MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ

Přírodovědecká fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jensenova nerovnost
a její aplikace

Miloš PŘINOSIL

Brno 2005

Obsah

Úvod

"Zdá se mi, že pojem konvexní funkce je stejně základní,
jako funkce nezáporná nebo funkce rostoucí.
Nemýlím-li se v tom, tento pojem by měl nalézt své místo
v elementárních textech věnovaných teorii reálných funkcí."

J. L. W. V. Jensen

Jensenova nerovnost je jedním z nejvýznamnějších vztahů v teorii algebraických nerovností. Většinu klasických nerovností z ní totiž můžeme odvodit a zároveň s její pomocí elegantně vyřešit celou řadu algebraických úloh. Přesto jí podle mého názoru dosud nebyla v základní české matematické literatuře věnována dostatečná pozornost. V této diplomové práci si kladu za cíl tuto mezeru částečně vyplnit.

V první, teoretické části se věnuji tématu konvexních funkcí, neboť ty jsou hlavním předpokladem pro využití Jensenovy nerovnosti. Při sestavování textu o vlastnostech konvexních funkcí v prvních dvou kapitolách jsem čerpal převážně ze skript [1]. Třetí kapitola je věnována vlastní Jensenově nerovnosti, která je zde zavedena a dokázána. Jsou zde rovněž vyloženy okolnosti, které vedly dánského matematika Jensena k objevení nerovnosti nesoucí dnes jeho jméno. Popsaná teorie je pak využita v posledních dvou kapitolách, které ukazují praktický význam Jensenovy nerovnosti. V první z nich je odvozena většina klasických nerovností, ve druhé je pak sbírka příkladů a úloh, které jsou s využitím Jensenovy nerovnosti vyřešeny. V závěru je uveden stručný přehled životopisných údajů zmíněných matematiků.

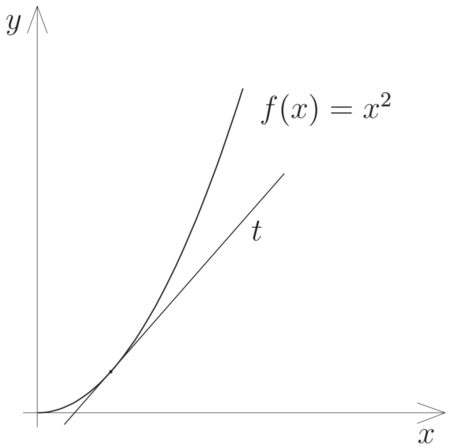
Poznamenejme jen, že nebude-li uvedeno jinak, budou v textu proměnné i, j, k, n značit přirozená čísla.

Kapitola 1

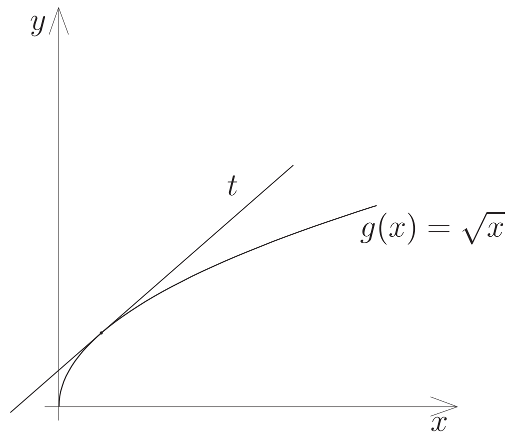
Konvexní funkce

V úvodní kapitole se budeme věnovat konvexním resp. konkávním funkcím. Po jejich zavedení vyložíme některé významné vlastnosti těchto funkcí a uvedeme důležitá tvrzení, která plynou z existence jejich derivací.

Uvažme funkci $f(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$ a funkci $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, \infty)$. Obě mají na intervalu $x \in (0, \infty)$ podobné vlastnosti: jsou rostoucí a spojité, mají zde všechny derivace apod.



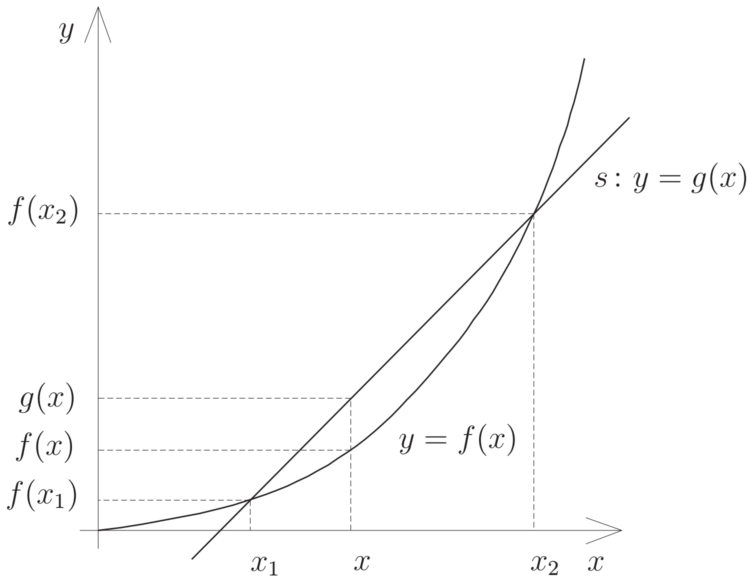
Obr. 1.1



Obr. 1.2

V jejich průběhu je však přesto patrný rozdíl, oba grafy jsou „zakřiveny“ opačným směrem. Stručně, avšak výstižně, to lze vyjádřit následující formulací. Zatímco graf funkce f leží nad tečnou sestrojenou v jeho libovolném bodě, graf funkce g leží pod každou svou tečnou. A právě tato vlastnost se v případě funkce f nazývá konvexnost, přesněji ostrá konvexnost, a v případě funkce g ostrá konkávnost. Toto pojetí je ovšem omezeno pouze na funkce mající derivaci.

Uvedenou vlastnost ryze konvexních funkcí však lze formulovat i jinak. Zvolíme-li dva libovolné body x_1, $x_2 \in (0, \infty)$, $x_1 < x_2$, pak oblouk grafu funkce f příslušný k intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ leží pod sečnou s určenou body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$. To znamená, že pro každé $x \in (x_1, x_2)$ je číslo $f(x)$ menší než příslušná funkční hodnota lineární funkce g, jejíž graf je určen body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.



Obr. 1.3

Libovolný bod $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ lze psát ve tvaru $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, kde $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Hodnota příslušné lineární funkce v bodě x je pak $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Definice 1.1. Řekneme, že funkce f je *konvexní na intervalu I*, jestliže pro každé dva body x_1, $x_2 \in I$ takové, že $x_1 < x_2$, a každá dvě čísla λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{1.1}$$

Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu I*, jestliže pro každé dva body x_1, $x_2 \in I$ takové, že $x_1 < x_2$, a každá dvě čísla λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{1.2}$$

Pokud v obou vztazích (1.1) a (1.2) nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostáváme definice pojmů *ostré konvexnosti* a *ostré konkávnosti* na intervalu I.

Dodejme, že vztahy (1.1) a (1.2) platí i pro dvojice $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, kde tyto nerovnosti přecházejí v triviální rovnosti (splněné pro každou funkci f).

Poznámka 1.2. Z definice ihned plyne, že je-li funkce f konvexní na intervalu I, pak funkce $(-f)$ je konkávní na intervalu I a naopak. Lze se tedy omezit pouze na vyšetřování vlastností konvexních funkcí. Stejný vztah platí i mezi ostře konvexními a ostře konkávními funkcemi.

Poznámka 1.3. Ekvivalentní zápis nerovnosti (1.1) z předchozí definice lze dostat také následujícím způsobem: Nechť f je konvexní na I a pro body x_1, x_2, $x_3 \in I$ platí, že $x_1 < x_2 < x_3$. Pokud $x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3$, kde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, je $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, a tedy $x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_3$ a odtud $\lambda_1 = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $\lambda_2 = 1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Nerovnost (1.1) lze tedy v naší situaci zapsat a postupně upravovat takto:

$$
\begin{aligned}
f(x_2) &\le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3), \\
f(x_2) &\le \frac{(x_3 - x_2 + x_1 - x_1) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3)}{x_3 - x_1}, \\
f(x_2) &\le \frac{(x_3 - x_1) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3)}{x_3 - x_1}, \\
f(x_2) &\le \frac{(x_3 - x_1) f(x_1) + (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))}{x_3 - x_1}, \\
f(x_2) &\le f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$

Poznatek, že konvexní funkce lze charakterizovat pomocí poslední nerovnosti, uvedeme za chvíli ve větě 1.7. Ke stejnému účelu lze využít i nerovnosti z následujícího lemmatu.

Lemma 1.4. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I a $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné tři body z I. Pak následující tři nerovnosti jsou ekvivalentní:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \tag{1.3a}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{1.3b}$$

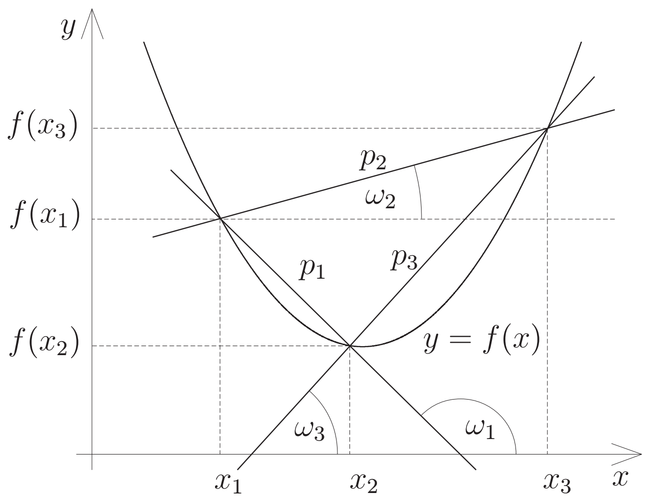
$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{1.3c}$$

Důkaz. Stačí ukázat rovnocennost např. prvních dvou nerovností, pro ostatní je důkaz obdobný. Úpravami (1.3a) se postupně dostane

$$
\begin{aligned}
&f(x_2)(x_3 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_1) \le f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),\\
&f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_2) - f(x_1)(x_2 - x_1) \le\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\le f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),\\
&\qquad\qquad (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2) \le (f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1),
\end{aligned}
$$

z čehož již snadno plyne nerovnost (1.3b). Všechny úpravy byly ekvivalentní, proto lze postup obrátit, čímž je ekvivalence nerovností dokázána. □

Geometrický význam zlomků z nerovností (1.3a) - (1.3c) je znázorněn na obr. 1.4. Body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ určují tři přímky p_1, p_2 a p_3. Vztahy (1.3) vyjadřují nerovnosti mezi jejich směrnicemi.



$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

$$\operatorname{tg}\omega_3 = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Obr. 1.4

Pojem konvexní množiny (nikoliv funkce) známe již ze střední školy. Připomeňme si ho.

Definice 1.5. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *konvexní*, jestliže s každými dvěma body A, $B \in M$ i celá úsečka $\overline{AB}$ leží v M. Jestliže každá z uvažovaných úseček $\overline{AB}$ leží celá (s případnou výjimkou krajních bodů A, B) uvnitř M, nazývá se M *ostře konvexní.*

Definice 1.6. Nechť f je funkce s definičním oborem $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. *Nadgrafem* funkce f rozumíme rovinnou množinu $G_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f) \text{ a } y \geq f(x)\}$.

Z výše uvedených definic a poznatků lze nyní vyvodit větu, která popisuje různé nutné a dostatečné podmínky konvexnosti.

Věta 1.7. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

(a) *Funkce f je konvexní na I.*

(b) *Pro libovolné body x_1, x_2, $x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí*

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{1.4}$$

(c) *Pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ ležící v I platí některá z nerovností* (1.3).

(d) *Nadgraf funkce f je konvexní množina.*

Obdobné tvrzení platí, bude-li v (a) ostře konvexní funkce místo konvexní, nahradíme-li všechny neostré nerovnosti (1.3) *a* (1.4) *ostrými a bude-li v (d) ostře konvexní množina místo konvexní.*

Důkaz. Vlastnosti (a) a (b) jsou ekvivalentní podle výpočtu z poznámky 1.3.

