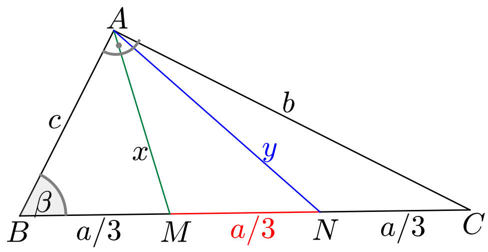


Obr. k úloze 2.8.9

porovnáme a vyjádříme hledané r:

$$r = \sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}. \qquad \square$$

Úloha 2.8.10. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A je přepona BC rozdělena body M, N na tři shodné úsečky ($|BM| = |MN| = |NC|$). Vyjádřete délku úsečky MN pomocí délek $x = |AM|$ a $y = |AN|$.*[139]



Obr. k úloze 2.8.10

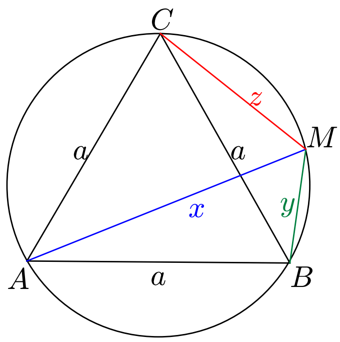
Řešení:
Užijeme kosinovou větu v trojúhelnících BAM a BAN a dosadíme $\cos\beta = c/a$:

$$x^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{a}{3}\cdot c\cos\beta = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{a}{3}\cdot c\cdot\frac{c}{a} = \frac{a^2}{9} + \frac{c^2}{3},$$
$$y^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{2a}{3}\cdot c\cos\beta = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{2a}{3}\cdot c\cdot\frac{c}{a} = \frac{4a^2}{9} - \frac{c^2}{3}.$$

[139] [Gar–02, str. 26/23]

Sečtením obdržíme $x^2 + y^2 = \dfrac{5a^2}{9}$, takže $|MN| = \dfrac{a}{3} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{5}}$. □

Úloha 2.8.11. *Rovnostranný trojúhelník ABC je vepsán do kružnice. Na jejím kratším oblouku BC je zvolen bod M. Dokažte, že $|MA| = |MB| + |MC|$.*[140]



Obr. k úloze 2.8.11

Řešení:
Označme pro zjednodušení $|MA| = x$, $|MB| = y$, $|MC| = z$, $|AB| = a$. Úhel AMB je obvodový úhel příslušný k témuž oblouku kružnice jako ACB, má proto stejnou velikost $60°$. Úhel BMC je obvodový úhel příslušný oblouku CAB, jeho velikost je tedy $120°$. Uplatníme kosinovou větu v trojúhelnících BMC a AMB:

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120° = y^2 + z^2 + yz,$$
$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60° = x^2 + y^2 - xy,$$

neboť $\cos 60° = -\cos 120° = 1/2$. Odečtením obou rovnic a úpravami dostáváme

$$y^2 + z^2 + yz - x^2 - y^2 + xy = 0, \quad \text{neboli} \quad (x+z)(z-x+y) = 0.$$

S ohledem na $x + z > 0$ odtud již plyne $x = y + z$. □

Vyloučení kosinu

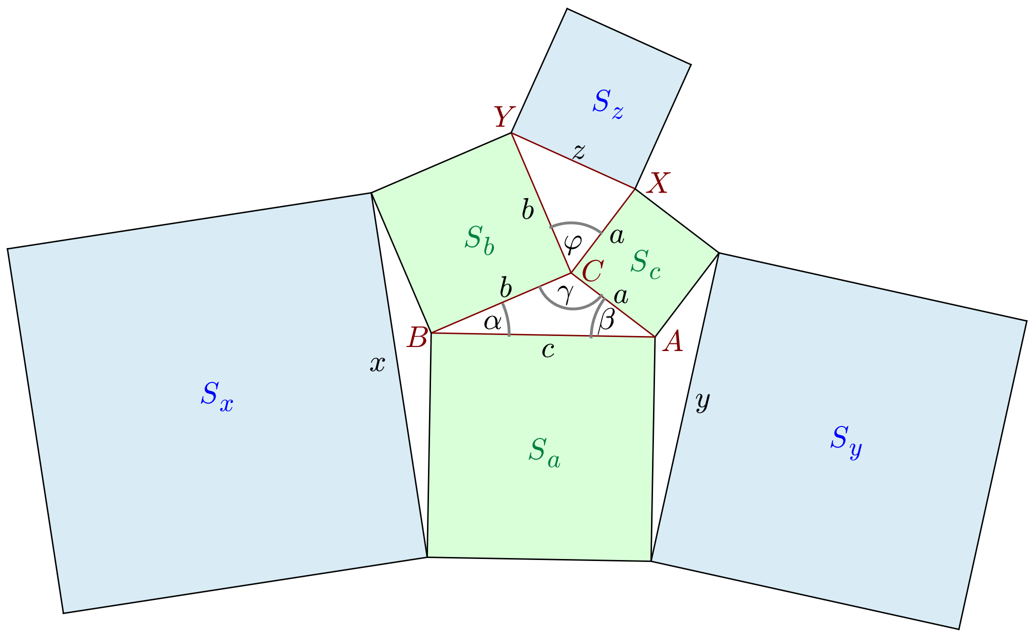
Dvojím použitím kosinové věty se mnohdy podaří sestavit dvě rovnosti obsahující kosinus téhož neznámého úhlu (často na základě vztahu $\cos(180° - x) = -\cos x$). V takovém případě je možné vhodnou kombinací obou rovností tento neznámý kosinus vyloučit a získat tak vztah zahrnující pouze délky úseček.

V prvních dvou úlohách stačí pro vyloučení kosinu rovnosti pouze sečíst, další ukázkou téhož jednoduchého obratu bude důkaz tzv. rovnoběžníkové rovnosti v kapitole 3.2

[140] [Hor–66, str. 39/13], [Eng–98, str. 321/53], [And–00, str. 4], řešení pomocí Ptolemaiovy věty je uvedeno v úloze 3.5.11 na straně 211, řešení pomocí sinové věty je uvedeno v úloze 2.7.17 na straně 149.

na straně 190. Také důkaz Stewartova vzorce v kapitole 3.1 na straně 179 je pěkným příkladem takového vyloučení kosinu, který navíc zobecňuje postup z řešení úlohy 2.8.13.

Úloha 2.8.12. *Nalezněte jednoduchý vztah mezi součty* $S_a + S_b + S_c$ *a* $S_x + S_y + S_z$ *obsahů šesti čtverců zakreslených na obrázku.*[141]



Obr. k úloze 2.8.12

Řešení:
Využijeme kosinovou větu v trojúhelnících ABC a CXY při označení stran a úhlů podle obrázku. Vzhledem k tomu, že $\varphi = 180° - \gamma$, je $\cos\varphi = -\cos\gamma$ a můžeme psát

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad z^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma.$$

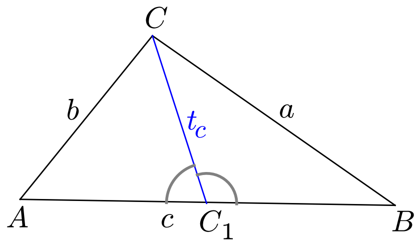
Sečtením těchto rovností získáme vztah $c^2 + z^2 = 2a^2 + 2b^2$. Analogicky bychom obdrželi vztahy $a^2 + x^2 = 2b^2 + 2c^2$ a $b^2 + y^2 = 2a^2 + 2c^2$. Sečtením dostáváme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2, \quad \text{neboli} \quad S_x + S_y + S_z = 3(S_a + S_b + S_c),$$

což je hledaný vztah. □

Úloha 2.8.13. *Délky těžnic libovolného trojúhelníku* ABC *vyjádřete pomocí délek jeho stran.*

[141] [Yiu-98, str. 13/3]



Obr. k úloze 2.8.13

Řešení:
Úlohu vyřešíme pouze pro těžnici na stranu c, zbylé dva vzorce získáme cyklickou záměnou. Označme C_1 střed strany AB trojúhelníku ABC. Použijme nejprve kosinovou větu v trojúhelnících AC_1C a BC_1C:

$$b^2 = t_c^2 + (\tfrac{c}{2})^2 - 2t_c \cdot \tfrac{c}{2} \cdot \cos|\sphericalangle AC_1C|,$$
$$a^2 = t_c^2 + (\tfrac{c}{2})^2 - 2t_c \cdot \tfrac{c}{2} \cdot \cos|\sphericalangle BC_1C|.$$

Úhly BC_1C a AC_1C jsou vedlejší, dosadíme proto do druhé rovnosti

$$\cos|\sphericalangle BC_1C| = -\cos|\sphericalangle AC_1C|$$

a obě rovnosti sečteme:

$$a^2 + b^2 = 2t_c^2 + \tfrac{c^2}{2}.$$

Vyjádřením t_c ze získané rovnosti obdržíme hledaný vztah

$$t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}. \qquad \square$$

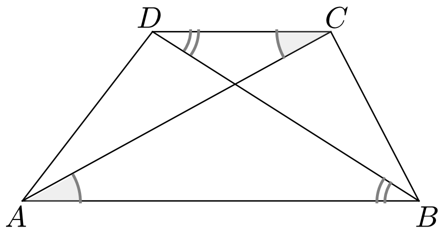
Vzorce pro délky těžnic trojúhelníku jsou v početní praxi v úlohách důležité, proto jsou hned v další pasáži na str. 167–171 zařazeny jejich aplikace.

Úloha 2.8.14. *Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD platí* [142]

$$\frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2} = \frac{|AB|}{|CD|},$$

s výjimkou případů, kdy první nebo druhý zlomek nemá smysl – ukažte, že tehdy se jedná o zlomek $0/0$.

[142] [And–03, str. 91/37]



Obr. k úloze 2.8.14

Řešení:
V lichoběžníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BAC|$ a $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ABD|$ (dvojice střídavých úhlů). Využijme kosinovou větu v trojúhelnících ABC, ACD, ABD, BCD:

$$\begin{aligned}
2|AB|\cdot|AC|\cos|\sphericalangle BAC| &= |AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2,\\
2|CD|\cdot|AC|\cos|\sphericalangle BAC| &= |CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2,\\
2|AB|\cdot|BD|\cos|\sphericalangle ABD| &= |AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2,\\
2|CD|\cdot|BD|\cos|\sphericalangle ABD| &= |CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2.
\end{aligned}$$

Vydělením první dvojice rovností získáme první část

$$\frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} = \frac{|AB|}{|CD|},$$

vydělením druhé dvojice potom zbytek tvrzení

$$\frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Vydělení je korektní, jen když jsou zastoupené kosiny různé od nuly. V opačném případě jsou úhly BAC a ACD (resp. ABD a BDC) pravé a čitatel i jmenovatel příslušného zlomku jsou tedy oba nulové. □

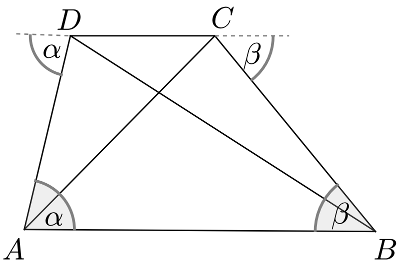
Úloha 2.8.15. *Dokažte, že v nerovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD platí* [143]

$$\frac{|AC|^2 - |BD|^2}{|AD|^2 - |BC|^2} = \frac{|AB| + |CD|}{|AB| - |CD|}.$$

Řešení:
Označme $\alpha = |\sphericalangle DAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Nejprve poznamenejme, že $|\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha$, takže $\cos|\sphericalangle ADC| = -\cos\alpha$. Analogicky $\cos|\sphericalangle BCD| = -\cos\beta$. Nabízí se proto využití kosinové věty v trojúhelnících ABD, ACD

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha,\\
|AC|^2 &= |CD|^2 + |AD|^2 + 2|CD|\cdot|AD|\cos\alpha,
\end{aligned}$$

[143] [And–03, str. 90/35], kde je uvedeno řešení pomocí Stewartova vzorce.



Obr. k úloze 2.8.15

a posléze v trojúhelnících ABC, BCD:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cos\beta,$$
$$|BD|^2 = |CD|^2 + |BC|^2 + 2|CD|\cdot|BC|\cos\beta.$$

Abychom vyloučili zastoupené kosiny, vynásobme v obou dvojicích vždy první rovnost $|CD|$, druhou rovnost $|AB|$ a sečtěme:

$$|BD|^2|CD| + |AC|^2|AB| = (|AB|^2 + |AD|^2)|CD| + (|CD|^2 + |AD|^2)|AB|$$
$$|AC|^2|CD| + |BD|^2|AB| = (|AB|^2 + |BC|^2)|CD| + (|CD|^2 + |BC|^2)|AB|$$

Odečtením první rovnosti od druhé obdržíme vztah

$$(|AC|^2 - |BD|^2)(|AB| - |CD|) = (|AD|^2 - |BC|^2)(|AB| + |CD|),$$

který již snadno upravíme (vydělením nenulovými činiteli) na požadovaný tvar. □

Úloha 2.8.16. *Uvnitř trojúhelníku ABC, ve kterém $|\sphericalangle ABC| = 30°$ a $|\sphericalangle BAC| = 60°$, je dán bod P tak, že $|BP| = 4$, $|CP| = 1$ a $|\sphericalangle APB| = 120°$. Vypočtěte délku úsečky AP.*[144]

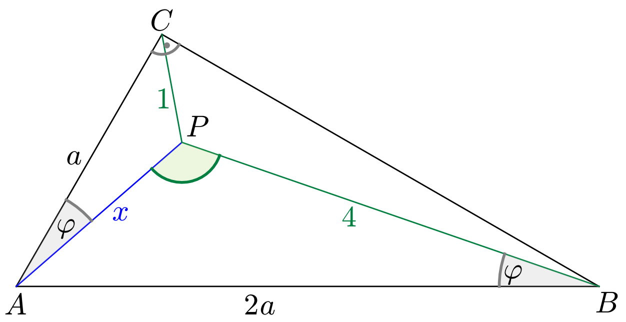
Řešení:
V pravoúhlém trojúhelníku ABC je $|AC| = |AB|\sin 30° = \frac{1}{2}|AB|$, označme tedy $|AB| = 2a$ a $|AC| = a$. Dále označme hledanou délku $|AP| = x$ a $\varphi = |\sphericalangle PAC|$. Pak platí $|\sphericalangle PAB| = 60° - \varphi$, a z trojúhelníku ABP tedy $|\sphericalangle PBA| = \varphi$. Nyní (dvakrát) aplikujeme kosinovou větu v trojúhelníku ABP.

$$|AB|^2 = 4a^2 = 4^2 + x^2 - 8x\cos 120° = x^2 + 4x + 16,$$
$$|AP|^2 = x^2 = 4a^2 + 16 - 16a\cos\varphi.$$

Využitím kosinové věty v trojúhelníku ACP dostaneme dále

$$|CP|^2 = 1 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\varphi.$$

[144] [Švr–09]



Obr. k úloze 2.8.16

Vyloučením $\cos\varphi$ z rovnic pro $|AP|^2$ a $|CP|^2$ získáme rovnici

$$(16ax\cos\varphi =)\quad x(4a^2+16-x^2) = 8a^2+8x^2-8,$$

ze které vyloučíme a, když dvakrát dosadíme za $4a^2$ z rovnice pro $|AB|^2$:

$$x(x^2+4x+16+16-x^2) = 2(x^2+4x+16)+8x^2-8.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2-4x+4=0$, která má dvojnásobný kořen $x=2$. Je tedy $|AP|=2$. □

Užití vzorců pro těžnice

Vzorce pro délky těžnic trojúhelníku

$$t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\ t_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\ t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

jsme odvodili pomocí kosinové věty v úloze 2.8.13. V následujících úlohách jsou s výhodou použity pro zkrácení řešení, ve kterém by jinak bylo nutné jejich postup odvození zopakovat. První dvě úlohy využívají vzorce ve tvaru

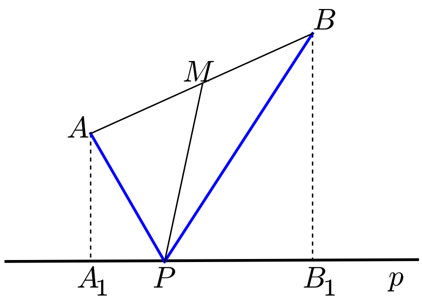
$$b^2+c^2 = 2t_a^2+\tfrac{a^2}{2},\quad c^2+b^2 = 2t_b^2+\tfrac{b^2}{2},\quad a^2+b^2 = 2t_c^2+\tfrac{c^2}{2},$$

který se objevil již při jejich odvozování. Z tohoto tvaru také okamžitě plyne následující tvrzení:

V rovině jsou dány dva různé body A, B. Všechny body M této roviny, pro které má výraz $|AM|^2+|BM|^2$ jednu a tutéž hodnotu, tvoří kružnici, jejíž střed je středem úsečky AB.

Další účelné využití vzorce pro délku těžnice poznáme v důkazu Eulerova vzorce pro čtyřúhelník v kapitole 3.2 na straně 191.

