



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Geometrické extrémální úlohy

– historie, příklady a metody

Diplomová práce

Jana Gajdošíková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. Brno 2012

Obsah

Úvod	8
1 Využití geometrických transformací	9
1.1 Řešené příklady	9
2 Tečnový princip	30
2.1 Teoretický základ	30
2.2 Řešené příklady	43
3 Další zajímavé úlohy	51
3.1 Řešené příklady	51
Závěr	62
Seznam literatury	63

Úvod

První geometrické úlohy, ve kterých bylo úkolem nalézt maximum nebo minimum nějaké hodnoty, byly formulovány již v antice. Mezi takové úlohy patří například proslulá Heronova úloha, jejíž výsledek je dnes známý jako jeden ze zákonů geometrické optiky, nebo odvození izoperimetrické vlastnosti kruhu. Mnohé extrémální úlohy můžeme nalézt už v pracích známých matematiků jako Eukleides, Apollonius, Archimedes (všichni 3. stol. př. n. l.) a další. Některými extrémálními úlohami se zabývali matematikové po staletí využívající odlišné matematické prostředky, jež měli ve své době k dispozici. Řešení dvou zmíněných problémů a mnohých dalších jsou ukázána v této práci.

Jak jsme již naznačili, postupem doby vznikaly s rozvíjejícím se matematickým aparátem i různé metody řešení podobných úloh. Dalo by se říct, že nutnost řešit extrémální úlohy později dokonce napomohla ke vzniku matematické analýzy. Řešit takové typy úloh vyžaduje i dnešní doba. Díky rozvoji technologií v mnoha odvětvích a v ekonomických vědách je třeba hledat optimální řešení různých extrémálních problémů.

Předložený text volně navazuje na mou bakalářskou práci s názvem *Geometrické úlohy na maxima a minima*, kde byla popsána a použita jediná metoda řešení, a to diferenciální počet funkcí jedné nebo více proměnných. V této práci jsou ukázány další dvě z možných metod řešení zaměřené spíše na geometrické vztahy.

Práce je rozčleněna na tři kapitoly. V první kapitole jsou k řešení uvedených extrémálních úloh použity různé geometrické transformace, jako jsou osová souměrnost, rotace nebo stejnolehlost. Druhá kapitola je věnována tzv. tečnovému principu, který je nejprve posouzen teoreticky a následně využit k řešení několika úloh. Třetí kapitola pojednává o třech zajímavých extrémálních úlohách, jejichž řešení jsou založena na dalších prostředcích elementární matematiky, jakými jsou vlastnosti kvadratických a goniometrických funkcí.

Práce je určena především pro vysokoškolské studenty jako doplněk základního kurzu matematiky, avšak některé snažší úlohy (převážně z první kapitoly) lze zařadit i do výuky na střední škole.

Text je vysázen typografickým systémem \TeX ve formátu \LaTeX a obrázky jsou vytvořeny programem Ipe.

Kapitola 1

Využití geometrických transformací

Geometrické útvary v různých úlohách často obsahují prvky některé z rovinných či prostorových symetrií. Při řešení takových úloh jsou proto poměrně často využívány geometrické transformace. Použití některé z nich může řešení úlohy výrazně zjednodušit. Tato kapitola obsahuje extrémální úlohy, v jejichž řešení jsou použity transformace jako osová souměrnost, rotace nebo stejnoolehlost. Kromě většiny úloh zadaných a řešených v rovině jsou zde zařazeny i prostorové úlohy.

1.1 Řešené příklady

Úloha 1.1.1 (Heronova úloha¹). *V rovině je dána přímka l a body A a B ležící ve stejné polorovině určené přímkou l . Najděte takový bod X na přímce l , pro který je součet vzdáleností $|AX| + |XB|$ minimální. [AMS, str. 1]*

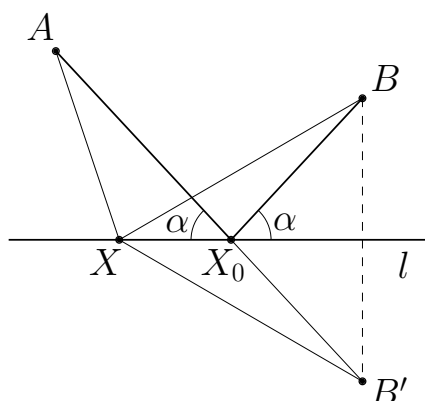
Řešení. Nechť B' je bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky l a nechť bod X_0 je průsečík úsečky AB' a přímky l (viz obr. 1.1). Pro libovolný bod X na přímce l plyne ze symetrie $|XB| = |XB'|$, a tedy podle trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$|AX| + |XB| = |AX| + |XB'| \geq |AB'|,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když bod X splývá s bodem X_0 . Hledaným bodem je tedy bod X_0 , průsečík úsečky AB' s přímkou l . ♣

Výsledek této úlohy odpovídá jednomu ze zákonů geometrické optiky, *zákonu odrazu*: úhel α dopadu, který svírá dopadající paprsek s rozhraním (přímka l), je roven úhlu odrazu, který s rozhraním svírá odražený paprsek.

¹Herón Alexandrijský (1. stol. př. n. l.) byl starověký řecký matematik a vynálezce.



Obr. 1.1

Úloha 1.1.2. *Dané body A, B leží uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou l tak, že bod A má od přímky l větší vzdálenost než bod B . Určete takový bod $X \in l$, pro který je rozdíl vzdáleností $|AX| - |BX|$ maximální. [Návrh vedoucího práce]*

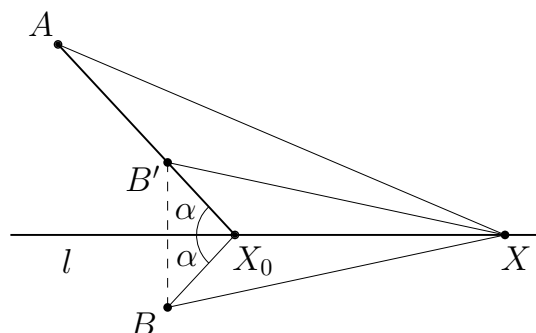
Řešení. Označme B' obraz bodu B v osové souměrnosti s osou l a X_0 průsečík polopřímky AB' s přímkou l , který existuje díky předpokladu o vzdálenostech bodů A, B od přímky l (viz obr. 1.2). Pro libovolný bod X na přímce l platí trojúhelníková nerovnost

$$|AB'| + |B'X| \geq |AX|. \quad (1.1)$$

Ze symetrie $|BX| = |B'X|$ a z (1.1) pak plyne

$$|AX| - |BX| = |AX| - |B'X| \leq |AB'|,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když $X = X_0$. Hledaným bodem maxima je



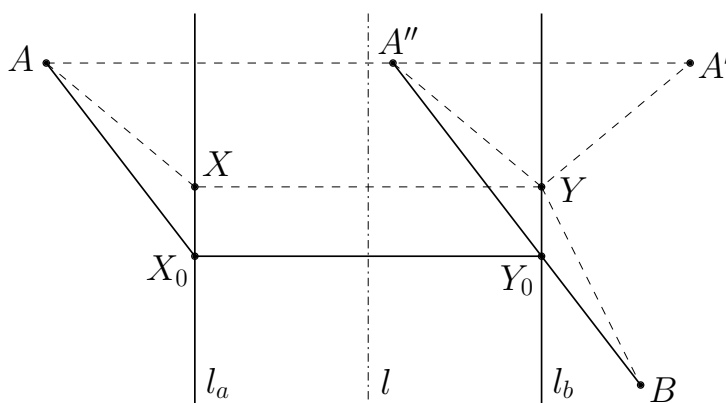
Obr. 1.2

tudíž bod X_0 , průsečík přímky AB' s přímkou l . Podobně jako v předcházející Heronově úloze ze symetrie vyplývá, že úsečky AX_0, BX_0 svírají s přímkou l úhly stejné velikosti. ♣

Následující úloha je zajímavou modifikací Heronovy úlohy 1.1.1.

Úloha 1.1.3. Dvě města A a B jsou oddělena řekou s přímočarými rovnoběžnými břehy. Navrhněte, kde postavit most přes řeku kolmý k jejím břehům, aby cesta mezi městy byla co nejkratší. [AMS, str. 19]

Řešení. Označme rovnoběžné břehy řeky l_a, l_b (viz obr. 1.3). Označme dále l osu přímk l_a, l_b . Platí tedy $l \parallel l_a \parallel l_b$. V osově souměrnosti podle osy l sestrojíme



Obr. 1.3

obraz A' bodu A a v osově souměrnosti podle přímky l_b sestrojíme obraz A'' bodu A' . Nechť Y_0 je průsečík úsečky $A''B$ a přímky l_b a nechť X_0 je kolmý průmět bodu Y_0 na přímku l_a . Pak pro libovolné body $X \in l_a$ a $Y \in l_b$ takové, že $XY \perp l_a$, platí

$$|AX| = |A'Y| = |A''Y|. \quad (1.2)$$

Z (1.2) pak podobně jako při řešení Heronovy úlohy vyplývá

$$|AX| + |XY| + |YB| = |A''Y| + |YB| + |X_0Y_0| \geq |A''B| + |X_0Y_0|,$$

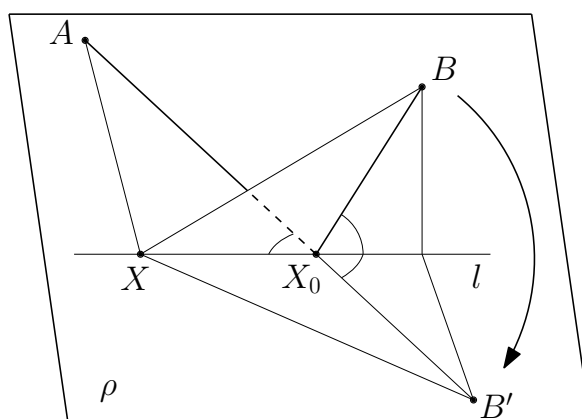
kde rovnost nastává právě tehdy, když $Y = Y_0$, a tedy i $X = X_0$.

Cesta z města A do města B je nejkratší možná, pokud je most umístěn na výše určené úsečce X_0Y_0 . ♣

Další úloha je rozšířením Heronovy úlohy 1.1.1 do prostoru.

Úloha 1.1.4. Je dána přímka l , mimo ni bod A a bod B , který neleží v rovině určené přímkou l a bodem A . Najděte takový bod X ležící na přímce l , aby byl součet vzdáleností $|AX| + |XB|$ minimální. [AMS, str. 2]

Řešení. Tato úloha je podobná Heronově úloze 1.1.1. V ní jsme využili souměrnost podle přímky. Povšimněme si, že v prostoru může být osová souměrnost podle dané přímky l uskutečněna jako rotace kolem této přímky o úhel 180° .



Obr. 1.4

Při řešení naší prostorové úlohy lze použít podobnou myšlenku, totiž využít rotaci kolem dané přímky l o vhodný úhel. K tomu označíme ρ rovinu určenou přímkou l a bodem A a B' obraz bodu B v takové rotaci v prostoru kolem přímky l , při které obraz B' a bod A budou ležet v opačných polorovinách roviny ρ vyřatých přímkou l (viz obr. 1.4).

Nechť bod X_0 je průsečík úsečky AB' s přímkou l . Pak pro libovolný bod X na přímce l platí trojúhelníková nerovnost

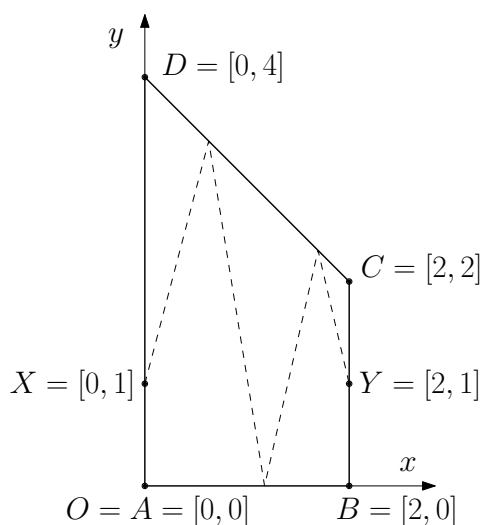
$$|AX| + |XB| = |AX| + |XB'| \geq |AB'|,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když bod X splývá s bodem X_0 , který je proto řešením úlohy.

Všimněme si ještě, že úsečky AX_0 a X_0B' svírají s přímkou l stejný úhel (jedná se o vrcholové úhly) a úsečky X_0B a X_0B' svírají stejný úhel s přímkou l (díky rotaci bodu B do bodu B' kolem přímky l). Tudíž bod X_0 má takovou vlastnost, že úsečky AX_0 a X_0B svírají s přímkou l stejný úhel, stejnou vlastnost, jakou měl i bod X_0 řešící rovinnou úlohu 1.1.1. ♣

Úloha 1.1.5. Je dán souřadnicový systém Oxy a v něm pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [2, 2]$, $D = [0, 4]$. Na základnách DA , BC lichoběžníku jsou dále dány body $X = [0, 1]$, $Y = [2, 1]$. Najděte nejkratší cestu z bodu X do bodu Y spojující postupně strany DA , CD , AB , CD , BC lichoběžníku (viz obr. 1.5). [AMS, str. 5]

Řešení. Při řešení této úlohy použijeme postupně tři osové souměrnosti vždy podle jedné ze stran lichoběžníku nebo stran jeho obrazu (viz obr. 1.6). Složením těchto tří souměrností přejde bod Y do bodu $Y' = [6, 1]$. Úloha tedy přešla



Obr. 1.5

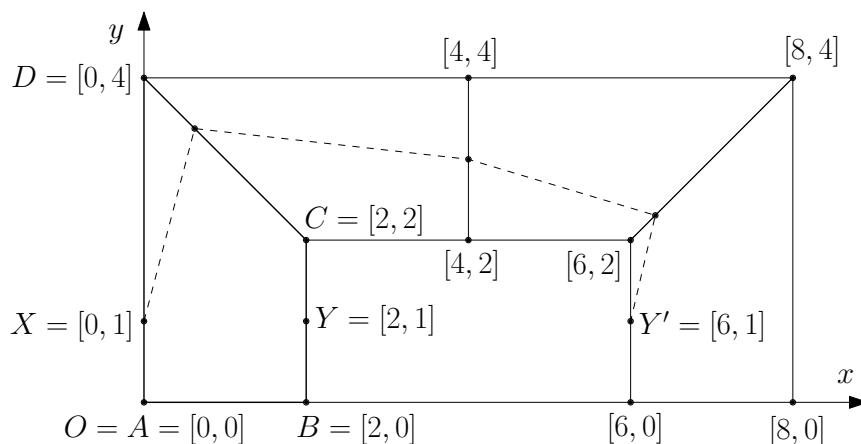
na problém: najít cestu z bodu X do bodu Y' , která leží celá v obrazci tvořeném ze čtyř lichoběžníků, jež jsme dostali v průběhu skládání zmíněných tří souměrností. Z (obr. 1.6) je zřejmé, že hledaná nejkratší cesta je lomená čára

$$X = [0, 1] \longrightarrow [2, 2] \longrightarrow [4, 2] \longrightarrow [6, 2] \longrightarrow Y' = [6, 1].$$

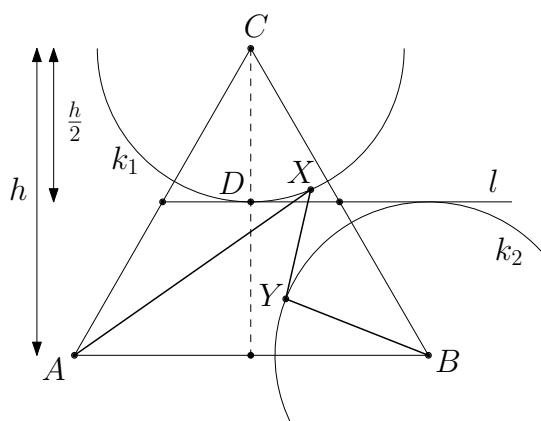
Z užitých souměrností vyplývá, že nejkratší cesta z bodu X do bodu Y , která v daném lichoběžníku postupně spojuje strany DA , CD , AB , CD , BC , je lomená čára procházející body

$$X = [0, 1] \longrightarrow [2, 2] \longrightarrow [2, 0] \longrightarrow [2, 2] \longrightarrow Y = [2, 1].$$

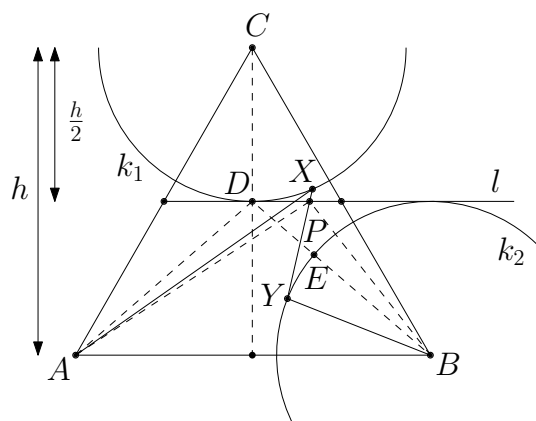
Hledaná cesta má tedy tvar lomené čáry $XCBCY$. ♣



Obr. 1.6



Obr. 1.7



Obr. 1.8

Následující úloha je z 15. ročníku mezinárodní matematické olympiády. K jejímu řešení využijeme mimo jiné opět Heronovu úlohu 1.1.1.