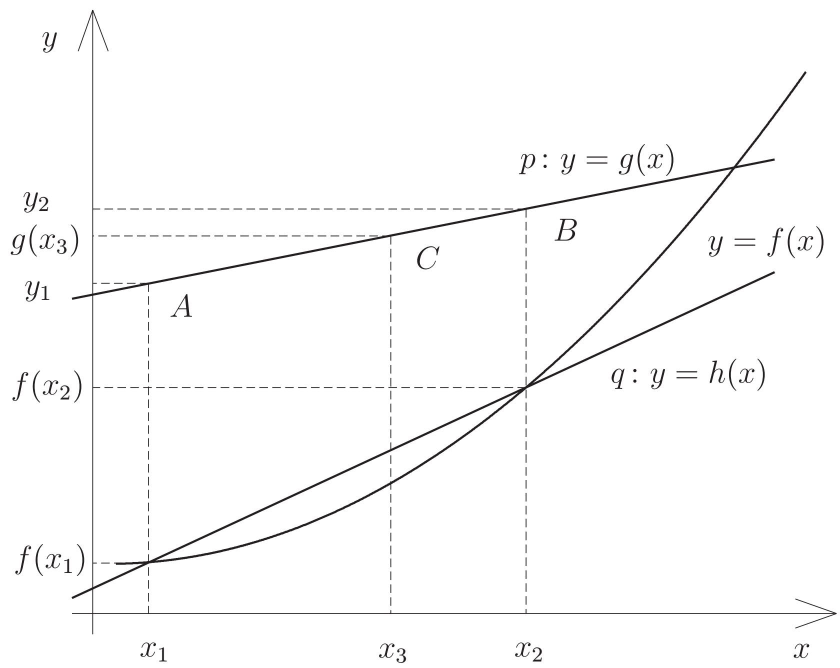
(c) $\Leftrightarrow$ (b)
Protože nerovnosti (1.3) jsou ekvivalentní, předpokládejme, že platí např. druhá z nich. Její úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \\
[f(x_2) - f(x_1)](x_3 - x_2) &\leq [f(x_3) - f(x_2)](x_2 - x_1), \\
f(x_2)x_3 - f(x_2)x_1 &\leq f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_1)x_2 + f(x_1)x_3, \\
f(x_2)(x_3 - x_1) &\leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_3 + x_1 - x_1), \\
f(x_2)(x_3 - x_1) &\leq (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_1)] + f(x_1)(x_3 - x_1), \\
f(x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1),
\end{aligned}$$

a proto podle poznámky 1.3 je f konvexní na I. Použité úpravy jsou ekvivalentní, takže platí i opačná implikace (b) $\Rightarrow$ (c).

(a) $\Rightarrow$ (d)

Předpokládejme, že $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ jsou libovolné body nadgrafu G_f konvexní funkce f, takže platí $f(x_1) \leq y_1$ a $f(x_2) \leq y_2$. Je-li $x_1 = x_2$, je tvrzení o tom, že celá úsečka $\overline{AB}$ leží v M, zřejmé. Nechť tedy např. $x_1 < x_2$. Dále nechť g je lineární funkce, jejímž grafem je přímka p procházející body A a B, a h je lineární funkce, jejímž grafem je přímka q procházející body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$.



Obr. 1.5

Funkce g a h jsou zřejmě zadány vzorci

$$g: \; y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,,$$

$$h: \; y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Předpokládejme dále, že $C = [x_3, g(x_3)]$, $x_3 \in (x_1, x_2)$, je libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{AB}$. Ukážeme, že $g(x_3) \geq h(x_3)$, neboli $C \in G_f$.

Splývají-li přímky p a q, je tato nerovnost zřejmá rovnost. Nechť tedy $f(x_1) \neq y_1$ nebo $f(x_2) \neq y_2$. Ukážeme, že pak je dokonce $g(x_3) > h(x_3)$. Připusťme, že pro některé $x_3 \in (x_1, x_2)$ je $g(x_3) \leq h(x_3)$. Dostaneme tedy

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1),$$

$$y_1 - f(x_1) \leq \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}[(y_1 - f(x_1)) - (y_2 - f(x_2))],$$

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}[y_1 - f(x_1)] \leq -\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}[y_2 - f(x_2)].$$

Levá strana poslední nerovnosti je nezáporná a pravá nekladná, takže obě musí být nulové. To znamená, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$, což je spor.

(d) $\Rightarrow$ (a)

Protože úsečka spojující dva body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ z G_f leží celá v G_f, platí $h(x_3) \geq f(x_3)$ pro každé $x_3 \in (x_1, x_2)$, kde h má stejný význam jako v předchozí části důkazu. Tedy

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) \geq f(x_3),$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1),$$

kde ovšem $x_1 < x_3 < x_2$, takže platí (b), a tedy i (a).

Pro obměněné tvrzení o ostře konvexních funkcích je důkaz analogický. □

Následující věta má při praktickém rozhodování o konvexnosti či konkávnosti konkrétních funkcí rozhodující význam. Ukazuje, že zkoumaná vlastnost u funkcí, které mají derivaci, souvisí s monotonií první derivace.

Věta 1.8. *Nechť funkce f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Pak je f konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy, když je funkce f' neklesající (rostoucí) na I.*

Důkaz. Předpokládejme, že je funkce f konvexní na I. Zvolme libovolně body x_1, $x_2 \in I$, $x \in (x_1, x_2)$. Pak podle věty 1.7, části (c) platí

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Provedeme-li v levém zlomku této nerovnosti limitní přechod pro $x \to x_1^+$ a v pravém zlomku limitní přechod pro $x \to x_2^-$ (a uvědomíme-li si, že podle předpokladu existují derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$), dostáváme, že $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, což znamená, že funkce f' je neklesající na I.

Nechť je nyní f' neklesající na I a nechť $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné tři body z intervalu I. Podle věty 1.7, části (c) stačí ukázat, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkce f splňuje na intervalech $\langle x_1, x_2 \rangle$ a $\langle x_2, x_3 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty, tj. existují body $c_1 \in (x_1, x_2)$ a $c_2 \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Jelikož $c_1 < c_2$ a f' je neklesající, platí $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ a tvrzení je dokázáno.

Pro ostře konvexní funkce je důkaz analogický. □

Důsledek 1.9. *Nechť I je otevřený interval a f má vlastní druhou derivaci na I.*

(a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konvexní na I.*

(b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konkávní na I.*

Důkaz. Plyne z věty 1.8 a z toho, že funkce s kladnou (zápornou) derivací je rostoucí (klesající). □

Následující věta má důležitý geometrický význam. Říká nám, že zatímco graf konvexní funkce musí ležet nad tečnou sestrojenou v jeho libovolném bodě, graf konkávní funkce musí ležet pod každou takovou tečnou. Připomeňme, že rovnice tečny ke grafu funkce f s bodem dotyku $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta 1.10. *Nechť funkce f má vlastní derivaci na intervalu I. Pak je f konvexní na I právě tehdy, když pro každé dva různé body x, $x_0 \in I$ platí:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Stejně tak je f konkávní na I právě tehdy, když pro každé dva různé body x, $x_0 \in I$ platí:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Obdobný výsledek platí pro funkce ryze konvexní a ryze konkávní na intervalu I (nerovnosti v tvrzení jsou ostré).

Důkaz. Důkaz stačí provést pouze pro případ konvexní funkce, pro konkávní je analogický. Nechť f je konvexní na intervalu I. Podle věty 1.8 je funkce f' neklesající na I. Mějme tedy dány dva různé body x, $x_0 \in I$. Podle Lagrangeovy věty existuje bod c mezi body x, x_0 tak, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Odtud odečtením výrazu $f'(x_0)(x - x_0)$ od obou stran rovnosti dostáváme

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0).$$

Funkce f' je neklesající na I, tj. $\frac{f'(c)-f'(x_0)}{c-x_0} \geq 0$, takže je buď $f'(c) = f'(x_0)$, nebo má výraz $f'(c) - f'(x_0)$ stejné znaménko jako $c - x_0$ a to má stejné znaménko jako $x - x_0$. Proto je $\left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0) \geq 0$, a tedy

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad \text{odkud} \qquad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nechť je naopak pro libovolná $x \neq x_0$ z intervalu I splněna poslední nerovnost. Pak pro taková x, x_0 platí implikace

$$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0),$$

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Odtud dostáváme, že pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

a podle věty 1.7, části (c) je f konvexní na I. □

Na závěr této kapitoly si uvedeme a dokážeme jednu důležitou větu, která se týká tzv. J-konvexních funkcí. To jsou funkce, které splňují definici 1.1 zúženou na kombinaci čísel $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Pro libovolná x_1, $x_2 \in I$ tedy J-konvexní funkce f vyhovuje nerovnosti

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{1.5}$$

Těmito funkcemi se zabýval dánský matematik Jensen a jejich význam podrobněji popíšeme v úvodu kapitoly 3.

Věta 1.11. *Je-li funkce f J-konvexní a spojitá na intervalu I, pak je konvexní na I ve smyslu definice 1.1.*

Důkaz. Indukcí vzhledem k číslu k lze dokázat, že každá funkce f, která je J-konvexní na intervalu I, splňuje nerovnost

$$f\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} x_j\right) \le \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} f(x_j), \tag{1.6}$$

pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_{2^k} \in I$. Pro $k = 1$ jde přímo o definiční nerovnost (1.5). Ukažme si, jak přejít k hodnotě $k = 2$. Pro libovolná $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ nejprve užijeme nerovnost (1.5) s hodnotami x_1, x_2 zaměněnými hodnotami $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ a $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$. Dostaneme postupně:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4)}{2}\right) \le \\
&\le \frac{f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_3 + x_4)\right)}{2} \le \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}\right) = \\
&= \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4},
\end{aligned}$$

a to je nerovnost (1.6) pro $k = 2$. Obecný indukční krok od k ke $k + 1$ je analogický.

Abychom dokázali, že J-konvexní funkce f splňuje nerovnost (1.1) z definice 1.1 pro libovolně, ale pevně zvolená $x_1, x_2 \in I$, dosadíme do (1.6) $x_j = x_1$ pro $1 \le j \le m$ a $x_j = x_2$ pro $m < j \le 2^k$. Dostaneme nerovnost

$$f\left(\frac{m}{2^k}\, x_1 + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right) x_2\right) \le \frac{m}{2^k}\, f(x_1) + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right) f(x_2).$$

Provedeme-li nyní limitní přechod zlomku $\frac{m}{2^k} \to \lambda$, kde $\lambda \in (0, 1)$ je libovolně zvolené číslo, plyne ze spojitosti funkce f nerovnost

$$f\left(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\right) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

což je nerovnost (1.1), kterou jsme měli dokázat. □

Kapitola 2

Další vlastnosti konvexních funkcí

V předchozí kapitole byly zavedeny konvexní a konkávní funkce a byly vyšetřovány jejich vlastnosti zejména za předpokladu, že tyto funkce měly první resp. druhou derivaci. Konvexní a konkávní funkce však mají řadu důležitých vlastností i bez těchto předpokladů. Některé z nich jsou uvedeny v této kapitole. Stejně jako v předchozím textu se lze omezit ve formulacích pouze na konvexní funkce, neboť funkce f je konkávní právě tehdy, když funkce $(-f)$ je konvexní.

Pro potřeby následujícího textu je vhodné zavést následující označení. Nechť f je definovaná na intervalu I s krajními body α a β, $\alpha < \beta$. Označme vnitřek intervalu $I^0 = (\alpha, \beta)$ a jeho uzávěr $\bar{I} = \langle \alpha, \beta \rangle$ (pro $\alpha = -\infty$ resp. $\beta = \infty$ zůstává $\bar{I}$ zleva resp. zprava otevřený). Tedy $I^0 \subseteq D(f) = I \subseteq \bar{I}$.

Lemma 2.1. *Je-li f konvexní na I, je f spojitá na I^0.*

Důkaz. Nechť $x_2 \in I^0$, $x_1,\ x_3 \in I$ a $x_1 < x_2 < x_3$. Nechť $y = p_1(x)$ je rovnice přímky procházející body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ a $y = p_3(x)$ je rovnice přímky procházející body $[x_2, f(x_2)]$ a $[x_3, f(x_3)]$. Z definice konvexity je $f(x) \le p_3(x)$, $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Nechť $x_4 \in (x_2, x_3)$ a p je přímka procházející body $[x_2, f(x_2)]$ a $[x_4, f(x_4)]$. Pak podle věty 1.7, části (c) platí $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}$. Odtud vzhledem k rovnostem $p_1(x_2) = p(x_2) = f(x_2)$ máme $p_1(x) \le p(x)$ pro $x \ge x_2$. Ale $p(x_4) = f(x_4)$, odkud $p_1(x) \le f(x)$, $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Platí tedy $p_1(x) \le f(x) \le p_3(x)$, $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Protože $\lim_{x \to x_2^+} p_1(x) = \lim_{x \to x_2^+} p_3(x) = f(x_2)$, je $\lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2)$ a f je spojitá zprava v x_2. Obdobně se ukáže i spojitost zleva. $\square$

V krajních bodech I (pokud je v nich definovaná) ovšem funkce konvexní na I spojitá být nemusí. Ukazuje to příklad funkce $f(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $f(0) = f(1) = 1$.

Lemma 2.2. *Funkce f je konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy, když pro libovolné $x_0 \in I$ je funkce $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ neklesající (rostoucí) na $I \setminus \{x_0\}$.*

Důkaz. Plyne přímo z věty 1.7, části (c). $\square$

Věta 2.3. *Nechť funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I = (\alpha, \beta)$.*

(a) *Je-li funkce f konvexní na I, pak pro každý bod $x_0 \in I$ existují vlastní jednostranné derivace $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$. Tedy f je zejména spojitá na I.*

(b) *Je-li funkce f konvexní (resp. ostře konvexní) na I a $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, pak platí $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ (resp. $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$).*

Důkaz.

(a) Označme $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$. Funkce g je neklesající podle lemmatu 2.2. Pro $x_1 < x_0 < x_2$ je $g(x_1) \leq g(x_2)$, proto platí $\lim_{x\to x_0^-} g(x) \leq g(x_2)$, a tudíž i následně $\lim_{x\to x_0^-} g(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} g(x)$ (limity existují díky monotonii funkce g a jsou vlastní, protože g je ohraničená v ryzím okolí bodu x_0). Ale $\lim_{x\to x_0^-} g(x) = f'_-(x_0)$ a $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = f'_+(x_0)$. Z existence jednostranných derivací plyne spojitost zprava a zleva a tedy i spojitost funkce f. (Spojitost již byla nezávisle dokázána v lemmatu 2.1.)