Úloha 2.8.17. *Jsou dány body A, B, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte bod P tak, aby součet druhých mocnin vzdáleností bodu P od bodů A, B byl minimální.*[145]



Obr. k úloze 2.8.17

Řešení:
Uvažujme pravoúhlé průměty A_1, B_1 bodů A, B na přímku p. Je-li $A_1 = B_1$, je zřejmě $P = A_1 = B_1$. Uvažujme dále případ, kdy $A_1 \neq B_1$. Nechť M značí střed úsečky AB, úsečka MP je tedy těžnicí trojúhelníku ABP, ať je bod P na přímce zvolen kdekoliv. Ze vztahu pro délku této těžnice dostáváme

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2|MP|^2 + \tfrac{1}{2}|AB|^2.$$

Odtud již přímo plyne, že levá strana poslední rovnosti nabývá minimální hodnoty, právě když těžnice MP v trojúhelníku ABP má minimální délku, tj. když $MP \perp p$. Hledaný bod P je proto středem úsečky A_1B_1. □

Úloha 2.8.18. *Uvažujme polokružnici k sestrojenou nad stranou AB vně jednotkového čtverce $ABCD$. Na polokružnici k sestrojte bod P, pro který nabývá výraz $|AP|^2+|CP|^2$ největší hodnoty, a určete ji.*[146]

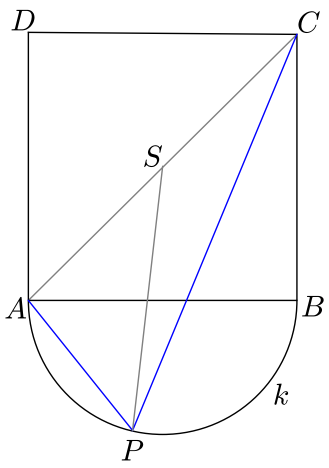
Řešení:
Označme S střed jednotkového čtverce $ABCD$. Pro libovolný bod $P \in k$ je úsečka PS těžnicí v trojúhelníku APC. Ze vzorce pro její délku plyne

$$|AP|^2 + |CP|^2 = 2|PS|^2 + \tfrac{1}{2}|AC|^2.$$

Protože délka úhlopříčky AC jednotkového čtverce $ABCD$ má konstantní velikost $\sqrt{2}$, nabývá levá strana v předešlém vztahu největší hodnoty, právě když má úsečka PS největší délku, což zřejmě nastane, právě když je bod P středem oblouku k. Pak

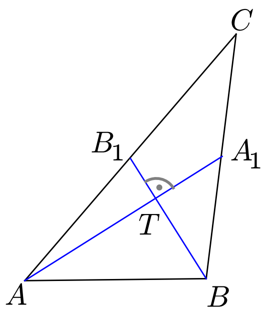
$$|AP|^2 + |CP|^2 = 2|PS|^2 + \tfrac{1}{2}|AC|^2 = 2 + 1 = 3.$$ □

[145] [Švr–07, str. 24/80]
[146] [Švr–07, str. 24/82]



Obr. k úloze 2.8.18

Úloha 2.8.19. *Pro délky stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = 5c^2$, právě když jsou těžnice z vrcholů A, B navzájem kolmé. Dokažte.*[147]



Obr. k úloze 2.8.19

Řešení:
Označme T těžiště, A_1, resp. B_1 středy stran BC, resp. AC trojúhelníku ABC. Využijeme kosinovou větu v trojúhelníku ABT:

$$c^2 = \tfrac{4}{9}t_a^2 + \tfrac{4}{9}t_b^2 - 2 \cdot \tfrac{2}{3}t_a \cdot \tfrac{2}{3}t_b \cdot \cos|\sphericalangle ATB|,$$

po dosazení $t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ a $t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ obdržíme

$$c^2 = \tfrac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2) - \tfrac{8}{9}t_a t_b \cos|\sphericalangle ATB|,$$

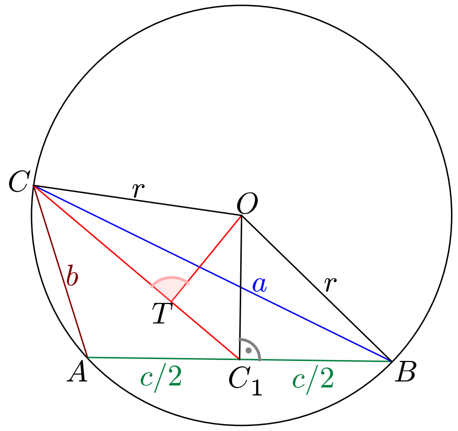
[147] [Pra–86b, str. 82/17.5]

odkud vynásobením obou stran devíti a další úpravou dostáváme

$$a^2 + b^2 - 5c^2 = 8t_a t_b \cos|\sphericalangle ATB|.$$

Délky těžnic trojúhelníku jsou vždy kladné, proto je pravá strana rovnosti rovna nule, právě když $\cos|\sphericalangle ATB| = 0$ neboli když je úhel mezi těžnicemi AA_1, BB_1 pravý. □

Úloha 2.8.20. *Označme O střed opsané kružnice a T těžiště libovolného trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Dokažte, že úsečky OT a CT jsou navzájem kolmé, právě když pro délky stran platí $a^2 + b^2 = 2c^2$.*[148]



Obr. k úloze 2.8.20

Řešení:
Pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku OC_1B určíme

$$|OC_1|^2 = |OB|^2 - |C_1B|^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}c^2,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dále vezmeme v úvahu, že $|CO| = r$, $|CT| = 2|C_1T|$ a $|\sphericalangle C_1TO| = 180° - |\sphericalangle CTO|$ a využijeme toho při uplatnění kosinové věty v trojúhelnících CTO a C_1TO:

$$r^2 = |OT|^2 + 4|C_1T|^2 - 4|OT|\cdot|C_1T|\cos|\sphericalangle CTO|,$$
$$r^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = |OT|^2 + |C_1T|^2 + 2|OT|\cdot|C_1T|\cos|\sphericalangle CTO|.$$

Odečtením druhé rovnosti od první (která zřejmě platí i v případě $O = C_1$) dostaneme

$$\tfrac{1}{4}c^2 = 3|C_1T|^2 - 6|OT|\cdot|C_1T|\cos|\sphericalangle CTO|,$$

[148] [Pra–86b, str. 83/17.6]

odkud plyne, že $OT \perp CT$, právě když $c^2 = 12|C_1T|^2$. Nalezenou podmínku porovnáme s důsledkem vzorce pro těžnici CC_1 trojúhelníku ABC ve tvaru

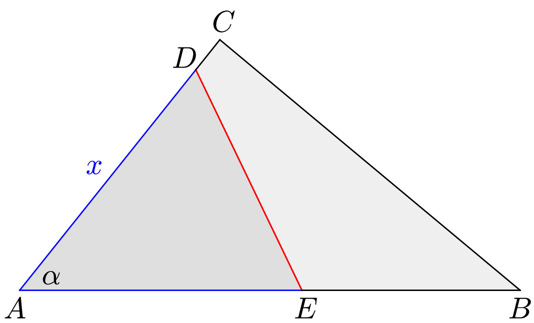
$$12|C_1T|^2 = 12 \cdot \tfrac{1}{9}t_c^2 = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) = \tfrac{1}{3}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Úsečky OT, CC_1 jsou tedy kolmé, právě když $c^2 = \frac{1}{3}(2a^2+2b^2-c^2)$, neboli $2c^2 = a^2+b^2$.
□

Náročnější úlohy na závěr

Následující úlohy vyžadují větší praxi ve výpočtech, dovedné provázání více geometrických poznatků a některé i úvahy o algebraických nerovnostech. Jako poslední v celé této kapitole je zařazena ukázka složitější úlohy, ve které je potřeba kombinovat užití sinové a kosinové věty, vzorce pro těžnice s poznatkem o monotonii funkce $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Na takové úlohy, zadávané například na mezinárodních matematických olympiádách, již nezbyl v naší disertaci prostor. Naším cílem bylo podat soustředěný výklad jednotlivých výpočtových prostředků ilustrovaný přehlednými, nikoliv však triviálními geometrickými situacemi.

Úloha 2.8.21. *Je dán trojúhelník ABC. Nalezněte bod D na straně AC a bod E na straně AB tak, aby byl obsah trojúhelníku ADE roven obsahu čtyřúhelníku $DEBC$ a délka úsečky DE byla minimální.*[149]



Obr. k úloze 2.8.21

Řešení:
Podle zadání má platit $S_{ADE} = S_{DEBC}$, což znamená, že obsah trojúhelníku ADE má být roven polovině obsahu trojúhelníku ABC. Vyjádřeme obsahy obou trojúhelníků pomocí délek dvou stran a sinu úhlu jimi sevřeného:

$$S_{ADE} = \tfrac{1}{2}|AD|\cdot|AE|\sin\alpha, \quad S_{ABC} = \tfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin\alpha.$$

[149] [Shi–09, str. 17/4]

Podmínka $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ je tedy splněna, právě když má součin $p = |AD|{\cdot}|AE|$ pevnou hodnotu $\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|$ nezávislou na poloze bodů D, E.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AC| \le |AB|$ a označme $x = |AD|$ neznámou délku s omezením $0 \le x \le |AC|$. Pro vyjádření délky úsečky DE užijeme kosinovou větu v trojúhelníku ADE a upravíme pomocí doplnění na čtverec:

$$\begin{aligned}|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 - 2|AD|\cdot|AE|\cos\alpha = x^2 + \left(\frac{p}{x}\right)^2 - 2p\cos\alpha = \\ = \left(x - \frac{p}{x}\right)^2 + 2x\cdot\frac{p}{x} - 2p\cos\alpha = \left(x - \frac{p}{x}\right)^2 + 2p(1-\cos\alpha).\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že hodnota výrazu $2p(1-\cos\alpha)$ je konstantní, bude délka úsečky DE minimální právě tehdy, když bude výraz $\left|x - \frac{p}{x}\right|$ nabývat nejmenší hodnoty. Tento výraz bude nulový pro $x = \sqrt{p} = \sqrt{\frac{|AB|\cdot|AC|}{2}}$, což je přípustná hodnota v případě, kdy platí $\sqrt{\frac{|AB|\cdot|AC|}{2}} \le |AC|$, po úpravě $|AC| \ge \frac{1}{2}|AB|$. V opačném případě je pro dosažení minima nutné za x zvolit hodnotu nejblíže $\sqrt{p}$, tedy $x = |AC|$. Celkem tedy jsou body D, E určeny takto:

- v případě $|AC| \ge \frac{1}{2}|AB|$ je $|AD| = |AE| = \sqrt{\dfrac{|AB|\cdot|AC|}{2}}$,
- v případě $|AC| < \frac{1}{2}|AB|$ je $|AD| = |AC|$ a $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$,
  neboli $D = C$ a E je střed strany AB.

(Připomínáme, že vypsaná odpověď odpovídá případu $|AC| \le |AB|$; v případě, kdy platí $|AC| > |AB|$, je v ní nutno vyměnit současně B s C a D s E.) □

Úloha 2.8.22. *Je dána kružnice $k(S; r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální.*[150]

Řešení:

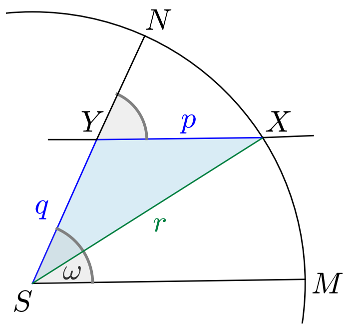
Označme jako na obrázku $\omega = |\sphericalangle NSM|$, $p = |XY|$, $q = |SY|$. Z rovnoběžnosti přímek SM a XY plyne rovnost $|\sphericalangle SYX| = 180° - \omega$. Obsah trojúhelníku SXY je roven

$$\tfrac{1}{2}pq\sin(180° - \omega) = \tfrac{1}{2}pq\sin\omega.$$

Protože úhel ω je neměnný, obsah bude maximální, právě když bude maximální součin pq. Jeho velikost odhadneme pomocí kosinové věty v trojúhelníku SXY ($|SX| = r$):

$$\begin{aligned}r^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos(180° - \omega) = (p-q)^2 + 2pq + 2pq\cos\omega,\\ r^2 &= (p-q)^2 + 2pq(1+\cos\omega),\\ pq &= \frac{r^2 - (p-q)^2}{2(1+\cos\omega)} \le \frac{r^2}{2(1+\cos\omega)}.\end{aligned}$$

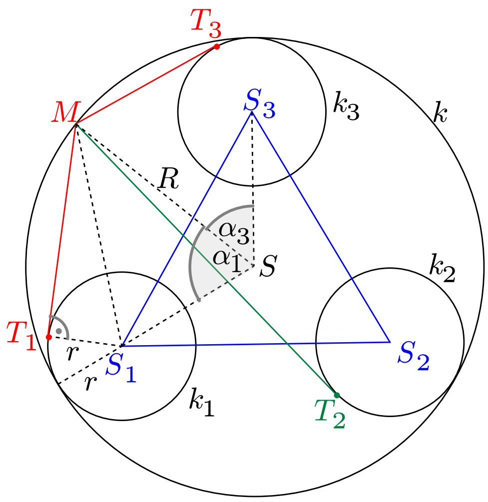
[150] [MO, úloha 50–A–II–3]



Obr. k úloze 2.8.22

Rovnost nastane, právě když $p = q$, proto má ze všech trojúhelníků SXY největší obsah právě ten, který má shodné strany SY a XY. Jeho vnitřní úhel α u vrcholu S je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu X, a tak platí $2\alpha + (180° - \omega) = 180°$, odkud $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, což znamená, že polopřímka SX je osou úhlu MSN. Průsečík této osy s kružnicí k proto určuje hledaný bod X. □

Úloha 2.8.23. *Středy S_1, S_2, S_3 tří shodných kružnic k_1, k_2, k_3 tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku, kružnice k má se všemi kružnicemi k_1, k_2, k_3 vnitřní dotyk (kružnice k_1, k_2, k_3 leží ve vnitřní oblasti kružnice k). Z libovolného bodu $M \in k$ sestrojíme po jedné tečně ke každé z kružnic k_1, k_2, k_3. Dokažte, že vzdálenost bodu M od jednoho z bodů dotyku tečen je rovna součtu vzdáleností od zbylých dvou bodů dotyku.*[151]



Obr. k úloze 2.8.23

[151][Pra–86b, str. 83/17.7]

Řešení:
Označme R poloměr kružnice k, S její střed, r poloměr kružnic k_1, k_2, k_3 a T_i bod dotyku jedné (libovolné) tečny z bodu M ke kružnici k_i ($i = 1, 2, 3$). V případě, že bod M leží na některé polopřímce SS_i, je $|MT_i| = 0$, zbývající dvě vzdálenosti bodu M od bodů dotyku se rovnají a tvrzení platí.

Nechť bod M leží (bez újmy na obecnosti) uvnitř úhlu S_1SS_3. Vzdálenost $|MT_2|$ bude v takovém případě větší než $|MT_1|$ i $|MT_3|$, a tak musíme dokázat rovnost

$$|MS_2| = |MS_1| + |MS_3|.$$

V trojúhelníku MSS_i (kde $\alpha_i = |\sphericalangle MSS_i|$) užijeme kosinovou větu:

$$|MS_i|^2 = |SM|^2 + |SS_i|^2 - 2|SM|\cdot|SS_i|\cos\alpha_i = R^2 + (R-r)^2 - 2R(R-r)\cos\alpha_i,$$

pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku MT_iS_i (příp. pomocí mocnosti bodu M ke kružnici k_i) určíme

$$|MT_i|^2 = |MS_i|^2 - r^2 = 2R^2 - 2Rr - 2R(R-r)\cos\alpha_i = 2R(R-r)(1-\cos\alpha_i).$$

Uvážíme-li, že velikost úhlu α_i je maximálně 180°, můžeme pro určení velikosti $|MT_i|$ využít vzorec pro sinus polovičního argumentu a odstranit v něm absolutní hodnotu:

$$|MT_i| = \sqrt{2R(R-r)}\sqrt{1-\cos\alpha_i} = \sqrt{2R(R-r)}|\sin\tfrac{\alpha_i}{2}|\sqrt{2} = 2\sqrt{R(R-r)}\sin\tfrac{\alpha_i}{2}.$$

Dosadíme-li nyní za $|MT_i|$ do dokazované rovnosti $|MT_2| = |MT_1| + |MT_3|$ a vydělíme-li obě strany výrazem $2\sqrt{R(R-r)}$, obdržíme rovnost

$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_3}{2},$$

kterou dokážeme užitím vzorce pro součet dvou sinů:

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_3}{2} = 2\sin\left(\frac{\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_3}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\alpha_1}{2}-\frac{\alpha_3}{2}}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_3}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right).$$

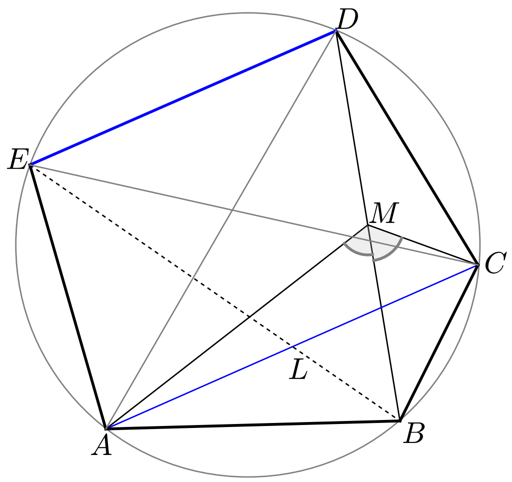
Zřejmě platí $\alpha_1 + \alpha_3 = 120°$; je-li $\alpha_1 \geq \alpha_3$ (což můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat), pak navíc $\alpha_2 = 120° + \alpha_3$, a proto $\alpha_1 - \alpha_3 = 120° - 2\alpha_3 = 360° - 2\alpha_2$. Celkem

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_3}{2} = 2\sin 30°\cos\left(90° - \frac{\alpha_2}{2}\right) = \sin\frac{\alpha_2}{2}$$

a tvrzení je dokázáno. □

Úloha 2.8.24. *V tětivovém pětiúhelníku $ABCDE$ je $AC \parallel DE$ a $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle BMC|$, kde M je střed BD. Ukažte, že přímka BE dělí úsečku AC na dvě shodné části.*[152]

[152] [Neg–05, str. 12/8]



Obr. k úloze 2.8.24

Řešení:
Označme L průsečík BE a AC, dále označme r poloměr kružnice opsané zadanému pětiúhelníku. Nejprve nalezneme podmínku ekvivalentní s dokazovaným tvrzením, že bod L je středem úsečky AC. Podle sinové věty v trojúhelnících ALB a BLC je

$$\frac{|AL|}{\sin|\sphericalangle ABE|} = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ALB|}, \quad \frac{|CL|}{\sin|\sphericalangle CBE|} = \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BLC|}.$$

Vzhledem k rovnosti sinů vedlejších úhlů ALB, BLC můžeme z uvedených vzorců vyjádřit poměr

$$\frac{|AL|}{|CL|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle ABE|}{\sin|\sphericalangle CBE|}.$$

Přidejme ještě rozšířený tvar sinové věty v trojúhelnících ABE, BCE

$$|AE| = 2r\sin|\sphericalangle ABE|, \quad |CE| = 2r\sin|\sphericalangle CBE|$$

a získáme vztah

$$\frac{|AL|}{|CL|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|}.$$

Bod L je středem úsečky AC právě tehdy, když $|AL| : |LC| = 1$, což lze podle odvozeného vztahu vyjádřit rovností $|AB|\cdot|AE| = |BC|\cdot|CE|$. V rovnoramenném lichoběžníku $ACDE$ je navíc $|AE| = |CD|$ a $|CE| = |AD|$, takže nutnou a postačující podmínku pro zkoumanou vlastnost bodu L můžeme přepsat pomocí čtyř bodů A, B, C, D do tvaru

$$|AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|.$$

Nyní se zaměříme na důkaz této rovnosti. Bod M je podle zadání středem úsečky BD, úsečka AM je tedy těžnicí trojúhelníku ABD a podle vzorce pro délku těžnice je $|AM|^2 = \frac{1}{4}(2|AB|^2 + 2|AD|^2 - |BD|^2)$. Uvedené vyjádření dosadíme do rovnosti z kosinové věty v trojúhelníku AMB:

$$\begin{aligned}\cos|\sphericalangle AMB| &= \frac{|AM|^2 + |BM|^2 - |AB|^2}{2|AM|\cdot|BM|} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}(2|AB|^2 + 2|AD|^2 - |BD|^2) + \frac{1}{4}|BD|^2 - |AB|^2}{|AM|\cdot|BD|} = \\ &= \frac{|AD|^2 - |AB|^2}{2|AM|\cdot|BD|}.\end{aligned}$$

Analogicky se odvodí rovnost $\cos|\sphericalangle BMC| = \dfrac{|CD|^2 - |BC|^2}{2|CM|\cdot|BD|}$.