Úloha 1.1.6. *Voják dostal úkol detektorem zkontrolovat celé minové pole, které má tvar rovnostranného trojúhelníku. Detektor má dosah poloviny výšky trojúhelníkového pole. Najděte nejkratší trajektorii vojáka při kontrole pole, jestliže musí začít v jednom z vrcholů trojúhelníku.* [AMS, str. 6]

Řešení. Označme h výšku trojúhelníkového pole a jeho vrcholy A, B, C . Bez újmy na obecnosti můžeme uvážit, že vojáková trajektorie začíná ve vrcholu A . Dále uvažme kružnici k_1 ve vrcholu C a kružnici k_2 ve vrcholu B o poloměrech $\frac{h}{2}$. Je zřejmé, že voják prozkoumá vrcholy B a C právě tehdy, protíná-li jeho trajektorie kružnici k_1 i kružnici k_2 . Můžeme předpokládat, že trajektorie nejdříve protne kružnici k_1 , jejich průsečík označme X , poté teprve protne kružnici k_2 , průsečík označme Y . Dále označme d délku trajektorie, D průsečík kružnice k_1 s výškou trojúhelníku spuštěnou z bodu C a l rovnoběžku se stranou AB procházející bodem D (viz obr. 1.7). Pro délku trajektorie jistě platí $d \geq |AX| + |XY|$. Pak zřejmě platí také

$$\begin{aligned} d + \frac{h}{2} &\geq |AX| + |XY| + |YB| = \\ &= |AX| + |XP| + |PY| + |YB|, \end{aligned}$$

kde P je průsečík přímky l s úsečkou XY (viz obr. 1.8). Použitím trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník APX a trojúhelník YBP dostaneme

$$d + \frac{h}{2} \geq |AP| + |PB|. \quad (1.3)$$

Z výsledku Heronovy úlohy 1.1.1 pro body A, B a přímku l víme, že platí

$$|AP| + |PB| \geq |AD| + |DB|, \quad (1.4)$$

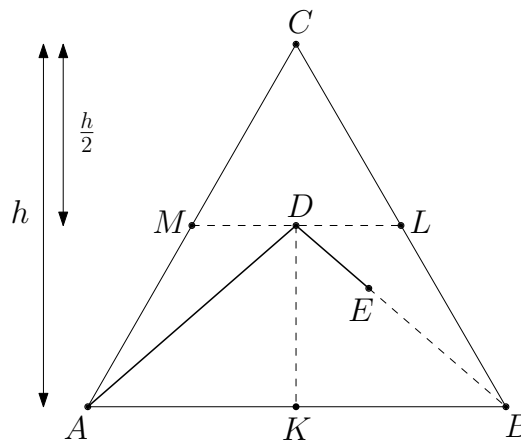
kde rovnost nastává právě tehdy, je-li $P = D$, protože tehdy svírají úsečky AD a BD s přímkou l stejné úhly. Dosazením (1.4) do (1.3) dostáváme

$$\begin{aligned} d + \frac{h}{2} &\geq |AD| + |DB| = \\ &= |AD| + |DE| + |EB|, \end{aligned}$$

kde E je průsečík úsečky DB s kružnicí k_2 . Z toho pak vyplývá

$$d \geq |AD| + |DE|.$$

Nejkratší trajektorie, po které voják s detektorem prozkoumá celé minové pole tak, že začne v bodě A , pak protne kružnici k_1 a poté kružnici k_2 , je lomená čára složená ze dvou úseček AD , DE . Nyní zbývá jen ukázat, že voják, který s detektorem půjde touto cestou, opravdu prozkoumá celou plochu pole tvořeného trojúhelníkem ABC .



Obr. 1.9

Označme K , L , M po řadě středy úseček AB , BC , CA (viz obr. 1.9). Jelikož $|DL| = |DM| < \frac{h}{2}$, je zřejmé, že detektor s dosahem $\frac{h}{2}$ v bodě D prozkoumá oblast, ve které je $\triangle MLC$. Během cesty po úsečce AD prozkoumá voják oblast, jež obsahuje čtyřúhelník $AKDM$, zatímco během cesty po úsečce DE prozkoumá oblast obsahující čtyřúhelník $KBLD$. Ověřili jsme tak, že voják zkontroluje každý bod celého trojúhelníku ABC , pokud bude jeho trajektorie lomená čára ADE .

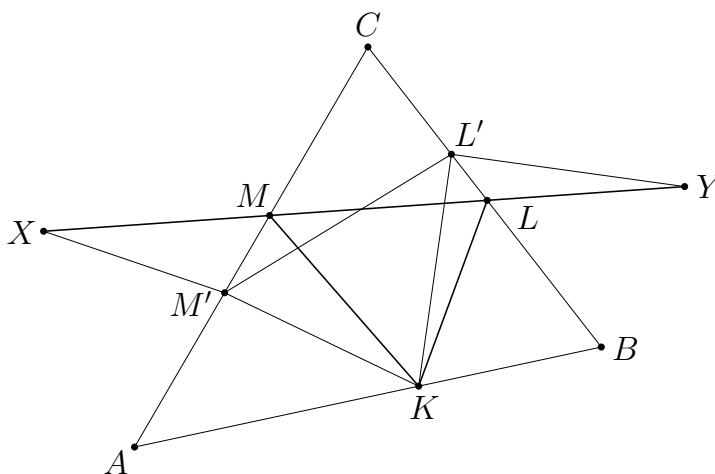
Trajektorie složená ze dvou úseček AD , DE je tedy jedním z řešení této úlohy. Další řešení dostaneme záměnou bodů B a C (případně libovolnou permutací bodů A , B , C) v řešení. Avšak pokud je předem dán vrchol, ve kterém voják musí začít, má úloha pouze dvě souměrně sdružená řešení. ♣

Úloha 1.1.7 (Fagnanova úloha o patě výšky). *Do daného ostroúhlého trojúhelníku vepište trojúhelník o minimálním obvodu.* [Dör, str. 359]

Tato slavná úloha pochází od I. F. Fagnano, syna italského hraběte Julio C. Fagnano (1682 – 1766), který se proslavil svými významnými studii lemniskát². Existuje mnoho způsobů řešení této úlohy. Následující řešení je význačné svou výraznou jednoduchostí a pochází od bratra Gabriela-Marie, autora významné knihy *Exercices de Géométrie*.

Řešení. Označme daný trojúhelník ABC a do něj vepsaný trojúhelník KLM takový, že jeho vrcholy K, L, M leží po řadě na stranách AB, BC, CA .

Nejprve uvažme, že K je libovolný pevně zvolený bod. Označme bod X , resp. Y , obraz bodu K v osově souměrnosti s osou CA , resp. BC . Průsečíky úsečky XY se stranami BC, CA budou pro pevné K , polohy těch bodů L a M , při kterých má trojúhelník KLM minimální obvod. Označíme-li totiž L' , resp. M' ,



Obr. 1.10

libovolný bod na BC , resp. CA , který není průsečíkem úsečky XY se stranou BC , resp. CA (viz obr. 1.10), pak pro obvody trojúhelníků KLM a $KL'M'$ platí

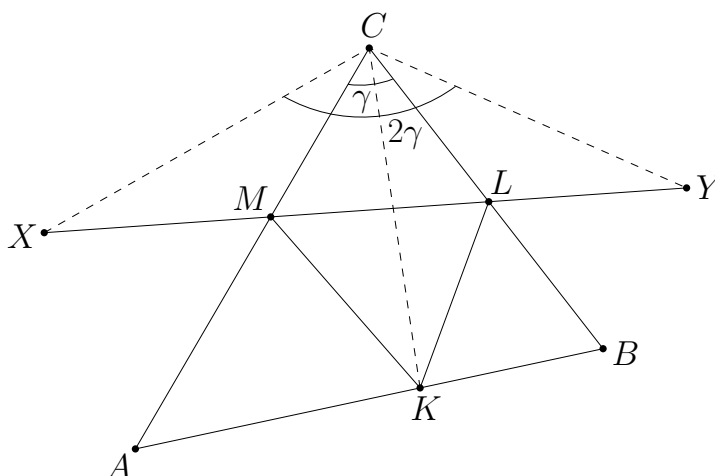
$$o_{KLM} = |KL| + |LM| + |MK| = |YL| + |LM| + |MX| = |XY|,$$

$$o_{KL'M'} = |KL'| + |L'M'| + |M'K| = |YL'| + |L'M'| + |M'X| > |XY|.$$

Tudíž pro libovolnou dvojici $(L', M') \neq (L, M)$ platí $o_{KLM} < o_{KL'M'}$ (tedy poslední nerovnost bude ostrá, i když bude platit pouze jedna z nerovností $L' \neq L$ nebo $M' \neq M$).

Polohy hledaných bodů L, M jsou tedy určeny polohou bodu K . Zbývá proto nalézt takový bod K , pro který bude délka úsečky XY , a tedy i obvod trojúhelníku KLM , nejmenší. Jelikož úsečka CX , resp. CY je obrazem úsečky CK v osově souměrnosti s osou CA , resp. BC , platí $|CX| = |CY|$, $|\angle KCA| = |\angle XCA|$ a $|\angle KCB| = |\angle YCB|$. Označíme-li γ vnitřní úhel daného trojúhelníku u vr-

²druh rovinných křivek



Obr. 1.11

cholu C , pak platí

$$|\angle XCY| = |\angle XCK| + |\angle KCY| = 2 \cdot (|\angle ACK| + |\angle BCK|) = 2\gamma$$

(viz obr. 1.11). Zkoumaná úsečka XY je tedy základnou rovnoramenného trojúhelníku XYC , který má konstantní úhel 2γ u hlavního vrcholu C a proměnnou velikost ramen XC, YC . Všechny rovnoramenné trojúhelníky XYC určené polohou bodu K jsou proto podobné (podle věty *sus*). Z toho vyplývá, že délka základny XY trojúhelníku CXY bude minimální, pokud bude minimální délka jeho ramen XC, YC . Jelikož $|KC| = |XC| = |YC|$, bude délka ramen trojúhelníku XYC minimální, pokud bude minimální délka úsečky KC , což nastane právě v případě, kdy úsečka KC bude kolmá na úsečku AB . Úsečka KC tedy musí být výškou trojúhelníku ABC spuštěná z vrcholu C a bod K být její pata.

Podobně, jako jsme provedli úvahu pro polohu bodu K (a závislost polohy bodů L, M na poloze K), bychom mohli provést úvahu i pro body L a M . Úsečka AL tedy bude výška na stranu BC zadaného trojúhelníku a úsečka BM bude výška na stranu CA .

Trojúhelník KLM vepsaný do daného trojúhelníku ABC má nejmenší možný obvod, pokud jeho vrcholy K, L, M tvoří paty výšek trojúhelníku ABC .



Doposud jsme při hledání geometrických extrémů využili pouze osovou souměrnost. V následujících úlohách použijeme i jiné symetrie a geometrické transformace. První z nich je úloha, jejíž výsledek je známý jako *Pompeiiova věta*³.

³Dimitrie Pompeiu (1873–1954) byl rumunský matematik.

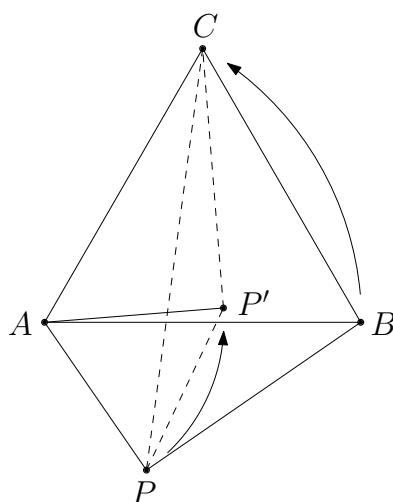
Úloha 1.1.8. *Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že pro libovolný bod P roviny ABC , který neleží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , existuje trojúhelník se stranami o délkách $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$. Ukažte rovněž, že v případě, kdy bod P leží na kružnici opsané, je jedna z délek $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$ rovna součtu ostatních dvou. [AMS, str. 7]*

Tvrzení úlohy je možné formulovat i v následující podobě, v níž upřesníme i úplný závěr původního znění: *Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a P je libovolný bod v rovině ABC . Pak platí nerovnost*

$$|AP| + |BP| \geq |CP|,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, leží-li bod P na tom oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC , který neobsahuje vrchol C .

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $|CP| \geq |AP|$ a $|CP| \geq |BP|$. Uvažme tu rotaci kolem bodu A o 60° , ve které přejde bod B do bodu C . Touto rotací přejde bod P do bodu P' (viz obr. 1.12), pro který zřejmě platí $|AP| = |AP'|$ a $|\angle PAP'| = 60^\circ$. Z toho vyplývá, že trojúhelník APP' je rovnostranný, tedy



Obr. 1.12

$|PP'| = |AP|$. Protože v uvažované rotaci přejde bod B do bodu C , úsečka $P'C$ je obrazem úsečky PB , a tedy platí $|CP'| = |BP|$. Trojúhelník CPP' má tudíž strany o délkách $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$, neleží-li ovšem body C , P , P' v přímce (pak o trojúhelníku CPP' nelze mluvit). Z předpokladu $|CP| \geq |AP|$ a $|CP| \geq |BP|$ a z $|\angle APP'| = 60^\circ$ plyne, že trojúhelník CPP' může přejít jedině v úsečku CP , a to právě tehdy, když bude $|\angle APC| = 60^\circ = |\angle ABC|$. V tomto případě bude z obou bodů P a B vidět úsečka AC pod stejným úhlem 60° , proto budou body A , P , B , C ležet na jedné kružnici, neboli bod P bude náležet kratšímu oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC . Tím je úloha vyřešena. ♣

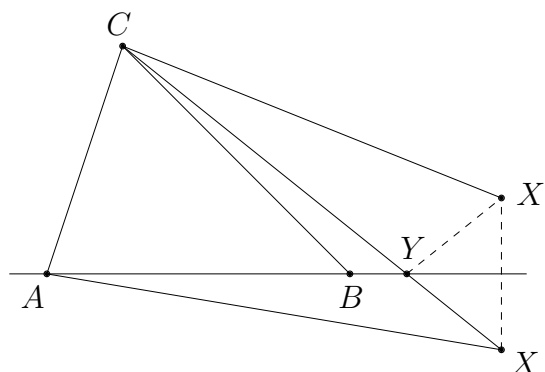
Následující námět je znám jako *Steinerova⁴ trojúhelníková úloha*. Tuto slavnou úlohu původně zadal francouzský matematik Pierre de Fermat⁵ italskému fyzikovi Torricellimu⁶, známému studentovi Galileia⁷, který ji vyřešil více způsoby. Kromě těchto dvou odborníků se jí zabývalo i mnoho jiných matematiků, např. Viviani⁸, Cavalieri⁹, avšak úplný důkaz, že hledaný bod, jehož polohu někteří dříve jmenovaní matematikové správně určili, má skutečně požadovanou extrémální vlastnost, podal teprve Steiner, po kterém proto úloha nakonec dostala jméno.

Úloha 1.1.9. *V rovině daného trojúhelníku ABC najděte takový bod X , pro který je součet*

$$d(X) = |AX| + |BX| + |CX|$$

minimální. [AMS, str. 8]

Řešení. V první části řešení ukážeme, že nachází-li se bod X vně trojúhelníku ABC , existuje vždy nějaký bod X' takový, že $d(X') < d(X)$. Předpokládejme tedy, že bod X leží vně trojúhelníku. Jedna z přímek AB , BC , CA má jistě takovou vlastnost, že bod X leží v jiné polorovině určené touto přímkou než trojúhelník ABC . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tuto vlastnost má přímka AB (viz obr. 1.13). Uvažme osovou souměrnost podle přímky AB .



Obr. 1.13

⁴Jacob Steiner (1796–1863) byl švýcarský matematik, který se věnoval převážně geometrii.

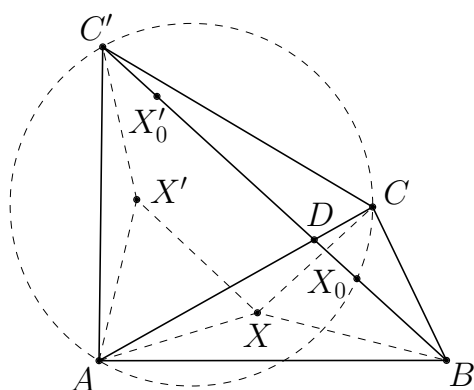
⁵Pierre de Fermat (1601–1665) byl francouzský matematik a právník. Zabýval se teorií čísel a algebrou. Společně s Descartem položil základy analytické geometrie a je jedním ze zakladatelů teorie pravděpodobnosti.

⁶Evangelista Torricelli (1608–1647) byl italský fyzik a matematik, který položil základy hydrodynamiky, vynalezl rtuťový barometr a dokázal existenci atmosferického tlaku.