(b) Pro $x_1 < x < x_2$ platí $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Limitním přechodem v levém zlomku pro $x \to x_1^+$ a v pravém pro $x \to x_2^-$ dostaneme (existence jednostranných derivací plyne z bodu (a)), že $f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$. Je-li f ostře konvexní, zůstanou v předchozích nerovnostech vzhledem k ryzí monotónnosti pomocné funkce g ostré nerovnosti.

$\square$

Poznámka 2.4.

- V krajních bodech intervalu, na kterém je funkce f konvexní, (pokud patří do $D(f)$) také existují jednostranné derivace, ale mohou být nevlastní. Konkrétně platí:
  Je-li f konvexní na $\langle\alpha, \beta)$, existuje $f'_+(\alpha)$ a $-\infty \leq f'_+(x_0) < +\infty$.
  Je-li f konvexní na $(\alpha, \beta\rangle$, existuje $f'_-(\beta)$ a $-\infty < f'_+(x_0) \leq +\infty$.

- I pro ostře konvexní funkci se může stát, že pro nějaké x_0 je $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$. Příkladem je funkce $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, která je ostře konvexní, a platí $f'_-(0) = -1 < 1 = f'_+(0)$.

Důsledek 2.5. *Je-li f konvexní, resp. ostře konvexní, na intervalu $I = (\alpha, \beta)$, pak jsou f'_- a f'_+ neklesající, resp. rostoucí, na I. (Je-li $I = \langle\alpha, \beta)$, tvrzení pro f'_+ platí na $\langle\alpha, \beta)$, a podobně, je-li $I = (\alpha, \beta\rangle$, tvrzení pro f'_- platí na $(\alpha, \beta\rangle$.)*

Lemma 2.6. *Je-li f (ostře) konvexní na (α, β) a spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$, je f (ostře) konvexní na $\langle \alpha, \beta \rangle$.*

Důkaz. Je-li f konvexní na (α, β) a pro body x_1, x_2, $x_3 \in (\alpha, \beta)$ platí $x_1 < x_2 < x_3$, pak je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Nyní pro $x_1 \to \alpha^+$ je (f je spojitá zprava v α) $\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ a podle věty 1.7, části c) je f konvexní na $\langle \alpha, \beta)$. Stejně se ukáže, že konvexnost se zachová i připojením koncového bodu β.

Nechť f je ostře konvexní na (α, β), ale není ostře konvexní na $[\alpha, \beta]$. Pak existují $\alpha \leq x_1 < \gamma < x_2 \leq \beta$ tak, že $\frac{f(x_1)-f(\gamma)}{x_1-\gamma} = \frac{f(x_2)-f(\gamma)}{x_2-\gamma}$. Protože $\frac{f(x)-f(\gamma)}{x-\gamma}$ je neklesající, je tato funkce na $(x_1, x_2) \setminus \{\gamma\}$ rovna nějaké konstantě C. Odtud $f(x) = f(\gamma) + C(x-\gamma)$ je lineární na $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, což je spor s ostrou konvexitou. ☐

Věta 2.7. *Nechť f je konvexní na I a $x_0 \in I^0$. Pak platí:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'_-(x) = f'_+(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f'_+(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0).$$

Tedy $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když f'_+ (resp. f'_-) je v x_0 spojitá.

Důkaz. Limity existují, protože podle důsledku 2.5 jsou f'_- a f'_+ neklesající. Dokážeme např. první vztah (důkaz druhého je analogický). Pro $x > x_0$ je $f'_+(x_0) \leq f'_-(x) \leq f'_+(x)$ a pro $x \to x_0^+$ je tudíž $f'_+(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f'_-(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f'_+(x)$. Dále pro $x_0 < x < x_1$ je $f'_+(x) \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$. Funkce f je podle lemmatu 2.1 spojitá, tedy pro $x \to x_0^+$ je $\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Nyní pro $x_1 \to x_0^+$ je $\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)$, což dohromady dokazuje tvrzení. ☐

Lemma 2.8. *Nechť f je konvexní na I a x_1, $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.*

(a) *Je-li $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), je f neklesající (rostoucí) pro $x \geq x_2$, $x \in I$.*

(b) *Je-li $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), je f nerostoucí (klesající) pro $x \leq x_1$, $x \in I$.*

Je-li f ostře konvexní, je ryze monotonní na příslušném intervalu, i když $f(x_1) = f(x_2)$.

Důkaz. Nechť f je konvexní na I, body $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ leží v I a $f(x_1) \leq f(x_2)$. Pak $0 \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$. Odtud $f(x_4) \geq f(x_3)$. Je-li $f(x_1) < f(x_2)$, bude $f(x_4) > f(x_3)$. Obdobně se dokáže případ (b). Je-li f ostře konvexní, bude v případě (a) $0 < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$, takže $f(x_4) > f(x_3)$. Případ (b) je analogický. ☐

Věta 2.9. *Nechť f je konvexní na I a $x_0 \in I$ je bod lokálního minima funkce f. Pak je toto minimum globální. Je-li f dokonce ostře konvexní, je toto minimum ostré a jediné.*

Důkaz. Nechť platí předpoklad dokazované věty. Pak bod x_0 je vnitřní a na jistém okolí $\delta(x_0) \subseteq I$ platí $f(x_0) \leq f(x)$. Nechť např. $x_1 > x_0$. Zvolíme $x_2 \in \delta(x_0)$, $x_0 < x_2 < x_1$. Podle lemmatu 2.8 je $f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$. Obdobně pro $x_1 < x_0$. Minimum je tudíž globální. Je-li f ostře konvexní, je toto minimum podle lemmatu 2.8 dokonce ostré a protože je globální, je jediné. □

Poznámka 2.10. Z předchozí věty a lemmatu mimo jiné plyne, že má-li mít funkce f konvexní na I v nějakém bodě lokální maximum, pak jedině za předpokladu, že f je konstantní na nějakém okolí bodu x_0. Pro $x \in \delta(x_0)$ je totiž $f(x) \leq f(x_0)$ a současně $f(x) \geq f(x_0)$. Je-li tedy f ostře konvexní, nemůže mít lokální maximum.

Věta 2.11. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu $I = (\alpha, \beta)$. Pak nastane právě jedna z následujících možností:*

(a) *f roste na I;*

(b) *f klesá na I;*

(c) *existuje $x_0 \in I$ takové, že f je konstantní na $(\alpha, x_0\rangle$ a je rostoucí na $\langle x_0, \beta)$;*

(d) *existuje $x_0 \in I$ takové, že f je klesající na $(\alpha, x_0\rangle$ a je konstantní na $\langle x_0, \beta)$;*

(e) *existuje interval (případně degenerovaný na bod) $J = \langle x_0, x_1\rangle \subseteq I$, $\alpha < x_0 \leq x_1 < \beta$, takový, že f je konstantní na J, je klesající na $(\alpha, x_0]$ a je rostoucí na $[x_1, \beta)$.*

Je-li f ostře konvexní, nemohou nastat případy (c) a (d), a nastane-li případ (e), je J jednoprvková množina.

Důkaz. Nechť f je konvexní na $I = (\alpha, \beta)$ a nenastane ani (a), ani (b). Ukážeme, že pak má f globální minimum. Protože f není klesající, lze najít $x_1 < x_2$ tak, že $f(x_1) \leq f(x_2)$. Podle lemmatu 2.8 je f neklesající pro $x \geq x_2$. Podobně z toho, že f není rostoucí, plyne existence x_3 takového, že pro $x \leq x_3$ je f nerostoucí. Lze předpokládat, že $x_3 < x_2$. Na intervalu $[x_3, x_2]$ je podle lemmatu 2.1 funkce f spojitá, takže (podle Weierstrassovy věty) nabývá na tomto intervalu nejmenší hodnotu v nějakém bodě x_0, v němž je lokální minimum f na I. Pro $x_3 < x_0 < x_2$ je to zřejmé, pro $x_0 = x_2$ resp. $x_0 = x_3$ to plyne z monotonie f mimo $[x_3, x_2]$. Z věty 2.9 máme, že je toto minimum globální.

Označme J množinu všech bodů globálního minima. Pak J je jednoprvková nebo je to interval. Pro $x_4 < x_5$ z J a $x \in (x_4, x_5)$ totiž $\frac{f(x)-f(x_4)}{x-x_4} \leq \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4} = 0$, z čehož máme $f(x) \leq f(x_4)$, takže $x \in J$. Tedy f je konstantní na J. Zbytek tvrzení plyne z lemmatu 2.8.

Je-li f ostře konvexní, nemůže být v žádném podintervalu lineární. V případě (e) je podle věty 2.9 množina J jednoprvková. □

Kapitola 3

Jensenova nerovnost

Po zavedení konvexních funkcí a zkoumání jejich vlastností se již můžeme zabývat hlavním tématem diplomové práce - Jensenovou nerovností. V této kapitole se seznámíme s okolnostmi, které vedly ke zrodu této nerovnosti, popíšeme její vztah ke konvexním funkcím a dokážeme její platnost. V závěru kapitoly pak vyložíme problematiku Hölderova rozdílového vzorce.

V roce 1906 dánský matematik J. L. W. V. Jensen uveřejnil článek, ve kterém se zabýval Cauchyovým důkazem AG-nerovnosti tzv. zpětnou indukcí. Ten si nyní uvedeme.

Věta 3.1 (AG-nerovnost)**.** *Pro libovolná nezáporná reálná čísla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{3.1}$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz. Nejprve poznamenejme, že tvrzení o nerovnosti (3.1) je zřejmé, je-li alespoň jedno z nezáporných čísel x_i rovno nule. Proto dále budeme předpokládat, že všechna čísla x_i jsou kladná.

Cauchyův důkaz zpětnou indukcí probíhá v těchto třech krocích:

- $2 \in M$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \in M \Rightarrow 2n \in M$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $n + 1 \in M \Rightarrow n \in M$,

kde M je množina všech těch přirozených čísel n, pro něž nerovnost (3.1) platí s libovolnými kladnými čísly $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(1) Nejprve tedy ověříme, zda nerovnost platí pro $n = 2$. Ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1\, x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \\ 2\sqrt{x_1\, x_2} &\leq x_1 + x_2\,, \\ 0 &\leq x_1 - 2\sqrt{x_1\, x_2} + x_2\,, \\ 0 &\leq \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2\,. \end{aligned}$$

Platnost poslední nerovnosti je zřejmá, přičemž rovnost nastane, právě když bude platit $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$, tedy $x_1 = x_2$.

(2) Nyní předpokládejme, že nerovnost (3.1) platí pro určité n. Dokážeme, že platí také pro $2n$. Zvolíme tedy libovolná kladná $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Pro ta pak postupně platí

$$\sqrt[2n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2n}} = \sqrt[2]{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \ldots \cdot x_{2n}}} \leq$$

$$\leq \text{(AG-nerovnost pro dvě } n\text{-tice)} \leq \sqrt[2]{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}} \leq$$

$$\leq \text{(AG-nerovnost pro } n = 2) \leq \frac{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} = \frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n}\,.$$

Rovnosti v uvedených nerovnostech nastanou právě tehdy, když bude zároveň platit $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$, $x_1 = \cdots = x_n$ a $x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$, neboli $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n}$.

(3) Nakonec předpokládejme, že nerovnost (3.1) platí pro určité $n+1$. Abychom dokázali její platnost pro příslušné n, zvolíme libovolně n kladných čísel $x_1, \ldots, x_n$ a přidáme k nim číslo $x_{n+1} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, které je rovněž kladné. Podle předpokladu platí:

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = P.$$

Protože součet $x_1 + \cdots + x_n$ je roven $n \cdot x_{n+1}$, má pravá strana vyjádření

$$P = \frac{nx_{n+1} + x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1}.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1}} &\leq x_{n+1}\,, \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} &\leq x_{n+1}^{n+1}\,, \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n &\leq x_{n+1}^{n}\,, \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} &\leq x_{n+1}\,, \end{aligned}$$

odkud po dosazení za x_{n+1} dostaneme

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

což je nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat. Přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = \cdots = x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, což je ekvivalentní s $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

□

V již zmíněném článku Jensen provedl následující úvahu. Protože funkce $f(x) = -\ln x$ je na intervalu $(0; \infty)$ klesající, dostaneme po zlogaritmování AG-nerovnosti

$$-\ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{(-\ln x_1) + \cdots + (-\ln x_n)}{n}.$$

To je příklad nerovnosti tvaru

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{3.2}$$

Analýzou Cauchyova důkazu zjistil Jensen, že nerovnost (3.2) lze odvodit z jediného předpokladu o funkci f: pro libovolná čísla x_1, x_2 z příslušného intervalu platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{3.3}$$

Funkce, které tuto nerovnost splňují, dnes označujeme jako J-konvexní. Jak už bylo zmíněno v závěru první kapitoly, jde o slabší podmínku v definici 1.1 a vztah těchto funkcí ke konvexním funkcím vyjadřuje věta 1.11. Nerovnost (3.2) je vlastně historicky prvním tvarem Jensenovy nerovnosti, kterou dnes zapisujeme v obecnější podobě (3.4) z následující věty 3.3. Před ní však zavedeme pojem *konvexní kombinace* čísel x_1, x_2, …,x_n, jejímž zvláštním případem je aritmetický průměr těchto čísel.