Úhly AMB, BMC jsou podle zadání shodné, vydělením tedy získáme rovnost

$$1 = \frac{|AD|^2 - |AB|^2}{|CD|^2 - |BC|^2} \cdot \frac{|CM|}{|AM|}$$

Pro vyjádření poměru $|CM| : |AM|$ použijeme opět sinovou větu, tentokrát v trojúhelnících ABM, BCM, ABD a BCD:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle AMB|} = \frac{|AM|}{\sin|\sphericalangle ABD|}, \quad \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BMC|} = \frac{|CM|}{\sin|\sphericalangle CBD|},$$

$$\sin|\sphericalangle ABD| = \frac{|AD|}{2r}, \quad \sin|\sphericalangle CBD| = \frac{|CD|}{2r}.$$

Vydělením prvních dvou rovností (víme, že $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle BMC|$) a dosazením druhých dvou vztahů získáme

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|CM|} \cdot \frac{|CD|}{|AD|}, \quad \text{odkud} \quad \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CD|}{|AD|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Zbývá dosadit, upravit a interpretovat výsledek:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{|AD|^2 - |AB|^2}{|CD|^2 - |BC|^2} \cdot \frac{|CD|}{|AD|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}, \\ \frac{|CD|^2 - |BC|^2}{|CD|\cdot|BC|} &= \frac{|AD|^2 - |AB|^2}{|AD|\cdot|AB|}, \\ \frac{|CD|}{|BC|} - \frac{|BC|}{|CD|} &= \frac{|AD|}{|AB|} - \frac{|AB|}{|AD|}.\end{aligned}$$

Funkce $y = x - \frac{1}{x}$ je na množině kladných čísel x rostoucí (jako součet dvou rostoucích funkcí $y_1 = x$ a $y_2 = -\frac{1}{x}$), a tedy prostá, nutně proto platí

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad |AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|, \text{ což jsme chtěli dokázat.}$$

Dodejme, že uvedený postup – vydělení vzorců pro kosiny úhlů AMB a BMC – je korektní jen v případě, kdy oba (podle zadání úlohy) shodné úhly AMB a BMC nejsou pravé. V opačném případě ze zmíněných vzorců plyne

$$|AD|^2 - |AB|^2 = |CD|^2 - |BC|^2 = 0, \quad \text{neboli} \quad |AD| = |AB| \text{ a } |CD| = |BC|,$$

takže dokazovaná rovnost $|AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|$ platí triviálně. □

Kapitola 3

Rozšiřující poznatky a jejich aplikace

Kromě základních poznatků obsažených v učebnicích matematiky pro gymnázia existuje celá řada zajímavých tvrzení a vztahů mezi základními prvky trojúhelníků a čtyřúhelníků rozšiřujících možnosti výpočtů. Některé z nich jsme vybrali pro tuto „nadstavbovou“ kapitolu. Jejich důkazy mohou být formulovány jako úlohy pro zdatnější žáky, my však zvolíme formu souvislého výkladu s důkazy vedenými prostředky, kterým jsme se věnovali v předchozí kapitole. Budeme tedy zejména opakovaně uplatňovat sinovou a kosinovou větu, vyjadřovat různými způsoby stejné obsahy a také používat goniometrické vzorce.

3.1 Trojúhelník

V celé podkapitole je použito obvyklé značení prvků v trojúhelníku ABC: délky stran $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C po řadě α, β, γ. Dále $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je polovina obvodu a S obsah trojúhelníku.

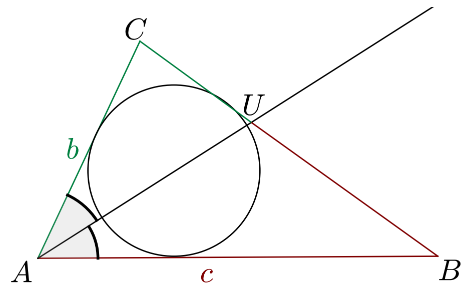
Ve zněních vět o analogických trojicích prvků trojúhelníku je uveden vždy jeden ze tří vzorců, které se navzájem liší záměnou pořadí vrcholů. V dalším textu je používán podle potřeby kterýkoliv z nich.

Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protější stranu v poměru délek přilehlých stran. (3.1)

Při označení podle obr. 23 tedy platí $|BU| : |CU| = |BA| : |CA| = c : b$.

Důkaz:
Využijeme sinovou větu v trojúhelnících ABU a ACU:

$$\frac{|BU|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|BA|}{\sin|\sphericalangle BUC|}, \quad \frac{|CU|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|CA|}{\sin|\sphericalangle AUC|}.$$

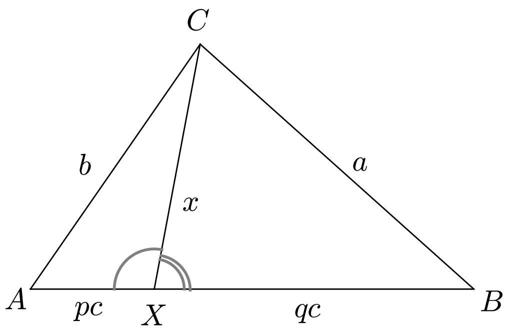


Obr. 23

Úhly BUC a AUC jsou vedlejší, proto $\sin|\sphericalangle BUC| = \sin|\sphericalangle AUC|$. Vydělením obou rovností získáme požadovaný vztah. □

Stewartův vzorec:[1] Označme X libovolný bod strany AB trojúhelníku ABC. Dále označme x délku $|CX|$ a p, q koeficienty takové, že $|AX| = pc$, $|BX| = qc$ (tedy $p+q = 1$, viz obr. 24). Pak platí

$$x^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2.$$



Obr. 24 – ke Stewartovu vzorci

Důkaz:
Použijme nejprve kosinovou větu v trojúhelnících AXC a BXC:

$$b^2 = x^2 + (pc)^2 - 2xpc\cos|\sphericalangle AXC|, \quad a^2 = x^2 + (qc)^2 - 2xqc\cos|\sphericalangle BXC|.$$

Úhly BXC a AXC jsou vedlejší, dosadíme proto do druhé rovnosti

$$\cos|\sphericalangle BXC| = -\cos|\sphericalangle AXC|,$$

[1] Vzorec zveřejnil v roce 1746 skotský matematik Matthew Stewart (1717 – 1785, [4]). Podle [Cox–67, str. 6] vzorec pravděpodobně objevil Archimedes kolem roku 300 př. n. l., první známý důkaz je z roku 1751 od Stewartova učitele R. Simsona (1687 – 1768, [3]).

následně první rovnost vynásobíme koeficientem q, druhou koeficientem p a obě rovnosti sečteme:

$$pa^2 + qb^2 = x^2(p+q) + p^2qc^2 + pq^2c^2.$$

Vyjádřením x^2 ze získané rovnosti obdržíme

$$x^2 = \frac{pa^2 + qb^2 - pqc^2(p+q)}{p+q}.$$

Nyní zbývá využít rovnosti $p+q = 1$ a tvrzení je dokázáno.[2] Dodejme ještě, že označíme-li $|AX| = m$, $|BX| = n$ (tedy $m + n = c$), bude mít Stewartův vzorec podobu

$$cx^2 = ma^2 + nb^2 - cmn. \qquad \square$$

Tangentová věta: V libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Důkaz:
Použijeme sinovou větu a vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a - a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}{a + a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}. \qquad \square$$

Věta o polovičních úhlech trojúhelníku: V libovolném trojúhelníku ABC platí pro hodnoty goniometrických funkcí polovin velikostí jeho vnitřních úhlů vzorce

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Důkaz:
Použijeme vzorce pro goniometrické funkce polovičního úhlu uvedené v podkapitole 1.9. Víme, že $0° < \alpha < 180°$, proto $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$. Z toho plyne, že čísla $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ jsou kladná a znaky absolutních hodnot v příslušných vzorcích můžeme vynechat. Za $\cos\alpha$

[2] Tvrzení lze dokázat také pomocí mocnosti bodu ke kružnici, viz [Šim–02].

dosadíme z kosinové věty:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}} = \\
&= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.
\end{aligned}$$

□

Eulerův vzorec: Jsou-li ρ a r poloměry kružnice vepsané, resp. kružnice opsané libovolnému trojúhelníku, pak pro vzdálenost x jejich středů platí

$$x^2 = r(r-2\rho).$$

Tento vzorec lze rovněž psát ve tvaru

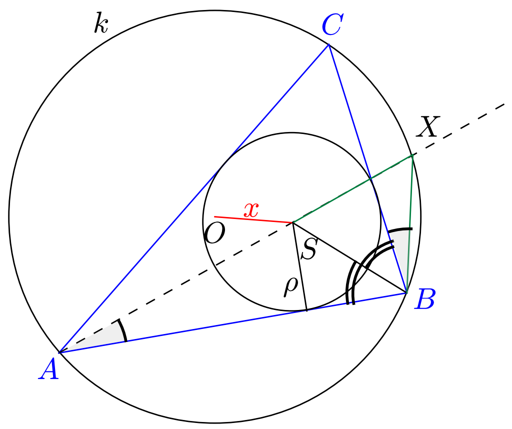
$$\frac{1}{r-x} + \frac{1}{r+x} = \frac{1}{\rho}.$$

Důkaz:
V rovnostranném trojúhelníku splývají středy obou kružnic a jejich vzdálenost je tedy nulová. Protože v takovém případě leží středy kružnic v těžišti trojúhelníku, je $r = 2\rho$ a vzorec platí. Uvažujme dále trojúhelník, který není rovnostranný.

Označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice k opsané trojúhelníku ABC, X průsečík přímky AS (osy úhlu α) s kružnicí k různý od bodu A (viz obr. 25). Pro další úvahy využijeme dvojího vyjádření mocnosti bodu S ke kružnici k:

$$r^2 - x^2 = |AS|\cdot|SX|.$$

Abychom mohli upravit pravou stranu, nejprve dokážeme, že $|XS| = |XB|$. Střed S kružnice vepsané leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, proto $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle BAX| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle SBA| = \frac{\beta}{2}$. Ze shodnosti obvodových úhlů XBC a XAC plyne $|\sphericalangle XBS| = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, zároveň však také platí $|\sphericalangle XSB| = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, neboť se jedná o vnější úhel trojúhelníku SAB. Trojúhelník XSB má tedy shodné vnitřní úhly u vrcholů B, S, takže je rovnoramenný a vskutku $|XS| = |XB|$.



Obr. 25 – k důkazu Eulerova vzorce

Z rozšířeného tvaru sinové věty v trojúhelníku ABX plyne $|XB| = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$ (kružnice k je tomuto trojúhelníku opsaná). Dále $|AS| = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ a konečně

$$|AS|\cdot|SX| = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} 2r\sin\tfrac{\alpha}{2} = 2r\rho.$$

Zbývá dosadit oba součty do původní rovnosti a odtud pak vyjádřit x^2:

$$r^2 - x^2 = 2r\rho, \quad \text{neboli} \quad x^2 = r(r - 2\rho). \qquad \square$$

3.2 Čtyřúhelník

V celé podkapitole je použito obvyklé značení prvků ve čtyřúhelníku $ABCD$: délky stran AB, BC, CD, DA jsou označeny po řadě a, b, c, d, délky úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$, velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C, D po řadě α, β, γ, δ. Dále $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ je polovina obvodu a S obsah čtyřúhelníku.

Přehled poznatků zahájíme elegantním vzorcem pro výpočet obsahu čtyřúhelníku.

V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ (konvexním i nekonvexním) platí

$$S = \tfrac{1}{2} ef \sin\omega, \tag{3.2}$$

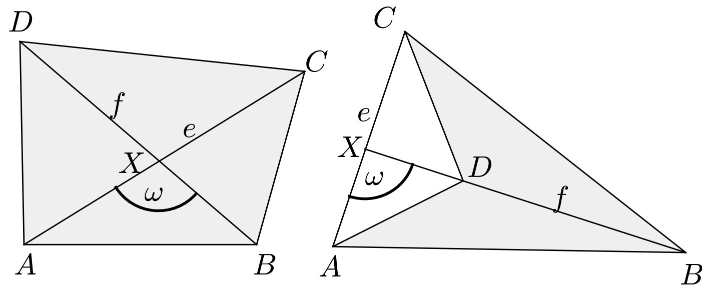
kde ω je jeden z úhlů sevřených přímkami, na kterých leží úhlopříčky.

Důkaz:
Důkaz povedeme souběžně pro konvexní i nekonvexní čtyřúhelník. Případný nekonvexní

úhel nechť je u vrcholu D. Označme X průsečík přímek, na kterých leží úhlopříčky, dále označme $\omega = |\sphericalangle AXB|$ (viz obr. 26). Platí

$$\sin|\sphericalangle AXB| = \sin|\sphericalangle BXC| = \sin|\sphericalangle CXD| = \sin|\sphericalangle DXA| = \sin\omega.$$

Obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ určíme pomocí obsahů trojúhelníků ABX, BCX, CDX a DAX vyjádřených pomocí dvou stran a jimi sevřeného úhlu. Znaménko plus odpovídá konvexnímu čtyřúhelníku, znaménko minus nekonvexnímu čtyřúhelníku.



Obr. 26 – k důkazu vzorce $S = \frac{1}{2}ef\sin\omega$.

$$\begin{aligned}S &= S_{ABX} + S_{BCX} \pm S_{CDX} \pm S_{DAX} = \\ &= \tfrac{1}{2}|AX|\cdot|BX|\sin\omega + \tfrac{1}{2}|BX|\cdot|CX|\sin\omega \pm \tfrac{1}{2}|CX|\cdot|DX|\sin\omega \pm \tfrac{1}{2}|DX|\cdot|AX|\sin\omega = \\ &= \tfrac{1}{2}(|AX|(|BX| \pm |DX|) + |CX|(|BX| \pm |DX|))\sin\omega = \\ &= \tfrac{1}{2}((|AX| + |CX|)(|BX| \pm |DX|))\sin\omega = \\ &= \tfrac{1}{2}ef\sin\omega.\end{aligned}$$
□

Platnost uvedeného vzorce lze zdůvodnit i podle obrázku 27, na kterém jsou čtyři shodné čtyřúhelníky $ABCD \cong JKDC \cong MDKL \cong DMNA$. Obsah rovnoběžníku $ACKM$ tvořeného jejich úhlopříčkami je

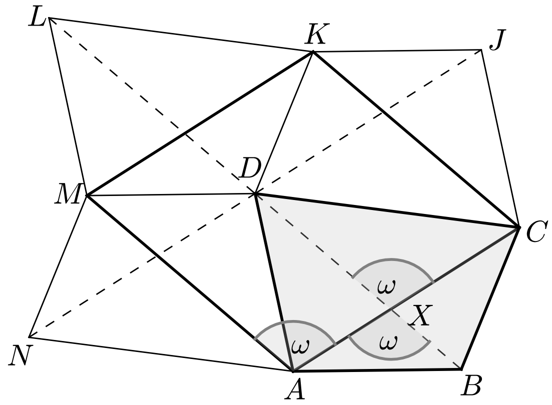
$$S_{ACKM} = |AC|\cdot|AM|\sin\omega = ef\sin\omega,$$

neboť $|AC| = e$, $|AM| = |BD| = f$. Současně platí $S_{ACKM} = (S_{ACD} + S_{MKD}) + (S_{CKD} + S_{AMD}) = 2S_{ABCD}$. Celkem $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ef\sin\omega$. Obdobný obrázek je možné použít i v případě nekonvexního čtyřúhelníku.

Známe-li kromě délek úhlopříček také délky stran čtyřúhelníku, můžeme pro určení jeho obsahu využít následující větu.

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$(4S)^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \tag{3.3}$$



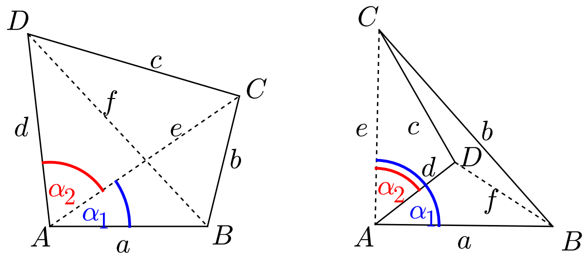
Obr. 27

Důkaz:
Označme velikosti konvexních úhlů $\alpha_1 = |\sphericalangle BAC|$, $\alpha_2 = |\sphericalangle CAD|$ (viz obr. 28). Využijeme kosinovou větu postupně v $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$:

$$b^2 = e^2 + a^2 - 2ea\cos\alpha_1, \tag{3.4}$$

$$c^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos\alpha_2, \tag{3.5}$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2). \tag{3.6}$$



Obr. 28 – k důkazu rovnosti (3.3)

V poslední rovnosti znaménko plus odpovídá případu, kdy vnitřní úhly u vrcholů B a D jsou oba konvexní, znaménko minus je využito, je-li jeden z těchto úhlů nekonvexní. Dosaďme nyní do pravé strany dokazované rovnosti za b^2, c^2, f^2 ze vztahů (3.4), (3.5) a (3.6) a upravme:

$$\begin{aligned}
&4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = \\
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2)) - (-e^2 + 2ea\cos\alpha_1 + e^2 - 2ed\cos\alpha_2)^2 = \\
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) - (a\cos\alpha_1 - d\cos\alpha_2)^2) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) - a^2\cos^2\alpha_1 - d^2\cos^2\alpha_2 + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a^2(1-\cos^2\alpha_1) + d^2(1-\cos^2\alpha_2) - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a^2\sin^2\alpha_1 + d^2\sin^2\alpha_2 \pm 2ad\sin\alpha_1\sin\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a\sin\alpha_1 \pm d\sin\alpha_2)^2 = \\
&= 16\left(\tfrac{1}{2}ea\sin\alpha_1 \pm \tfrac{1}{2}ed\sin\alpha_2\right)^2 = (4S)^2.
\end{aligned}
$$

V průběhu úprav byl použit součtový vzorec pro funkci kosinus, v posledním řádku se v závorce vyskytuje součet (resp. rozdíl) obsahů trojúhelníků ABC a ACD, což při uvedeném použití znaménka plus (resp. minus) vždy dává obsah čtyřúhelníku $ABCD$. □

Porovnáním vzorců pro obsah z dokázaných tvrzení (3.2) a (3.3) obdržíme po snadné úpravě důležitý vztah mezi délkami stran a úhlopříček obecného čtyřúhelníku.