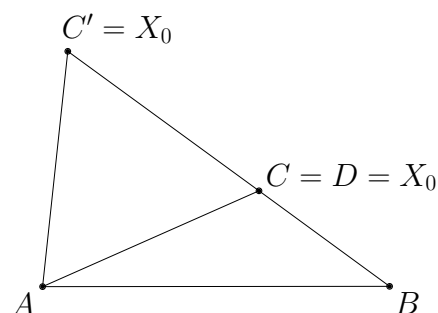
⁷Galileo Galilei (1564–1642) byl italský fyzik, astronom, matematik a filosof. Galileo je zakladatelem experimentálních metod zkoumání přírody.

⁸Vincenzo Viviani (1622–1703) byl italský matematik a fyzik, který byl studentem Galileia. Zabýval se geometrií.

⁹Bonaventura Cavalieri (1598–1647) byl italský matematik. Cavalieri je jedním z předchůdců zakladatelů infinitezimálního počtu. Vyvinul metodu určování obsahů ploch a objemů těles.



Obr. 1.14



Obr. 1.15

Bod X přejde v této souměrnosti do bodu, který označíme X' . Zřejmě platí

$$|AX'| = |AX|, \quad |BX'| = |BX|. \quad (1.5)$$

Nechť Y je průsečík úsečky CX s přímkou AB , pak platí $|YX| = |YX'|$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník CYX' vyplývá

$$|CX'| < |CY| + |YX'| = |CY| + |YX| = |CX|. \quad (1.6)$$

Ze vztahů (1.5) a (1.6) tak dostáváme $d(X') < d(X)$ a tvrzení z první věty našeho řešení je dokázáno.

Víme tedy, že hledaný bod X s minimální hodnotou $d(X)$ leží uvnitř trojúhelníku ABC nebo na jeho hranici. Označme α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku po řadě u vrcholů A, B, C . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\gamma \geq \beta \geq \alpha$. Pak úhly α a β musí být ostré.

Označme φ rotaci o úhel 60° kolem vrcholu A ve směru orientovaného úhlu BAC . Libovolný bod $M \neq A$ se v této rotaci zobrazí na bod $M' = \varphi(M)$ tak, že trojúhelník AMM' je zřejmě rovnostranný. Speciálně trojúhelník ACC' je rovnostranný a jeho vrchol C' leží v opačné polorovině s hraniční přímkou AC než bod B (viz obr. 1.14).

Uvažme nyní libovolný bod X ležící uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC . Pak z vlastností rotace φ vyplývá $|AX| = |XX'|$ a $|CX| = |C'X'|$. Pro součet $d(X)$ tudíž dostáváme

$$d(X) = |BX| + |XX'| + |X'C'|, \quad (1.7)$$

což je délka lomené čáry $BXX'C'$. Rozdělme nyní řešení na tři případy podle velikosti úhlu γ , tedy největšího z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC :

1. případ: $\gamma < 120^\circ$. Pak platí $|\angle BCC'| = \gamma + 60^\circ < 180^\circ$. Z dříve zmíněné nerovnosti $\alpha < 90^\circ$ dostáváme $|\angle BAC'| < 150^\circ$. Čtyřúhelník $ABCC'$ je tedy konvexní a jeho úhlopříčky BC' a AC mají průsečík, který označíme D

(viz obr. 1.14). Označme dále X_0 průsečík úsečky BC' s kružnicí opsanou rovnostrannému trojúhelníku ACC' , který zřejmě leží na úsečce BD . Jelikož oba body C a X_0 leží na stejném oblouku AC' zmíněné kružnice, platí $|\angle AX_0C'| = |\angle ACC'| = 60^\circ$. Z rovnostranného trojúhelníku $AX_0X'_0$ plyne jednak $|\angle AX_0X'_0| = 60^\circ$, takže bod X'_0 leží na polopřímce X_0C' , jednak $|X_0X'_0| = |AX_0| < |C'X_0|$ (neboť $|\angle AC'X_0| < 60^\circ < |\angle C'AX_0|$). To dohromady znamená, že bod X'_0 leží na úsečce $C'X_0$. Proto podle vztahu (1.7) pro bod $X = X_0$ platí

$$d(X_0) = |BX_0| + |X_0X'_0| + |X'_0C'| = |BC'|.$$

Pro libovolný bod X uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC díky vztahu (1.7) platí $|BC'| \leq d(X)$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $X = X_0$. V diskutovaném 1. případě je tedy hledaným bodem bod X_0 .

Poznamenejme, že takto zkonstruovaný bod X_0 splňuje rovnosti

$$|\angle AX_0B| = |\angle BX_0C| = |\angle CX_0A| = 120^\circ.$$

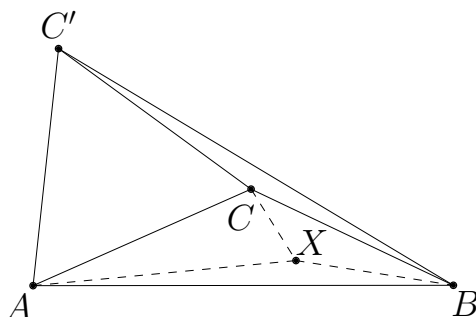
Bod určený těmito rovnostmi se nazývá *Torricelliho bod* trojúhelníku ABC . Mají ho právě ty trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly jsou menší než 120° .

2. případ: $\gamma = 120^\circ$. Nyní platí $|\angle BCC'| = \gamma + 60^\circ = 180^\circ$, a tedy vrchol C leží na úsečce BC' (viz obr. 1.15). Zkoumaný součet $d(X)$ podle vztahu (1.7) přitom zřejmě nabývá minimální hodnoty právě tehdy, když $X = C$.

Poznámka. V 1. a 2. případě této úlohy lze při řešení využít také Pompeiovy věty (viz úloha 1.1.8), a to pro rovnostranný trojúhelník ACC' . Podle této věty pro každý bod X platí $|AX| + |CX| \geq |C'X|$, odkud plyne

$$d(X) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |C'X| + |BX| \geq |C'B|,$$

přitom rovnosti nastanou právě tehdy, když bod X leží na kratším oblouku AC kružnice opsané trojúhelníku ACC' a zároveň leží na úsečce $C'B$.



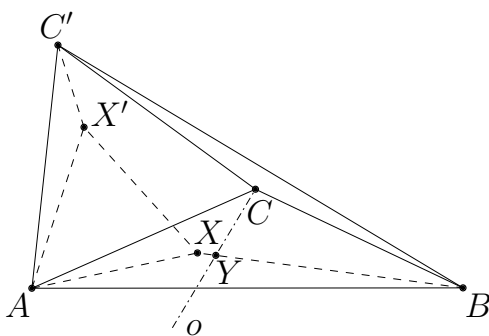
Obr. 1.16

3. případ: $\gamma > 120^\circ$. Potom platí $|\angle BCC'| = \gamma + 60^\circ > 180^\circ$. Čtyřúhelník $ABCC'$ má u vrcholu C nekonvexní úhel a úsečka BC' se neprotíná se stranou AC (viz obr. 1.16).

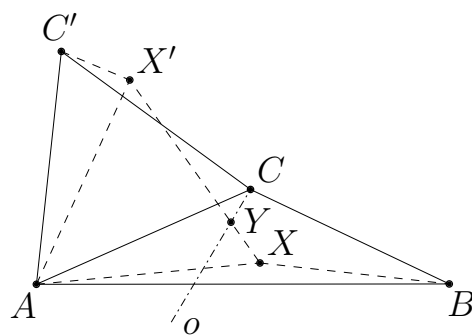
Pokud $|AX| \geq |AC|$ (viz obr. 1.16), pak z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník BCX dostáváme

$$d(X) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |AC| + |BC|. \quad (1.8)$$

V případě $|AX| < |AC|$ sestrojíme osu o nekonvexního úhlu BCC' a její průsečík s lomenou čarou $BXX'C'$ označíme Y . Nejprve vysvětlíme, proč v obou možných případech polohy lomené čáry $BXX'C'$, kdy bod X' leží uvnitř či vně trojúhelníku ACC' (viz obr. 1.17 a 1.18), bude průsečík Y existovat. Díky nerovnosti $\alpha < 60^\circ$ leží polopřímka AC uvnitř úhlu XAX' . Z předpokladu $|AC| > |AX| = |AX'|$ pak vyplývá, že úsek XX' lomené čáry $BXX'C'$ protne úsečku AC . Jelikož osa o zřejmě leží v úhlu BCA , je tak existence jejího průsečíku Y s lomenou čarou $BXX'C'$ dokázána.



Obr. 1.17



Obr. 1.18

Protože jsou oba (shodné) úhly BCY , YCC' tupé, je v trojúhelníku BCY , resp. YCC' , nejdelší strana BY , resp. YC' . Proto platí nerovnosti

$$|BY| > |BC| \quad \text{a} \quad |YC'| > |CC'|. \quad (1.9)$$

Délka lomené čáry $BXX'C'$ je zřejmě nejméně rovna délce lomené čáry BYC' , neboť bod Y na čáře $BXX'C'$ leží. S využitím nerovností (1.9) pak dostáváme pro zkoumaný součet $d(X)$ odhad

$$\begin{aligned} d(X) &= |AX| + |BX| + |CX| = |BX| + |XX'| + |X'C'| \geq \\ &\geq |BY| + |YC'| > |BC| + |CC'| = |AC| + |BC|. \end{aligned} \quad (1.10)$$

(Dodejme, že toto odvození je korektní i v případě $X = A$, kdy $X' = A$, neboť i tehdy osa o protne lomenou čarou BAC' .)

Z výsledků obou částí případu $\gamma > 120^\circ$, tedy z nerovností (1.8) a (1.10) plyne, že pro každý bod X uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC platí

$$d(X) \geq |AC| + |BC| = d(C),$$

přítom rovnost nastane jedině v případě $X = C$.

Shrňme řešení této úlohy. Má-li trojúhelník ABC všechny vnitřní úhly menší než 120° , je součet $d(X)$ minimální právě tehdy, když bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že všechny tři úhly AXB , BXC a CXA jsou 120° . Je-li naopak vnitřní úhel u některého z vrcholů trojúhelníku ABC větší nebo roven 120° , je $d(X)$ minimální, pokud bod X splývá s tímto vrcholem. Poznamenejme ještě, že bod X s minimální hodnotou $d(X)$ se někdy nazývá *dopravní střed* daného trojúhelníku. ♣

Následující úloha je zobecněním předcházející *Steinerovy trojúhelníkové úlohy*.

Úloha 1.1.10. *Uvažme trojúhelník ABC , jenž není tupouhlý. Necht' m, n, p jsou pevně daná kladná čísla. Najděte v rovině ABC takový bod X , pro který je součet*

$$s(X) = m \cdot |AX| + n \cdot |BX| + p \cdot |CX|$$

minimální. [AMS, str. 11]

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě 1.1.9 pro libovolný bod X ležící vně trojúhelníku ABC existuje vždy nějaký bod X' takový, že $s(X') < s(X)$, tudíž hledaný bod X s minimální hodnotou $s(X)$ leží uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC . Důkaz tohoto tvrzení je analogický důkazu v úvodu řešení zmíněného předchozího příkladu.

Označme vnitřní úhly daného trojúhelníku u vrcholů A, B, C po řadě α, β, γ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $m \geq n \geq p$. Rozdělme dále řešení podle vzájemné velikosti těchto daných koeficientů na dva případy.

1. případ: Uvažme situaci, kdy $m \geq n + p$. Pro každý bod X platí trojúhelníková nerovnost

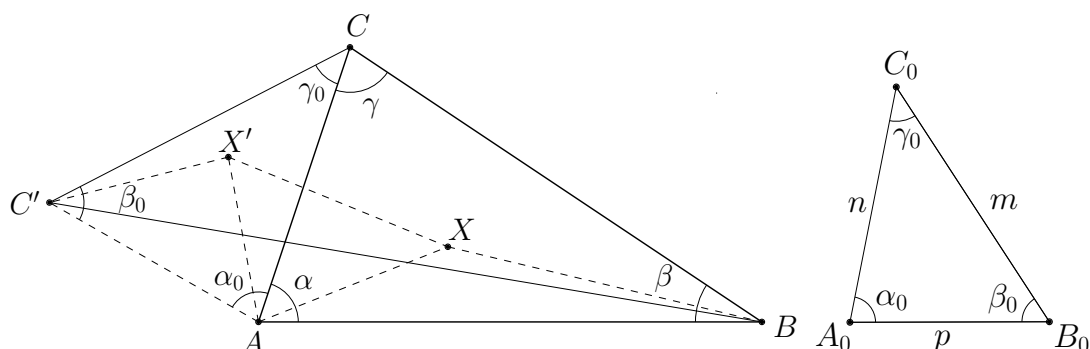
$$|AX| + |XB| \geq |AB|, \quad \text{resp.} \quad |AX| + |XC| \geq |AC|, \quad (1.11)$$

kde rovnost nastane právě tehdy, leží-li bod X na straně AB , resp. AC . Pro zkoumaný součet $s(X)$ z předpokladu $m \geq n + p$ a z (1.11) plyne

$$\begin{aligned} s(X) &\geq (n + p) \cdot |AX| + n \cdot |BX| + p \cdot |CX| = \\ &= n \cdot (|AX| + |XB|) + p \cdot (|AX| + |XC|) \geq \\ &\geq n \cdot |AB| + p \cdot |AC| = s(A). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že rovnosti nastanou jedině pro $X = A$. V prvním případě je tedy hledaným bodem minima vrchol A .

2. případ: Nyní předpokládejme, že naopak $m < n + p$. Uvažme pomocný trojúhelník $A_0B_0C_0$, pro který platí $|B_0C_0| = m$, $|C_0A_0| = n$, $|A_0B_0| = p$ (viz obr. 1.20). Označíme-li $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ vnitřní úhly tohoto trojúhelníku po řadě



Obr. 1.19

Obr. 1.20

u vrcholů A_0 , B_0 , C_0 , pak pro ně platí nerovnosti $\alpha_0 \geq \beta_0 \geq \gamma_0$ (díky úvodnímu předpokladu $m \geq n \geq p$, který společně s podmínkou $m < n + p$ vymezující 2. případ zaručuje i samotnou existenci $\triangle A_0B_0C_0$). Nechť φ je zobrazení složené ze stejnolehlosti se středem ve vrcholu A a koeficientem $k = \frac{p}{n}$ a rotace kolem vrcholu A o úhel α_0 ve směru orientovaného úhlu BAC . Pro libovolný bod X označme X' obraz ve výše zmíněné transformaci φ . Podle její definice platí

$$|\angle XAX'| = \alpha_0 = |\angle C_0A_0B_0| \quad \text{a} \quad \frac{|AX'|}{|AX|} = k = \frac{p}{n} = \frac{|A_0B_0|}{|A_0C_0|},$$

z čehož dostáváme podobnost $\triangle AX'X \sim \triangle A_0B_0C_0$ (viz obr. 1.19 a 1.20). Z této podobnosti vyplývá také $\frac{|XX'|}{|AX|} = \frac{m}{n}$, tedy $m \cdot |AX| = n \cdot |XX'|$. Protože φ je podobnost s koeficientem k , platí také $|C'X'| = k \cdot |CX|$, neboli $p \cdot |CX| = n \cdot |C'X'|$. Pro součet $s(X)$ tak dostáváme

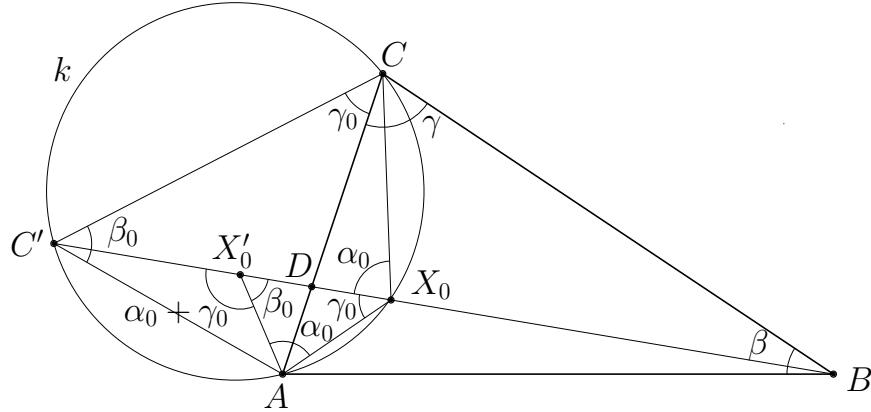
$$\begin{aligned} s(X) &= m \cdot |AX| + n \cdot |BX| + p \cdot |CX| = \\ &= n \cdot |XX'| + n \cdot |BX| + n \cdot |C'X'|, \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{s(X)}{n} = |BX| + |XX'| + |X'C'|.$$

Z právě provedených úvah vyplývá, že řešení 2. případu můžeme nyní zredukovat na nalezení takového bodu X , pro který je délka lomené čáry $BXX'C'$ minimální. Rozděleme dále řešení tohoto úkolu na tři situace podle vzájemné polohy úseček AC a BC' . Tyto situace rozlišíme porovnáním úhlu $\alpha + \alpha_0$ s úhlem 180° .