Definice 3.2. Číslo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ se nazývá konvexní kombinací čísel $x_1, \ldots, x_n$, splňují-li koeficienty λ_i této lineární kombinace tyto podmínky: $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pro takovou kombinaci označme $y_1, \ldots, y_k$, kde $k \leq n$, všechny vzájemně různé body x_i, tj. $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Dále označme μ_j součet všech λ_i, pro něž $y_j = x_i$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Pak zřejmě $\mu_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ a $\mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$.

Věta 3.3 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak platí:*

(a) *Je-li funkce f konvexní na I, pak pro libovolnou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ jakýchkoliv čísel $x_1, \ldots, x_n \in I$ platí nerovnost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{3.4}$$

(b) *Je-li funkce f ostře konvexní na I, pak nerovnost* (3.4) *z části (a) je ostrá, právě když při označení z definice* 3.2 *je $k \geq 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$.*

Důkaz.

(a) Pro pevně zvolená $x_1, \dots, x_n \in I$ označme $\alpha = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $\beta = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Pak

$$\alpha = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\alpha \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\beta = \beta,$$

takže $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in I$. Důkaz nerovnosti (3.4) provedeme indukcí vzhledem k číslu n. Pro $n = 1$ je nerovnost (3.4) zřejmá rovnost. Nechť nerovnost (3.4) platí pro všechny $(n-1)$-tice, $n \geq 2$. Mějme n-tice $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, kde $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Nechť $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$ (jinak lze rovnou využít indukční předpoklad). Označme nyní

$$\mu = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \qquad \text{a} \qquad \bar{x} = \frac{\lambda_1}{\mu} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} x_{n-1}\,.$$

Je $\bar{x} \in I$, protože $\frac{\lambda_1}{\mu} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} = 1$. Zřejmě $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu\bar{x} + (1-\mu)x_n$. S využitím nerovnosti (1.1) a indukčního předpokladu dostaneme

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) \leq \mu f(\bar{x}) + (1-\mu) f(x_n) \leq \\ &\leq \mu\left(\frac{\lambda_1}{\mu} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} f(x_{n-1})\right) + \lambda_n f(x_n) = \qquad (3.5) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n). \end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že pro ostře konvexní funkci f v některé nerovnosti (3.4) nastane ostrá nerovnost. Nemůže být $k = 1$, protože by platilo $x_1 = \ldots = x_n$ a dostali bychom rovnost. Kdyby neexistovalo $0 < \mu_j < 1$, existovalo by $s \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\mu_s = 1$ a $\mu_j = 0$ pro každé $j \neq s$. Pak by platilo

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = f(y_s) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n),$$

což je opět spor. Dokázali jsme, že $k \geq 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$.

Nyní předpokládejme naopak, že $k \geq 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$. Pak pro všechna $j = 1, \dots, k$ je $\mu_j < 1$, a tedy i $\lambda_i < 1$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Vybereme největší x_i, pro něž $\lambda_i > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to x_n. Definujme bod $\bar{x}$ stejně jako v části (a). Stejně jako tam se ukáže, že $\bar{x}$ leží mezi těmi x_i, pro něž je $\lambda_i > 0$, a tedy $\bar{x} < x_n$. Přitom $0 < \mu < 1$. Protože předpokládáme, že f je ostře konvexní, bude v řetězci vztahů (3.5) platit ostrá nerovnost $f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) < \mu f(\bar{x}) + (1-\mu) f(x_n)$, a tudíž i nerovnost (3.4) bude ostrá.

□

Podmínku týkající se ostré Jensenovy nerovnosti (3.4) lze také vyjádřit tak, že existují alespoň dva různé body x_i, x_j takové, že jim odpovídající koeficienty λ_i, λ_j jsou kladné.

Důsledek 3.4. *Nechť f je ostře konvexní, $\lambda_i > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a v Jensenově nerovnosti* (3.4) *nastane rovnost. Pak $x_1 = \dots = x_n$.*

Poznámka 3.5. Dodejme ještě, že v mnoha případech je výhodné položit v nerovnosti (3.4)

$$\lambda_i = \frac{v_i}{v_1 + \dots + v_n},$$

kde $v_i \geq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a alespoň jedno z čísel $v_1, \dots, v_n$ je kladné. Jensenovu nerovnost pak zapisujeme ve tvaru

$$f\left(\frac{v_1 x_1 + \dots + v_n x_n}{v_1 + \dots + v_n}\right) \leq \frac{v_1 f(x_1) + \dots + v_n f(x_n)}{v_1 + \dots + v_n}. \tag{3.6}$$

Poznámka 3.6. Jak je to obvyklé, Jensenovu nerovnost ve větě 3.3 jsme formulovali pro *konvexní* funkci f. Pro *konkávní* funkci f platí Jensenova nerovnost (3.4) s opačným znakem nerovnosti:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Plyne to přímo z věty 3.3 uplatněné ke konvexní funkci $(-f)$.

Věta 3.7 (Hölderův rozdílový vzorec)**.** *Nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ má vlastní druhou derivaci na intervalu I a nechť pro každé $x \in I$ platí $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$. Pak pro všechna reálná $x_1, \dots, x_n \in I$ a pro nezáporná reálná λ_i, kde $i = 1, \dots, n$ a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, existuje reálné číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ takové, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \frac{1}{4}\,\mu \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2. \tag{3.7}$$

Poznámka 3.8. Vzorec (3.7) pochází ze stejného článku O. L. Höldera z roku 1884, ve kterém je podán důkaz nerovnosti dnes označované jako Hölderova. Rozdílový vzorec (3.7) sice není tak známý jako ona nerovnost, je však rovněž významný. Vyjadřuje hodnotu rozdílu mezi oběma stranami Jensenovy nerovnosti a zároveň ukazuje vztah konvexních funkcí k lineárním či kvadratickým funkcím. Je-li např. rozdíl hodnot $M - m$ malý, pak nám vztah (3.7) říká, že funkce f má podobný průběh jako kvadratická funkce na intervalu I. V krajním případě, kdy $m = M$, bude funkce f přesně kvadratická, tzn. $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, kde $m = M = \mu = 2\gamma$, a rozdílový vzorec tak přejde v obyčejnou kvadratickou rovnici. Podobně, je-li M malé, řekněme $0 \leq M \leq \varepsilon$, pak ze vztahu (3.7) plyne, že funkce f se blíží spíše k lineární funkci $f(x) = \alpha + \beta x$. Pro přesnou lineární funkci bude levá strana rozdílového vzorce (3.7) rovna nule.

Důkaz. Vyjdeme z předpokladu věty 3.7, tedy z platnosti vztahu $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$ pro každé $x \in I$. Vezměme funkce

$$g(x) = \frac{1}{2}Mx^2 - f(x) \quad \text{a} \quad h(x) = f(x) - \frac{1}{2}mx^2.$$

Snadno ověříme, že obě mají na I nezáporné druhé derivace, takže jsou na I konvexní:

$$g''(x) = M - f''(x) \geq 0, \qquad h''(x) = f''(x) - m \geq 0.$$

Označíme-li $\bar{x} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, kde $x_1, \ldots x_n \in I$, $\lambda_i \in \langle 0, 1\rangle$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, dostaneme z Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci g následující vztah

$$g(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g(x_i),$$

který po dosazení za g a dalších úpravách můžeme zapsat

$$\frac{1}{2}\, M\bar{x}^2 - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{1}{2}\, Mx_i^2 - f(x_i) \right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}\, M \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \bar{x}^2 \right). \tag{3.8}$$

Upravíme-li výraz v závorce na pravé straně nerovnosti (3.8), dostaneme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \bar{x}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^2 - \bar{x}^2) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 + 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 + 2\bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2.
\end{aligned}$$

Proto nerovnost (3.8) můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}\, M \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2. \tag{3.9}$$

Podobně z Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci h dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \geq \frac{1}{2}\, m \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2. \tag{3.10}$$

Z nerovností (3.9) a (3.10) za předpokladu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 > 0 \tag{3.11}$$

plyne, že číslo

$$\mu = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x})}{\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2}$$

leží v intervalu $\langle m, M \rangle$. Předpoklad (3.11) není splněn jedině v případě, když všechna x_i, pro něž $\lambda_i \neq 0$, jsou rovny témuž číslu (totiž číslu $\bar{x}$). Tedy obě strany (3.7) jsou rovny nule bez ohledu na to, jaké číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ vybereme.

Zbývá dokázat identitu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2. \tag{3.12}$$

Podle předchozího výpočtu je levá strana (3.12) rovna

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right)^2 &= \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j x_j^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j x_i x_j = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.
\end{aligned}$$

Tím je i vzorec (3.12) dokázán. □

Kapitola 4

Klasické nerovnosti

V této kapitole ukážeme, jak lze z Jensenovy nerovnosti odvodit některé významné vztahy patřící k základům celé teorie algebraických nerovností.

AG-nerovnost

Jak jsme uvedli v úvodní části kapitoly 3, nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

a její důkaz Cauchyovou metodou zpětné indukce přivedly v roce 1906 J.L.W.V. Jensena k objevu obecné nerovnosti, kterou dnes označujeme jeho příjmením. Na tomto místě uvedeme a dokážeme AG-nerovnost v obecnějším tvaru pro tzv. *vážené průměry.*

V praxi při výpočtu aritmetického průměru často přisuzujeme jednotlivým průměrovaným číslům $x_1, x_2, \ldots, x_n$ různé váhové koeficienty $v_1, v_2, \ldots v_n > 0$. Aritmetický průměr pak počítáme podle vzorce

$$A = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n}{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme *váženým aritmetickým průměrem* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zavedeme-li *normované* váhové koeficienty

$$\lambda_i = \frac{v_i}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

můžeme vážený aritmetický průměr vyjádřit vzorcem

$$A = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n.$$

Všimněme si, že koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou kladná čísla a jejich součet je roven jedné.

Vidíme, že vážený aritmetický průměr čísel $x_1, \ldots, x_n$ je takovou jejich lineární kombinací, které jsme v kapitole 3 říkali konvexní kombinace.

Podobně lze definovat i *vážený geometrický průměr* nezáporných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a to vzorcem

$$G = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n},$$

přitom pro koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ dostaneme obvyklé (nevážené) průměry. Obecnou AG-nerovnost uvedeme v následující větě.

Věta 4.1. *Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a libovolné kladné koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, jejichž součet se rovná jedné, platí nerovnost*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}, \tag{4.1}$$

přitom rovnost nastane, právě když $x_1 = \cdots = x_n$.

Důkaz. Pokud je x_i nulové pro některé $i = 1, \ldots, n$, je nerovnost (4.1) zřejmá, neboť její pravá strana je rovna nule. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Vyjdeme-li z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, která je ovšem ostře konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$, dostaneme

$$\ln\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n = \ln\left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}\right).$$

Po odlogaritmování však přímo dostaneme nerovnost (4.1):

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Protože $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, plyne z důsledku 3.4 zbytek tvrzení o rovnosti. □

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta 4.2. *Pro libovolné dvě n-tice čísel $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost*

$$|u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}, \tag{4.2}$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, když jsou uspořádané n-tice $(u_1, \ldots, u_n)$ a $(v_1, \ldots, v_n)$ lineárně závislé jako prvky $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $v_i \neq 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Ukážeme, že nerovnost (4.2) je důsledkem Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = x^2$ (ostře konvexní na celém $\mathbb{R}$, neboť $f''(x) = 2 > 0$ pro každé x):

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Položme v této nerovnosti

$$x_i = \frac{u_i}{v_i} \quad \text{a} \quad \lambda_i = \frac{v_i^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pak $0 < \lambda_i < 1$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Po dosazení nejprve upravíme odděleně levou a pravou stranu Jensenovy nerovnosti:

$$L = (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)^2 = \left(\frac{v_1^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{v_n^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \cdot \frac{u_n}{v_n} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{u_1 v_1}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} + \cdots + \frac{u_n v_n}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \right)^2 = \left(\frac{u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \right)^2,$$

$$P = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = \frac{v_1^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \cdot \frac{u_1^2}{v_1^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \cdot \frac{u_n^2}{v_n^2} =$$

$$= \frac{u_1^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} + \cdots + \frac{u_n^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \frac{u_1^2 + \cdots + u_n^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Nerovnost $L \leq P$ tedy vypadá takto:

$$\left(\frac{u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \right)^2 \leq \frac{u_1^2 + \cdots + u_n^2}{v_1^2 + \cdots + v_n^2},$$

$$(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2),$$

$$|u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2},$$

což je nerovnost (4.2). Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve výchozí Jensenově nerovnosti, tedy právě když jsou všechna čísla x_i stejná (připomínáme, že $\lambda_i > 0$ pro každé i). Jinak vyjádřeno, existuje-li takové $t \in \mathbb{R}$, že $u_i = t v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

V případě, že se všechna čísla v_i v (4.2) rovnají nule, jsou rovny nule i obě strany této nerovnosti. Pokud jsou rovny nule pouze některá v_i, stačí v „silnější“ nerovnosti

$$|u_1||v_1| + \cdots + |u_n||v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

vynechat na levé i pravé straně ty sčítance $|u_i||v_i|$, u_i^2, v_i^2, pro něž $|v_i| = 0$. Levá strana se tím nezmění, pravá strana se může pouze zmenšit (pokud $u_i \neq 0$ a $v_i = 0$ pro některé i).