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2ef\cos\omega,$$

kde ω je ostrý nebo pravý úhel sevřený přímkami, na kterých leží úhlopříčky.

V uvedeném vztahu můžeme odstranit znaky absolutní hodnoty, když si promyslíme jiný postup odvození využívající kosinové věty, který nyní uvedeme.[3]

Označme X průsečík přímek, na kterých leží úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ (který může být i nekonvexní), $\omega = |\sphericalangle AXB|$. Důkaz povedeme zvlášť pro konvexní a nekonvexní čtyřúhelník. Pro vizualizaci využijeme dřívější obr. 26.

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle CXD| = \omega$ (dvojice vrcholových úhlů) a $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle DXA| = 180^\circ - \omega$ (k nim příslušné úhly vedlejší). Uvažme nyní, že $\cos(180^\circ - \omega) = -\cos\omega$ a použijme kosinovou větu v trojúhelnících AXB, BXC, CXD a DXA:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= |AX|^2 + |BX|^2 - 2|AX|\cdot|BX|\cos\omega, & b^2 &= |BX|^2 + |CX|^2 + 2|BX|\cdot|CX|\cos\omega, \\
c^2 &= |CX|^2 + |DX|^2 - 2|CX|\cdot|DX|\cos\omega, & d^2 &= |DX|^2 + |AX|^2 + 2|DX|\cdot|AX|\cos\omega.
\end{aligned}
$$

Celkem platí

$$
\begin{aligned}
&a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = \\
&= |AX|^2 + |BX|^2 - 2|AX|\cdot|BX|\cos\omega - |BX|^2 - |CX|^2 - 2|BX|\cdot|CX|\cos\omega + \\
&+ |CX|^2 + |DX|^2 - 2|CX|\cdot|DX|\cos\omega - |DX|^2 - |AX|^2 - 2|DX|\cdot|AX|\cos\omega = \\
&= -(|AX|\cdot|BX| + |CX|\cdot|DX| + |BX|\cdot|CX| + |DX|\cdot|AX|)2\cos\omega = \\
&= -(|AX|(|BX| + |DX|) + |CX|(|BX| + |DX|))2\cos\omega = \\
&= -(|AX| + |CX|)(|BX| + |DX|)2\cos\omega = -2|AC|\cdot|BD|\cos\omega = -2ef\cos\omega.
\end{aligned}
$$

[3] Jinak určený (v další větě výkladu) úhel ω v takovém vzorci bez absolutní hodnoty pak ovšem může být i tupý.

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ s nekonvexním úhlem u vrcholu D platí $|\sphericalangle AXD| = \omega$ a $|\sphericalangle CXD| = |\sphericalangle BXC| = 180° - \omega$ (vedlejší úhly). Postupujme analogicky:

$$a^2 = |AX|^2 + |BX|^2 - 2|AX|\cdot|BX|\cos\omega, \quad b^2 = |BX|^2 + |CX|^2 + 2|BX|\cdot|CX|\cos\omega,$$
$$c^2 = |CX|^2 + |DX|^2 + 2|CX|\cdot|DX|\cos\omega, \quad d^2 = |DX|^2 + |AX|^2 - 2|DX|\cdot|AX|\cos\omega.$$

Celkem platí

$$\begin{aligned}
&a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = \\
&= |AX|^2 + |BX|^2 - 2|AX|\cdot|BX|\cos\omega - |BX|^2 - |CX|^2 - 2|BX|\cdot|CX|\cos\omega + \\
&+ |CX|^2 + |DX|^2 + 2|CX|\cdot|DX|\cos\omega - |DX|^2 - |AX|^2 + 2|DX|\cdot|AX|\cos\omega = \\
&= (-|AX|\cdot|BX| - |BX|\cdot|CX| + |CX|\cdot|DX| + |DX|\cdot|AX|)2\cos\omega = \\
&= (-|AX|(|BX| - |DX|) - |CX|(|BX| - |DX|))2\cos\omega = \\
&= -(|AX| + |CX|)(|BX| - |DX|)2\cos\omega = -2|AC|\cdot|BD|\cos\omega = -2ef\cos\omega.
\end{aligned}$$

Přímým důsledkem dokázaného vzorce je velmi zajímavý výsledek.

Úhlopříčky AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Další pozoruhodné tvrzení se týká horního odhadu obsahu čtyřúhelníku.

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S \le \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

přitom rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[4]

Místo uvedené nerovnosti dokážeme rovnou silnější výsledek, ze kterého navíc okamžitě vyplyne, že čtyřúhelník s největším obsahem při zadaných délkách stran je čtyřúhelník tětivový.

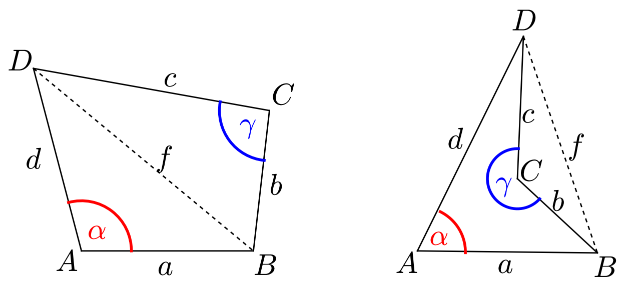
Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right). \tag{3.7}$$

[4]Zmíněnou rovnost nazýváme Brahmaguptův vzorec. Brahmagupta (598–670), indický matematik a astronom. Více o Brahmaguptovi viz např. [1], [5], o uvedených vztazích viz např. [8], [9] a [10].

Důkaz:
Obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ bude vhodné vyjádřit jako součet resp. rozdíl obsahů trojúhelníků ABD a BCD (viz obr. 29). V obou případech platí

$$S = \left|\frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma\right|.$$



Obr. 29 – k důkazu rovnosti (3.7)

Vnitřní úhly α a γ mohou být nekonvexní, přitom sinus nekonvexního úhlu je záporný, což odpovídá odečtení obsahů uvedených trojúhelníků. Pokračujme dále umocněním obou stran rovnosti na druhou a podobnými úpravami jako v předchozím důkazu („goniometrická jednička“, součtový vzorec pro funkci kosinus, navíc vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu):

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{a^2d^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{b^2c^2}{4}\sin^2\gamma + \frac{abcd}{2}\sin\alpha\sin\gamma = \\
&= \frac{a^2d^2}{4}(1-\cos^2\alpha) + \frac{b^2c^2}{4}(1-\cos^2\gamma) + \frac{abcd}{2}(\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)) = \\
&= \frac{a^2d^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} - \frac{a^2d^2}{4}\cos^2\alpha - \frac{b^2c^2}{4}\cos^2\gamma + \\
&\qquad + \frac{abcd}{2}\cos\alpha\cos\gamma - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \frac{abcd}{2} = \\
&= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Použijeme-li nyní pro vyjádření výrazů $ad\cos\alpha$ a $bc\cos\gamma$ kosinovou větu v trojúhelnících ABD a BCD ve tvaru rovností

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \quad f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

(vzorce platí, ať jsou úhly α, γ konvexní či nekonvexní), dostáváme postupnými úpravami

$$S^2 = \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{16}(a^2+d^2-f^2-b^2-c^2+f^2)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}(4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)- \\
&\qquad - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}((b+c)^2-(a-d)^2)((a+d)^2-(b-c)^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}(b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c)- \\
&\qquad - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).
\end{aligned}
$$
□

Kosinová věta pro trojúhelník je velmi dobře známá. Málokdo však ví, že také pro čtyřúhelník existuje stejně pojmenovaná věta, která má dokonce podobný tvar jako její jednodušší jmenovkyně.

Kosinová věta pro čtyřúhelník (Bretschneiderova věta): Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí[5]

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma). \tag{3.8}$$

DŮKAZ:
Plyne z dříve dokázaných vztahů (3.3) a (3.7) pro obsah čtyřúhelníku s využitím úpravy vztahu (3.7) na tvar $S^2 = \frac{1}{4}(a^2d^2+b^2c^2) - \frac{1}{16}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - \frac{abcd}{2}\cos(\alpha+\gamma)$. □

Pro zajímavost dodejme, že kosinovou větu pro čtyřúhelník je možné zapsat v podobě kosinové věty pro trojúhelník o stranách ef, ac, bd a vnitřním úhlu $\alpha+\gamma$:

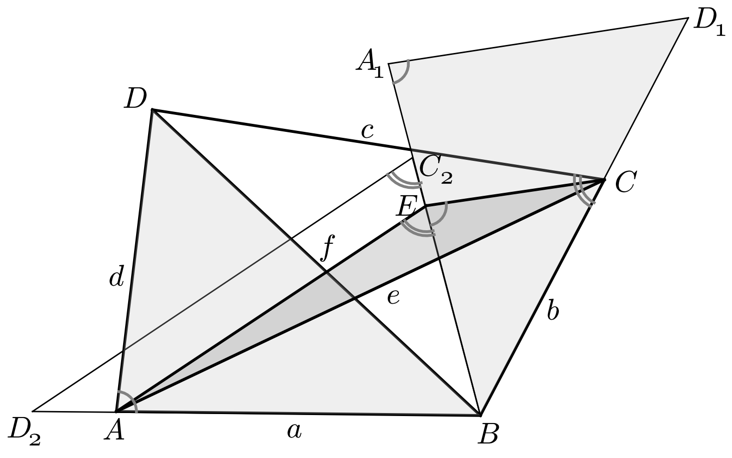
$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd)\cos(\alpha+\gamma).$$

Takový trojúhelník skutečně lze eukleidovsky sestrojit z daného čtyřúhelníku (při zvolené jednotce délky, bez ní jsou ef, ac, bd obsahy, nikoliv délky). Konstrukce nás nás může přivést k novému důkazu posuzované kosinové věty, založeném na obrázku 30, který nyní popíšeme.[6]

Čtyřúhelník $ABCD$ je rozdělen na trojúhelníky ABD a BCD, které jsou otočeny kolem bodu B do poloh A_1BD_1, resp. BC_2D_2, a to tak, že bod D_1 leží na polopřímce

[5] Carl Anton Bretschneider (1808–1878), německý gymnaziální profesor. Více o jeho větě viz např. [10], [11].

[6] Inspirováno [Lei–06]



Obr. 30

BC a bod D_2 leží na polopřímce AB. Body B, A_1, C_2 nutně leží v přímce, neboť $|\sphericalangle D_2BC_2| + |\sphericalangle A_1BD_1| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ABC|$. Na této přímce je dále zvolen bod E tak, že $AE \parallel D_2C_2$. Trojúhelníky BC_2D_2 a BEA jsou podobné, proto

$$|BE| = \frac{|AB|\cdot|BC_2|}{|BD_2|} = \frac{ab}{f}.$$

Pokud bychom ovšem na polopřímce BA_1 zvolili bod F tak, aby $CF \parallel D_1A_1$, pak by analogicky z podobnosti trojúhelníků BD_1A_1 a BCD vyplynulo $|BF| = \frac{|BC|\cdot|BA_1|}{|BD_1|} = \frac{ba}{f}$, a tedy $E = F$. Proto také $CE \parallel D_1A_1$. Dopočítáme ještě délky

$$|EA| = \frac{|AB|\cdot|C_2D_2|}{|D_2B|} = \frac{ac}{f}, \quad |EC| = \frac{|BC|\cdot|A_1D_1|}{|BD_1|} = \frac{bd}{f},$$

abychom využili kosinovou větu v trojúhelníku ACE, o němž víme, že $|\sphericalangle AEC| = \alpha + \gamma$ (nebo $|\sphericalangle AEC| = 360° - (\alpha + \gamma)$):

$$e^2 = \left(\frac{ac}{f}\right)^2 + \left(\frac{bd}{f}\right)^2 - 2\frac{ac}{f}\frac{bd}{f}\cos(\alpha + \gamma).$$

Vynásobením obou stran rovnosti výrazem f^2 okamžitě získáme kýženou kosinovou větu pro čtyřúhelník a druhý důkaz Bretschneiderovy věty je tak ukončen.

Na první pohled se může zdát, že jsou vzorce (3.7) a (3.8) asymetrické, ovšem tato asymetrie je pouze zdánlivá, neboť díky rovnosti $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ platí

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\beta + \delta) \quad \text{a} \quad \cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2} = \cos^2\frac{\beta + \delta}{2}.$$

Ptolemaiova nerovnost: V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$ef \leq ac + bd,$$

přitom rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[7]

Důkaz:
Důkaz této důležité nerovnosti je snadný, využijeme-li již dokázanou kosinovou větu pro čtyřúhelník. Postupnými úpravami dotyčné rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} e^2f^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma), \\ e^2f^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + 2abcd, \\ e^2f^2 &= (ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Protože na pravé straně odečítáme od druhé mocniny nezápornou hodnotu, platí

$$e^2f^2 \leq (ac+bd)^2, \quad \text{neboli} \quad ef \leq ac+bd.$$

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0$, neboli $\alpha + \gamma = 180°$.

□

Poznamenejme, že Ptolemaiova nerovnost plyne přímo také z obrázku 30, konkrétně využitím trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku ACE. Jak jsme totiž dříve zjistili, jeho strany mají délky v poměru $(ac) : (bd) : (ef)$.

Na závěr paragrafu o obecných čtyřúhelnících uvedeme jeden významný výsledek týkající se rovnoběžníků.

Rovnoběžníková rovnost: V libovolném rovnoběžníku je součet čtverců úhlopříček roven součtu čtverců všech čtyř stran.

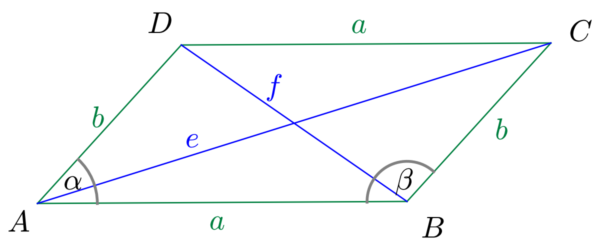
Důkaz:
Pro libovolný rovnoběžník $ABCD$ (viz obr. 31) máme ověřit vztah

$$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

protože však $a = c$ a $b = d$, budeme zapsanou rovnost dokazovat ve tvaru

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

[7] Klaudios Ptolemaios (asi 85–165), řecký astronom, matematik, fyzik a zeměpisec. Více o Ptolemaiovi viz např. [2], o Ptolemaiově nerovnosti viz např. [Lei–05], [Lei–06], [Lei–08].



Obr. 31 – k důkazu rovnoběžníkové rovnosti

Kosinová věta v trojúhelnících ABC a ABD dává

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \quad f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Protože $\beta = 180° - \alpha$, platí $\cos\beta = -\cos\alpha$, a tedy $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. Přičtením rovnosti pro f^2 dostáváme požadovaný vztah $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$. □

Právě dokázané tvrzení a jeho obrácenou variantu[8] lze také získat přímo jako důsledek následujícího vztahu, který je spojován se jménem L. Eulera.

Eulerův vzorec:[9] Pro vzdálenost x středů úhlopříček libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4x^2.$$

Důkaz:

V důkazu využijeme opakovaně vzorec pro délku těžnice trojúhelníku, podle kterého při obvyklém značení prvků v trojúhelníku ABC platí

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Označme E střed úhlopříčky AC a F střed úhlopříčky BD čtyřúhelníku $ABCD$, takže $x = |EF|$ (viz obr. 32). Pak v trojúhelnících ABC, ACD a DBE pro příslušné těžnice BE, DE resp. EF platí

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - e^2),\\ |DE|^2 &= \tfrac{1}{4}(2c^2 + 2d^2 - e^2),\\ x^2 &= \tfrac{1}{4}(2|BE|^2 + 2|DE|^2 - f^2). \end{aligned}$$

Zbývá dosadit z prvních dvou rovností do třetí:

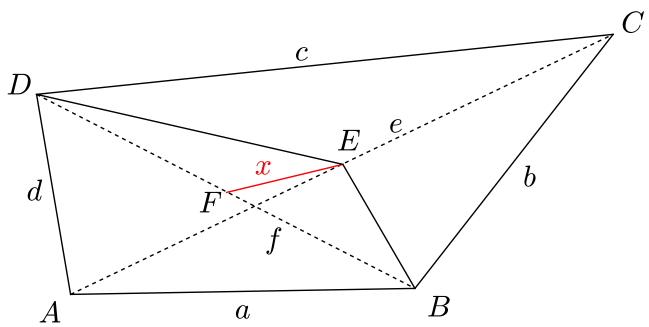
$$x^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}e^2 + c^2 + d^2 - \tfrac{1}{2}e^2 - f^2).$$

[8] Jestliže pro strany a úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ platí $e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, potom je tento čtyřúhelník rovnoběžníkem. Důkaz viz např. [Boč–84, 27/75].

[9] Vzorec odvodil Euler jako důsledek jiného tvrzení – viz [7].

Po zřejmé úpravě obdržíme dokazovaný vzorec.

V případě, kdy bod E leží na přímce BD, nelze mluvit o trojúhelníku DBE, ale použitý vzorec pro délku x přesto platí. Ověříme to nejprve pro bod E na úsečce BD. Dosadíme-li do vzorce $f = |BE| + |DE|$, získáme po úpravě $x = \frac{1}{2}\,||BE| - |DE||$, což je skutečně platná rovnost. Leží-li bod E mimo úsečku BD, dosadíme $f = ||BE| - |DE||$ a dojdeme k $x = \frac{1}{2}\left(|BE| + |DE|\right)$, což opět platí. □



Obr. 32 – vzdálenost středů úhlopříček čtyřúhelníku

3.3 Tečnový a tětivový čtyřúhelník

V této podkapitole nejprve uvedeme jedno tvrzení o tečnových čtyřúhelnících, další tvrzení se budou týkat čtyřúhelníků tětivových. Značení prvků ve čtyřúhelníku $ABCD$ je stejné jako v podkapitole 3.2.