- a) Nechť $\alpha + \alpha_0 < 180^\circ$. Jelikož $\alpha_0 \geq \beta_0 \geq \gamma_0$, musí platit $\gamma_0 < 90^\circ$, což spolu s nerovností $\gamma \leq 90^\circ$ (jež platí podle zadání úlohy) znamená, že $\gamma + \gamma_0 < 180^\circ$. Čtyřúhelník $ABCC'$ je proto konvexní (má totiž konvexní všechny čtyři vnitřní úhly), takže jeho úhlopříčky AC a BC'



Obr. 1.21

mají společný vnitřní bod, který označíme D (viz obr. 1.21). Z podobné nerovnosti $\beta + \beta_0 < 180^\circ$ (jež plyne z $\beta_0 < 90^\circ$ a $\beta \leq 90^\circ$) dostáváme pro úhel ABC $\beta < 180^\circ - \beta_0$. Jelikož obvodový úhel příslušný delšímu oblouku AC kružnice k opsané trojúhelníku ACC' je roven $180^\circ - \beta_0$, a je tedy větší než úhel ABC , musí bod B ležet ve vnější oblasti této kružnice, zatímco bod D leží v její vnitřní oblasti. Kružnice k tudíž protne úsečku BD v některém jejím vnitřním bodě, který označíme X_0 . Pro obvodové úhly příslušné oblouku AC' platí $|\angle AX_0C'| = |\angle ACC'| = \gamma_0$. Jelikož je čtyřúhelník AX_0CC' tětivový, dostáváme tak $|\angle AX_0C| = 180^\circ - |\angle AC'C| = 180^\circ - \beta_0 = \alpha_0 + \gamma_0$. Protože je úhel AX_0C' obrazem úhlu AX_0C , platí

$$|\angle AX_0C'| = |\angle AX_0C| = \alpha_0 + \gamma_0. \quad (1.12)$$

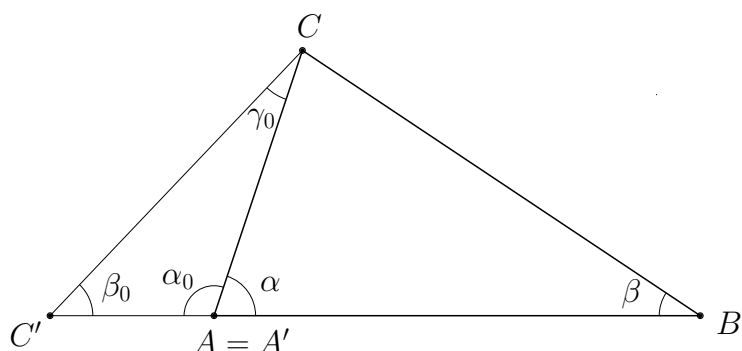
Z $\triangle AX_0X_0 \sim \triangle A_0B_0C_0$ vyplývá $|\angle AX_0X_0| = \beta_0$, což je podle (1.12) doplněk úhlu $\angle AX_0C'$ do 180° . Obraz X_0' bodu X_0 v uvažovaném zobrazení φ bude proto ležet na úsečce X_0C' , takže podle úvodní úvahy v 2. případě bude v situaci a) pro každý bod X roviny ABC platit

$$\frac{s(X)}{n} \geq |BC'| = \frac{s(X_0)}{n},$$

přitom nerovnost přejde v rovnost právě tehdy, když $X = X_0$. V situaci a) je tedy hledaným bodem minima funkce $s(X)$ bod X_0 , který lze považovat za zobecnění Torricelliho bodu trojúhelníku ABC , neboť se vyznačuje rovnostmi

$$\begin{aligned} |\angle AX_0B| &= 180^\circ - \gamma_0, & |\angle BX_0C| &= 180^\circ - \alpha_0, \\ |\angle CX_0A| &= 180^\circ - \beta_0 \end{aligned}$$

(plynoucím z obvodových úhlů v kružnici k).

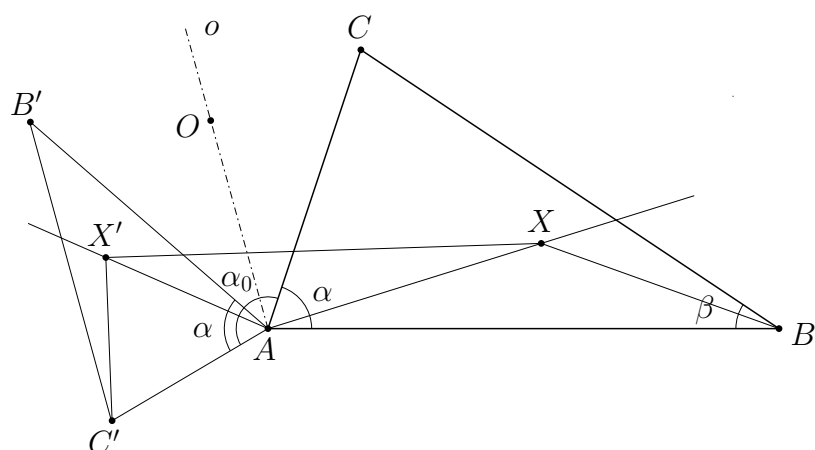


Obr. 1.22

- b) Necht' $\alpha + \alpha_0 = 180^\circ$. Bod A je nyní vnitřní bod úsečky BC' (viz obr. 1.22). V zobrazení φ platí $A = A'$, a proto pro každý bod X roviny ABC máme

$$\frac{s(X)}{n} \geq |BC'| = \frac{s(A)}{n}.$$

Hledaným bodem minima v této situaci je tedy vrchol A .



Obr. 1.23

- c) Necht' $\alpha + \alpha_0 > 180^\circ$. Ze zadání $\alpha \leq 90^\circ$, takže jistě naopak $\alpha_0 > 90^\circ$ a úsečky BC' a AC nyní nemají žádný společný bod (viz obr. 1.23). Z předpokladu $\alpha + \alpha_0 > 180^\circ$, neboli $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) > 90^\circ$, a z $\alpha < \alpha_0$ vyplývá

$$\alpha < \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) < \alpha_0. \quad (1.13)$$

Pro velikost úhlu $C'AB'$, který je obrazem úhlu CAB , jistě platí

$$|\angle C'AB'| = |\angle CAB| = \alpha. \quad (1.14)$$

Nechť o je osa nekonvexního úhlu BAC' a nechť $O \in o$ je libovolný bod různý od A . Pak z (1.13) a (1.14) pro velikosti konvexních úhlů BAC , BAO , BAB' vyplývá

$$|\angle BAC| < |\angle BAO| < |\angle BAB'|. \quad (1.15)$$

Jelikož α_0 je vnitřním úhlem trojúhelníku $A_0B_0C_0$, je $\alpha_0 < 180^\circ$, proto pro libovolný bod X (uvnitř nebo na hranici $\triangle ABC$) leží úsečka XX' celá uvnitř konvexního úhlu XAX' , ve kterém podle (1.15) leží i osa o . Úsečka XX' proto osu o protíná. Pro součet $s(X)$ tak dostáváme

$$\frac{s(X)}{n} = |BX| + |XX'| + |X'C'| \geq |BA| + |AC'| = \frac{s(A)}{n},$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když $X = A$. V situaci c) je tedy hledaným bodem minima vrchol A .

V druhém případě ($m < n + p$) má úloha také vždy právě jedno řešení. Pro $\alpha + \alpha_0 \geq 180^\circ$ je $s(X)$ minimální právě tehdy, když $X = A$. Pokud $\alpha + \alpha_0 < 180^\circ$, je $s(X)$ minimální, jedině když bod X splývá s bodem X_0 určeným konstrukcí z obr. 1.21. ♣

Úlohy analogické problémům 1.1.9 a 1.1.10 pro více než tři dané body jsou bezpochyby zajímavé, avšak jejich řešení je výrazně náročnější. Obtížnost řešení také vzroste, pokud uvážíme podobnou úlohu v prostoru. Řešení jedné z těchto úloh zde uvedeme. Omezme se nyní na speciální případ čtyř bodů ležících ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu.

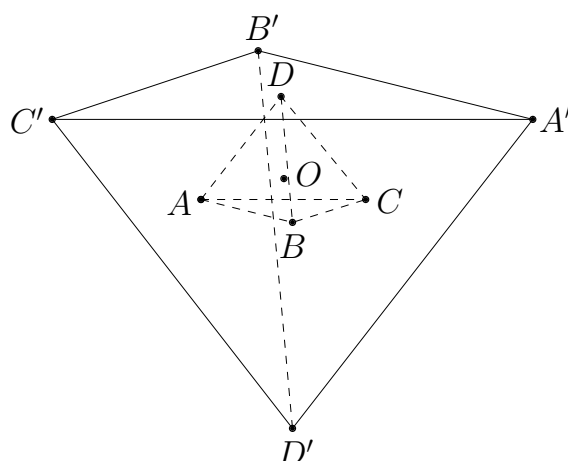
Úloha 1.1.11. *V prostoru je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Najděte takový bod X , aby byl součet*

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX| + |DX|$$

minimální. [AMS, str. 13]

Řešení. Danému čtyřstěnu $ABCD$ opišme větší pomocný pravidelný čtyřstěn $A'B'C'D'$, který má stěny rovnoběžné se stěnami původního čtyřstěnu tak, že vrchol A leží ve stěně $B'C'D'$, B ve stěně $A'C'D'$, C ve stěně $A'B'D'$ a D ve stěně $A'B'C'$. Nechť O je průsečík tělesových výšek čtyřstěnu $ABCD$. Pak body A' , B' , C' , D' jsou zřejmě obrazy po řadě bodů A , B , C , D ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem -3 (viz obr. 1.24).

Pro libovolný bod X uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu $A'B'C'D'$ (viz obr. 1.25) označme a , b , c , d jeho vzdálenosti od stěn $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, $A'B'C'$.



Obr. 1.24

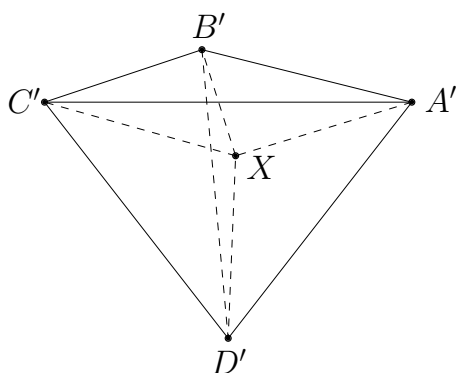
Dále označme h' velikost tělesové výšky čtyřstěnu $A'B'C'D'$. Pro objemy V čtyřstěnů a obsahy S jejich podstav platí

$$\begin{aligned} \frac{h'}{3} \cdot S_{A'B'C'} &= V_{A'B'C'D'} = \\ &= V_{XB'C'D'} + V_{XA'C'D'} + V_{XA'B'D'} + V_{XA'B'C'} = \quad (1.16) \\ &= \frac{a}{3} \cdot S_{B'C'D'} + \frac{b}{3} \cdot S_{A'C'D'} + \frac{c}{3} \cdot S_{A'B'D'} + \frac{d}{3} \cdot S_{A'B'C'}. \end{aligned}$$

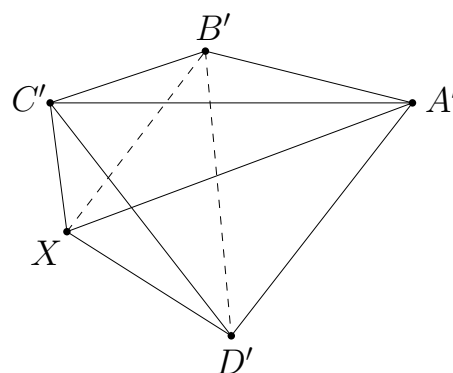
V pravidelném čtyřstěnu $A'B'C'D'$ platí $S_{A'B'C'} = S_{B'C'D'} = S_{A'C'D'} = S_{A'B'D'}$, takže z (1.16) dostáváme po zkrácení stejných obsahů S

$$h' = a + b + c + d.$$

Jelikož bod X , který určuje vzdálenosti a, b, c, d , byl ve čtyřstěnu $A'B'C'D'$



Obr. 1.25



Obr. 1.26

volen libovolně, ukázali jsme tak, že součet vzdáleností bodu X od stěn tohoto čtyřstěnu je konstantní.

Pokud bod X leží vně čtyřstěnu $A'B'C'D'$, pak zřejmě (viz obr. 1.26) platí

$$V_{A'B'C'D'} < V_{XB'C'D'} + V_{XA'C'D'} + V_{XA'B'D'} + V_{XA'B'C'},$$

odkud pro obdobné vzdálenosti a, b, c, d bodu X od rovin stěn čtyřstěnu $A'B'C'D'$ vyplývá

$$h' < a + b + c + d.$$

Vraťme se k řešení naší úlohy o čtyřstěnu $ABCD$. Protože jeho vrcholy leží ve stěnách pomocného čtyřstěnu $A'B'C'D'$, z výše zavedené definice vzdáleností a, b, c, d vyplývá, že pro libovolný bod X prostoru platí nerovnosti

$$a \leq |AX|, \quad \text{resp.} \quad b \leq |BX|, \quad \text{resp.} \quad c \leq |CX|, \quad \text{resp.} \quad d \leq |DX|, \quad (1.17)$$

kde rovnost nastává právě tehdy, když je přímka AX kolmá k rovině $B'C'D'$, resp. přímka BX kolmá k rovině $A'C'D'$, resp. přímka CX kolmá k rovině $A'B'D'$, resp. přímka DX kolmá k rovině $A'B'C'$. Pro zkoumaný součet $s(X)$ tak dostáváme

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geq a + b + c + d \geq h',$$

přičemž rovnost $s(X) = h'$ nastane právě tehdy, když bod X leží ve čtyřstěnu $A'B'C'D'$ a je zároveň průsečíkem všech čtyř kolmic k jeho stěnám s patami A, B, C, D . Na těchto kolmicích leží tělesové výšky čtyřstěnu $A'B'C'D'$ i čtyřstěnu $ABCD$, jejichž průsečík O jsme zmínili v úvodu řešení. Jediným bodem X splňujícím rovnost $s(X) = h'$ je proto bod O . Hledaným bodem je tedy průsečík tělesových výšek daného pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. ♣

Kapitola 2

Tečnový princip

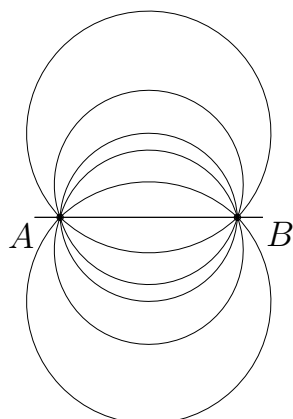
Tato kapitola se věnuje další metodě řešení extrémálních geometrických úloh, která je založená na *tečnovém* nebo také *dotykovém principu*. Tato metoda využívá tzv. *úrovňové křivky* (v české terminologii známé spíše jako *vrstevnice*), resp. *úrovňové plochy*, které jsou definované v rovině, resp. v prostoru. Česká terminologie tohoto odvětví není zatím ustálená.

2.1 Teoretický základ

Aby byl popis této metody více názorný, vyřešíme nejprve jeden ukázkový příklad a teprve na něm vysvětlíme, co to vlastně tečnový princip je, a ujasníme obecný postup řešení extrémálních úloh pomocí tohoto principu.

Úloha 2.1.1. *V rovině je dána přímka l a mimo ni dva různé body A, B ležící ve stejné polorovině určené přímkou l . Najděte takový bod X na přímce l , aby byla velikost úhlu AXB maximální. [AMS, str. 48]*

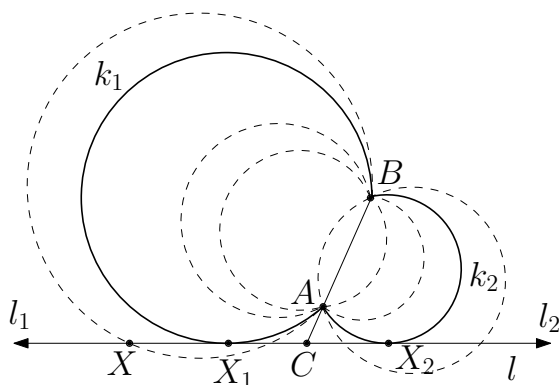
Řešení. Označme φ velikost zkoumaného úhlu AXB . Množina všech bodů v rovině, pro které platí $|\angle AXB| = \varphi$ s danou hodnotou φ , je pro $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ sjednocení vnitřních bodů dvou oblouků AB , jež jsou souměrně sdružené podle přímky AB (viz obr. 2.1) a jejichž poloměr klesá s hodnotou φ na intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ a roste na intervalu $(90^\circ, 180^\circ)$. Taková množina se nazývá ekvigonála dané úsečky AB a je tedy určena touto úsečkou a úhlem φ . Pro $\varphi = 180^\circ$ je touto ekvigonálou vnitřek úsečky AB , pro $\varphi = 0^\circ$ to je sjednocení vnitřků dvou polopřímek opačných k polopřímám AB a BA . Pro dané body A, B a různé hodnoty úhlu $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ dostaneme systém ekvigonál, který pokryje celou rovinu kromě bodů A a B . Každý bod ležící na přímce l je tedy průsečíkem přímky l s některou z ekvigonál úsečky AB (viz obr. 2.2). Naším úkolem nyní je nalézt takovou ekvigonálu, která protíná přímku l a které přísluší maximální hodnota úhlu φ .