K takto upravené nerovnosti už můžeme použít dokázané tvrzení. Aby v původní nerovnosti nastala rovnost, musí existovat $t \in \mathbb{R}$ takové, že $u_i = tv_i$ pro všechna ta i, pro něž $v_i \neq 0$. Pro ta i, pro něž $v_i = 0$, ovšem musí podle předchozího platit i $u_i = 0$, takže dohromady $u_i = tv_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Speciálním případem Cauchy-Schwarzovy nerovnosti je tzv. *Cauchyova nerovnost*

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\,,$$

kterou dostaneme aplikací Jensenovy nerovnosti pro ostře konvexní funkci $f(x) = x^2$ s koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

Hölderova nerovnost

Tuto nerovnost nejprve uvedeme v historicky první podobě z Hölderova článku z roku 1884.

Věta 4.3. *Pro libovolné n-tice čísel $v_1, \ldots, v_n \geq 0$ a $u_1, \ldots, u_n \geq 0$ a pro libovolné reálné číslo $p > 1$ platí*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.3}$$

Důkaz. Nerovnost (4.3) lze odvodit z Jensenovy nerovnosti ve tvaru (3.6) z poznámky 3.5, kde f je vhodná konvexní funkce, za předpokladu, že aspoň jedno z (nezáporných) čísel $v_1, \ldots, v_n$ je kladné. Pro funkci $f(u) = u^p$, která je konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro každé $p > 1$, neboť $f''(u) = p\,(p-1)\,u^{p-2} > 0$, totiž postupně dostaneme

$$\left(\frac{v_1u_1 + \cdots + v_nu_n}{v_1 + \cdots + v_n}\right)^p \leq \frac{v_1u_1^p + \cdots + v_nu_n^p}{v_1 + \cdots + v_n}\,,$$

$$\frac{v_1u_1 + \cdots + v_nu_n}{v_1 + \cdots + v_n} \leq \left(\frac{v_1u_1^p + \cdots + v_nu_n^p}{v_1 + \cdots + v_n}\right)^{\frac{1}{p}}\,,$$

$$v_1u_1 + \cdots + v_nu_n \leq \frac{(v_1 + \cdots + v_n)\,(v_1u_1^p + \cdots + v_nu_n^p)^{\frac{1}{p}}}{(v_1 + \cdots + v_n)^{\frac{1}{p}}}\,,$$

$$v_1u_1 + \cdots + v_nu_n \leq (v_1 + \cdots + v_n)^{\frac{p-1}{p}}\,(v_1u_1^p + \cdots + v_nu_n^p)^{\frac{1}{p}}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jsou-li všechna čísla v_i rovna nule, je nerovnost (4.3) splněna jako triviální rovnost. □

Hölderova nerovnost se však častěji uvádí ve své „moderní“ verzi, kterou zavedl F. Riesz a kterou zapíšeme v následující větě jako nerovnost (4.4). Ukážeme, že ji lze získat jednak vhodnou volbou hodnot u_k, v_k v již dokázané nerovnosti (4.3), jednak přímým užitím Jensenovy nerovnosti (3.6) pro stejnou konvexní funkci $f(u) = u^p$.

Věta 4.4. *Pro libovolné n-tice čísel $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ a $y_1, \ldots, y_n \geq 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 0$, $q > 0$ taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.4}$$

Důkaz. Všimneme si nejprve, že z rovnosti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ plyne $p > 1$, $q > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, takže (díky nerovnosti $p > 1$) lze využít dokázanou nerovnost (4.3) a přepsat ji ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Položíme-li v této nerovnosti $v_k = y_k^q$ a $u_k = \frac{x_k}{y_k^{q-1}}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^q \frac{x_k}{y_k^{q-1}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \frac{x_k^p}{y_k^{p(q-1)}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

což je zřejmě nerovnost (4.4), neboť $q = p\,(q-1)$. Nerovnost (4.4) je tak dokázána v případě, kdy je každé z čísel y_k kladné. Je-li $y_k = 0$ pro některé k, lze zopakovat obdobnou úvahu, jakou jsme užili v závěru důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti.

Hölderovu nerovnost (4.4) lze však odvodit nezávisle na nerovnosti (4.3). Když se vrátíme k Jensenově nerovnosti (3.6) pro konvexní funkci $f(u) = u^p$ a položíme v ní $v_i = y_i^q$ a $u_i = x_i y_i^{1-q}$, dostaneme

$$\left(\frac{y_1^q x_1 y_1^{1-q} + \cdots + y_n^q x_n y_n^{1-q}}{y_1^q + \cdots + y_n^q}\right)^p \leq \frac{y_1^q \left(x_1 y_1^{1-q}\right)^p + \cdots + y_n^q \left(x_n y_n^{1-q}\right)^p}{y_1^q + \cdots + y_n^q},$$

$$\frac{(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^p}{(y_1^q + \cdots + y_n^q)^p} \leq \frac{y_1^q x_1^p y_1^{-q} + \cdots + y_n^q x_n^p y_n^{-q}}{y_1^q + \cdots + y_n^q},$$

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^p \leq \frac{(x_1^p + \cdots + x_n^p)\,(y_1^q + \cdots + y_n^q)^p}{y_1^q + \cdots + y_n^q},$$

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \leq (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(y_1^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Jsou-li všechna čísla v_i rovna nule, je nerovnost (4.3) splněna jako triviální rovnost. □

Youngova nerovnost

Věta 4.5. *Pro libovolnou dvojici čísel $x > 0$, $y > 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 0$, $q > 0$, pro něž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{4.5}$$

Důkaz. Nerovnost (4.5) plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(u) = \ln u$ (která je na $\mathbb{R}^+$ konkávní, neboť $f''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ pro každé $u > 0$):

$$\ln(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geq \lambda_1 \ln u_1 + \lambda_2 \ln u_2 \,.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ a $u_1 = x^p$, $u_2 = y^q$, pak nerovnost (4.5) dostaneme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q \,, \\ \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \ln x + \ln y \,, \\ \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \ln(xy) \,, \\ \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} &\geq xy \,. \end{aligned}$$

□

Minkowského nerovnost

Věta 4.6. *Pro libovolné n-tice čísel $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ a $b_1, \ldots, b_n \geq 0$ a pro libovolné reálné číslo $p > 1$ platí*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.6}$$

Důkaz. Pro odvození této nerovnosti lze opět využít Jensenovu nerovnost ve tvaru (3.6), a to pro funkci $f(u) = (1 + u^{\frac{1}{p}})^p$, která je na intervalu $\langle 0, \infty)$ konkávní. Přesvědčíme se o tom výpočtem její druhé derivace. Po úpravách dostaneme

$$f'(u) = \frac{\left(1 + u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \cdot u^{\frac{1}{p}}}{u}$$

$$f''(u) = -\frac{(p-1)\left(1 + u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \cdot u^{\frac{1}{p}}}{pu^2}$$

Vidíme, že $f''(u) < 0$ pro každé $u > 0$. V sumárním zápise (3.6) z poznámky 3.5 má tedy Jensenova nerovnost pro naši funkci tvar

$$\left(1 + \left(\frac{\sum_{k=1}^n v_k u_k}{\sum_{k=1}^n v_k}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \frac{\sum_{k=1}^n v_k \left(1 + x_k^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum_{k=1}^n v_k}.$$

Dosadíme-li sem $v_k = |a_k|^p$ a $u_k = \frac{|b_k|^p}{|a_k|^p}$, dostaneme Minkowského nerovnost následujícím způsobem:

$$\left(1 + \left(\frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p \frac{|b_k|^p}{|a_k|^p}}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p \left(1 + \left(\frac{|b_k|^p}{|a_k|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p},$$

$$\left(1 + \frac{\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p \geq \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p \left(1 + \frac{|b_k|}{|a_k|}\right)^p}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p},$$

$$\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p \geq \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p \left(\frac{|a_k|+|b_k|}{|a_k|}\right)^p}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p},$$

$$\frac{\left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p} \geq \frac{\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p}{\sum_{k=1}^n |a_k|^p},$$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uvedené odvození Minkowského nerovnosti je korektní s vyjímkou případu, kdy všechny koeficienty v_k jsou rovny nule nebo kdy některé z čísel a_k je nulové (takže příslušné u_k

neexistuje). V prvním případě jsou všechna čísla a_k rovna nule a nerovnost (4.6) přechází v triviální rovnost. Ve druhém případě můžeme nejprve všechna a_k rovná nule změnit na kladná, pak korektně užít nerovnost (4.6) a nakonec v ní pro zmíněná k provést limitu $a_k \to 0$. □

Bernoulliova nerovnost

Věta 4.7. *Pro každé reálné číslo $x > -1$ a libovolné kladné reálné číslo $p \neq 1$ platí*

$$(1+x)^p \geq 1 + px \qquad (\text{je-li} \quad p > 1)\,, \tag{4.7}$$

$$(1+x)^p \leq 1 + px \qquad (\text{je-li} \quad 0 < p < 1)\,. \tag{4.8}$$

Rovnost v příslušné nerovnosti (4.7) *či* (4.8) *nastane, právě když $x = 0$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $p > 1$ a dokažme (4.7). Pokud bude v nerovnosti (4.7) platit $1 + px \leq 0$, bude tato nerovnost splněna triviálně. Nechť je tedy pravá strana nerovnosti (4.7) kladná. Pak po zlogaritmování dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$p \ln(1+x) \geq \ln(1+px)\,.$$

Tato nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, ostře konkávní na $\mathbb{R}^+$. S ohledem na $p > 1$ jsou obě čísla $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ a $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{p}$ kladná a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \ln(1+px) &= \frac{1}{p} \ln(1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln 1 \leq \\ &\leq \ln\left(\frac{1}{p}(1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot 1\right) = \ln(1+x)\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$\ln(1+x) \geq \frac{1}{p} \ln(1+px)\,,$$

$$p \ln(1+x) \geq \ln(1+px)\,,$$

$$(1+x)^p \geq (1+px)\,.$$

V případě $0 < p < 1$ je důkaz nerovnosti (4.8) obdobný. Využijeme opět Jensenovu nerovnost, tentokrát pro konvexní kombinaci s koeficienty $\lambda_1 = p$ a $\lambda_2 = 1 - p$:

$$\begin{aligned} p \ln(1+x) &= p \ln(1+x) + (1-p) \ln 1 \leq \\ &\leq \ln\big(p(1+x) + (1-p) \cdot 1\big) = \ln(1+px)\,. \end{aligned}$$

Tedy
$$p \ln(1+x) \le \ln(1+px)\,,$$
$$(1+x)^p \le (1+px)\,.$$

Protože v obou částech důkazu byly koeficienty λ_1, λ_2 uvažované konvexní kombinace kladné, rovnost v (4.7) či (4.8) nastane, právě když $1+px=1$ resp. $1+x=1$, což je v obou případech ekvivalentní s rovností $x=0$. $\square$

Nerovnost pro mocninné průměry

Pro každé reálné číslo $p>0$ definujeme *mocninný průměr* stupně p nezáporných čísel $x_1,\dots,x_n$ jako hodnotu
$$\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$
Pro $p=1$ dostáváme obvyklý aritmetický průměr, pro $p=2$ obdržíme *středně-kvadratický průměr* čísel $x_1,\dots,x_n$.

Věta 4.8. *Pro libovolnou n-tici čísel $x_1,\dots,x_n>0$ a libovolná reálná čísla p, q taková, že $0<p<q$, platí*
$$\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{x_1^q+\cdots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{4.9}$$

Rovnost nastane, právě když $x_1=\cdots=x_n$.

Důkaz. Označíme nejprve $m=\frac{q}{p}>1$. Pak $x_i^q=y_i^m$, kde $y_i=x_i^p$ pro $i=1,2,\dots,n$. Nerovnost (4.9) pak bude mít tvar
$$\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{y_1^m+\cdots+y_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{pm}}\,.$$
Odtud po umocnění kladným exponentem pm dostaneme
$$\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)^{m} \le \left(\frac{y_1^m+\cdots+y_n^m}{n}\right),$$
což je Jensenova nerovnost pro ostře konvexní funkci $f(y)=y^m$ $(m>1)$ s koeficienty $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$. A protože $\lambda_i>0$ pro každé $i=1,2,\dots,n$, plyne z důsledku 3.4 zbytek tvrzení o rovnosti. $\square$

Poznamenejme, že stejným způsobem lze dokázat i nerovnost pro *vážené* mocninné průměry libovolných stupňů p a q $(0 < p < q)$

$$(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda_1 x_1^q + \cdots + \lambda_n x_n^q)^{\frac{1}{q}},$$

kde $\lambda_i > 0$ a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Nerovnost mezi váženým mocninným a váženým geometrickým průměrem

Věta 4.9. *Pro libovolnou n-tici čísel $x_1, \ldots, x_n > 0$, reálné koeficienty $\lambda_i > 0$, pro něž $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, a pro libovolné reálné číslo $p > 0$ platí*

$$(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{4.10}$$

Důkaz. Nerovnost (4.10) zlogaritmujeme a postupně upravíme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \ln(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p) &\geq \ln\left(x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}\right), \\
\ln(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p) &\geq p\left(\ln x_1^{\lambda_1} + \cdots + \ln x_n^{\lambda_n}\right), \\
\ln(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p) &\geq \lambda_1 \ln x_1^p + \cdots + \lambda_n \ln x_n^p,
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x^p$, která je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť $f''(x) = -\frac{p}{x^2} < 0$ pro všechna $x > 0$. □