V libovolném tečnovém čtyřúhelníku průsečík spojnic protilehlých bodů dotyku kružnice vepsané splývá s průsečíkem úhlopříček (viz obr. 33).

Důkaz:
(Podle [13].) Označme nejprve X průsečík úhlopříčky AC a spojnice bodů dotyku KM. Platí $|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle CXM|$ (vrcholové úhly), a tedy i

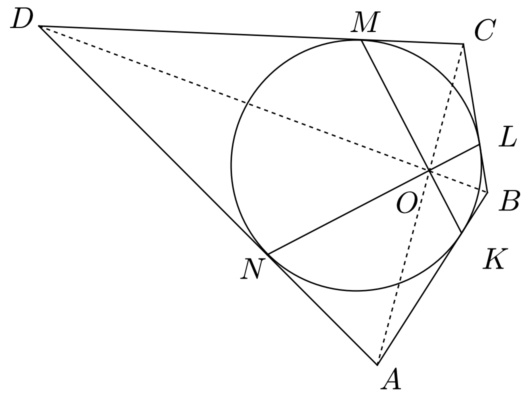
$$\sin|\sphericalangle AXK| = \sin|\sphericalangle CXM|,$$

dále (ze symetrie tečen AB a CD) $|\sphericalangle AKX| = |\sphericalangle DMX| = 180° - |\sphericalangle CMX|$, proto

$$\sin|\sphericalangle AKX| = \sin|\sphericalangle CMX|.$$

Pro obsahy trojúhelníků AKX a CMX platí

$$S_{AKX} = \tfrac{1}{2}|AX|\cdot|KX|\sin|\sphericalangle AXK| = \tfrac{1}{2}|AK|\cdot|KX|\sin|\sphericalangle AKX|.$$
$$S_{CMX} = \tfrac{1}{2}|CX|\cdot|MX|\sin|\sphericalangle CXM| = \tfrac{1}{2}|CM|\cdot|MX|\sin|\sphericalangle CMX|.$$



Obr. 33 – k tvrzení o průsečíku spojnic bodů dotyku

Odtud
$$\frac{S_{AKX}}{S_{CMX}} = \frac{|AX|\cdot|KX|}{|CX|\cdot|MX|} = \frac{|AK|\cdot|KX|}{|CM|\cdot|MX|},$$
a tedy
$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|AK|}{|CM|}. \tag{3.9}$$

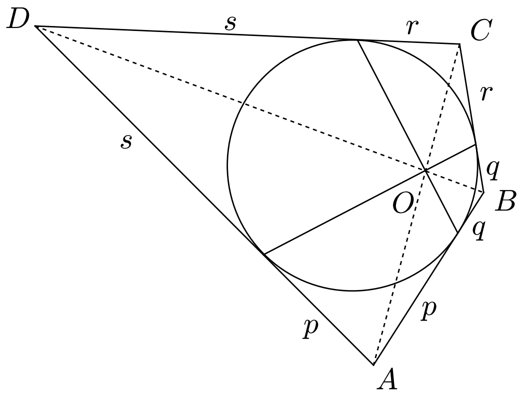
Analogickým výpočtem zjistíme, že pro průsečík Y úhlopříčky AC a spojnice bodů dotyku LN platí
$$\frac{|AY|}{|CY|} = \frac{|AN|}{|CL|}. \tag{3.10}$$
Ze symetrie tečen plynou rovnosti $|AK| = |AN|$ a $|CL| = |CM|$, které podle (3.9) a (3.10) znamenají, že body X a Y dělí úsečku AC ve stejném poměru, takže $X = Y$. Dokázali jsme, že úhlopříčka AC prochází průsečíkem úseček KM a LN. S ohledem na symetrii musí tímto průsečíkem procházet i úhlopříčka BD a celý důkaz je hotov. □

Z právě dokončeného důkazu přímo plyne také následující tvrzení.

V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme O průsečík úhlopříček a p, q, r, s po řadě délky tečen z vrcholů A, B, C, D ke kružnici vepsané (viz obr. 34). Pak platí
$$|AO| : |OC| = p : r, \qquad |BO| : |OD| = q : s.$$

Přehled tvrzení o tětivových čtyřúhelnících zahájíme tím, že zopakujeme dva speciální případy vět dokázaných v předchozí podkapitole.

Brahmaguptův vzorec: Pro libovolný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí
$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$



Obr. 34 – úseky stran tečnového čtyřúhelníku

Ptolemaiova věta: V libovolném tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$ef = ac + bd.$$

Ptolemaiovu větu je možné dokázat také užitím následujícího vyjádření délek úhlopříček tětivového čtyřúhelníku pomocí délek jeho stran.

V libovolném tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \qquad f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Důkaz:
Použijme nejprve kosinovou větu v trojúhelnících ABC a ACD:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \quad e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

Do druhé rovnosti dosadíme $\cos\delta = -\cos\beta$ (neboť $\beta + \delta = 180°$), první rovnost vynásobíme výrazem cd, druhou výrazem ab, pak rovnosti sečteme a vyjádříme e^2:

$$\begin{aligned} e^2(ab+cd) &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd, \\ e^2 &= \frac{ac(bc+ad) + bd(ad+bc)}{ab+cd}, \\ e^2 &= \frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}. \end{aligned}$$

Analogickým postupem v trojúhelnících ABD a BCD získáme druhý vzorec. $\square$

Vydělením dokázaných vztahů získáme další elegantní vzorec.

V libovolném tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Tento vztah bývá často uváděn také v ekvivalentním tvaru

$$abe + cde = adf + bcf.$$

Na konec podkapitoly zařadíme dva vzorce pro poloměr r kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku.

V libovolném tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$r = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4S}.$$

Důkaz:
Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ zapíšeme jako součet obsahů trojúhelníků ABC a ACD. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABCD$ je také kružnicí opsanou oběma trojúhelníkům, proto

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{abe}{4r} + \frac{cde}{4r} = \frac{e}{4r}(ab + cd).$$

Analogicky

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{adf}{4r} + \frac{bcf}{4r} = \frac{f}{4r}(ad + bc).$$

Vynásobením obou vyjádření obsahu a použitím Ptolemaiovy věty dostáváme

$$S^2 = \frac{ef(ab + cd)(ad + bc)}{16r^2} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16r^2},$$

odkud již lze dokazovaný vzorec získat vyjádřením r. □

Dosazením za obsah čtyřúhelníku z Brahmaguptova vzorce získáme z předchozího výsledku druhý vzorec pro výpočet poloměru r, tentokrát výlučně pomocí délek stran.

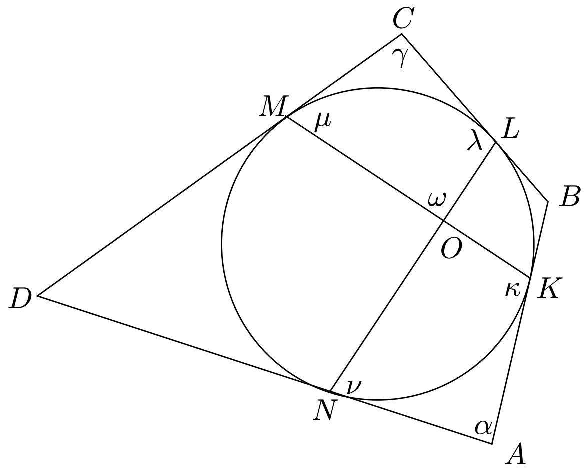
V libovolném tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}.$$

3.4 Dvojstředový čtyřúhelník

V podkapitole se budeme zabývat čtyřúhelníky, kterým lze současně opsat i vepsat kružnici. Těmto čtyřúhelníkům, které jsou současně tětivové i tečnové, říkáme čtyřúhelníky dvojstředové.

Nechť $ABCD$ je dvojstředový čtyřúhelník, K, L, M, N nechť značí body dotyku kružnice jemu vepsané po řadě se stranami AB, BC, CD, DA. Potom přímky KM a LN jsou navzájem kolmé. Obráceně, každý tečnový čtyřúhelník, v němž jsou spojnice protějších bodů dotyku vepsané kružnice navzájem kolmé, je rovněž tětivový, a tedy dvojstředový.



Obr. 35 – dvojstředový čtyřúhelník

Důkaz:
Označme jako obvykle vnitřní úhly u vrcholů A, C po řadě α, γ. Dále označme $\kappa = |\sphericalangle AKM|$, $\lambda = |\sphericalangle NLC|$, $\mu = |\sphericalangle CMK|$, $\nu = |\sphericalangle LNA|$ a $\omega = |\sphericalangle KON| = |\sphericalangle LOM|$, kde O je průsečík úseček KM, LN (obr. 35).

Přímky AB a CD jako tečny v bodech K a M jsou souměrně sdružené podle osy tětivy MK kružnice vepsané, proto jsou u vrcholů M a K shodné dvojice vedlejších úhlů o velikostech κ a μ. Totéž platí pro vedlejší úhly o velikostech λ a ν u vrcholů L a N. Ve čtyřúhelnících $AKON$ a $CMOL$ platí

$$\gamma + \mu + \lambda + \omega = 360^\circ, \quad \alpha + \kappa + \nu + \omega = 360^\circ.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\underbrace{\alpha + \gamma}_{180^\circ} + \underbrace{\mu + \kappa}_{180^\circ} + \underbrace{\lambda + \nu}_{180^\circ} + 2\omega = 720^\circ, \quad \text{odkud} \quad \omega = 90^\circ.$$

Obrácením předchozích úvah zjistíme, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ z rovnosti $\omega = 90°$ plyne $\alpha+\gamma = 180°$, takže jde i o tětivový čtyřúhelník. Tím je důkaz hotov. □

Vyjdeme-li tedy od dvou libovolných na sebe kolmých tětiv dané kružnice a v jejich krajních bodech sestrojíme tečny k této kružnici, vymezí tyto čtyři přímky dvojstředový čtyřúhelník (s danou vepsanou kružnicí). Tohoto postupu lze využít pro sestrojení obecného dvojstředového čtyřúhelníku.

Fussův problém

Dvojstředové čtyřúhelníky a obecně dvojstředové mnohoúhelníky podrobněji zkoumal *Nicolaus Fuss* (1755–1826), švýcarský matematik, který na doporučení Daniela Bernoulliho odešel pracovat do St. Petersburgu k Leonhardovi Eulerovi. Pod vedením L. Eulera se zabýval sférickou geometrií, trigonometrií, diferenciální geometrií, diferenciálními rovnicemi a mnohými dalšími tématy. Za svoje práce získal několik významných ocenění.

N. Fuss objevil vztah mezi poloměrem vepsané a opsané kružnice a vzdáleností jejich středů pro dvojstředový čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník a osmiúhelník. Pro mnohoúhelníky s takto „malým“ počtem vrcholů tak vyřešil úlohu, kterou dnes nazýváme Fussův problém. Vyřešíme zde pouze první z této řady úloh.

Úloha 3.4.1. *Najděte vztah mezi poloměrem kružnice vepsané a opsané a vzdáleností jejich středů v obecném dvojstředovém čtyřúhelníku.*[10]

Řešení:
Vraťme se k označení podle obrázku 35. Zjistili jsme, že úsečky KM a LN dělí dvojstředový čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři menší čtyřúhelníky $AKON$, $BLOK$, $CMOL$ a $DNOM$, které jsou téhož typu: mají pravý úhel u společného vrcholu O, k němu sousední vrcholy leží na menší kružnici a strany neobsahující vrchol O leží na tečnách k této kružnici. Takový typ čtyřúhelníku $OXPY$ vyšetříme obecně. Dále uvažujme následující situaci:

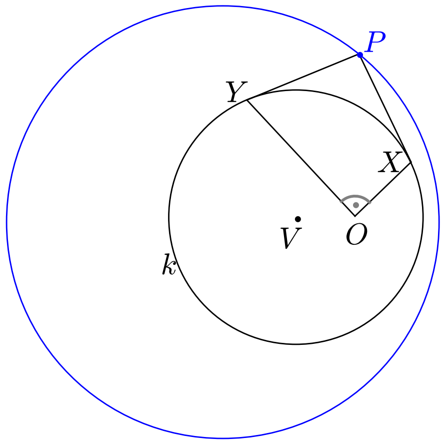
- Je dána kružnice k se středem V,
- ve vnitřní oblasti kružnice k je dán bod O,
- sestrojíme libovolný pravý úhel s vrcholem v daném bodě O,
- v průsečících X, Y ramen úhlu s kružnicí k sestrojíme tečny.

Zkoumejme nyní polohu průsečíku P sestrojených tečen při rotaci pravého úhlu XOY kolem vrcholu O.

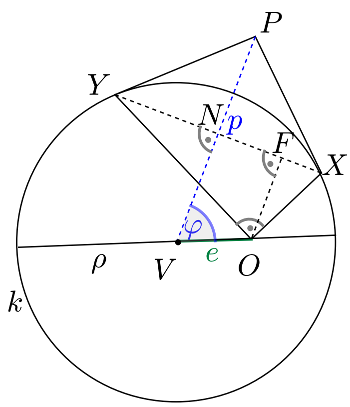
Pomocí vhodného programu, například Cabri nebo Geonext, je možno hledanou množinu bodů načrtnout (obr. 36). Na první pohled se zdá, že je to pravděpodobně kružnice. Tuto domněnku teď ověříme exaktním výpočtem.

Trojúhelník OXY je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu O. Označíme-li patu výšky z vrcholu O písmenem F, pak podle Eukleidovy věty o výšce platí $|OF|^2 = |FX|\cdot|FY|$.

[10] Uvedený postup je z práce [Hav–07], která byla inspirována paragrafem z knihy [Dör–65]. Úloha je také řešena v [Hon–97, 100/2].



Obr. 36 – výstup programu Cabri



Obr. 37 – označení bodů při výpočtu

Dále označíme e velikost úsečky VO, φ velikost úhlu OVP, ρ poloměr kružnice k a p velikost úsečky VP, jejíž průsečík s úsečkou XY označíme N (obr. 37). Přímka VP je osou úsečky XY, proto $|NX| = |NY|$ a úhel VNY je pravý. Dále platí

$$
\begin{aligned}
|NF| &= e\sin\varphi, & |FX| &= |NX| - e\sin\varphi,\\
|OF| &= |VN| - e\cos\varphi, & |FY| &= |NX| + e\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do rovnosti $|OF|^2 = |FX| \cdot |FY|$ postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
(|VN| - e\cos\varphi)^2 &= (|NX| - e\sin\varphi)(|NX| + e\sin\varphi),\\
|VN|^2 - 2|VN|e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi &= |NX|^2 - e^2\sin^2\varphi,\\
|VN|^2 - 2|VN|e\cos\varphi + e^2 &= |NX|^2.
\end{aligned}
$$

Trojúhelník VXN je pravoúhlý, $|VX| = \rho$, a proto $|NX|^2 = \rho^2 - |VN|^2$ (Pythagorova věta). Po dosazení do předchozího vztahu vychází

$$2|VN|^2 - 2|VN|e\cos\varphi + e^2 = \rho^2.$$

Také trojúhelník VXP je pravoúhlý (přímka XP je tečna), proto podle Eukleidovy věty o odvěsně platí $|VX|^2 = |VP| \cdot |VN|$, neboli $\rho^2 = p|VN|$. Dosaďme nyní za $|VN|$ a upravujme:

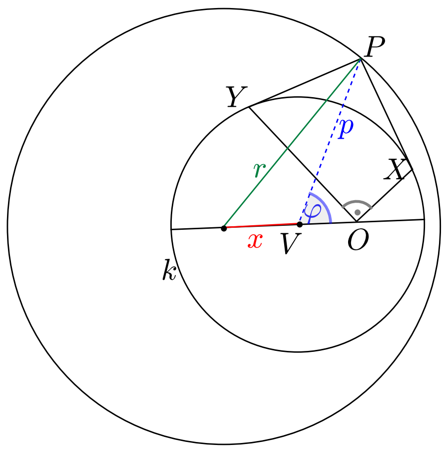
$$2\frac{\rho^4}{p^2} - 2\frac{\rho^2}{p}e\cos\varphi + e^2 = \rho^2,$$
$$2\rho^4 = 2\rho^2 ep\cos\varphi + \rho^2 - e^2,$$
$$\frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2} = 2\frac{\rho^2 e}{\rho^2 - e^2}p\cos\varphi + p^2. \tag{3.11}$$

V tomto vztahu jsou p a φ proměnné závislé na poloze bodu P (a tedy na otočení pravého úhlu XOY), ρ a e jsou pro zadanou kružnici a zadaný bod O konstanty. Levá strana rovnosti (3.11) je konstantní, proto je i výraz na pravé straně konstantní pro libovolný bod P.

Podle výsledku programu Cabri můžeme usoudit, že všechny takové body P leží na kružnici, jejíž střed S musí ležet na přímce VO (plyne ze symetrie problému). Označíme-li $x = |SV|$ vzdálenost obou středů, pak pro poloměr $r = |SP|$ „předpokládané“ kružnice se středem S platí

$$r^2 = x^2 + p^2 + 2xp\cos\varphi \tag{3.12}$$

(kosinová věta pro trojúhelník SVP, obr. 38).



Obr. 38 – označení prvků v trojúhelníku SVP

Srovnáním rovnosti (3.12) s dříve odvozeným vztahem (3.11) zjistíme, že pro vzdálenost

$$x = \frac{\rho^2 e}{\rho^2 - e^2} \tag{3.13}$$

bude r konstantní, nezávislé na poloze bodu P, a pojmenování „poloměr“ je oprávněné. Každý bod P s požadovanými vlastnostmi tedy skutečně leží na kružnici o středu S (daném určenou hodnotou x) a poloměru r, pro který platí

$$r^2 - x^2 = \frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2}. \tag{3.14}$$

Zbývá eliminovat vzdálenost e. Vydělením rovností (3.13) a (3.14) a úpravou zjistíme, že $e = \frac{2x\rho^2}{r^2-x^2}$, dosazením zpět do (3.13) a úpravou získáme výsledný vztah mezi poloměrem zadané kružnice ρ, nalezené kružnice r a vzdáleností x jejich středů

$$2\rho^2(r^2 + x^2) = (r^2 - x^2)^2.$$

Vyjdeme-li v naší situaci naopak z bodu P vnější kružnice, sestrojíme z něj tečnu k vnitřní kružnici, z průsečíku s vnější kružnicí opět tečnu k vnitřní atd., vrátíme se čtvrtou tečnou zpět do bodu P, neboť získáme čtyřúhelník „slepený“ ze čtyř čtyřúhelníků zkoumaného typu, a tedy čtyřúhelník dvojstředový. Bod P může být na vnější kružnici umístěn libovolně, pohybem bodu P proto obdržíme všechny dvojstředové čtyřúhelníky se zadanou opsanou a vepsanou kružnicí. Provedeným výpočtem jsme nejen potvrdili domněnku o zkoumané množině bodů, ale rovněž nalezli řešení Fussova problému.[11] □

Závěr
Shrňme nyní výsledky předchozích úvah a výpočtů.