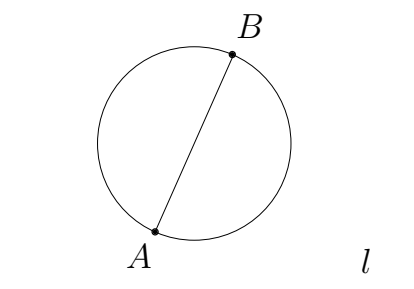
Obr. 2.1

Uvažme nejprve případ, kdy je přímka l různoběžná s přímkou AB . Rozdělme řešení na tři situace podle toho, kolik má Thaletova kružnice nad průměrem AB společných bodů s přímkou l .

1. situace: Thaletova kružnice nad průměrem AB nemá žádný společný bod s přímkou l (viz obr. 2.3), a tedy všechny úhly AXB pro libovolné $X \in l$ jsou ostré (jelikož body $X \in l$ leží vně Thaletovy kružnice nad AB). Označme C průsečík přímky AB a l (viz obr. 2.2). Bod C (kterému odpovídá hodnota $\varphi = 0^\circ$, takže ho při hledání maxima můžeme vynechat) rozděluje přímku l na dvě polopřímky, označme je l_1, l_2 . Označme dále k_1 ten oblouk AB , kte-



Obr. 2.2

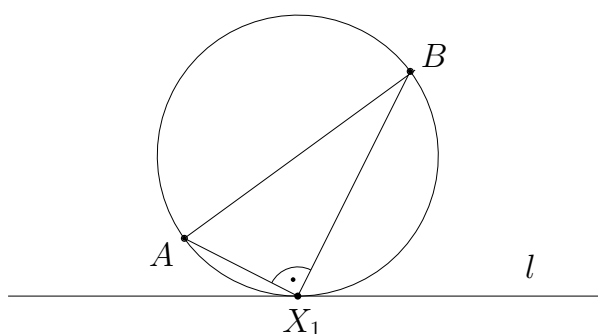


Obr. 2.3

rého se dotýká polopřímka l_1 , a X_1 jejich bod dotyku. Je zřejmé, že k_1 je oblouk nejmenší kružnice procházející body A, B , která má společný bod s polopřímkou l_1 . Pro libovolný bod $X \neq X_1$ polopřímky l_1 proto platí $|\angle AXB| < |\angle AX_1B|$. Analogicky označme k_2 oblouk AB , kterého se dotýká polopřímka l_2 , a X_2 jejich bod dotyku. Tento oblouk je také oblouk nejmenší kružnice procházející body A, B , jež má s polopřímkou l_2 společný bod,

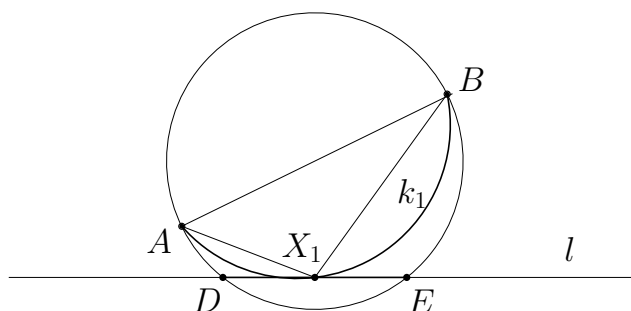
a proto pro libovolný bod $X \neq X_2$ polopřímky l_2 platí $|\angle AXB| < |\angle AX_2B|$. Stačí tedy zjistit, který z úhlů AX_1B , AX_2B je větší. V případě, že jsou velikosti těchto úhlů stejné, jsou řešením úlohy oba body X_1 , X_2 .

2. situace: Thaletova kružnice nad průměrem AB má s přímkou l společný právě jeden bod, označme ho X_1 (viz obr. 2.4). Přímka l je tedy tečna této kružnice. Pak pro všechny body $X \neq X_1$ ležící na přímce l platí $|\angle AXB| < |\angle AX_1B|$ (jelikož tyto body $X \neq X_1$ leží vně Thaletovy kružnice nad AB). Hledaným bodem maxima v 2. situaci je tudíž bod X_1 .



Obr. 2.4

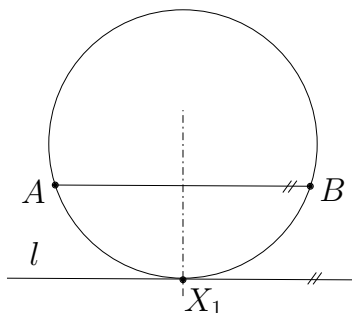
3. situace: Thaletova kružnice nad průměrem AB má s přímkou l společné dva body, označme je D a E (viz obr. 2.5). Je zřejmé, že pro libovolný bod $X \in l$, který není bodem úsečky DE , je úhel AXB ostrý, pro $X = D$ a $X = E$ je úhel AXB pravý a pro libovolný vnitřní bod X úsečky DE je úhel AXB tupý. Stačí tedy hledat maximum pouze na vnitřních bodech úsečky DE . Označme k_1 ten oblouk AB , kterého se úsečka DE dotýká, a X_1 jeho bod dotyku s touto úsečkou. Oblouk k_1 je oblouk největší kružnice procházející body A , B , která má společný bod s vnitřkem úsečky DE . Pro všechny vnitřní body $X \neq X_1$ úsečky DE proto platí $|\angle AXB| < |\angle AX_1B|$. Tedy hledaným bodem maxima v této situaci je bod X_1 .



Obr. 2.5

Podívejme se nyní na případ, kdy je přímka l rovnoběžná s přímkou AB . Pro takovou úsečku AB existuje právě jeden oblouk, který se dotýká dané přímky l .

Hledaný bod maxima je potom bod dotyku X_1 tohoto oblouku s přímkou l , který je průsečíkem přímky l s osou úsečky AB (viz obr. 2.6), jelikož pro každý jiný bod $X \in l$ zřejmě platí $|\angle AXB| < |\angle AX_1B|$. ♣



Obr. 2.6

Zrekapitulujme, jak jsme při řešení postupovali. Na velikost zkoumaného úhlu AXB jsme pohlíželi jako na funkci závislou na poloze bodu X v rovině, tedy $f(X) = |\angle AXB|$. Nejdříve jsme vyšetřili chování této funkce pro libovolný bod X (ležící nejen na dané přímce l). Zjistili jsme tak, jak vypadají křivky, pro které je hodnota $f(X)$ konstantní. Těmito křivkami byly v naší úloze ekvigonály. Takové křivky mohou být obecně definovány pro libovolnou funkci $f(X)$ závisující na poloze bodu X v rovině nebo její části a nazývají se *úrovňové křivky* funkce $f(X)$. Zavedme tedy definici:

Definice 2.1.1. Necht' $f(X)$ je libovolná funkce proměnného bodu X v rovině a necht' c je libovolné reálné číslo z oboru hodnot funkce f . *Úrovňovou křivkou* funkce $f(X)$ odpovídající číslu c nazveme množinu $L_c = \{X; f(X) = c\}$.

Analogicky můžeme zavést pojem *úrovňová plocha* pro funkci $f(X)$ závislou na poloze bodu X v prostoru.

Definice 2.1.2. Necht' $f(X)$ je libovolná funkce proměnného bodu X v prostoru a necht' c je libovolné reálné číslo z oboru hodnot funkce f . *Úrovňovou plochou* funkce $f(X)$ odpovídající číslu c nazveme množinu $L_c = \{X; f(X) = c\}$.

Mnoho extrémálních geometrických úloh v rovině je zadáno následujícím způsobem: Naleznete maximum, resp. minimum, funkce $f(X)$ definované v rovině na dané rovinné křivce k . Takové zadání bylo i v úloze 2.1.1, kde jsme hledali maximální hodnotu funkce $f(X) = |\angle AXB|$, a to na přímce l . Jak jsme ukázali, maximální velikost úhlu přísluší jednomu z bodů přímky l , ve kterém se přímka l dotýká některé úrovňové křivky funkce $f(X)$, a je tedy její tečnou. Nyní již můžeme obecně vyjádřit *tečnový princip*.

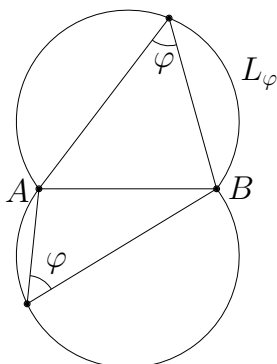
Věta 2.1.1 (Tečnový princip v rovině). *Maximum, resp. minimum, dané funkce $f(X)$ v rovině na dané křivce k může nastat pouze pro takové body křivky k , ve kterých se k dotýká některé úrovně křivky funkce $f(X)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f(X)$ nabývá svého maxima v nějakém bodě $Y \in k$, a nechť $f(Y) = c$. Křivka k tedy nemá žádný společný bod s množinou $\{X; f(X) > c\}$, a náleží jí proto pouze body množiny $\{X; f(X) \leq c\}$. Křivka k tedy nemůže v bodě Y úrovně křivky $L_c = \{X; f(X) = c\}$ protínat. Z toho vyplývá, že křivka k se musí úrovně křivky L_c ve společném bodě Y dotýkat. Analogickou úvahou se odvodí stejný závěr i pro bod minima. \square

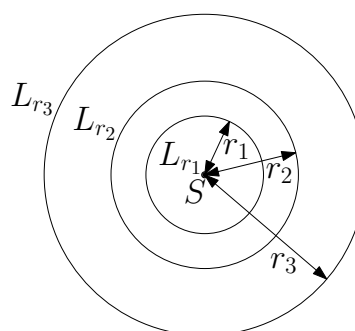
Věta 2.1.2 (Tečnový princip v prostoru). *Maximum, resp. minimum, dané funkce $f(X)$ v prostoru na dané křivce nebo ploše k může nastat pouze pro takové body z k , ve kterých se k dotýká některé úrovně plochy funkce $f(X)$.*

Důkaz. Důkaz tečnového principu v prostoru je analogický důkazu téhož principu v rovině. \square

Jak jsme mohli v ukázkovém řešení předchozí úlohy 2.1.1 vidět, znalost úrovně křivek funkce $f(X) = |\angle AXB|$ nám umožnila snadno nalézt její maximum na přímce l . Nyní uvedeme stručný přehled několika základních funkcí závislých na poloze bodu v rovině či v prostoru a v každém případě popíšeme tvar úrovně křivek či ploch příslušné funkce. První příklad takové funkce byl již podrobně rozebraný v úvodní úloze, ale pro úplnost výčtu nejzákladnějších typů funkcí závislých na poloze bodu a jejich úrovně křivek ho zde znovu uvedeme.



Obr. 2.7



Obr. 2.8

Příklad 1. V rovině jsou dány dva různé body A, B . Nechť $f(X) = |\angle AXB|$. Pro libovolný úhel φ , kde $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$, dostáváme úrovně křivku L_φ funkce $f(X)$, kterou je ekvigonála úsečky AB příslušná úhlu φ (viz obr. 2.7).

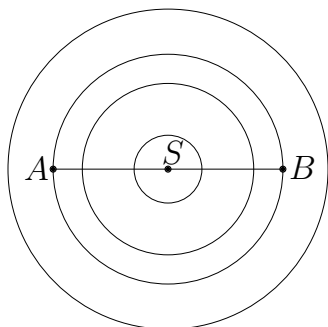
Pro $\varphi = 0^\circ$ je L_φ sjednocením vnitřků polopřímek opačných k polopřímkám AB , BA . Pro $\varphi = 180^\circ$ je L_φ vnitřek úsečky AB .

Následující příklad je triviálním důsledkem definice kružnice.

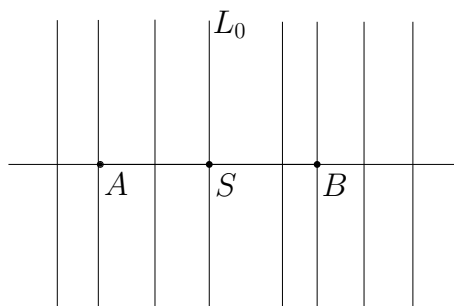
Příklad 2. V rovině je dán bod S . Nechť $f(X) = |SX|$. Pro libovolné reálné číslo $r > 0$ dostáváme úrovnívou křivku L_r , kterou je kružnice se středem v bodě S a poloměrem r (viz obr. 2.8). Pokud bychom místo bodů v rovině uvažovali body v prostoru, bude L_r úrovnívá plocha tvaru kulové plochy se středem v bodě S a poloměrem r . Pro $r = 0$ je v rovině i v prostoru $L_r = \{S\}$.

Další dva příklady uvedeme bez samostatných důkazů, protože to jsou zvláštní případy obecnějšího výsledku, který vzápětí vyložíme i s důkazem jako větu 2.1.3.

Příklad 3. V rovině jsou dány dva různé body A a B . Uvažme funkci $f(X) = |AX|^2 + |BX|^2$. Pak pro libovolné reálné číslo $c > \frac{1}{2}|AB|^2$ je úrovnívou křivkou L_c kružnice se středem S ve středu úsečky AB (viz obr. 2.9). Uvažujeme-li funkci f v prostoru, jsou L_c kulové plochy se středem S . Pro $c = \frac{1}{2}|AB|^2$ je v rovině i v prostoru $L_c = \{S\}$.



Obr. 2.9



Obr. 2.10

Příklad 4. V rovině jsou dány dva různé body A a B . Uvažme funkci $f(X) = |AX|^2 - |BX|^2$. Úrovnívé křivky funkce $f(X)$ jsou potom všechny přímky kolmé k přímce AB (viz obr. 2.10). Narozdíl od předchozích příkladů je obor hodnot této funkce celá množina \mathbb{R} . Pro $c = 0$ je L_c osa úsečky AB . Označíme-li S střed úsečky AB , pak pro $c > 0$ jsou L_c kolmice protínající polopřímku SB bez jejího počátečního bodu S a pro $c < 0$ jsou L_c kolmice protínající polopřímku SA bez jejího počátečního bodu S . Uvažujeme-li funkci f v prostoru, úrovnívými plochami L_c jsou všechny roviny kolmé k přímce AB . Diskuze polohy průsečíku těchto rovin s přímkou AB vzhledem k hodnotě c je stejná jako u situace v rovině.

Věta 2.1.3. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou reálná čísla a A_1, A_2, \dots, A_n jsou různé body roviny. Uvažme funkci*

$$f(X) = \lambda_1 \cdot |A_1 X|^2 + \dots + \lambda_n \cdot |A_n X|^2$$

a označme L_c její úrovníovou křivku odpovídající libovolné funkční hodnotě c . Jestliže:

- a) $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$, pak L_c je buď kružnice, nebo bod;*
- b) $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, pak L_c je buď celá rovina, nebo přímka.*

Důkaz. Uvažme libovolný pravoúhlý souřadnicový systém Oxy . Označme souřadnice bodu $X = [x, y]$ a $A_i = [x_i, y_i]$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Potom bod X leží na úrovníové křivce L_c právě tehdy, když

$$\lambda_1 \cdot [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] + \dots + \lambda_n \cdot [(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2] = c. \quad (2.1)$$

Označme

$$\begin{aligned} k &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, & l &= \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n, \\ \lambda &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n, & p &= \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) + \dots + \lambda_n (x_n^2 + y_n^2) - c \end{aligned}$$

a dosaďme do rovnice (2.1). Dostaneme

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 - 2kx - 2ly + p = 0. \quad (2.2)$$

V případě $\lambda \neq 0$ můžeme (2.2) upravit na tvar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{2kx}{\lambda} - \frac{2ly}{\lambda} + \frac{p}{\lambda} &= 0, \\ \left(x - \frac{k}{\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{l}{\lambda}\right)^2 &= \frac{k^2 + l^2 - p\lambda}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že se jedná o:

- kružnici se středem v bodě $\left[\frac{k}{\lambda}, \frac{l}{\lambda}\right]$, jestliže $k^2 + l^2 - p\lambda > 0$;
- bod $\left[\frac{k}{\lambda}, \frac{l}{\lambda}\right]$, jestliže $k^2 + l^2 - p\lambda = 0$;
- prázdnou množinu, jestliže $k^2 + l^2 - p\lambda < 0$.

Pokud $\lambda = 0$, rovnice (2.2) se zjednoduší na rovnici

$$2kx + 2ly - p = 0,$$

odkud je vidět, že se jedná o:

- celou rovinu, jestliže $k = l = p = 0$;
- přímku, jestliže $k^2 + l^2 \neq 0$;
- prázdnou množinu, jestliže $k = l = 0$ a zároveň $p \neq 0$.

Protože je díky výběru čísla c podle definice $L_c \neq \emptyset$, je důkaz hotov. □

V prostoru platí tvrzení analogické předchozímu:

Věta 2.1.4. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou reálná čísla a A_1, A_2, \dots, A_n jsou různé body v prostoru. Uvažme funkci*

$$f(X) = \lambda_1 \cdot |A_1X|^2 + \dots + \lambda_n \cdot |A_nX|^2$$

a označme L_c její úrovníovou plochu odpovídající libovolné funkční hodnotě c . Jestliže:

- a) $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$, pak L_c je buď kulová plocha, nebo bod;
- b) $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, pak L_c je buď celý prostor, nebo rovina.

O speciálním případě $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ z předchozích tvrzení (2.1.3) a (2.1.4) mluví tzv. *Leibnizova formule*.