Poznamenejme bez důkazu, že vážený geometrický průměr je limitou vážených mocninných průměrů:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} = \lim_{p \to 0^+} (\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Proto se někdy geometrickému průměru říká *mocninný průměr stupně nula.*

Kapitola 5

Další aplikace Jensenovy nerovnosti

Z předchozích kapitol je patrné, že Jensenova nerovnost je v teorii algebraických nerovností velmi silným nástrojem. Přesvědčíme se o tom i v této kapitole. Obsahuje totiž sbírku nejrůznějších úloh, při jejichž řešení lze užít právě Jensenovu nerovnost. Poznamenejme jen, že v některých případech budeme vycházet z Jensenovy nerovnosti s nenormovanými váhovými koeficienty v_i, jak bylo uvedeno v poznámce 3.5, tedy z nerovnosti tvaru

$$f\left(\frac{v_1x_1+\cdots+v_nx_n}{v_1+\cdots+v_n}\right)\le\frac{v_1f(x_1)+\cdots+v_nf(x_n)}{v_1+\cdots+v_n}\,.$$

Příklad 5.1. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}\,.$$

Řešení. Důkaz plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Ta je na intervalu $(0,\infty)$ ostře konkávní, neboť $f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}<0$. Pro hodnoty

$$x_1=3+\sqrt[3]{3}\,,\qquad x_2=3-\sqrt[3]{3}\qquad\text{a}\qquad\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$$

dostáváme

$$\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}}{2}+\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2}<\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}}{2}}\,,$$

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}\,.$$

Příklad 5.2. Ukažte, že pro každé reálné číslo $x > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}\,.$$

Řešení. Důkaz této nerovnosti lze snadno provést algebraickými úpravami. My však ověříme její platnost pomocí Jensenovy nerovnosti. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, ostře konvexní na intervalu $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pro každé $x > 0$, má Jensenova nerovnost tvar

$$\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} > \frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}\,.$$

Odtud pro čísla $x_1 = x - 1$, $x_2 = x$, $x_3 = x + 1$, která jsou kladná a navzájem různá pro každé $x > 1$, a koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ dokazovanou nerovnost již snadno získáme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) &> \frac{1}{\frac{1}{3}(x-1+x+x+1)}\,,\\
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) &> \frac{1}{x}\,,\\
\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &> \frac{3}{x}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 5.3. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla a, $b \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \le \sqrt{4-(a+b)^2}\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ konkávní, což plyne z tvaru jejího grafu, kterým je polokružnice. Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-a^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} &\le \sqrt{1-\frac{(a+b)^2}{4}}\,,\\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\le 2\sqrt{\frac{4-(a+b)^2}{4}}\,,\\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\le \sqrt{4-(a+b)^2}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 5.4. Ukažte, že pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z, pro něž $x + y + z = 1$, platí nerovnost

$$64 \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Řešení. Uvedený vztah plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \ln(1 + t) - \ln(t),$$

která je na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, což je zřejmé z výpočtu její druhé derivace:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}, \\ f''(t) &= -\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{2t+1}{t^2(1+t)^2} > 0. \end{aligned}$$

Jensenovu nerovnost pro funkci f tedy můžeme zapsat takto:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3}\right) \leq \lambda_1 \ln\left(1 + \frac{1}{t_1}\right) + \lambda_2 \ln\left(1 + \frac{1}{t_2}\right) + \lambda_3 \ln\left(1 + \frac{1}{t_3}\right).$$

Dosadíme-li sem kladná $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$ a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, dostaneme s ohledem na předpoklad $x + y + z = 1$ postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(x+y+z)}\right) &\leq \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right), \\ \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right) &\leq \frac{1}{3}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right], \\ 3\ln 4 &\leq \ln\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right], \\ 64 &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 5.5. Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníka a, b, c platí

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \ln x$. Z výpočtu $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ je zřejmé, že je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní. Dosadíme-li do Jensenovy nerovnosti pro funkci f čísla

$$x_1 = \frac{a+b-c}{a}, \qquad x_2 = \frac{b+c-a}{b}, \qquad x_3 = \frac{c+a-b}{c},$$

která jsou kladná podle trojúhelníkové nerovnosti, pak pro koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a}{a+b+c}, \qquad \lambda_2 = \frac{b}{a+b+c}, \qquad \lambda_3 = \frac{c}{a+b+c}$$

dostaneme zvlášť na levé a pravé straně:

$$L = \frac{a}{a+b+c} \cdot \ln\left(\frac{a+b-c}{a}\right) + \frac{b}{a+b+c} \cdot \ln\left(\frac{b+c-a}{b}\right) + \frac{c}{a+b+c} \cdot \ln\left(\frac{c+a-b}{c}\right),$$

$$P = \ln\left(\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}\right) = \ln\left(\frac{a+b+c}{a+b+c}\right) = \ln 1\,.$$

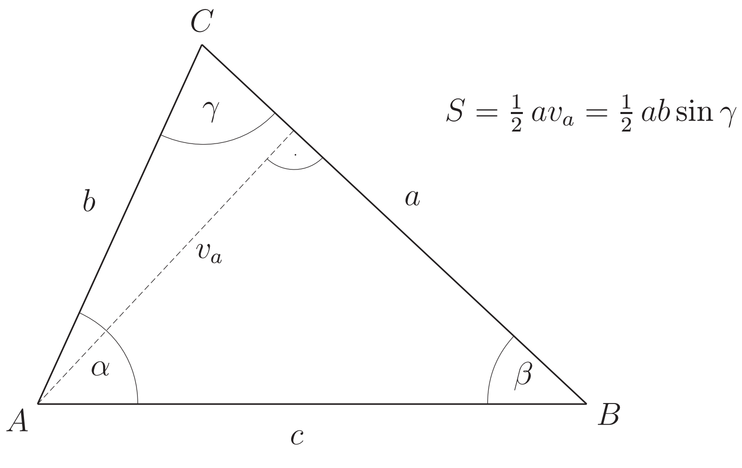
Odtud pak zřejmě

$$a \ln\left(1 + \frac{b-c}{a}\right) + b \ln\left(1 + \frac{c-a}{b}\right) + c \ln\left(1 + \frac{a-b}{c}\right) \le (a+b+c) \ln 1\,,$$

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \le 1\,.$$

Příklad 5.6. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c a obsahem S platí

$$ab + ac + bc \ge 4\sqrt{3}\, S\,.$$



Obr. 5.1

Řešení. Jak je patrné z obr. 5.1, obsah libovolného trojúhelníka lze vyjádřit pomocí dvou stran a úhlu, který tyto strany svírají. Zřejmě tedy platí

$$S = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha,$$

z čehož plynou rovnosti

$$ab = \frac{2S}{\sin\gamma}\,, \quad ac = \frac{2S}{\sin\beta}\,, \quad bc = \frac{2S}{\sin\alpha}\,.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$ab + ac + bc = 2S\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{5.1}$$

Nyní uplatníme Jensenovu nerovnost, a to pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ta je na intervalu $(0,\pi)$ konvexní, jak dokazuje kladná hodnota její druhé derivace:

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}\,,$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sin x} + 2\,\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0 \qquad \text{pro každé } x \in (0,\pi).$$

Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{3}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\,,$$

takže s využitím rovnosti (5.1) můžeme psát

$$ab + ac + bc \geq 2S\,\frac{6}{\sqrt{3}} \geq 4\sqrt{3}\,S\,.$$

Příklad 5.7. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a obsahem S platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}\,S.$$

Řešení. Vyjdeme z kosinové věty pro stranu a, kterou můžeme upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = \\ &= (b-c)^2 + \frac{4S(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = (b-c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Stejně tak dostaneme i rovnice pro zbylé dvě strany trojúhelníka:

$$b^2 = (c-a)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right),$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Sečteme-li nyní tyto tři rovnosti, dostaneme

$$a^2+b^2+c^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4S\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right). \quad (5.2)$$

Protože funkce $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ je jak známo na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ konvexní, dostáváme z Jensenovy nerovnosti pro tuto funkci

$$\frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \geq \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,,$$

takže z rovnosti (5.2) plyne

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}\,S\,,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 5.8. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ je na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ ostře konkávní, což je zřejmé ze známého průběhu jejího grafu. Pro hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{n}$ a $\lambda_1 = \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = \frac{n}{n+1}$ tedy z Jensenovy nerovnosti pro funkci f plyne:

$$\cos\left(\frac{1}{n+1}\cdot 0 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n}\right) > \frac{1}{n+1}\cos 0 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n}\,,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n}\,,$$
$$(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > 1 + n\cos\frac{\pi}{n}\,,$$
$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1\,.$$

Příklad 5.9. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a \geq \frac{1}{2}$, $b \geq \frac{1}{2}$ platí

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}\,.$$

Řešení. Nejdříve provedeme následující úpravu:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 + \frac{a+b}{2} &= \frac{a^4-2a^2b^2+b^4+2a+2b}{4} = \\ &= \frac{2a^4-a^4-2a^2b^2+2b^4-b^4+2a+2b}{4} = \\ &= \frac{2(a^4+a+b^4+b)-(a^4+2a^2b^2+b^4)}{4} = \\ &= \frac{a^4+a+b^4+b}{2} - \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Dokazovanou nerovnost tak můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{a^4+a+b^4+b}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,. \tag{5.3}$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Ta je konvexní na intervalu $\langle \frac{1}{4}, \infty)$, neboť

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \geq 2 - \frac{1}{4\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}} = 0 \qquad \text{pro každé } x \in \langle \frac{1}{4}, \infty).$$

Jensenova nerovnost pro funkci f má tvar

$$\lambda_1\left(x_1^2+\sqrt{x_1}\right) + \lambda_2\left(x_2^2+\sqrt{x_2}\right) \geq (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2 + \sqrt{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\,,$$

takže pro čísla $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$, která díky nerovnostem a, $b \geq \frac{1}{2}$ leží v intervalu $\langle \frac{1}{4}, \infty)$, a pro koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ dostáváme

$$\frac{a^4+a+b^4+b}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,,$$

což je nerovnost (5.3).

Příklad 5.10. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, pro něž $a + b = 1$, platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Řešení. Daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2$. Ta je na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, neboť $f''(x) = 2\left(1 + \frac{3}{x^4}\right) > 0$ pro každé $x > 0$. Platí tedy

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b}\right)^2,$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Poznamenejme, že postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$, pro něž $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2$, konvexní na intervalu $(0, \infty)$, dostaneme

$$\frac{1}{n}\left(\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2\right) \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}\right)^2,$$

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n\left(\frac{1+n^2}{n}\right)^2,$$

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(1+n^2)^2}{n}.$$

Získaný odhad lze dále zobecnit způsobem, který uvedeme později jako příklad 5.15.

Příklad 5.11. Dokažte, že pro libovolné n-tice čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ platí

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n)^{\frac{1}{n}} \leq \big((a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Řešení. Abychom dokázali, že daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti, bude nutné ji nejdříve upravit. Protože je nerovnost triviální v případě, kdy $a_i = 0$ pro některé i, předpokládejme dále, že $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, a vydělme nejprve obě strany kladným výrazem $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$:

$$\frac{(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n)^{\frac{1}{n}}}{(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\big((a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)\big)^{\frac{1}{n}}}{(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}}.$$

Dále v této nerovnosti označme $c_k = \frac{b_k}{a_k} > 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$. Dostaneme

$$1 + (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n)^{\frac{1}{n}} \leq \big((1 + c_1) \cdot (1 + c_2) \cdot \ldots \cdot (1 + c_n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Nyní dosaďme $c_k = e^{d_k}$, kde $d_k = \ln c_k$, a celou nerovnost zlogaritmujme. Postupně dostaneme

$$\ln\Big(1 + \big(e^{d_1} \cdot e^{d_2} \cdot \ldots \cdot e^{d_n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big) \leq \ln\Big((1 + e^{d_1}) \cdot (1 + e^{d_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + e^{d_n})\Big)^{\frac{1}{n}},$$

$$\ln\Big(1 + e^{\frac{d_1 + d_2 + \ldots d_n}{n}}\Big) \leq \frac{1}{n} \ln\Big((1 + e^{d_1}) \cdot (1 + e^{d_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + e^{d_n})\Big),$$

$$\ln\Big(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k}\Big) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + e^{d_k}\Big),$$

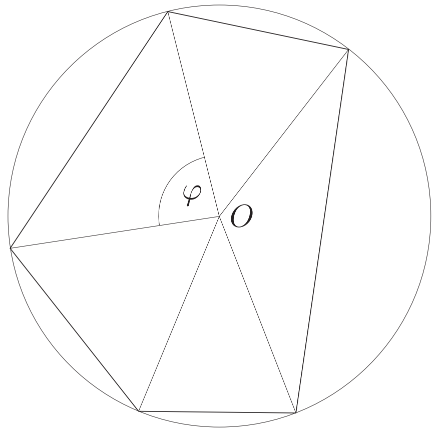
což je však Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Zbývá tedy ověřit, zda je funkce f konvexní (na celém $\mathbb{R}$, neboť d_k mohou být jak kladná, tak záporná čísla). To zjistíme z výpočtu druhé derivace:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ konvexní a důkaz je tak hotov.

Příklad 5.12. Ukažte, že ze všech konvexních n-úhelníků vepsaných do dané kružnice má největší obsah právě pravidelný n-úhelník.