Jsou-li ρ a r poloměry kružnice vepsané a opsané libovolnému dvojstředovému čtyřúhelníku, pak vzdálenost x jejich středů vyhovuje rovnici

$$2\rho^2(r^2 + x^2) = (r^2 - x^2)^2.$$

V oboru $x \in (0; r - \rho)$, kde $r \geq \rho\sqrt{2}$, má tato rovnice jediné řešení

$$x = \sqrt{r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{4r^2 + \rho^2}}.$$

Pro $r < \rho\sqrt{2}$ rovnice žádné řešení nemá, a tedy dvojstředový čtyřúhelník nelze v tomto případě sestrojit. Pro $r = \rho\sqrt{2}$ vychází $x = 0$, středy obou kružnic splývají a každý odpovídající dvojstředový čtyřúhelník je čtverec.

Odvozený vztah mezi veličinami ρ, r a x lze ještě upravit na „zlomkový“ tvar

$$\frac{1}{(r-x)^2} + \frac{1}{(r+x)^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

[11] Zajímavé zobecnění pro dvojstředové mnohoúhelníky s větším počtem vrcholů lze nalézt v [12].

Další vlastnosti dvojstředového čtyřúhelníku

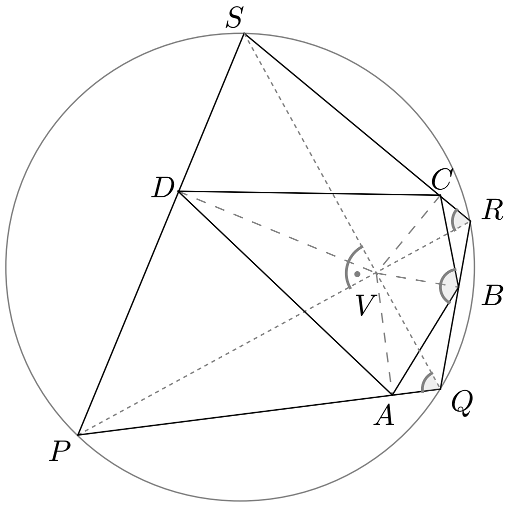
V průběhu řešení Fussova problému jsme objevili a dokázali následující větu:[12]

Střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a průsečík spojnic protilehlých bodů dotyku kružnice vepsané dvojstředovému čtyřúhelníku (tj. podle strany 192 také průsečík úhlopříček) leží na jedné přímce.

Následující tvrzení ukazuje zajímavou souvislost mezi vlastnostmi tečnových a tětivových čtyřúhelníků, kterou je možné využít pro konstrukci obecného dvojstředového čtyřúhelníku.[13]

Paty kolmic vedených z průsečíku úhlopříček tětivového čtyřúhelníku na jeho strany tvoří vrcholy tečnového čtyřúhelníku.

Jsou-li navíc úhlopříčky původního tětivového čtyřúhelníku navzájem kolmé, pak je výsledný čtyřúhelník také tětivový, a tedy dvojstředový.[14]



Obr. 39

Důkaz:
Označme $PQRS$ výchozí tětivový čtyřúhelník, V průsečík jeho úhlopříček a A, B, C, D po řadě paty kolmic z bodu V na strany PQ, QR, RS, SP (obr. 39). Čtyřúhelník $AQBV$ je tětivový (pravé úhly u vrcholů A a B), proto platí $|\sphericalangle ABV| = |\sphericalangle AQV|$. Ze stejného důvodu ve čtyřúhelníku $VBRC$ platí $|\sphericalangle VRC| = |\sphericalangle VBC|$ a ve čtyřúhelníku $PQRS$ je

[12] Jinak pojatý důkaz této věty je například v [14].

[13] [Hon–97, 60/2], [Pra–86a, 12.7]

[14] Tato část tvrzení platí obecně pro libovolný čtyřúhelník, jak je dokázáno v úloze 2.5.12.

$|\sphericalangle PQS| = |\sphericalangle PRS|$. Protože $\sphericalangle AQV$ a $\sphericalangle PQS$ jsou různá označení téhož úhlu stejně jako $\sphericalangle PRS$ a $\sphericalangle VRC$, celkem platí

$$|\sphericalangle ABV| = |\sphericalangle VBC| = \frac{\beta}{2}.$$

Z toho plyne, že polopřímka BV je osou úhlu ABC. Analogicky jsou i polopřímky CV, DV a AV osami úhlů BCD, CDA a DAB. Protože všechny tyto osy vnitřních úhlů procházejí jedním bodem V, čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový a bod V je středem kružnice jemu vepsané.

Nyní zbývá dokázat, že čtyřúhelník $ABCD$ je také tětivový. Již víme, že

$$|\sphericalangle AVQ| = |\sphericalangle ABQ| = 90° - |\sphericalangle ABV| = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

Analogicky $|\sphericalangle AVP| = 90° - \frac{\delta}{2}$. Protože přímky PR a QS jsou na sebe kolmé, platí $|\sphericalangle AVQ| + |\sphericalangle AVP| = 90°$, neboli po úpravě $\beta + \delta = 180°$, což znamená, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a důkaz je hotov. $\square$

Poslední věta podkapitoly věnované dvojstředovým čtyřúhelníkům ukazuje velmi zajímavý a jednoduchý vzorec pro výpočet jejich obsahů. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ je opět použito obvyklé značení délek stran a, b, c, d.

Pro obsah S libovolného dvojstředového čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$S = \sqrt{abcd}.$$

DŮKAZ:
Vyjdeme ze vztahu (3.7) pro obsah obecného čtyřúhelníku

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Pro tětivový čtyřúhelník platí $\alpha + \gamma = 180°$, proto $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = 0$ a

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

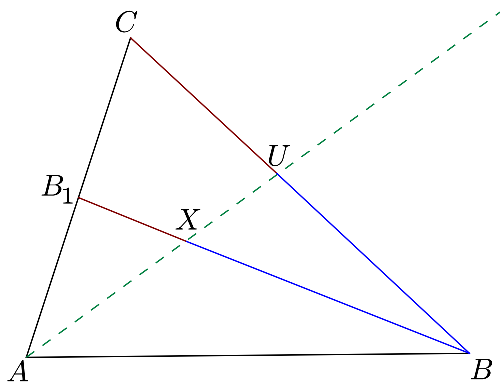
Pro tečnový čtyřúhelník ovšem platí $a + c = b + d = s$, takže činitelé v pravé straně posledního vzorce pro S^2 se po řadě rovnají c, d, a, b. Odtud již plyne $S = \sqrt{abcd}$. $\square$

3.5 Aplikace rozšiřujících poznatků

Při řešení složitějších planimetrických úloh pomáhá, když aktivně ovládáme hlubší poznatky popsané v této kapitole. Uvědomíme-li si obecné zákonitosti dané geometrické situace, můžeme často výrazně zkrátit některé etapy řešení dané úlohy. Ukážeme to na řešeních úloh této podkapitoly, při kterých takto výhodně využijeme (a tím zároveň procvičíme) tři obecné výsledky: větu 3.1 o ose vnitřního úhlu trojúhelníku, Stewartův vzorec a Ptolemaiovu větu. Někdy je uplatnění známých hlubších poznatků překvapivé a nečekané, jak uvidíme v části věnované Ptolemaiově větě a nerovnosti.

Osa vnitřního úhlu trojúhelníku

Úloha 3.5.1. *Dokažte, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí těžnici na přilehlou stranu a protilehlou stranu v poměrech, jejichž hodnoty jsou samy v poměru* $2:1$.[15]



Obr. k úloze 3.5.1

Řešení:
V trojúhelníku ABC označme U průsečík osy úhlu α a strany BC, B_1 střed strany AC a X průsečík osy AU a těžnice BB_1. Podle věty 3.1 víme, že $|BU| : |CU| = |BA| : |CA|$. V trojúhelníku ABB_1 je polopřímka AX osou úhlu u vrcholu A, proto podle stejné věty platí

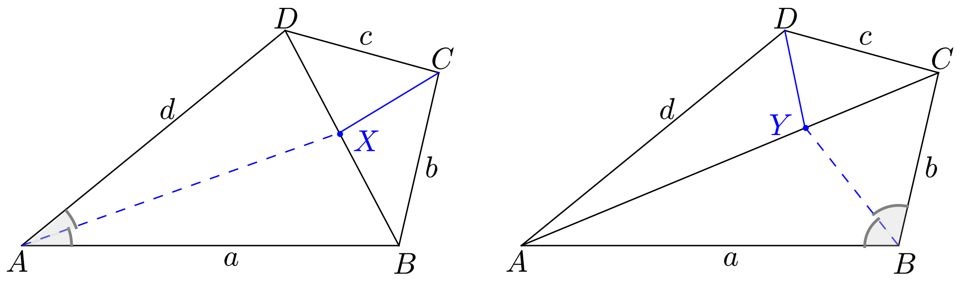
$$\frac{|BX|}{|B_1X|} = \frac{|BA|}{|B_1A|} = \frac{|BA|}{\frac{1}{2}|CA|} = 2\frac{|BA|}{|CA|} = 2\frac{|BU|}{|CU|},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Úloha 3.5.2. *Pro libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ dokažte tvrzení: Osy vnitřních úhlů u vrcholů A a C se protínají na úhlopříčce BD, právě když se osy vnitřních úhlů u vrcholů B a D protínají na úhlopříčce AC.*[16]

Řešení:
Využijeme zřejmou obměnu: dvě osy se protínají na úhlopříčce, právě když její průsečík s jednou osou leží i na druhé ose. Označme proto X průsečík úhlopříčky BD s osou vnitřního úhlu BAD a podobně Y průsečík úhlopříčky AC s osou vnitřního úhlu CBA. Podle věty 3.1 je $|BX| : |DX| = a : d$ a $|AY| : |CY| = a : b$. Podle téže věty bod X leží také na ose vnitřního úhlu DCB, právě když $|BX| : |DX| = b : c$, neboli právě když $a : d = b : c$. Tuto rovnost poměrů upravíme do ekvivalentního tvaru $d : c = a : b$ $(= |AY| : |CY|)$, což opět podle věty 3.1 nastane, právě když je Y bodem osy vnitřního úhlu ADC, a to jsme měli dokázat. □

[15] [Ber–04, str. 37/VII.8]
[16] Návrh autorky práce



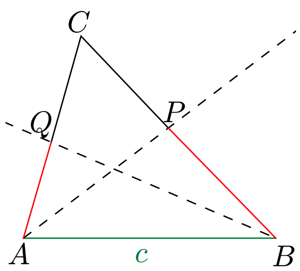
Obr. k úloze 3.5.2

Úloha 3.5.3. *a) Vyjádřete délku úseků, na které rozděluje protější stranu osa vnitřního úhlu trojúhelníku, pomocí délek jeho stran.*
b) V libovolném trojúhelníku ABC označme P, Q průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, resp. B s protějšími stranami. Dokažte, že rovnost $|AB| = |BP| + |AQ|$ platí, právě když má třetí vnitřní úhel u vrcholu C velikost $60°$.[17]

Řešení:

a) S ohledem na symetrii vyjádříme pouze délky úseků, na které je strana BC trojúhelníku ABC rozdělena bodem U, v němž ji protne osa protilehlého úhlu BAC. Podle věty 3.1 platí $|BU| : |CU| = |BA| : |CA| = c : b$, odkud $a = |BU| + |CU| = |BU| \left(1 + \frac{b}{c}\right)$, neboli

$$|BU| = \frac{ac}{b+c}, \quad \text{analogicky} \quad |CU| = \frac{ab}{b+c}.$$



Obr. k úloze 3.5.3

b) Do rovnosti $|AB| = |BP| + |AQ|$ ze zadání dosadíme podle výsledku předchozí části (pro určení $|AQ|$ použijeme cyklickou záměnu):

$$c = \frac{ac}{b+c} + \frac{bc}{a+c},$$

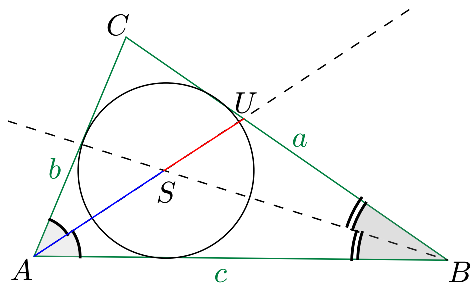
[17] [Bra–05, str. 62/81], kde podmínka $\gamma = 60°$ je uvedena jen jako postačující.

obě strany vynásobíme nenulovým $(b+c)(a+c)$ a vydělíme nenulovým c:

$$(b+c)(a+c) = a(a+c) + b(b+c)$$

a po snadné úpravě získáme rovnost $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, jež je tedy ekvivalentní s podmínkou $|AB| = |BP| + |AQ|$. Podle kosinové věty je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, odvozená rovnost proto platí, právě když $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, neboli právě když $\gamma = 60°$. □

Úloha 3.5.4. *Pomocí délek stran trojúhelníku vyjádřete, v jakém poměru střed kružnice vepsané dělí úsečky, které trojúhelník vytíná na osách svých vnitřních úhlů.*[18]



Obr. k úloze 3.5.4

Řešení:
Označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a U průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC (viz obrázek). Polopřímka BS je osou úhlu ABU, proto podle věty 3.1 platí úměra

$$|AS| : |SU| = c : |BU|.$$

Pro délku $|BU|$ využijeme vzorec z řešení části a) předchozí úlohy

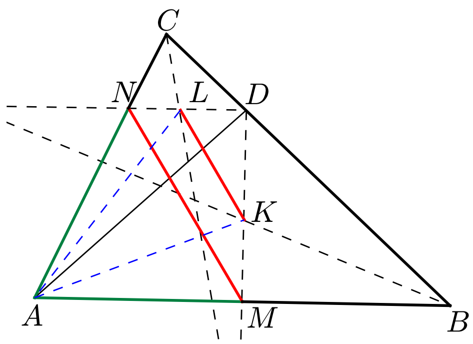
$$|BU| = \frac{ac}{b+c}$$

a po dosazení do vztahu pro $|AS| : |SU|$ získáme hledaný poměr

$$|AS| : |SU| = \frac{b+c}{a}.$$

Analogické vzorce platí pro úseky os úhlů ABC a ACB. □

Úloha 3.5.5. *Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod D. Osy úhlů ADB, ADC protínají strany AB, AC po řadě v bodech M, N a osy úhlů ABD, ACD protínají úsečky DM, DN po řadě v bodech K, L. Dokažte, že $|AM| = |AN|$, právě když $MN \parallel KL$.*[19]



Obr. k úloze 3.5.5

Řešení:
Polopřímka AK je osou úhlu BAD, neboť se zbývající dvě osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABD protínají právě v bodě K. Podle věty 3.1 pro osu úhlu u vrcholu A v trojúhelníku AMD platí $|KM| : |KD| = |AM| : |AD|$. Analogicky v trojúhelníku AND platí $|LN| : |LD| = |AN| : |AD|$.

Tímto postupem zjišťujeme, že rovnost $|AM| = |AN|$ ze zadání je ekvivalentní rovnosti poměrů $|KM| : |KD| = |LN| : |LD|$, což nás přivádí k využití podobnosti. Úsečky MN, KL jsou rovnoběžné právě tehdy, když jsou trojúhelníky MND, KLD podobné, a to nastane, právě když $|MD| : |KD| = |ND| : |LD|$ (sus).

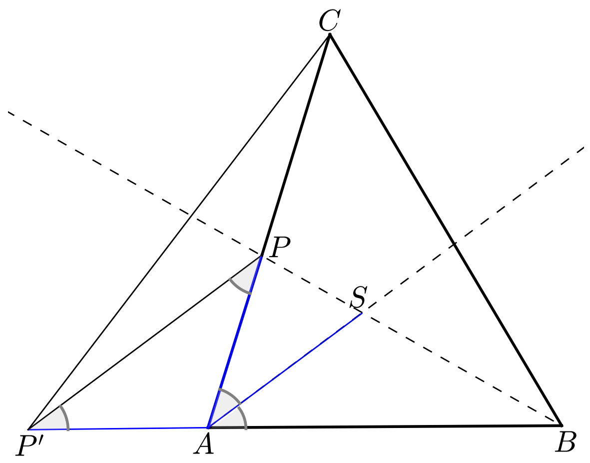
Jednoduchým výpočtem ověříme ekvivalenci posledních dvou rovností poměrů

$$\frac{|MD|}{|KD|} = \frac{|KM| + |KD|}{|KD|} = \frac{|KM|}{|KD|} + 1 \quad \text{a podobně} \quad \frac{|ND|}{|LD|} = \frac{|LN|}{|LD|} + 1 \qquad \square$$

Úloha 3.5.6. *Osa vnitřního úhlu u vrcholu B trojúhelníku ABC protíná stranu AC v bodě P, bod S je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Dokažte, že z podmínky $|AB| + |AP| = |BC|$ plyne, že trojúhelník APS je rovnoramenný.*[20]

Řešení:
Předpokládejme, že platí podmínka uvedená v zadání. Vyznačme na přímce AB bod P' tak, aby úsečka PP' byla rovnoběžná s osou AS vnitřního úhlu BAC. Potom je $|\sphericalangle APP'| = |\sphericalangle SAP| = \frac{1}{2}\alpha$ (střídavé úhly) a také $|\sphericalangle AP'P| = |\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2}\alpha$ (souhlasné úhly), takže trojúhelník PAP' je rovnoramenný. Proto $|BC| = |AB| + |AP| = |AB| + |AP'| = |BP'|$ a také trojúhelník $P'BC$ je rovnoramenný. Bod P leží na ose úhlu $P'BC$ (a tedy i na ose základny $P'C$), takže trojúhelník $P'PC$ je rovněž rovnoramenný ($|PP'| = |PC|$).