Věta 2.1.5 (Leibnizova formule). *Nechť T je těžiště bodů A_1, A_2, \dots, A_n v rovině, resp. prostoru. Potom pro libovolný bod X v rovině, resp. prostoru, platí*

$$|A_1X|^2 + |A_2X|^2 + \dots + |A_nX|^2 = n \cdot |TX|^2 + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_iA_j|^2.$$

Připomeňme, že bod T je těžištěm bodů A_1, A_2, \dots, A_n právě tehdy, když $\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \dots + \overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$, přičemž takový bod T je určen jednoznačně vyjádřením

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}),$$

kde O je libovolný bod (např. počátek soustavy souřadnic).

Z důkazů vět 2.1.3 a 2.1.4 pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ plyne tvrzení následujícího příkladu.

Příklad 5. V rovině, resp. prostoru, jsou dány body A_1, A_2, \dots, A_n a T je jejich těžiště. Funkce

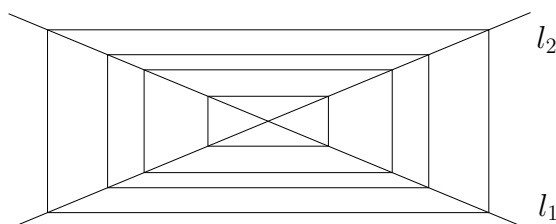
$$f(X) = |A_1X|^2 + |A_2X|^2 + \dots + |A_nX|^2$$

má pro každé reálné $c > f(T)$ úrovníovou křivku, resp. plochu, L_c ve tvaru kružnice, resp. kulové plochy, se středem v bodě T . Pro $c = f(T)$ je $L_c = \{T\}$.

Příklad 6. V rovině jsou dány dvě různoběžné přímky l_1, l_2 . Necht' $d(X, l_i)$ je vzdálenost bodu X od přímky l_i pro $i = 1, 2$. Uvažme funkci

$$f(X) = d(X, l_1) + d(X, l_2).$$

Pak pro libovolné reálné číslo $c > 0$ je úrovnňová křivka L_c hranice obdélníku, jehož úhlopříčky leží na přímkách l_1, l_2 (viz obr. 2.11). Pro $c = 0$ je křivka L_c tvořená jedním bodem, kterým je průsečík přímek l_1, l_2 .



Obr. 2.11

Tvar úrovnňové křivky L_c zapsaný v předchozím příkladu je zřejmý, uvědomíme-li si, že v rovnoramenném trojúhelníku je pro libovolný bod základny součet jeho vzdáleností od ramen trojúhelníku konstantní.

V našem přehledu úrovnňových křivek je třeba zmínit ještě dvě významné kuželosečky, a to elipsu a hyperbolu. Některé poznatky z analytické geometrie těchto křivek uvedeme dále bez důkazů. Ty lze najít např. v [KoBo].

Příklad 7. V rovině jsou dány dva různé body E, F . Uvažme funkce

$$f(X) = |EX| + |FX|, \quad g(X) = |EX| - |FX|.$$

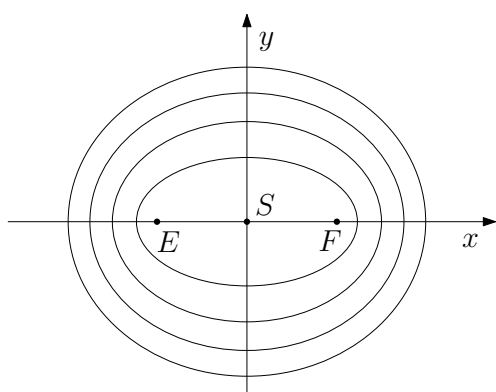
Úrovnňovou křivkou L_c funkce $f(X)$ je pro každé $c > |EF|$ elipsa a pro $c = |EF|$ se jedná o úsečku EF (viz obr. 2.12). Úrovnňovou křivkou L_c funkce $g(X)$ je pro $c = 0$ osa úsečky EF (na obr. 2.13 osa y) a pro každé $c \neq 0$ je L_c větev hyperboly v jedné polorovině určené zmíněnou osou.

Body E, F se nazývají ohniska elipsy, resp. hyperboly, a střed S úsečky EF se nazývá střed elipsy, resp. hyperboly. Průsečíky elipsy, resp. hyperboly, s přímkou EF se nazývají hlavní vrcholy. Obě křivky jsou osově souměrné podle přímky EF a rovněž podle osy úsečky EF . Umístíme-li střed S do počátku soustavy souřadnic, přímku EF na osu x a osu úsečky EF na osu y , pak pro souřadnice bodů elipsy (a jen pro ně) bude platit

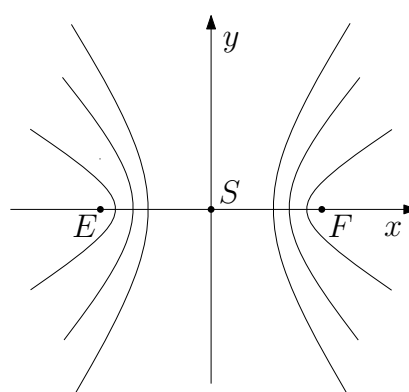
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

zatímco souřadnice bodů hyperboly budou splňovat rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



Obr. 2.12



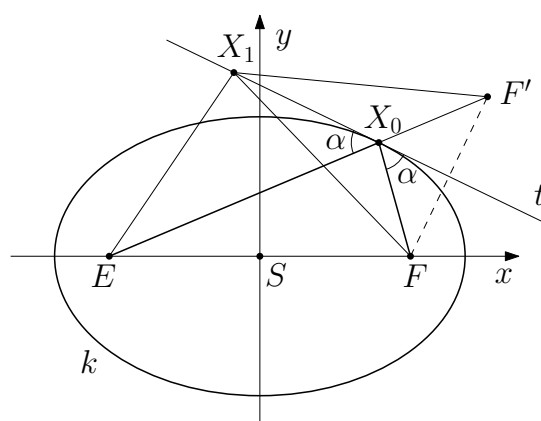
Obr. 2.13

kde $a > 0$ je délka tzv. hlavní poloosy a $b > 0$ je délka tzv. vedlejší poloosy. Každá hyperbola se skládá ze dvou větví ležících spolu s hlavní osou ve dvojici vrcholových úhlů sevřených tzv. asymptotami hyperboly, což jsou přímky o rovnicích

$$bx \pm ay = 0.$$

Mnoho zajímavých úloh, ve kterých vystupují elipsy nebo hyperboly, využívají následující vlastnosti obecných tečen těchto křivek.

Věta 2.1.6. *Nechť E, F jsou ohniska dané elipsy, resp. hyperboly. Pak pro libovolný bod X této elipsy, resp. hyperboly, svírají úsečky EX a FX stejný úhel s její tečnou v bodě X .*



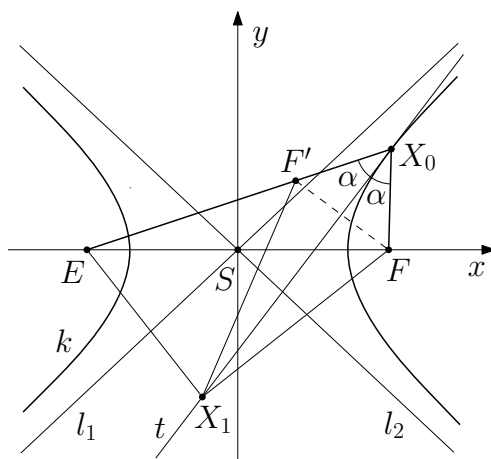
Obr. 2.14

Důkaz. Uvažme elipsu k a její libovolný pevný bod X_0 , pro který proto platí $|EX_0| + |X_0F| = 2a$, kde a délka hlavní poloosy elipsy k . Nechť t je přímka

procházející bodem X_0 taková, že svírá s úsečkami EX_0 , FX_0 stejný úhel α a zároveň neprotíná úsečku EF (viz obr. 2.14). Označme F' obraz bodu F v osové souměrnosti s osou t . Bod X_0 je zřejmě průsečíkem úsečky EF' s přímkou t . Pak podle Heronovy úlohy 1.1.1 pro libovolný bod $X_1 \neq X_0$ přímky t platí

$$|EX_1| + |X_1F| > |EX_0| + |X_0F| = 2a. \quad (2.3)$$

Jelikož pro všechny body X elipsy k musí podle její definice platit rovnost $|EX| + |XF| = 2a$, vyplývá z nerovnice (2.3), že libovolný bod $X_1 \neq X_0$ přímky t leží vně elipsy k . Tedy přímka t má s touto elipsou jediný společný bod (bod X_0), a je proto její tečnou v bodě X_0 . Tím je důkaz hotov. Pro hyperbolu je důkaz analogický ovšem s použitím věty 1.1.2 (viz obr. 2.15). \square



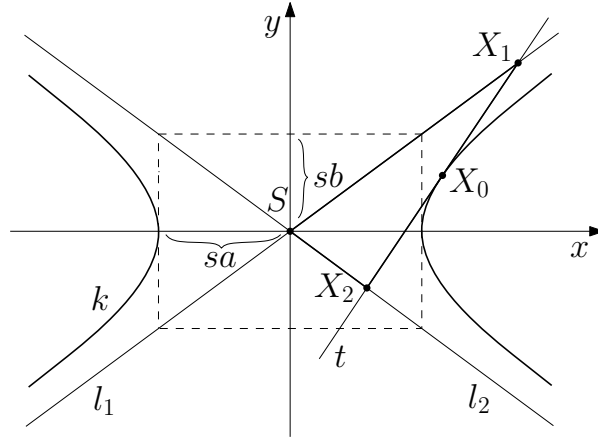
Obr. 2.15

Uvedeme ještě jednu významnou vlastnost polohy tečen hyperboly vzhledem k jejím asymptotám, kterou budeme dále potřebovat při řešení jedné zajímavé extrémální úlohy.

Věta 2.1.7. *Je dána libovolná hyperbola. Potom obsah trojúhelníku vyřatého libovolnou tečnou jedné z větví hyperboly z úhlu tvořeného asymptotami této větve je konstantní. Navíc bod dotyku je středem úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky tečny s asymptotami.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažme hyperbolu k se středem S v počátku soustavy souřadnic, s hlavní poloosou délky sa ležící na souřadnicové ose x a vedlejší poloosou délky sb ležící na souřadnicové ose y , kde $s > 0$ je parametr (viz obr.2.16). Pro souřadnice bodů hyperboly potom platí

$$\frac{x^2}{(sa)^2} - \frac{y^2}{(sb)^2} = 1. \quad (2.4)$$



Obr. 2.16

(Důvod, proč volíme hyperbolu v závislosti na parametru, bude zřejmý v pozdější části důkazu.) Pro tečnu t v jejím libovolném bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ platí známá rovnice

$$t : \frac{x_0 x}{(sa)^2} - \frac{y_0 y}{(sb)^2} = 1. \quad (2.5)$$

Rovnice asymptot l_1, l_2 hyperboly k jsou jak známo

$$l_1 : y = \frac{sb}{sa}x = \frac{b}{a}x, \quad l_2 : y = -\frac{sb}{sa}x = -\frac{b}{a}x. \quad (2.6)$$

Poznamenejme, že rovnice asymptot nezávisí na volbě parametru s , tudíž pro různé hodnoty parametru dostaneme různé hyperboly se společnými asymptotami. Dále zmiňme, že každý bod $X' = [x', y']$ uvažovaného úhlu je charakterizován nerovnostmi $|\frac{x'}{a}| > |\frac{y'}{b}|$, takže leží na hyperbole určené parametrem $s = \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$. Vyřešením soustavy rovnic (2.5) a příslušné rovnice z (2.6) nalezneme průsečík X_1 tečny s asymptotou l_1 a průsečík X_2 tečny s asymptotou l_2 ve tvaru

$$X_1 = \left[\frac{s^2 a^2 b}{x_0 b - y_0 a}, \frac{s^2 a b^2}{x_0 b - y_0 a} \right], \quad X_2 = \left[\frac{s^2 a^2 b}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{s^2 a b^2}{x_0 b + y_0 a} \right]. \quad (2.7)$$

Pro obsah S_Δ trojúhelníku vyřazeného tečnou z úhlu tvořeného asymptotami, ve kterém leží větev hyperboly, jíž se tečna dotýká, potom platí

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \frac{1}{2} \cdot |X_1 S| \cdot |X_2 S| \cdot \sin |\angle X_1 S X_2| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{s^4 (a^4 b^2 + a^2 b^4)}{(x_0 b - y_0 a)^2}} \cdot \sqrt{\frac{s^4 (a^4 b^2 + a^2 b^4)}{(x_0 b + y_0 a)^2}} \cdot \sin |\angle X_1 S X_2| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 ab \sqrt{a^2 + b^2}}{|x_0 b - y_0 a|} \cdot \frac{s^2 ab \sqrt{a^2 + b^2}}{|x_0 b + y_0 a|} \cdot \sin |\angle X_1 S X_2| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^4 a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{|x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2|} \cdot \sin |\angle X_1 S X_2|.
 \end{aligned}$$

Jelikož bod $X_0 = [x_0, y_0]$ leží na hyperbole, platí pro jeho souřadnice rovnost (2.4). Dosadíme-li z této rovnosti do posledního vztahu za výraz $x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2$ jeho hodnotu $s^2 a^2 b^2$, dostaneme

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^4 a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{|s^2 a^2 b^2|} \cdot \sin |\angle X_1 S X_2| = \frac{1}{2} \cdot s^2 (a^2 + b^2) \cdot \sin |\angle X_1 S X_2|.$$

Pro danou hyperbolu je celý výraz na pravé straně konstantní, a proto je pro libovolnou tečnu hyperboly konstantní obsah S_{Δ} trojúhelníku, který na asymptotách tečna vytíná. Z předchozího vztahu zároveň vyplývá, že pro různé hodnoty parametru s , tedy různé hyperboly se společnými asymptotami, jsou hodnoty obsahu S_{Δ} různé.

K důkazu druhé části věty vypočítáme z (2.7) souřadnice $[x_s, y_s]$ středu úsečky $X_1 X_2$ s opětovným využitím (2.4) pro souřadnice bodu X_0 :

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s^2 a^2 b}{x_0 b - y_0 a} + \frac{s^2 a^2 b}{x_0 b + y_0 a} \right) = \frac{s^2 a^2 b}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_0 b - y_0 a} + \frac{1}{x_0 b + y_0 a} \right) = \\
 &= \frac{s^2 a^2 b}{2} \cdot \frac{x_0 b + y_0 a + x_0 b - y_0 a}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{s^2 a^2 b^2 x_0}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = x_0, \\
 y_s &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s^2 a b^2}{x_0 b - y_0 a} - \frac{s^2 a b^2}{x_0 b + y_0 a} \right) = \frac{s^2 a b^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_0 b - y_0 a} - \frac{1}{x_0 b + y_0 a} \right) = \\
 &= \frac{s^2 a b^2}{2} \cdot \frac{x_0 b + y_0 a - x_0 b + y_0 a}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{s^2 a^2 b^2 y_0}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = y_0.
 \end{aligned}$$

Bod dotyku libovolné tečny hyperboly je proto středem úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky této tečny s asymptotami hyperboly. \square

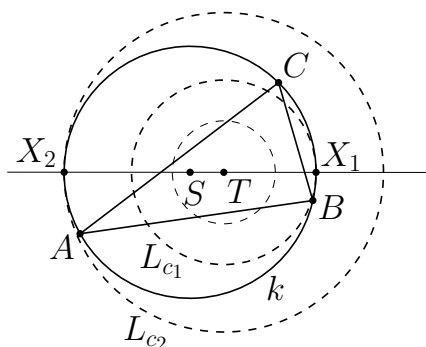
2.2 Řešené příklady

Úloha 2.2.1. V rovině je dán trojúhelník ABC . Nalezněte takový bod X na kružnici opsané tomuto trojúhelníku, aby byl součet

$$f(X) = |AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2$$

- a) *minimální*;
b) *maximální*. [AMS, str. 56]

Řešení. Označme T těžiště trojúhelníku ABC , k kružnici opsanou a S její střed (viz obr. 2.17). Jak bylo zmíněno v příkladě 5, pro libovolné $c > f(T)$ je úrovnňová křivka L_c funkce $f(X)$ kružnice se středem v těžišti T .