Obr. 5.2

Řešení. Jistě můžeme uvažovat jen takové vepsané n-úhelníky, které obsahují střed O dané kružnice. Z obr. 5.2 je patrné, že každý takový konvexní n-úhelník se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný hlavní vrchol ve středu O. Obsah každého takového n-úhelníka je tedy roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Je-li daná kružnice jednotková, pak pro obsah S každého z nich platí

$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi\,,$$

kde φ je úhel při středu O. Obsah A celého n-úhelníka tedy můžeme zapsat:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k\,,\quad \text{kde}\quad 0<\varphi_k<\pi \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi.$$

Je dobře známo, že funkce $f(x) = \sin x$ je ostře konkávní na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$, a proto z Jensenovy nerovnosti plyne

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k \le \frac{1}{2}n\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right) = \frac{1}{2}n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = A'\,,$$

kde A' je zřejmě obsah pravidelného n-úhelníka. A protože rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_n$, tedy $\varphi_k=\frac{2\pi}{n}$ pro všechna $1\le k\le n$, je tvrzení o maximálním obsahu pravidelného n-úhelníka dokázáno.

Příklad 5.13. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1,\ldots,a_n$ platí

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \ge \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Řešení. Tuto nerovnost lze odvodit z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = x\ln x$. Ta je konvexní na intervalu $(0,\infty)$, neboť $f''(x)=\frac{1}{x}>0$. Můžeme tedy psát

$$\frac{a_1\ln a_1+\cdots+a_n\ln a_n}{n} \ge \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\ln\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right),$$

$$a_1\ln a_1+\cdots+a_n\ln a_n \ge (a_1+\cdots+a_n)\ln\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right),$$

$$\ln\left(a_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{a_n}\right) \ge \ln\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{(a_1+\cdots+a_n)},$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_1^{a_i} \ge \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Příklad 5.14. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$, pro něž $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - a_i \right) \geq (n-1)\sqrt{n}\,.$$

Řešení. Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$, konvexní na intervalu $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} > 0$, má tvar

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}} - \sqrt{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}\,.$$

Po dosazení $x_i = a_i^2$ a $\lambda_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ tedy dostaneme

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{a_1} - a_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right) \right] \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} - \frac{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}{\sqrt{n}}\,,$$

$$\left(\frac{1}{a_1} - a_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right) \geq n \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - a_i \right) \geq (n-1)\sqrt{n}\,.$$

Příklad 5.15. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$, pro něž $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, a pro libovolné kladné reálné číslo p platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}\,.$$

Řešení. Vyjdeme z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^p$. O její konvexnosti na intervalu (0,1) se nyní přesvědčíme:

$$f'(x) = p \left(x + \frac{1}{x} \right)^{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)\,,$$

$$f''(x) = p \left(x + \frac{1}{x} \right)^{p-2} \cdot \left((p-1) \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^2 + \frac{2}{x^3} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)\,.$$

Je-li $p \geq 1$, je nerovnost $f''(x) > 0$ zřejmě splněna pro každé x z uvažovaného intervalu. Pro $0 < p < 1$ plyne nezáporná hodnota druhé derivace funkce f z nerovnosti

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{2}{x^3}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq -\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{2}{x^3}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1-x^4}{x^4}+\frac{4}{x^2},$$

jejíž pravá strana je pro každé $x \in (0,1)$ kladná (jako součet dvou kladných zlomků). Jensenovu nerovnost pro funkci f s danými čísly a_i a koeficienty $\lambda_i = \frac{1}{n}$ tedy můžeme zapsat a dále upravit:

$$\lambda_1\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^p+\cdots+\lambda_n\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^p \geq \left(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n+\frac{1}{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n}\right)^p,$$

$$\frac{1}{n}\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^p+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^p\right] \geq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^p,$$

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^p+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^p \geq n\left(\frac{1}{n}+n\right)^p,$$

$$\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}.$$

Příklad 5.16. Dokažte, že pro libovolné n-tice kladných reálných čísel $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2.$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost nejdříve upravíme. Označme $S=\sum_{i=1}^n a_i$. Po vydělení výrazem S^2 a odmocnění obou stran nerovnosti postupně dostaneme

$$1+\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{S}\right)^2 \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2}{S^2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{S}\right)^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{S}.$$

Pravou stranu můžeme ještě dále upravit takto:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)}{S}=\frac{\sum_{i=1}^n a_i\sqrt{1+\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2}}{S}=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{S}\sqrt{1+\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2}.$$

Původní nerovnost tedy můžeme zapsat ekvivalentně jako

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{S}\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S}\sqrt{1+\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2}. \tag{5.4}$$

Vezměme nyní funkci $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ a spočtěme její druhou derivaci:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Vidíme, že $f''(x)>0$ pro každé $x\in(0,\infty)$, takže f je na tomto intervalu konvexní. Dosadíme-li $x_i=\frac{b_i}{a_i}$ a $\lambda_i=\frac{a_i}{S}$ do Jensenovy nerovnosti pro funkci f, dostaneme

$$\sqrt{1+\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S}\cdot\frac{b_i}{a_i}\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S}\sqrt{1+\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{S}\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S}\sqrt{1+\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2},$$

což je nerovnost (5.4).

Příklad 5.17. Dokažte, že pro libovolné n-tice kladných reálných čísel $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ a pro libovolné reálné číslo $p>0$ platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{b_i^p} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{p+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^p}.$$

Řešení. Nerovnost opět nejprve upravíme. Po vydělení obou stran součtem $S=\sum_{i=1}^n b_i$ postupně dostaneme

$$\frac{1}{S}\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{b_i^p} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{p+1}}{S\cdot S^p},$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{S}\cdot\frac{a_i^{p+1}}{b_i^p}\right) \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{p+1}}{S^{p+1}},$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{S}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{p+1} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{S}\right)^{p+1}.$$

Vezmeme-li funkci $f(x) = x^{p+1}$, která je na intervalu $(0, \infty)$ ostře konvexní, jak je patrné z hodnoty její druhé derivace $f''(x) = p\,(p+1)x^{p-1} > 0$, pak Jensenova nerovnost bude mít tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{p+1} \geq \left(\lambda_i \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p+1} .$$

Po dosazení

$$x_i = \frac{a_i}{b_i}, \qquad \lambda_i = \frac{b_i}{S} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{S} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{p+1} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{S} \cdot \frac{a_i}{b_i}\right)^{p+1} ,$$

A protože pravou stranu můžeme dále upravit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{S} \cdot \frac{a_i}{b_i}\right)^{p+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S}\right)^{p+1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{S}\right)^{p+1} ,$$

je tak důkaz hotov.

Příklad 5.18. Dokažte, že pro libovolnou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$ z intervalu $(0, \frac{1}{2})$ platí

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)\right)^n} .$$

Řešení. Nerovnost nejdříve upravíme:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)\right)^n} ,$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)\right)^n} ,$$

$$\ln \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - a_i} \leq n \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)} ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1 - a_i} \leq n \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)} . \tag{5.5}$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ a spočtěme její druhou derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)}, \qquad f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}.$$

Vidíme, že $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \frac{1}{2})$, takže funkce f je na tomto intervalu konkávní. Jensenova nerovnost pro funkci f bude mít tedy tvar

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i}\right) \leq \ln \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}{1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i}\right) \leq \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n - \sum_{i=1}^{n} a_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i} \leq n \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)},$$

což je nerovnost (5.5).

Příklad 5.19. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, $y \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Řešení. Bude-li jedno z čísel x, y rovno nule, přejde daná nerovnost v nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq 1,$$

jejíž platnost je zřejmá. V případě, že $x = y = 0$, přejde daná nerovnost v triviální rovnost. Nechť tedy $0 < x \leq 1$ a $0 < y \leq 1$. Označme

$$x^2 = e^{-u}, \qquad y^2 = e^{-v},$$

kde u, $v \geq 0$. Zřejmě pak

$$xy = e^{-\frac{u+v}{2}}.$$

Nerovnost ze zadání můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-u}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-v}}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+e^{-\frac{u+v}{2}}}},$$

což je Jensenova nerovnost pro funkci $f(u) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-u}}}$. Že je tato funkce konkávní na intervalu $\langle 0, \infty)$, ověříme výpočtem druhé derivace funkce f:

$$f'(u) = \frac{e^{-u}}{2\sqrt{(1+e^{-u})^3}}\,, \qquad f''(x) \;=\frac{e^{-u}(e^{-u}-2)}{4\sqrt{(1+e^{-u})^5}}\,.$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace funkce f závisí na hodnotě výrazu $(e^{-u}-2)$. Ta bude záporná pro všechna $u > -\ln 2$. Interval všech u, pro která je funkce f konkávní, lze tedy rozšířit na $\langle -\ln 2, \infty)$. A protože pro $u \geq -\ln 2$ platí

$$x^2 = e^{-u} \leq e^{\ln 2} = 2\,,$$

můžeme rozšířit i oblasti pro x a y, kdy nerovnost ze zadání příkladu platí, na intervaly

$$0 \leq x \leq \sqrt{2}\,, \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{2}\,.$$

Příklad 5.20. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} < \sqrt{2(a+b+c)}\,.$$

Řešení. Označme $S = a+b+c$ a vydělme obě strany nerovnosti výrazem $\sqrt{S}$. Dostaneme

$$\frac{a}{S}\sqrt{\frac{S}{a+b}} + \frac{b}{S}\sqrt{\frac{S}{b+c}} + \frac{c}{S}\sqrt{\frac{S}{c+a}} < \sqrt{2}\,.$$

Získaná nerovnost vyplyne z Jensenovy nerovnosti, a to pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$, jejíž druhá derivace $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ je záporná pro všechna $x \in (0, \infty)$, takže funkce f je na tomto intervalu konkávní. Zřejmě totiž platí

$$\frac{a}{S}\sqrt{\frac{S}{a+b}} + \frac{b}{S}\sqrt{\frac{S}{b+c}} + \frac{c}{S}\sqrt{\frac{S}{c+a}} =$$

$$= \frac{a}{S} f\left(\frac{S}{a+b}\right) + \frac{b}{S} f\left(\frac{S}{b+c}\right) + \frac{c}{S} f\left(\frac{S}{c+a}\right) \leq$$

$$\leq f\left(\frac{a}{S}\cdot\frac{S}{a+b} + \frac{b}{S}\cdot\frac{S}{b+c} + \frac{c}{S}\cdot\frac{S}{c+a}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{b}{a+b} + 1 - \frac{c}{b+c} + 1 - \frac{a}{c+a}} = \sqrt{3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right)} <$$

$$< \sqrt{3 - \left(\frac{b}{S} + \frac{c}{S} + \frac{a}{S}\right)} = \sqrt{2}\,.$$

A tím je důkaz hotov.

Příklad 5.21. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a(a+b-c)^2 + b(b+c-a)^2 + c(c+a-b)^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c}\,.$$

Řešení. Vydělme obě strany nerovnosti výrazem $a+b+c$. Dostaneme

$$\frac{a(a+b-c)^2}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)^2}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)^2}{a+b+c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}\,.$$

Je patrné, že jde o Jensenovu nerovnost pro konvexní funkci $f(x) = x^2$ s hodnotami

$$x_1 = a+b-c\,, \qquad x_2 = b+c-a\,, \qquad x_3 = c+a-b\,,$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{b}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{c}{a+b+c}\,.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned}
&\frac{a(a+b-c)^2}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)^2}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)^2}{a+b+c} = \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = \\
&= \left(\frac{a(a+b-c)}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)}{a+b+c}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}\,,
\end{aligned}$$

což je skutečně upravená nerovnost ze zadání.

Příklad 5.22. Ukažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníka a, b, c platí

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| \leq 2\left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)\,.$$

Řešení. Zavedeme funkci g tří proměnných:

$$g(a,b,c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\,,$$

a rozlišíme dva případy:

(a) $g(a,b,c) \geq 0$.

Protože funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je jak známo konvexní na $\mathbb{R}^+$ a koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a+b-c}{a+b+c}, \qquad \lambda_2 = \frac{b+c-a}{a+b+c}, \qquad \lambda_3 = \frac{c+a-b}{a+b+c},$$

jsou kladná čísla, jejichž součet je roven jedné, můžeme Jensenovu nerovnost využít následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\left|g(a,b,c)\right| = g(a,b,c) = 3 - \left(\frac{a+b-c}{a} + \frac{b+c-a}{b} + \frac{c+a-b}{c}\right) &= \\
= 3 - \left(\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(c)\right)(a+b+c) &\leq \\
\leq 3 - f\left(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c\right)(a+b+c) &= \\
= 3 - \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = 2\left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right) &.
\end{aligned}$$

(b) $g(a,b,c) < 0$.

Protože pro funkci g platí

$$\left|g(a,b,c)\right| = -g(a,b,c) = g(c,b,a) > 0,$$

můžeme provést obdobnou úvahu jako v případě (a). Tedy pro stejnou funkci f a koeficienty λ_1, λ_2, λ_3 s využitím Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|g(c,b,a)\right| = g(c,b,a) = 3 - \left(\frac{c+b-a}{c} + \frac{b+a-c}{b} + \frac{a+c-b}{a}\right) &= \\
= 3 - \left(\lambda_1 f(c) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(a)\right)(c+b+a) &\leq \\
\leq 3 - f\left(\lambda_1 c + \lambda_2 b + \lambda_3 a\right)(c+b+a) &= \\
= 3 - \frac{(c+b+a)^2}{c^2+b^2+a^2} = 2\left(1 - \frac{cb+ba+ac}{c^2+b^2+a^2}\right) &,
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov.