[18] [Šar–86, str. 9/25]
[19] [Bech–04, str. 3/2]
[20] [Shi–09, str. 33/1]



Obr. k úloze 3.5.6

Trojúhelníky BSA, BPP' jsou podobné (uu), takže

$$\frac{|SA|}{|PP'|} = \frac{|BA|}{|BP'|}.$$

Již víme, že $|BP'| = |BC|$, a ještě můžeme uplatnit větu 3.1 pro osu úhlu ABC:

$$\frac{|BA|}{|BP'|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|}.$$

Konečně využijeme shodnost úseček PC a PP' a dohromady dostaneme rovnost

$$\frac{|SA|}{|PP'|} = \frac{|AP|}{|PP'|},$$

odkud plyne $|SA| = |AP|$, takže trojúhelník APS je rovnoramenný. □

Stewartův vzorec

Úloha 3.5.7. *S využitím Stewartova vzorce určete délku těžnice t_c trojúhelníku ABC pomocí délek jeho stran.*[21]

Řešení:
Dosazením koeficientů $p = q = \frac{1}{2}$ dostáváme ze Stewartova vzorce přímo

$$t_c^2 = \tfrac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 - c^2), \quad \text{neboli} \quad t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$ □

[21] Přímý výpočet délky t_c pomocí kosinové věty jsme provedli v řešení úlohy 2.8.13.

Úloha 3.5.8. *a) Délky úseček, které trojúhelník vytíná na osách svých vnitřních úhlů, vyjádřete pomocí délek stran tohoto trojúhelníku.*
b) Jsou-li shodné dvě z úseček, které trojúhelník vytíná na osách svých vnitřních úhlů, pak je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.[22]

Řešení:

a) Úlohu vyřešíme pro úsečku z vrcholu C, zbylé dva vzorce obdržíme z výsledku cyklickou záměnou. Protože $|AU| : |BU| = b : a$ (věta 3.1), dosadíme do Stewartova vzorce pro délku $|CU|$ koeficienty $p = \frac{b}{a+b}$, $q = \frac{a}{a+b}$:

$$\begin{aligned} |CU|^2 &= \frac{a^2b}{a+b} + \frac{ab^2}{a+b} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\left(1 - \frac{c}{a+b}\right)\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) = \\ &= \frac{ab(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2}, \\ |CU| &= \frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{(a+b)}. \end{aligned}$$

Z uvedeného postupu plyne, že výsledný vzorec můžeme zapsat i ve tvaru

$$|CU| = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2}.$$

b) Předpokládejme, že jsou shodné úseky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B. Podle výsledku části a) platí

$$\frac{bc(b+c-a)(a+b+c)}{(b+c)^2} = \frac{ac(c+a-b)(a+b+c)}{(a+c)^2},$$

vydělením nenulovým $c(a+b+c)$ a odstraněním zlomků dojdeme k rovnosti

$$b(a+c)^2(b+c-a) = a(b+c)^2(c+a-b).$$

Vedeni snahou získat součinový tvar s činitelem $(a-b)$ rovnost anulujeme a pak členy sdružíme do podoby

$$(a-b)[a(b+c)^2 + b(a+c)^2] + c[a(b+c)^2 - b(a+c)^2] = 0,$$

kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned} (a-b)[a(b+c)^2 + b(a+c)^2] + c(ab^2 + ac^2 - ba^2 - bc^2) = 0, \\ (a-b)[a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(c^2 - ab)] = 0. \end{aligned}$$

Druhý činitel bude vždy kladný (není nutné celý výraz v závorce roznásobovat, stačí se zamyslet nad celkovým počtem členů abc), proto je rovnost splněna právě v případě, kdy platí $a = b$.

[22] Uvedené tvrzení se nazývá *Steinerova-Lehmusova věta* a má zajímavou historii, viz [Ber–04].

Jiný postup:
Podle výsledku části a) za předpokladu shodných úseků os vnitřních úhlů u vrcholů A, B platí

$$bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]=ac\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right].$$

Po vydělení obou stran rovnosti kladným c a snadné úpravě obdržíme

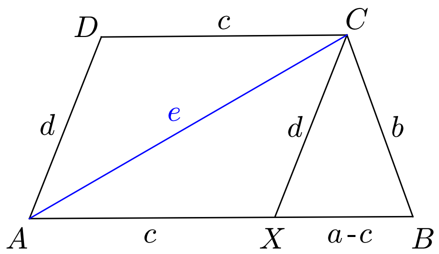
$$ab\left[\frac{b}{(a+c)^2}-\frac{a}{(b+c)^2}\right]=a-b.$$

Ukážeme, že poslední rovnost neplatí ani v případě $a>b$, ani v případě $a<b$. Je-li $a>b$, pak také $a+c>b+c$, a tudíž platí

$$\frac{a}{(b+c)^2}>\frac{b}{(a+c)^2},$$

takže levá strana rovnosti je záporná, zatímco pravá strana je kladná. Stejným způsobem dosáhneme sporu i v případě $a<b$, takže musí být $a=b$. Důkaz je tak hotov. □

Úloha 3.5.9. *Určete délky úhlopříček v lichoběžníku, jehož základny mají délky a, c a ramena délky b, d.*[23]



Obr. k úloze 3.5.9

Řešení:
Veďme v lichoběžníku $ABCD$ (CD je kratší základna) bodem C rovnoběžku se stranou AD a její průsečík se stranou AB označme X (viz obrázek). V trojúhelníku ABC použijeme Stewartův vzorec

$$|CX|^2=p|BC|^2+q|CA|^2-pq|AB|^2,$$

[23] [Ars–04, str. 364/3]

kam dosadíme délky stran a, b, e, $|CX| = d$ a koeficienty

$$p = \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{c}{a}, \quad q = \frac{|BX|}{|AB|} = \frac{a-c}{a}.$$

Pro hledanou délku $e = |AC|$ tak dostaneme rovnici, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}
d^2 &= \frac{c}{a}b^2 + \frac{a-c}{a}e^2 - \frac{c}{a}\frac{a-c}{a}a^2,\\
ad^2 &= cb^2 + ae^2 - ce^2 - ca^2 + ac^2,\\
e^2 &= \frac{ad^2 - cb^2 + ca^2 - ac^2}{a-c},\\
e &= \sqrt{ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a-c}},
\end{aligned}$$

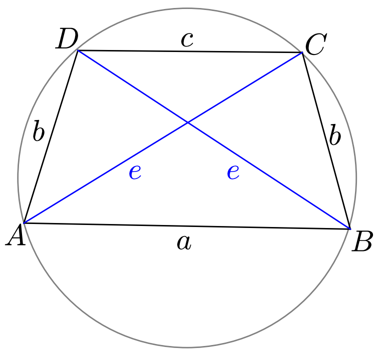
což je hledaný vzorec. Provedeme-li v uvedeném vzorci současnou záměnu a s c a b s d, zjistíme, že stejný vzorec platí, i pokud $c > a$. Zaměníme-li pouze b s d, získáme vzorec pro délku druhé úhlopříčky $f = |BD|$:

$$f = \sqrt{ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}}. \qquad \square$$

Ptolemaiova věta, Ptolemaiova nerovnost

Úloha 3.5.10. *Dokažte, že v rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se základnami délek a, c, rameny délky b a úhlopříčkami délky e platí*[24]

$$e^2 = b^2 + ac.$$



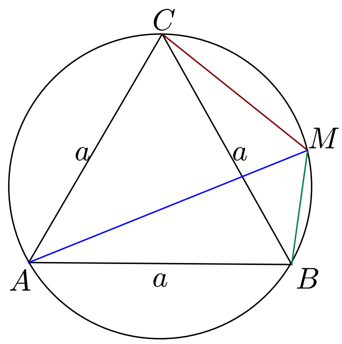
Obr. k úloze 3.5.10

[24][Ars–04, str. 373/1], výsledek snadno získáme i dosazením $b = d$ do výsledku úlohy 3.5.9.

Řešení:
Rovnoramenný lichoběžník je tětivovým čtyřúhelníkem, můžeme proto využít Ptolemaiovu větu. Přímo dostáváme

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD| + |AB| \cdot |CD|, \quad \text{neboli} \quad e^2 = b^2 + ac. \qquad \square$$

Úloha 3.5.11. *Rovnostranný trojúhelník ABC je vepsán do kružnice. Na jejím kratším oblouku BC je zvolen bod M. Dokažte, že $|MA| = |MB| + |MC|$.*[25]



Obr. k úloze 3.5.11

Řešení:
Využijeme Ptolemaiovu větu v tětivovém čtyřúhelníku $ABMC$:

$$|MA| \cdot |BC| = |MB| \cdot |AC| + |MC| \cdot |AB|$$

Trojúhelník ABC je rovnostranný, tedy $|AB| = |BC| = |AC| = a$. Proto

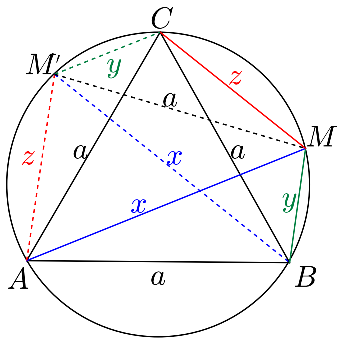
$$|MA| \cdot a = |MB| \cdot a + |MC| \cdot a$$

a po vydělení a získáme dokazovanou rovnost. $\square$

Úloha 3.5.12. *Na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC libovolně zvolíme bod M. Dokažte, že hodnota výrazu $|AM|^2+|BM|^2+|CM|^2$ nezávisí na poloze bodu M.*[26]

Řešení:
V případě, kdy bod M splývá s jedním z vrcholů A, B, C, má zkoumaný součet hodnotu $2a^2$, kde a je délka strany trojúhelníku ABC. S ohledem na symetrii zadání proto pouze ukážeme, že stejnou hodnotu $2a^2$ má daný součet i pro každý bod M ležící uvnitř kratšího oblouku BC. Označme M' obraz bodu M v otočení kolem těžiště trojúhelníku o $120°$ (v němž A přejde v B) a položme $x = |MA| = |M'B|$, $y = |MB| = |M'C|$,

[25] [Hor–66, str. 39/13], [Eng–98, str. 321/53], [And–00, str. 4], řešení pomocí sinové věty je uvedeno v úloze 2.7.17 na straně 149, řešení pomocí kosinové věty je uvedeno v úloze 2.8.11 na straně 162.
[26] [Lei–06, str. 391/4]



Obr. k úloze 3.5.12

$z = |MC| = |M'A|$. Pak rovněž platí $|MM'| = a$ a můžeme využít Ptolemaiovu větu ve čtyřúhelnících $AMCM'$ a $BMCM'$:

$$a^2 = z^2 + xy, \quad a^2 = y^2 + zx.$$

Po sečtení obou rovností aplikujeme vztah $x = y + z$ z předchozí úlohy (důsledek Ptolemaiovy věty pro čtyřúhelník $ABMC$) a tak dostaneme kýženou rovnost

$$2a^2 = y^2 + z^2 + x(y + z) = y^2 + z^2 + x^2.$$ □

Úloha 3.5.13. *Je dán čtverec $ABCD$. Dokažte, že pro všechny body P kratšího oblouku AB kružnice čtverci opsané má výraz*

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$$

stejnou hodnotu. Určete ji.[27]

Řešení:
Délka úhlopříčky čtverce $ABCD$ o straně a je $a\sqrt{2}$. Je-li bod P vnitřním bodem kratšího oblouku AB, podle Ptolemaiovy věty pro tětivové čtyřúhelníky $APBC$, $APBD$ platí

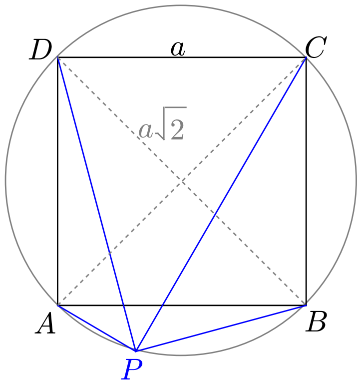
$$|AP|\cdot a + |BP|\cdot a\sqrt{2} = |CP|\cdot a, \quad |AP|\cdot a\sqrt{2} + |BP|\cdot a = |DP|\cdot a.$$

Obě rovnosti jsou triviálně splněny také v případě, kdy platí $P = A$ nebo $P = B$. Jejich sečtením dostaneme

$$(|AP| + |BP|)(a + a\sqrt{2}) = a(|CP| + |DP|), \quad \text{odkud}$$
$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

což je hledaná konstantní hodnota. □

[27] [MO, 48–A–II–2], podobné zadání směřující k využití Ptolemaiovy nerovnosti viz [Eng–98, str. 339/89].

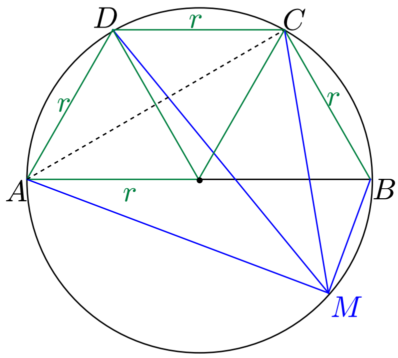


Obr. k úloze 3.5.13

Úloha 3.5.14. *Lichoběžník $ABCD$ je vepsán do kružnice k tak, že základna AB je jejím průměrem a základna CD má délku jejího poloměru. Dokažte, že pro každý vnitřní bod M toho oblouku AB kružnice k, který neobsahuje body C a D, mají oba výrazy*

$$\frac{|MA|+|MC|}{|MD|}, \quad a \quad \frac{2|MC|-|MA|}{|MB|}$$

stálé hodnoty, které na výběru bodu M nezávisí.[28]



Obr. k úloze 3.5.14

Řešení:
Nejdříve je nutné si uvědomit, že lichoběžník vepsaný do kužnice je rovnoramenný a že v zadaném případě je délka obou ramen rovna poloměru r kružnice k (lichoběžník tak tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníku). Délka obou úhlopříček je proto rovna $r\sqrt{3}$.

[28] Návrh autorky práce

Aplikujeme Ptolemaiovu větu na čtyřúhelníky $AMCD$ a $AMBC$:

$$|MD|\cdot r\sqrt{3} = |MA|\cdot r + |MC|\cdot r, \quad |MC|\cdot 2r = |MA|\cdot r + |MB|\cdot r\sqrt{3}.$$

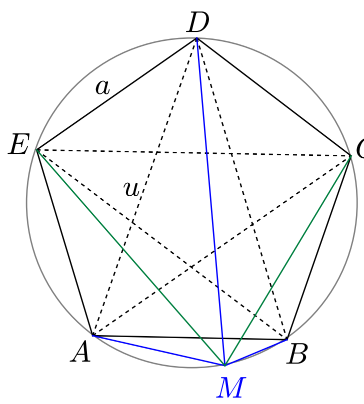
Z těchto rovností ihned dostáváme

$$\frac{|MA| + |MC|}{|MD|} = \sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{2|MC| - |MA|}{|MB|} = \sqrt{3},$$

takže hodnota obou zadaných výrazů na volbě bodu M skutečně nezáleží. □

Úloha 3.5.15. *Uvažujme kratší oblouk AB kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ a na něm libovolně zvolený bod M. Dokažte, že pak platí*[29]

$$|EM| + |CM| = |AM| + |BM| + |DM|.$$



Obr. k úloze 3.5.15

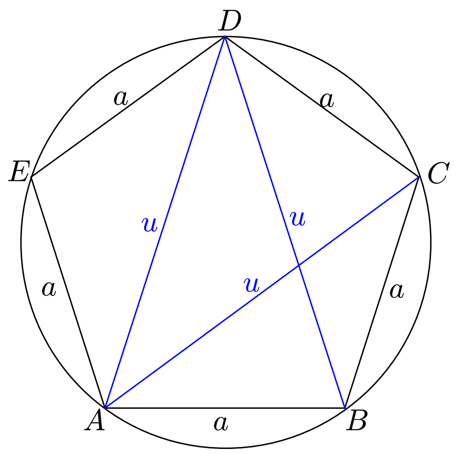
Řešení:
Označme a, u délky stran, resp. úhlopříček pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ a pro zvolený bod M vhodně zapišme tři Ptolemaiovy rovnosti ve čtyřúhelnících $AMBE$, $AMCE$, $AMDE$:

$$\begin{aligned} |EM|\cdot a &= |AM|\cdot u + |BM|\cdot a, \\ |AM|\cdot u + |CM|\cdot a &= |EM|\cdot u, \\ |EM|\cdot u &= |AM|\cdot a + |DM|\cdot a. \end{aligned}$$

Po jejich sečtení a vydělení kladným a ihned obdržíme dokazovanou rovnost. □

Úloha 3.5.16. *Určete délku úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku o straně a.*[30]

[29] [Lei–06, str. 391/6]
[30] [Ars–04, str. 373/6], [Lei–05, 135/2]



Obr. k úloze 3.5.16

ŘEŠENÍ:
Označme u hledanou délku úhlopříčky. Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ lze vepsat do kružnice, proto je např. čtyřúhelník $ABCD$ tětivový. Použijeme-li v něm Ptolemaiovu větu (délky stran a úhlopříček jsou vyznačeny na obrázku), získáme postupně

$$
\begin{aligned}
|AC| \cdot |BD| &= |BC| \cdot |AD| + |AB| \cdot |CD|, \\
u^2 &= au + a^2, \\
u^2 - au - a^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou u. Její kladné řešení je

$$u = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad \square$$

Ptolemaiovu nerovnost jsme na str. 190 dokázali pro délky stran a úhlopříček libovolného konvexního či nekonvexního rovinného čtyřúhelníku. Je výhodné tento výsledek přeformulovat obecně pro vzdálenosti libovolných čtyř bodů v rovině[31] (jejich konfigurace, pro něž je důkaz ze str. 190 nekorektní, se snadno posoudí zvlášť, nebudeme se tím však zde zabývat).

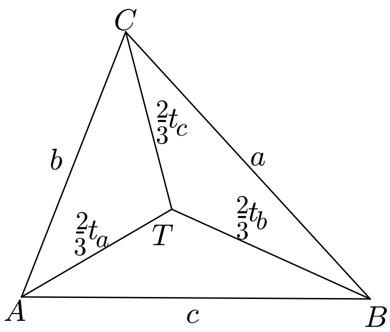
Pro každé čtyři body A, B, C, D dané roviny platí:

$$|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| \geq |AC|\cdot|BD|.$$

Rovnost přitom nastane, právě když tyto čtyři body leží v abecedním uspořádání na kružnici nebo jsou kolineární v pořadí (A, B, C, D), (D, A, B, C), (C, D, A, B) nebo (B, C, D, A).

[31] [Lei–06], kde je posouzen i *zkřížený* čtyřúhelník i případ tří či čtyř kolineárních bodů.