Obr. 2.17

Jestliže trojúhelník ABC není rovnostranný, pak $T \neq S$ a body T a S jednoznačně určují přímku TS , která se nazývá *Eulerova přímka*¹. Přímka TS má zřejmě s kružnicí k dva společné body, které označíme X_1 (ležící na polopřímce ST), X_2 (ležící na polopřímce TS). Tyto body jsou body dotyku kružnice k s některými dvěma kružnicemi L_{c_1} , L_{c_2} (kde $c_1 < c_2$). Z tečnového principu pak vyplývá, že funkce $f(X)$ má své minimum v bodě $X = X_1$ a své maximum v bodě $X = X_2$. Pro výpočet extrémních hodnot $f(X_1)$, $f(X_2)$ použijeme Leibnizovu formuli (věta 2.1.5). Dosazením středu S za libovolný bod X do zmíněné formule dostaneme předně pro naši úlohu pomocnou rovnost

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot |TS|^2, \quad (2.8)$$

kde a , b , c jsou délky stran trojúhelníku ABC . Jelikož $|AS| = |BS| = |CS| = R$,

¹Eulerova přímka nerovnostranného trojúhelníku je přímka, na které leží průsečík výšek trojúhelníku, jeho těžiště a střed kružnice opsané. V rovnostranném trojúhelníku tato přímka není definovaná, protože všechny tři zmíněné body splývají. Na Eulerově přímce leží také střed kružnice devíti bodů, neboli Feuerbachovy kružnice.

kde R je poloměr kružnice opsané, z rovnosti (2.8) vyplývá²

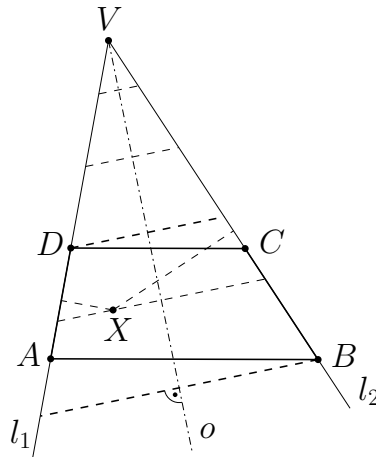
$$|TS| = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Pro vyjádření extrémálních hodnot $f(X_1)$, $f(X_2)$ opětovně využijeme Leibnizovu formuli z věty 2.1.5, do níž nyní podle obr. 2.17 dosadíme $|TX_1| = R - |ST|$, resp. $|TX_2| = R + |ST|$, s předchozím vyjádřením $|ST|$. Dostaneme

$$f(X_1) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot \left[R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{9} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)} \right]^2,$$

$$f(X_2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot \left[R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{9} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)} \right]^2.$$

V případě, že je trojúhelník ABC rovnostranný, je $T = S$ a kružnice k je potom přímo jednou z úrovnových křivek L_c , tedy funkce $f(X)$ je na kružnici k konstantní. ♣



Obr. 2.18

Úloha 2.2.2. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB , CD . Nalezněte takový bod X uvnitř nebo na hranici lichoběžníku, aby byl součet jeho vzdáleností od stran lichoběžníku

- minimální;
- maximální. [AMS, str. 57]

²Ze vzorce pro $|TS|$ plyne zajímavá nerovnost $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$ pro obecný trojúhelník, ve které nastane rovnost jedině v případě $T = S$, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný.

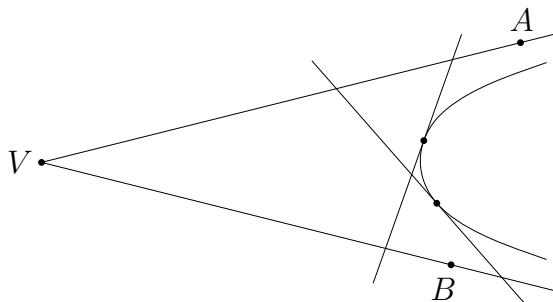
Řešení. Označme l_1, l_2 po řadě přímky DA, BC a V jejich průsečík (viz obr. 2.18). Jelikož je součet vzdáleností bodu X od základů lichoběžníku konstantní, stačí nalézt uvnitř nebo na hranici lichoběžníku minimum, resp. maximum, funkce $f(X) = d(X, l_1) + d(X, l_2)$, kde $d(X, l_i)$ je vzdálenost bodu X od přímky l_i pro $i = 1, 2$. Jak bylo zmíněno v příkladě 6, jsou pro tuto funkci $f(X)$ úroňovými křivkami obdélníky s vrcholy na přímkách l_1, l_2 . Nás zajímá pouze část těchto obdélníků, a to jejich strany, které leží uvnitř konvexního úhlu AVB , tedy úsečky kolmé k ose o tohoto úhlu s krajními body na ramenech VA, VB . Funkce $f(X)$ je proto minimální, resp. maximální, v takovém bodě X_1 , resp. X_2 , lichoběžníku, který leží na nejkratší, resp. nejdelší, úsečce kolmé k ose o s krajními body na ramenech úhlu AVB . Tedy v případě, že $|DA| < |BC|$, bude $X_1 = D$ a $X_2 = B$ (viz obr. 2.18). Pokud naopak $|DA| > |BC|$, bude $X_1 = C$ a $X_2 = A$. Konečně v případě $|DA| = |BC|$ nastane minimum pro všechny body X úsečky CD a maximum pro všechny body úsečky AB . ♣

Úloha 2.2.3. V rovině jsou dány tři různé body A, V, B a uvnitř konvexního úhlu AVB je dána libovolná křivka k . Nalezněte takovou tečnu l k této křivce k , která v daném úhlu AVB vytne trojúhelník:

- o minimálním;
- o maximálním

obsahu. [AMS, str. 58]

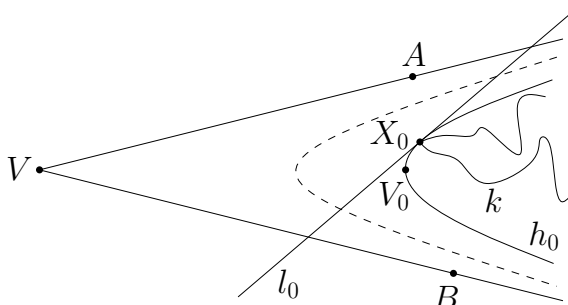
Řešení. Nechť $f(l)$ je funkce, jejíž hodnota pro libovolnou přímku l protínající obě polopřímky VA, VB je rovna obsahu trojúhelníku vyřatého přímkou l z úhlu AVB . Naším úkolem je tedy najít minimum, resp. maximum, funkce $f(l)$ na množině tečen dané křivky k . Abychom mohli použít tečnový princip, musíme nalézt úroňové křivky této funkce, tedy množiny tečen l , pro které je hodnota funkce $f(l)$ konstantní. Z věty 2.1.7 již víme, že přímky, které v daném úhlu vytnou trojúhelník o stejném obsahu, jsou tečnami k jedné z větví hyperboly s asymptotami, na nichž leží ramena daného úhlu³ (viz obr. 2.19). V důkazu



Obr. 2.19

³Jedná se o větev té ze dvou hyperbol se společnými asymptotami, která leží uvnitř uvažovaného konvexního úhlu AVB .

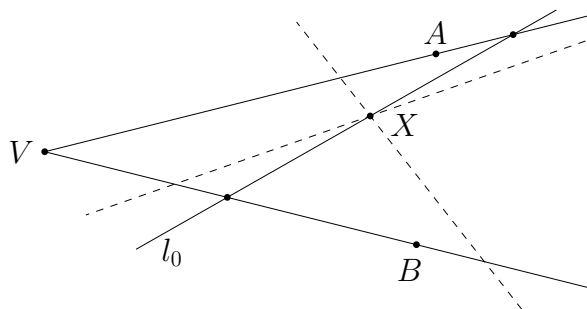
zmíněné věty bylo také ukázáno, že obsah vytnutých trojúhelníků pro větve různých hyperbol se stejnou dvojicí asymptot je různý a že každý bod daného úhlu leží na větvi některé hyperboly.



Obr. 2.20

Z tečnového principu vyplývá, že tečna l_0 dané křivky k , která vytíná z úhlu AVB trojúhelník o minimálním, resp. maximálním, obsahu, se musí křivky k dotýkat v takovém bodě X_0 , ve kterém se k dotýká větve některé hyperboly s asymptotami, na nichž leží úsečky VA , VB . V případě, že jde o minimum, jedná se o hyperbolu h_0 s nejbližším vrcholem V_0 vrcholu V (ze všech takových hyperbol, jež mají s křivkou k společný bod) (viz obr. 2.20), pokud jde o maximum, leží vrchol dotýkající se hyperboly nejdále od vrcholu V . Jelikož bod X_0 dotyku tečny hyperboly je středem úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky této tečny s asymptotami hyperboly (viz věta 2.1.7), musí mít bod $X_0 \in k$ na hledané přímce l_0 stejnou vlastnost.

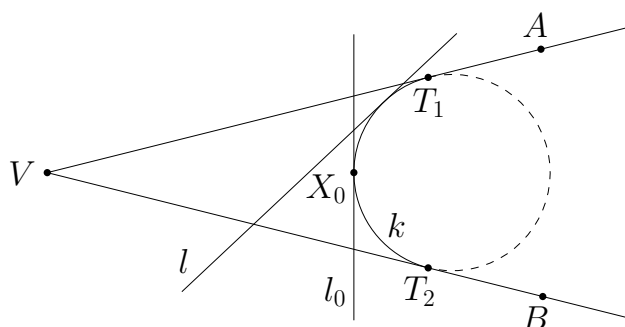
Poznamenejme, že předchozí diskuze nám nezaručuje existenci tečny k dané křivce k , která v úhlu AVB vytne trojúhelník o minimálním, resp. maximálním, obsahu. Zmíněný rozbor pouze ukazuje, že pokud tato přímka existuje, potom se křivky k dotýká v takovém bodě, který je středem úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky této tečny s rameny úhlu AVB . Abychom mohli něco usoudit i o její existenci, uvažme následující dva speciální případy:



Obr. 2.21

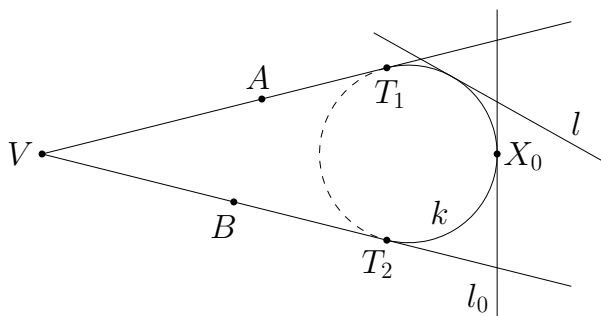
1. situace: Předpokládejme, že $k = \{X\}$. Místo křivky tedy uvažujeme jediný bod X (viz obr. 2.21) a namísto tečen všechny přímky l , které tímto bodem

procházejí. Úloha nalézt maximální obsah $f(l)$ v tomto případě nemá řešení, jelikož lze vždy nalézt takovou přímku, která v úhlu AVB vytne trojúhelník o libovolně velkém obsahu. Funkce $f(l)$ má tedy nekonečné supremum (trojúhelník zdegeneruje v polopás ohraničený rameny úhlu AVB a rovnoběžkou s jedním z těchto ramen jdoucí daným bodem X). Avšak vyřatý trojúhelník s minimálním obsahem $f(l_0)$ zřejmě existuje, jelikož lze sestavit takovou přímku l_0 , jejíž průsečíky s rameny úhlu AVB jsou krajními body úsečky s daným středem X . Podle předchozí diskuze vytne tato přímka z daného úhlu trojúhelník o nejmenším obsahu.



Obr. 2.22

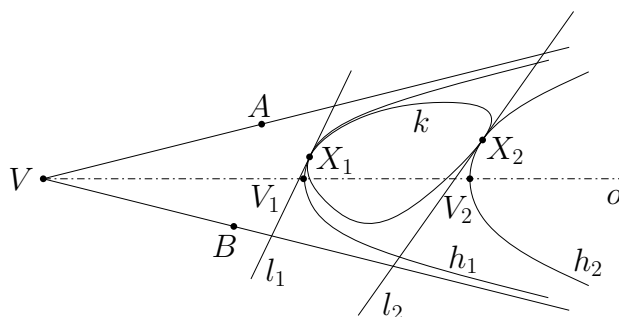
2. situace: Uvažme kružnici, která je vepsaná do úhlu AVB . Body dotyku této kružnice s rameny úhlu označíme T_1, T_2 (viz obr. 2.22). Předpokládejme, že křivka k je kratší ze dvou oblouků T_1T_2 . Protože lze jistě sestavit tečnu oblouku k , která vytne trojúhelník o libovolně malém obsahu, má funkce $f(l)$ infimum 0 (trojúhelník zdegeneruje na přímku VA nebo VB), nikoli však minimum. Tudíž úloha nalézt minimální obsah $f(l)$ nemá řešení. Jelikož i zde existuje přímka l_0 dotýkající se oblouku k v takovém bodě X_0 , který je středem úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky l_0 s rameny VA, VB , má funkce $f(l)$ maximum. Hledaná přímka l_0 je zřejmě kolmá k ose úhlu AVB a zmíněným bodem dotyku X_0 je průsečík této osy s obloukem k .



Obr. 2.23

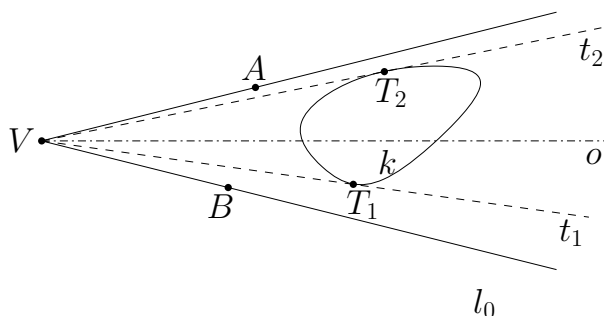
Vezměme nyní za křivku k delší z obou oblouků T_1T_2 . Potom analogicky funkce $f(l)$ má nekonečné supremum, ne však maximum, a existuje pouze její minimum, které přísluší opět té tečně l_0 , jež je kolmá na osu úhlu AVB a jejíž bod dotyku X_0 je průsečík této osy úhlu a oblouku k (viz obr. 2.23).

Poznamenejme, že argumenty 2. situace budou analogické i v případě, že k bude libovolná uzavřená křivka ohraničující konvexní plochu, která leží v daném úhlu AVB a která je hladká⁴. Potom budou existovat hledané dvě tečny l_1, l_2 (dotýkající se k po řadě v bodech X_1, X_2), a tedy i minimální a maximální obsah $f(l)$ vyřatého trojúhelníku (viz obr. 2.24). Tečna l_1 ke křivce k je zároveň tečnou k větvi hyperboly h_1 , která se křivky k



Obr. 2.24

v bodě X_1 dotýká a která má vrchol V_1 nejbližší vrcholu V . Naopak tečna l_2 je tečnou k větvi hyperboly h_2 , která se křivky k v bodě X_2 dotýká a jejíž vrchol V_2 je nejdále od vrcholu V . body V_1, V_2 zřejmě leží na ose o úhlu AVB . Bod X_1 minima a bod X_2 maxima budou stejně jako v 2. situaci ležet na opačných částech křivky k s krajními body T_1, T_2 , které jsou body dotyku k s polopřímkami po řadě t_1, t_2 se společným počátečním bodem V (viz obr. 2.25). ♣

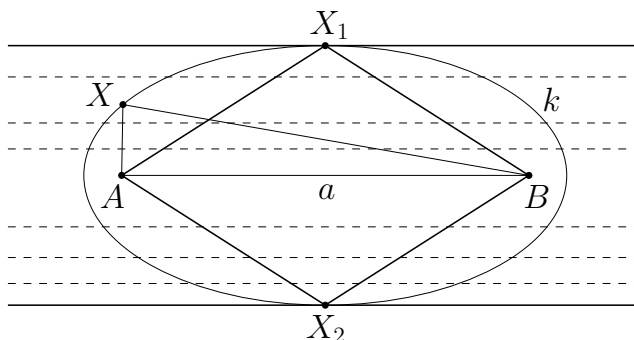


Obr. 2.25

⁴Hladká křivka je křivka s parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in (a, b)$, kde funkce φ, ψ mají vlastní derivace v každém bodě.