Příklad 5.23. Ukažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníka a, b, c platí

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0\,.$$

Řešení. Nerovnost nejdříve upravíme. Po vynásobení číslem 2 a následném roznásobení závorek dostaneme

$$2a^3b + 2b^3c + 2c^3a \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \, .$$

Přičteme-li k oběma stranám nerovnosti výraz $a^4 + b^4 + c^4$, dostaneme

$$a^4 + 2a^3b + b^4 + 2b^3c + c^4 + 2c^3a \geq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4 + 2c^2a^2 \, .$$

Přidáme-li nyní k levé straně nerovnosti nulový výraz $a^2b^2 - b^2a^2 + b^2c^2 - c^2b^2 + c^2a^2 - a^2c^2$, pak po dalších úpravách dostaneme

$$a^2(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) + b^2(b^2 + 2bc + c^2 - a^2) + c^2(c^2 + 2ca + a^2 - b^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \, ,$$

tedy

$$a^2\left((a+b)^2 - c^2\right) + b^2\left((b+c)^2 - a^2\right) + c^2\left((c+a)^2 - b^2\right) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \, .$$

Vydělme ještě obě strany poslední nerovnosti výrazem $(a + b + c)^2$. Dostaneme

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} \cdot a^2 + \frac{b+c-a}{a+b+c} \cdot b^2 + \frac{c+a-b}{a+b+c} \cdot c^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} \, .$$

Takto upravená nerovnost již však zřejmě plyne z Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci $f(x) = x^2$ a konvexní kombinaci $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$, kde

$$\lambda_1 = \frac{a+b-c}{a+b+c} \, , \qquad \lambda_2 = \frac{b+c-a}{a+b+c} \, , \qquad \lambda_3 = \frac{c+a-b}{a+b+c} \, ,$$

neboť pro hodnotu $f(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c)$ platí

$$\left(\frac{(a+b-c)a}{a+b+c} + \frac{(b+c-a)b}{a+b+c} + \frac{(c+a-b)c}{a+b+c}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} \, .$$

Příklad 5.24. Ukažte, že pro všechna kladná reálná čísla a_1, a_2, a_3, a_4 platí

$$2 \leq \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_1} + \frac{a_4}{a_1+a_2} \, . \tag{5.6}$$

Řešení. Proveďme nejprve následující označení:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4\,,$$
$$C = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2}\,.$$

Ukážeme, že dokazovaná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti s koeficienty $\lambda_i = \frac{a_i}{S}$ (jejichž součet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ je podle definice součtu S roven jedné):

$$f\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i x_i}{S}\right) \le \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i}{S} \cdot f(x_i)\,.$$

Vezmeme-li totiž konvexní funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, která je jak známo konvexní na $\mathbb{R}^+$, a dosadíme-li kladná čísla $x_1 = a_2 + a_3$, $x_2 = a_3 + a_4$, $x_3 = a_4 + a_1$, $x_4 = a_1 + a_2$, dostaneme pro levou a pravou stranu nerovnosti tato vyjádření

$$L = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_1) + a_4(a_1 + a_2)}\,,$$
$$P = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_3 + a_4} +$$
$$+ \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_1 + a_2}\,.$$

Pokud označíme jmenovatele zlomku levé strany D, můžeme Jensenovu nerovnost $L \le P$ přepsat do jednoduchého tvaru

$$\frac{S}{D} \le \frac{C}{S}\,, \qquad \text{odkud} \qquad \frac{S^2}{D} \le C.$$

Naší úlohou je dokázat nerovnost $C \ge 2$, stačí tedy ověřit, že

$$\frac{S^2}{D} \ge 2\,, \qquad \text{neboli} \qquad S^2 - 2D \ge 0.$$

Levou stranu poslední nerovnosti můžeme postupně upravit takto:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 2\big(a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_1) + a_4(a_1 + a_4)\big) =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_3 - 2a_4a_2 = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \ge 0\,,$$

čímž je nerovnost (5.6) dokázána.

Pro zajímavost k příkladu 5.24 dodejme, že nerovnost

$$\frac{n}{2} \leq \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2}$$

se nazývá *Shapirova*, a platí s libovolnými kladnými čísly a_1, $a_2, \ldots, a_n$ pouze pro sudá $n \leq 12$ a lichá $n \leq 23$.

Shapirovu nerovnost pro $n = 3$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_1} + \frac{a_3}{a_1+a_2}\,,$$

lze zobecnit i jiným způsobem uvedeným v následujícím příkladu.

Příklad 5.25. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}\,,$$

kde $S = a_1 + \cdots + a_n$.

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{x}{S-x}$ je na intervalu $(0, S)$ konvexní, neboť $f''(x) = \frac{S}{(S-x)^3} > 0$ pro každé $x \in (0, S)$. Z Jensenovy nerovnosti pro funkci f a koeficienty $\lambda_i = \frac{1}{n}$ proto dostáváme:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}\right) \geq \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{S - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\,,$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}\right) \geq \frac{S}{Sn-S}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}\,.$$

V předchozím příkladě jsme cyklickým způsobem sečetli zlomky, kde v čitateli bylo jedno z daných čísel a ve jmenovateli $n-1$ ostatních čísel. V následujícím příkladu se budeme zabývat zobecněním takových součtů na zlomky, kdy v čitateli bude součet k po sobě jdoucích daných čísel a ve jmenovateli součet $n-k$ ostatních čísel.

Příklad 5.26. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ a pro každé přirozené číslo $k = 2, 3, \ldots, n-1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \cdots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \cdots + a_{i+k})} \geq \frac{nk}{n-k},$$

kde $S = a_1 + \cdots + a_n$ a $a_{i+n} = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řešení. Jako v příkladu 5.25 uplatníme Jensenovu nerovnost k funkci $f(x) = \frac{x}{S-x}$ konvexní na intervalu $(0, S)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S - x_i} \geq \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{S - \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Dosadíme sem čísla $x_i \in (0, S)$ zvolená takto:

$$x_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Protože pro jejich součet platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k \cdot S,$$

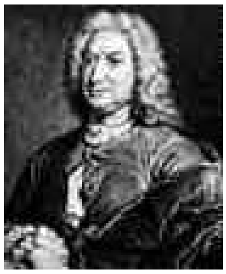
dostaneme postupnými úpravami:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \cdots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \cdots + a_{i+k})} \geq \frac{\frac{k}{n} \cdot S}{S - \frac{k}{n} \cdot S},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \cdots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \cdots + a_{i+k})} \geq \frac{nk}{n-k}.$$

Slovníček matematiků

JOHANN BERNOULLI



Johann Bernoulli se narodil 27.6. 1667 ve švýcarské Basileji. Patří do první generace vynikajících matematiků z rodu Bernoulliů, kteří výrazně ovlivnili vývoj matematiky v 18. století. Původně studoval medicínu, avšak pod vedením svého o dvanáct let staršího bratra Jacoba se brzy začal plně věnovat matematice. Po studiích žil krátce v Paříži, kde kromě jiného soukromě vyučoval markýze l'Hospitala. Ten na základě Johannových přednášek a korespondence vydal první učebnici diferenciálního počtu, v níž však neuvedl dostatečně Johannův podíl na jejím vzniku. Autorství známého l'Hospitalova pravidla tak bylo Johannovi uznáno až v roce 1921, kdy byl nalezen soubor jeho přednášek, z nichž l'Hospital čerpal. V letech 1695-1705 vyučoval Johann matematiku na Univerzitě v Groningenu v Holandsku. Po smrti svého bratra Jacoba se vrátil do Basileje a stal se profesorem matematiky na tamní univerzitě. Mezi jeho žáky patřil i Leonhard Euler. Zemřel 1.1. 1748. Během svého života se zabýval celou řadou matematických problémů. Výrazně přispěl k rozvoji diferenciálního počtu, vyřešil proslavenou úlohu o brachystochroně i Bernoulliho diferenciální rovnici, se svým bratrem Jacobem položil základy variačního počtu.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

Augustin Louis Cauchy se narodil 21.8. 1779 v Paříži. Po vystudování École Polytechnique nejprve pracoval jako inženýr v Cherbourgu, brzy se však začal věnovat výuce a vědecké práci. V roce 1816 získal za svou práci z hydrodynamiky cenu Pařížské akademie, jíž se stal později členem. Od roku 1848 působil na Collége de France. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky a jako autor byl velmi plodný. Zvláště významné jsou jeho práce především z matematické analýzy, ale i z teorie analytických funkcí, diferenciálních rovnic nebo algebry. Zemřel 23.5. 1857 v Sceaux nedaleko Paříže.

OTTO LUDWIG HÖLDER

Otto Ludwig Hölder se narodil 22.12. 1859 ve Štutgartu. Studoval nejdříve na Polytechnice ve Štutgartu a od roku 1877 na Univerzitě v Berlíně, kde navštěvoval přednášky Weierstrasse, Kummera nebo Kroneckera. Jeho láskou se stala algebra. Studium zakončil disertací v oblasti analytických funkcí v roce 1882 na Univerzitě v Tübingenu. Jako profesor působil na univerzitách v Lipsku, kde spolupracoval s Kleinem, poté v Göttingenu a od roku 1890 v Tübingenu. Zabýval se především teorií grup (známá je Jordan-Hölderova věta), ale studoval také např. Galoisovu teorii, analytické funkce, Fourierovy řady atd. Ve svém článku z roku 1884 dokázal platnost nerovnosti, která dnes nese jeho jméno.

JOHAN LUDWIG WILLIAM VALDEMAR JENSEN

Johan Ludwig William Valdemar Jensen žil v Dánsku v letech 1859 - 1925. Narodil se 8.5. ve městě Nakskov. Jeho otec podnikal v oblasti nemovitostí a za prací se několikrát s rodinou stěhoval. Část svého dětství tak prožil malý Johan v severním Švédsku. Základní vzdělání však dokončil v Kodani. V roce 1876 nastoupil na College of Technology, kde studoval fyziku, chemii a matematiku. A právě v této době si oblíbil matematiku natolik, že jí věnoval veškerou svou pozornost a téměř ztratil zájem o studium ostatních vědních disciplín. Zabýval se otázkami, které překračovaly rámec výuky a ještě během studia publikoval své první práce. Přesto však po ukončení studií přijal místo inženýra v kodaňské pobočce mezinárodní telefonní společnosti, kde pracoval až do konce svého života. Matematika se tak stala pouze jeho zálibou a věnoval se jí jen ve svém volném čase. Zabýval se např. Riemannovou hypotézou, nekonečnými řadami, gamma funkcí atd. Do dějin matematiky se však zapsal především svými poznatky v oblasti konvexních funkcí. V roce 1906 publikoval v časopise Acta mathematica článek, v němž dokázal nerovnost (dnes známou jako Jensenovu), která vyjadřuje důležitou vlastnost konvexních funkcí a patří k základním pilířům teorie algebraických nerovností. J.L.W.V. Jensen zemřel 5.3. 1925 v Kodani.

HERMANN MINKOWSKI

Hermann Minkowski se narodil 22.6. 1864 v Aleksotach (v dnešní Litvě) v rodině německého obchodníka, avšak od svých osmi let žil v Německu. Již během studií na Univerzitě v Königsbergu obdržel Velkou cenu Pařížské akademie za práci z teorie čísel, které se věnoval celý život. Po ukončení studií v roce 1885 působil střídavě na univerzitách v Königsbergu, Bonnu a na Polytechnice v Zürichu, kde byl jeho studentem i Albert Einstein. V roce 1902 získal díky svému příteli Davidu Hilbertovi místo na Univerzitě v Göttingenu, kde pracoval až do své předčasné smrti v roce 1909. Během svého nepříliš dlouhého života se kromě teorie čísel věnoval také geometrii, topologii a matematické fyzice. Vytvořil matematické základy obecné teorie relativity, zejména rozvíjel teorii čtyřrozměrného prostoru (Minkowského časoprostor).

HERMANN AMANDUS SCHWARZ

Hermann Amandus Schwarz se narodil 25.1. 1843 v Hermsdorfu (v dnešním Polsku). Po gymnáziu začal studovat chemii na Univerzitě v Berlíně, ale pod vlivem Kummera a Weierstrasse přešel ke studiu matematiky. Po získání doktorátu v roce 1864 pracoval na univerzitách v Halle, v Zürichu, v Göttingenu a od roku 1892 na Univerzitě v Berlíně, kde nastoupil na místo Weierstrasse. Zemřel 30.11. 1921. Zabýval se aplikovanou geometrií a rozvinul teorii minimálních ploch.

Seznam použité literatury

[1] Došlá, Z. - Kuben, J. : Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, Masarykova univerzita, Brno 2003.

[2] Novák, V. : Diferenciální počet v $\mathbb{R}$, Masarykova univerzita, Brno 1997.

[3] Herman, J. - Kučera, R. - Šimša, J. : Metody řešení matematických úloh I, Masarykova univerzita, Brno 1996.

[4] Steel, J. M. : The Cauchy-Schwarz Master Class - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities, Cambridge University Press, New York 2004.

[5] Kourliandtchik, L. : Wędrówki po krainie nierówności, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2000.

[6] Engel, A. : Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York 1998.

[7] Bagdasar, O. : Some Applications of Jensen‘ s Inequality, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 13, No. 1, 2005.

[8] O'Connor, J. J. - Robertson, E. F. : The MacTutor History of Mathematics archive, 2005.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[9] Fuchs, E. : Biografie matematiků, 2000.
`http://www.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/BM.PDF`