Úloha 3.5.17. *Pomocí Ptolemaiovy nerovnosti dokažte, že pro délky stran a těžnic každého trojúhelníku ABC platí nerovnost $at_a + bt_b > ct_c$.*[32]



Obr. k úloze 3.5.17

Řešení:
Zapišme Ptolemaiovu nerovnost pro vrcholy A, B, C a těžiště T trojúhelníku:

$$c \cdot \tfrac{2}{3}t_c < a \cdot \tfrac{2}{3}t_a + b \cdot \tfrac{2}{3}t_b.$$

Těžiště je vždy vnitřním bodem trojúhelníku, neleží proto na kružnici jemu opsané a nerovnost je ostrá. Úprava na dokazovaný tvar je zřejmá. □

Úloha 3.5.18. *Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí*[33]

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < \frac{b}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Řešení:
K vrcholům trojúhelníku ABC tentokrát pro sestavení Ptolemaiovy nerovnosti doplníme střed S kružnice vepsané. Při označení ρ jejího poloměru platí

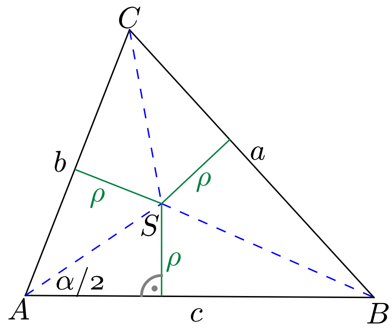
$$|AS| = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad |BS| = \frac{\rho}{\sin\frac{\beta}{2}}, \quad |CS| = \frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

a dosazením do ostré Ptolemaiovy nerovnosti (neboť střed kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku) obdržíme výsledek. □

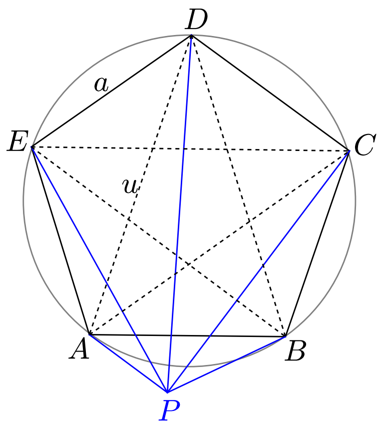
Úloha 3.5.19. *V rovině je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete nejmenší hodnotu výrazu*

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|},$$

kde P je libovolný bod roviny daného pětiúhelníku.[34]



Obr. k úloze 3.5.18



Obr. k úloze 3.5.19

Řešení:
Podle výsledku předchozí úlohy 3.5.16 je délka úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ o straně a rovna $u = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sečtením Ptolemaiových nerovností pro čtyřúhelníky (resp. příslušné čtveřice bodů) $APBE$, $APBD$, $APBC$

$$|PA|\cdot u + |PB|\cdot a \geq a\cdot|PE|,$$
$$|PA|\cdot u + |PB|\cdot u \geq a\cdot|PD|,$$
$$|PA|\cdot a + |PB|\cdot u \geq a\cdot|PC|$$

obdržíme nerovnost

$$(|PA| + |PB|)\cdot(2u + a) \geq a(|PC| + |PD| + |PE|),$$

[32] [Lei–08, str. 453/1]
[33] [Lei–08, str. 454/3]
[34] [CPS, 2008, úloha č. 5]

ze které určíme dolní odhad zadaného výrazu:

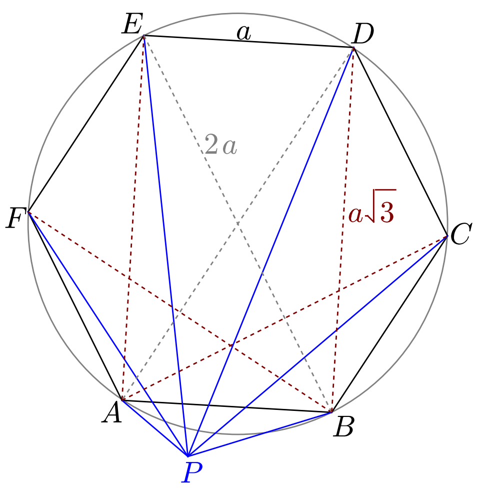
$$\frac{|PA|+|PB|}{|PC|+|PD|+|PE|} \geq \frac{a}{2u+a} = \frac{a}{a(1+\sqrt{5})+a} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2.$$

Rovnost ve všech uvedených nerovnostech nastane, právě když je $P = A$ nebo $P = B$ nebo jsou čtyřúhelníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ tětivové, tj. právě když bod P leží na kratším oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$. Nejmenší možná hodnota zadaného výrazu je proto $\sqrt{5}-2$. □

Úloha 3.5.20. *V rovině je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Určete nejmenší hodnotu výrazu*

$$\frac{|PA|+|PB|}{|PC|+|PD|+|PE|+|PF|},$$

kde P je libovolný bod roviny daného šestiúhelníku.[35]



Obr. k úloze 3.5.20

Řešení:
Postupujme podobně jako v předchozí úloze. Úhlopříčky šestihúhelníku $ABCDEF$ o straně a mají délky $a\sqrt{3}$, resp. $2a$, jak je znázorněno na obrázku. Sečtením čtyř Ptolemaiových nerovností pro čtyřúhelníky (resp. příslušné čtveřice bodů) $APBF$, $APBE$, $APBD$, $APBC$

$$|PA|\cdot a\sqrt{3}+|PB|\cdot a \geq a\cdot|PF|, \qquad |PA|\cdot 2a+|PB|\cdot a\sqrt{3} \geq a\cdot|PE|,$$
$$|PA|\cdot a\sqrt{3}+|PB|\cdot 2a \geq a\cdot|PD|, \qquad |PA|\cdot a+|PB|\cdot a\sqrt{3} \geq a\cdot|PC|$$

[35] Návrh autorky práce

obdržíme nerovnost

$$(|PA| + |PB|) \cdot (3a + 2a\sqrt{3}) \geq a(|PC| + |PD| + |PE| + |PF|),$$

ze které určíme odhad

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE| + |PF|} \geq \frac{1}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$$

Rovnost nastane, právě když bod P leží na kratším oblouku AB kružnice opsané šestiúhelníku $ABCDEF$. $\square$

Závěr

Během procházení dostupné tuzemské i zahraniční literatury – učebnic, sbírek úloh a ročenek matematických soutěží – jsem nalezla velké množství méně či více obtížných úloh odpovídajících zadání práce. Při jejich posuzování, klasifikaci a zejména formulaci řešení jsem využila zkušenosti získané pedagogickou praxí. Práci mi značně usnadnilo použití sázecího systému LaTeX a programu Geonext pro tvorbu obrázků.

Zpracování tak velkého množství úloh bylo přínosem i pro mne samotnou, protože jsem si v dané oblasti ještě rozšířila přehled získaný studiem na vysoké škole. Jsem přesvědčena, že tyto zkušenosti a získanou zásobu roztříděných úloh v budoucnu zúročím ve své profesi středoškolského učitele. Stejně tak jsem přesvědčena, že tato práce bude přínosem pro všechny učitele matematiky, kteří se rozhodnou zpracované úlohy využít při výkladu učiva, aniž by museli sami vyhledávat úlohy v často špatně dostupných zdrojích. Navíc se domnívám, že nejen stěžejní druhá kapitola, ale i následující kapitola třetí se mohou stát vhodným podkladem pro přípravu budoucích učitelů matematiky při studiu na vysoké škole, neboť dobrý učitel by měl mít znalosti hlubší, než je rámec běžných školských osnov, a tato práce je vhodným materiálem právě k takovému prohloubení.

Jsem si vědoma skutečnosti, že jsem v rámci zpracování úloh ze zadané oblasti neprošla a ani nemohla projít úplně všechny dostupné zdroje. Stejně tak vím, že by tato práce mohla při zvětšení svého rozsahu obsahovat další témata výpočtové geometrie, jakými jsou například Cevova a Menelaova věta nebo metoda hmotných bodů. Budu potěšena, když se moje práce stane inspirací pro další kolegy, kteří na ni navážou obdobným zpracováním dalších vhodných témat.

Snažila jsem se ve stanoveném rozsahu práce i v jejím časovém rámci zadanou oblast zpracovat co možná nejpečlivěji a takovým způsobem, aby byla užitečnou pomůckou jak pro mne, tak i pro všechny ostatní kolegy, kteří se věnují profesi učitele matematiky nebo se na ni připravují a kterým se moje práce dostane do rukou. Věřím, že se mi tohoto vytyčeného cíle podařilo dosáhnout.

Seznam použité literatury

Školní učebnice

[Odv–94] Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia - Goniometrie.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 1994.

[Pom–93] Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia - Planimetrie.* 4. vydání. Praha: Prometheus, 1993.

[Pom–95] Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia - Stereometrie.* Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 1995.

Sbírky úloh a knihy zaměřené na geometrii

[Ars–04] Arslanagić, Š. *Matematika za nadarene.* Sarajevo: Birograf, 2004.

[Boč–95] Boček, L., Zhouf, J. *Máte rádi kružnice?* Praha: Prometheus, 1995.

[Bot–69] Bottema, O. a kol. *Geometric Inequalities.* Groningen: Wolters-Nordhoff Publishing, 1969.

[Bra–05] Bradley, C. J., Gardiner, A. D. *Plane Euclidean Geometry: Theory and Problems.* Leeds: The United Kingdom Mathematics Trust, 2005.

[Cox–67] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry Revisited.* Washington: Mathematical Association of America, 1967.

[Hon–95] Honsberger, R. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America, 1995.

[Hor–66] Horák, S. *Kružnice.* Praha: Mladá fronta, 1966.

[Joh–60] Johnson, R. A. *Advanced Euclidean Geometry.* New York: Dover Publications, 1960.

[Kuř–90] Kuřina, F. *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN, 1990.

[Kuř–96] Kuřina, F. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996.

[Mon–09] Monk, D. *New Problems in Euclidean Geometry.* Leeds: The United Kingdom Mathematics Trust, 2009.

[Pra–86a] Prasolov, V. V. *Zadači po planimetrii, časť 1.* Moskva: Nauka, 1986.

[Pra–86b] Prasolov, V. V. *Zadači po planimetrii, časť 2.* Moskva: Nauka, 1986.

[Pra–06] Prasolov, V. V. *Zadači po planimetrii.* 5. vydání. Moskva: MCNMO, 2006.

[Šar–86] Šarygin, I. F. *Zadači po geometrii.* Moskva: Nauka, 1986. Překlad zadání úloh: Holý, K., nepublikováno.

[Yiu-98] Yiu, P. *Notes on Euclidean Geometry.* Florida Atlantic University. `http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf`, 1998.

Polytematické sbírky úloh

[Aga-10] Agachanov, N. Ch., Podlipskij, O. K. *Matěmatika – rajonnyje olympiady.* Moskva: Prosvěščenije, 2010.

[And–00] Andreescu, T., Gelca, R. *Mathematical Olympiad Challenges.* New York: Birkhäuser Boston, 2000.

[And–03] Andreescu, T., Andrica, D. *360 Problems for Mathematical Contest.* Zalău: Gil, 2003.

[And–04] Andrescu, T., Enescu, B. *Mathematical Olympiad Treasures.* New York: Birkhäuser Boston, 2004.

[Bech–04] Becheanu, M., Gologan, R. *Romanian Math. Competitions 2004.* Bucureşti: Societatea de Ştiinţe Matematice din România, 2004.

[Bech–07] Becheanu, M., Enescu, B. *Balkan Mathematical Olympiads 1984–2006.* Zalău: Gil, 2007.

[Ber–04] Berinde, V., Păltănea, E. *Gazeta Matematică - A Bridge Over Three Centuries.* Bucureşti: Romanian Mathematical Society, 2004.

[Boč–84] Boček, L., Vrba, A. *Vybrané úlohy z matematické olympiády, kategorie B.* Praha: SPN, 1984.

[Bom–96] Bombardelli, M., Dujella, A., Slijepčević, S. *Matematička natjecanja učenika srednjih škola (izbor zadataka).* Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo: Element, 1996.

[Doob–93] Doob, M. *The Canadian Mathematical Olympiad 1969–1993.* Ontario: Canadian Mathematical Society, 1993.

[Dör–65] Dörrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution.* New York: Dover Publications Inc., 1965.

[Eng–98] Engel, A. *Problem Solving Strategies.* Springer, 1998.

[Fom–94] Fomin, D., Kirichenko, A. *Leningrad Mathematical Olympiads 1987–1991.* MathPro Press, 1994.

[Gar–02] Gardiner, T. *Senior Mathematical Challenge.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[Gil–93] Gilbert, G. T., Krusemeyer, M. I., Larson, L. C. *The Wohacsum County Problem Book.* The Mathematical Association of America, 1993.

[Gro–02] Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. *Bulgarian Mathematical Competitions 1997–2002.* Sofia: Union of Bulgarian Mathematicians, 2002.

[Hon–91] Honsberger, R. *More Mathematical Morsels.* The Mathematical Association of America, 1991.

[Hon–96] Honsberger, R. *From Erdös to Kiev.* The Mathematical Association of America, 1996.

[Hon–97] Honsberger, R. *In Polya's Footsteps.* The Mathematical Association of America, 1997.

[Hon–01] Honsberger, R. *Mathematical Chestnuts From Around The World.* The Mathematical Association of America, 2001.

[Kuc–94] Kuczma, M. E. *144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition.* Freeland: The Academic Distribution Center, 1994.

[Lei–xx] Leischner, P. *Metody řešení úloh.* Archiv úloh publikovaný v systému eAmos.
`http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_9642/metody.pdf`, březen 2008.

[Neg–05] Negut, A. *Problems for the Mathematical Olympiads – From the first Team Selection Test to the IMO.* Zalău: GIL, 2005.

[Shi–09] Shine, C. Y. *Thirty Years of Brazilian Math Olympiads.* Rio de Janeiro: AOBM, 2009.

[Švr–07] Švrček, J., Calábek, P. *Sbírka netradičních matematických úloh.* Praha: Prometheus, 2007.

[Tao–06] Tao, T. *Solving Mathematical Problems – a Personal Perspective.* New York: Oxford Univesrity Press, 2006.

[Wil–96] Williams, K. S., Hardy, K. *The Red Book of Mathematical Problems.* New York: Dover Publications, Inc., 1996.

[Zim–95] Zimmerman, L., Kessler, G. *ARML – NYSML Contests 1989–1994.* MathPro Press, 1995.

Články v časopisech a příspěvky ve sbornících

[Beč–94] Bečvář, J. Hrdinský věk řecké matematiky. *Historie matematiky I.* Sborník semináře pro vyučující na středních školách. Brno: JČMF, 1994. s. 21–101.

[Bech-99] Bechenau, M., Gologan, R., Farkas, R., Necula, C. *Program of the 40^{th} International Mathematical Olympiad.* Bucureşti, 1999.

[Ber–04] Beran, L. n-tý důkaz, kde n je alespoň 81. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 2002–2004, roč. 78, č. 4, s. 214–217. ISSN 0035-9343

[Cal–10] Calda, E., Šimša, J. O jedné vlastnosti stran a úhlů v trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 2010, roč. 85, č. 2, s. 1–5. ISSN 0035-9343.

[Lei–05] Leischner, P. Ptolemaiova věta. *Matematika – fyzika – informatika*, 2005, roč. 15, č. 3, s. 129–135. ISSN 1210-1761.

[Lei–06] Leischner, P. Ptolemaiova nerovnost. *Matematika – fyzika – informatika.* 2006, roč. 15, č. 7, s. 385–392. ISSN 1210-1761.

[Lei–08] Leischner, P. Ptolemaiova nerovnost v geometrii trojúhelníku. *Matematika – fyzika – informatika.* 2008, roč. 17, č. 8, s. 449–454. ISSN 1210-1761.

[Hav–07] Havířová, B. Dvojstředové čtyřúhelníky a Fussův problém. *Matematika – fyzika – informatika.* 2007, roč. 16, č. 5, s. 257–268. ISSN 1210-1761.

[Hav–10] Havířová, B. Co možná nevíte o čtyřúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 2010, roč. 85, č. 1, s. 1–12. ISSN 0035-9343.

[Ros–92] Rosado, F. B. An elementary (and short!) proof of Routh's theorem. *Mathematics and Informatics Quarterly.* 1992, roč. 2, č. 3, s. 95–97.

[Šim–02] Šimša, J. Důkazy beze slov. *Matematika, fyzika a vzdělávání.* Brno: VUTIUM, 2002, s. 64–78. ISBN 80-214-2601-2.

[Švr–09] Švrček, J. O jedné úloze z ukrajinské MO. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 2009, roč. 84, č. 2, s. 5–11.

Matematické soutěže

[MO] *Matematická olympiáda v ČR.* ÚMS PřF MU. http://math.muni.cz/mo/ Citováno v pořadí ročník–kategorie–kolo–úloha.

[CPS] *Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské.* Závěrečná společná příprava tří družstev před mezinárodní matematickou olympiádou.

Internetové zdroje – životopisy

[1] *Brahmagupta.* Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta, 20. 9. 2006.

[2] *Ptolemy.* Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy, 19. 9. 2006.

[3] *Robert Simson.* University of St Andrews. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Simson.html, 2005.

[4] *Matthew Stewart.* University of St Andrews. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stewart.html, 2005.

[5] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. *Brahmagupta biography.* School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html, listopad 2000.

Ostatní internetové zdroje

[6] Maitte, B., Varignon, P. *Elémens de mathématique de monsieur Varignon.* Paris: Brunet, P. M., 1731. http://polib.univ-lille3.fr/data/006/index.html

[7] Sandifer, E. *How Euler Did It – The Euler-Pythagoras theorem.* The Mathematical Association of America. http://www.maa.org/editorial/euler/How Euler Did It 15 Euler-Pythagoras.pdf, leden 2005.

[8] *Brahmagupta's formula.* Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta%27s_formula, 3. 8. 2006.

[9] Weisstein, Eric W. *Brahmagupta's Formula.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html, 12. 3. 2004.

[10] Weisstein, Eric W. *Bretschneider's Formula.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html, 6. 3. 2004.

[11] Gérard P. Michon. *Practical Formulas.* Numericana.
http://home.att.net/~numericana/answer/formula.htm, 19. 8. 2006.

[12] Weisstein, E. W. *Poncelet's Porism.* MathWorld – A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html, 10. 7. 2005.

[13] Bogomolny, A. *A Property of Circumscribed Quadrilaterals.* Cut The Knot.
http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/CircumQuadri.shtml, 10. 7. 2005

[14] Bogomolny, A. *Collinearity in Bicentric Quadrilaterals.* Cut The Knot.
http://www.cut-the-knot.org/ctk/BicentricQuadri.shtml, 10. 7. 2005.