Úloha 2.2.4. Mezi všemi trojúhelníky o dané délce a jedné strany a daném obvodu o určete ten, který má největší obsah. [AMS, str. 62]

Řešení. Úloha má jistě smysl, jen když $o > 2a$. Uvažme libovolný trojúhelník ABX , jehož obvod je o a $|AB| = a$. Potom zřejmě platí $|AX| + |BX| = o - a$. Z příkladu 7 v teoretické části této kapitoly víme, že množina bodů X s takovou vlastností je elipsa, označme ji k , s ohnisky A, B (viz obr. 2.26). Uvažme funkci

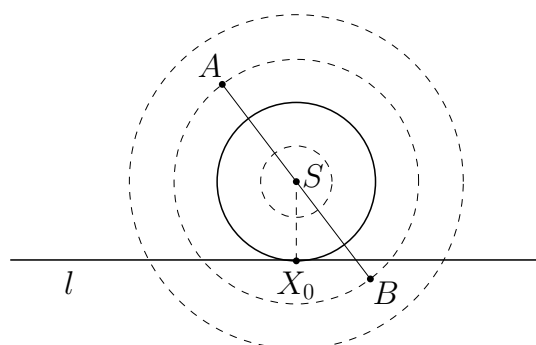


Obr. 2.26

$f(X) = S_{ABX}$, kde S_{ABX} je obsah trojúhelníku ABX . Jelikož je obsah trojúhelníku určen délkou některé jeho strany a výškou na tuto stranu a v naší situaci je strana AB pevně dána, je obsah $\triangle ABX$ závislý pouze na vzdálenosti vrcholu X od přímky AB . Úrovňové křivky funkce $f(X)$ jsou proto rovnoběžky s přímkou AB . Protože hledaný vrchol X musí ležet na výše zmíněné elipse k , hledáme podle tečnového principu úrovnívou křivku, která se této elipse dotýká. Takové tečny zřejmě existují dvě (každá v jedné polorovině určené přímkou AB) a jejich body dotyku X_1, X_2 jsou průsečíky elipsy k s osou úsečky AB . Hledané trojúhelníky jsou tedy rovnoramenné trojúhelníky ABX_1 a ABX_2 , jež jsou souměrně sdružené podle přímky AB . ♣

Úloha 2.2.5. V rovině je dána přímka l a dva různé body A, B . Najděte na l takový bod X , pro který je součet $|AX|^2 + |BX|^2$ minimální. [AMS, str. 61]

Řešení. Uvažme funkci $f(X) = |AX|^2 + |BX|^2$. Podle příkladu 3 jsou úrovnívými křivkami této funkce kružnice se středem S , který je středem úsečky AB (viz obr. 2.27). Podle tečnového principu je $f(X)$ na přímce l minimální pro takový bod $X_0 \in l$, ve kterém se přímka l dotýká některé její úrovnívé křivky (kružnice), přitom v případě $S \in l$ je přímo $X_0 = S$. Takový bod X_0 zřejmě leží na kolmici k přímce l procházející středem příslušné kružnice, tedy středem S dané úsečky AB . (Bod X_0 je tudíž ortogonální projekcí bodu S na přímku l). ♣



Obr. 2.27

Úloha 2.2.6. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte takový bod X ležící na jejím povrchu, pro který je úhel AXG minimální. [AMS, str. 61]

Řešení. Uvažme funkci $f(X) = |\angle AXG|$. Jelikož v každé rovině obsahující přímkou AG je úrovnívou křivkou funkce $f(X)$ ekvigonála úsečky AG , úrovnívou plochu této funkce v prostoru dostaneme rotací jedné takové ekvigonály kolem přímkou AG . Pro úhel 90° je touto úrovnívou plochou kulová plocha nad průměrem AG , která je zřejmě kulovou plochou opsanou dané krychli, na níž leží všechny její vrcholy (a žádný jiný bod jejího povrchu). Proto platí $f(X) = 90^\circ$ pro $X \in \{B, C, D, E, F, H\}$ a $f(X) > 90^\circ$ pro každý bod X povrchu krychle různý od jejích vrcholů. Hledané body minima tedy jsou všechny vrcholy dané krychle kromě bodů A a G . ♣

Kapitola 3

Další zajímavé úlohy

Při zpracovávání daného tématu jsem narazila na některé další historické nebo jinak zajímavé extrémální úlohy, které svým řešením sice nespadají ani do jedné z předcházejících dvou kapitol, avšak byla by škoda je do výsledného textu nezařadit. Rozhodla jsem se je proto umístit do samostatné kapitoly. Při jejich řešení jsou využity např. Pythagorova věta, Thaletova věta, goniometrické funkce a vztahy mezi nimi. V souvislosti s řešením třetí, závěrečné úlohy se v závěru zmiňuji rovněž o důležité otázce samotné existence extrémálních hodnot funkcí.

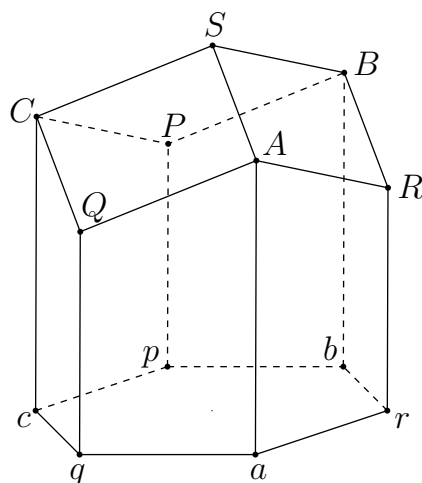
3.1 Řešené příklady

Úloha 3.1.1 (Réaumurova úloha o včelí buňce). [Dör, str. 366]

Buňky včelích pláství mají tvar odvozený od pravidelného šestibokého hranolu. Jedna jeho podstava je pravidelný šestiúhelník $arbpq$ a druhá podstava je tvořena vypuklou střechou, složenou ze tří shodných kosočtverců $RASB$, $PBSC$, $QCSA$, svírajících s osou hranolu stejný úhel shodný s úhlem, který s touto osou svírají jejich úhlopříčky SP , SQ , SR (viz obr. 3.1). Roviny ABC a PQR jsou proto k ose hranolu kolmé a kolmé jsou tudíž i k bočním stěnám hranolu, tvořenými šesti shodnými lichoběžníky $AarR$, $BbrR$, $BbpP$, $CcpP$, $CcqQ$, $AaqQ$. Delší základny Aa , Bb , Cc těchto lichoběžníků jsou o něco delší než dvojnásobek průměru kružnice vepsané do šestiúhelníkové podstavy. Posledním předpokladem je, že kosočtvercové stěny mají u vrcholu S tupé úhly, takže SP , SQ , SR jsou jejich kratší úhlopříčky.

Tuto neobvyklou konstrukci včelích buněk objevili přírodovědci jako Maraldi, Réaumur¹ a jiní (na začátku 18. století). Včely samy staví buňky takového tvaru, které jsou nejbezpečnější s ohledem na materiál – vosk, ze kterého je vyrábí.

¹René Réaumur (1683–1757) byl francouzský vědec, který se proslavil v mnoha oblastech. Zabýval se především entomologií, ale také geometrií, meteorologií a fyzikou. Zavedl Réaumurovu teplotní stupnici.



Obr. 3.1

Na toto téma formuloval Réaumur ve spolupráci se švýcarským matematikem Koenigem následující úlohu:

Navrhňte rozměry popsané včelí buňky tak, aby vzniklé těleso mělo při daném objemu co nejmenší povrch.

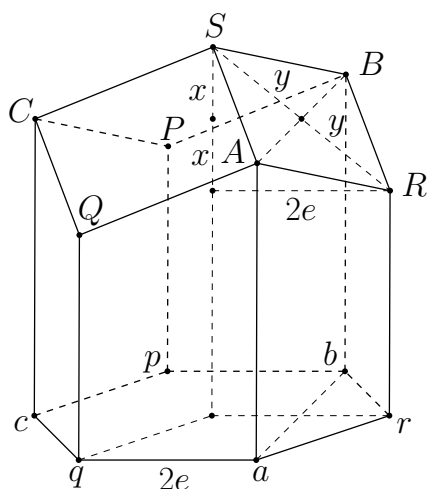
Řešení. Označme $2e$ stranu šestiúhelníkové podstavy $arbpcq$, potom pro její kratší úhlopříčky platí $|ab| = |bc| = |ca| = 2e\sqrt{3}$, a tedy i $|AB| = |BC| = |CA| = 2e\sqrt{3}$. Dále označme x vzdálenost roviny ABC od vrcholu střechy S , což je zároveň vzdálenost roviny ABC od roviny PQR . Položme $2y = |SP| = |SQ| = |SR|$. Velikost kolmého průmětu úsečky SR (o délce $2y$) na osu hranolu je tedy $2x$ a do roviny PQR má její kolmý průmět velikost $2e$ (viz obr. 3.2). Z toho vyplývá rovnost

$$y^2 = e^2 + x^2. \quad (3.1)$$

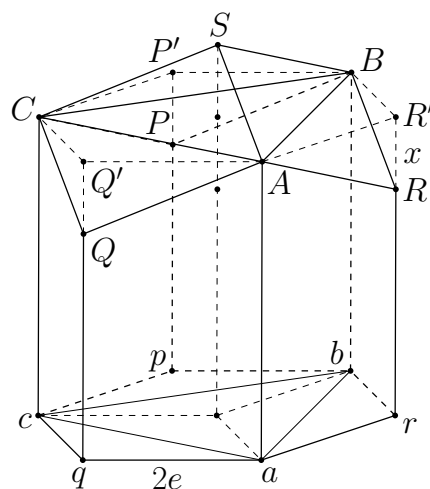
Označme P', Q', R' po řadě průsečíky polopřímek pP, qQ, rR s rovinou ABC (viz obr. 3.3). Potom $AR'BP'CQ'$ je pravidelný šestiúhelník o straně velikosti $2e$.

Jelikož objem pravidelného jehlanu $ABC S$ je roven součtu objemů tří menších jehlanů $ABR'R, BCP'P$ a $CAQ'Q$ (všechny čtyři jehlany mají stejnou tělesovou výšku x a obsah podstavy ABC je roven součtu obsahů podstav ABR', BCP' a CAQ'), je objem zadaného tělesa stejný jako objem hranolu, který má místo střechy z kosočtverců šestiúhelníkovou podstavu $AR'BP'CQ'$. Objem zadaného tělesa se tedy se změnou parametrů x a y střechy nemění, závislý je na nich pouze jeho povrch.

Povrch zadaného tělesa dostaneme, když od povrchu popsaného hranolu s podstavami $arbpcq$ a $AR'BP'CQ'$ odečteme obsah $6 \cdot ex$ šesti pravoúhlých trojúhelníků $AR'R, BR'R, BP'P, CP'P, CQ'Q, AQ'Q$, dále odečteme obsah $6e^2\sqrt{3}$ šestiúhelníku $AR'BP'CQ'$ a naopak přičteme obsah tří shodných kosočtverců $ASBR, BSCP$ a $CSAQ$ s úhlopříčkami $2y$ a $2e\sqrt{3}$, tedy přičteme hodnotu



Obr. 3.2



Obr. 3.3

$3 \cdot \frac{2y \cdot 2e\sqrt{3}}{2} = 6e\sqrt{3}y$. Stačí proto najít nejmenší hodnotu proměnné části povrchu, tedy minimum výrazu

$$-6ex - 6e^2\sqrt{3} + 6ey\sqrt{3} = 6e(y\sqrt{3} - x) - 6e^2\sqrt{3},$$

což můžeme zredukovat na hledání minima výrazu

$$s = y\sqrt{3} - x.$$

Jestliže zavedeme analogický výraz $r = x\sqrt{3} - y$, pak

$$s^2 - r^2 = 2 \cdot (y^2 - x^2)$$

a po dosazení z (3.1)

$$s^2 - r^2 = 2(y^2 - x^2) = 2e^2,$$

neboli

$$s^2 = r^2 + 2e^2. \tag{3.2}$$

Jelikož $s > 0$ (vzhledem k významu proměnných x, y , pro které zřejmě platí $y > x$), bude výraz s minimální právě tehdy, když bude minimální výraz s^2 . Protože $2e^2$ je konstanta, vyplývá z vyjádření (3.2), že výraz s^2 , a tedy i výraz s , nabývá svého minima v případě $r = 0$, který nastane, jestliže bude platit

$$y = x\sqrt{3}. \tag{3.3}$$

Dosazením z (3.1) do této podmínky obdržíme rovnici

$$y = \sqrt{3}\sqrt{y^2 - e^2}.$$

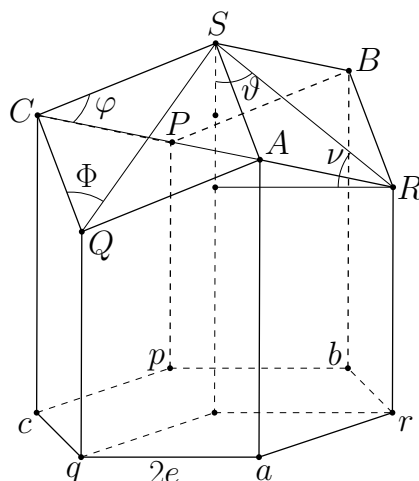
Protože y je kladné, dostáváme tak jediné řešení

$$y = e\sqrt{\frac{3}{2}},$$

kterému po zpětném dosazení do (3.3) odpovídá

$$x = e\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Našli jsme tak dvojici parametrů x, y , pro kterou je povrch zkoumaného tělesa při zadaném objemu minimální. Povšimněme si ještě, že u nalezeného tělesa je v kosočtverci $ARBS$ velikost $2y = e\sqrt{6}$ úhlopříčky SR opravdu kratší než velikost $2e\sqrt{3} = e\sqrt{12}$ úhlopříčky AB , takže úhly u vrcholu S ve shodných kosočtverečných stěnách jsou opravdu tupé. Označíme-li φ velikost ostrého úhlu ACS (viz obr. 3.4), pak $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{e\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, z čehož vyplývá $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sqrt{8}$. Dostáváme tak $2\varphi = |\angle QCS| \doteq 70^\circ 32'$. Tupé vnitřní úhly střešních kosočtverců mají proto velikost $2\Phi = \frac{360^\circ - 2 \cdot 2\varphi}{2} \doteq 109^\circ 28'$.



Obr. 3.4

Zjistíme ještě velikosti některých dalších významných úhlů nalezeného tělesa vyznačeného na obr. 3.4. Pro úhel ϑ , který svírají úhlopříčky SP, SQ, SR s osou hranolu, platí vztah $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2e}{2x} = \sqrt{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{cotg} \varphi$. Z vlastností funkcí tangens a kotangens je zřejmé, že $\vartheta = 90^\circ - \varphi \doteq 54^\circ 44'$. Úhel ν , který svírají roviny střešních kosočtverců s rovinou šestiúhelníkové podstavy tělesa, je roven doplňku úhlu ϑ do 90° , a má tudíž hodnotu $\nu = 90^\circ - \vartheta = \varphi \doteq 35^\circ 16'$.

Jelikož tangens ostrého úhlu aAR v boční stěně hranolu je roven $\frac{2e}{x} = \sqrt{8}$ ($= \operatorname{tg} 2\varphi$), jsou ostré, resp. tupé, vnitřní úhly bočních lichoběžníkových stěn shodné s ostrými, resp. tupými, vnitřními úhly střešních kosočtverců.

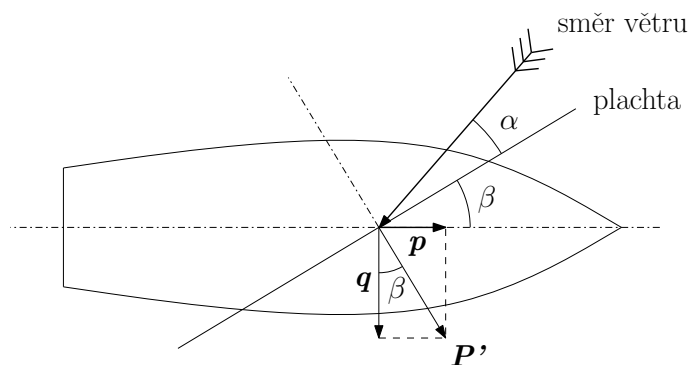
Je vhodné se ještě zmínit o úhlech, které svírají různé dvojice sousedních stěn nalezeného tělesa. Jeho stěny, které se navzájem stýkají v jednotlivých vrcholech S, P, Q, R (vždy jsou to tři stěny), vymezují navzájem shodné a pravidelné trojhrany se stěnovými úhly $2\Phi \doteq 109^\circ 28'$, proto se musí rovnat i všech 12 zkoumaných úhlů mezi těmito stěnami (3 úhly u každého trojhranu). Protože čtyřhrany s vrcholy A, B, C jsou také pravidelné a shodné (jejich stěnové úhly mají velikost $2\varphi \doteq 70^\circ 32'$), rovněž i zde jsou úhly mezi stěnami (4 u každého z vrcholů A, B, C) shodné. Zároveň vidíme, že úhel mezi stěnami trojhranu s vrcholem P je úhel bpc velikosti 120° a že stejnou velikost má i úhel qar mezi sousedními stěnami čtyřhranu s vrcholem A . Tudiž každé dvě sousední stěny tělesa svírají úhel 120° (samozřejmě s výjimkou odchylek 90° bočních lichoběžníkových stěn od šestiúhelníkové podstavy).

Velikosti úhlů, ke kterým jsme právě dospěli výpočtem, byly potvrzeny měřením včelích buněk. Za povšimnutí stojí obzvláště skutečnost, že každé dvě sousední stěny včelí buňky svírají úhel 120° nebo 90° . ♣

Úloha 3.1.2 (Směrování lodě v protivětru). *Jaký musí plachetnice nastavit kurs proti severnímu větru, aby plula na sever co nejrychleji²?* [Dör, str. 363]

Řešení. Označme α odchylku plachty lodě od směru severního větru a β odchylku plachty od osy plachetnice (viz obr. 3.5).

Nejdříve vyřešme úvodní otázku: *Maximální rychlost plachetnice plující po větru, která má vůči větru nejvýhodněji natočené plachty, je V uzlů. Jaká je její rychlost, jestliže odchylka plachty od směru větru je α a od osy lodě je β ?*



Obr. 3.5

Označme P tlak větru na plachtu lodě v případě, že vítr na plachtu fouká kolmo. Jestliže bude plachta natočená pod úhlem α vůči směru větru tak, že vítr nyní fouká šikmo proti směru plavby, pak je tlak větru P' (který má stejný účinek,

²Lodě samozřejmě nemůže plout přímo proti severnímu větru. Otázka se týká směru plavby, při kterém nejrychleji narůstá severní zeměpisná šířka lodě.

jako když vítr foukající kolmo na plachtu na ni působí tlakem P') menší, než při předchozí kolmé pozici ($\alpha = 90^\circ$). Je rozumné předpokládat, že tlak větru je

$$P' = P \cdot \sin \alpha. \quad (3.4)$$

Tento vztah, který sestavil Lössl, je ovšem pouze aproximativní.

Rozdělme tlak P' do dvou složek p a q , kde $p = P' \cdot \sin \beta$ je průmět tlaku P' na osu lodi a $q = P' \cdot \cos \beta$ je jeho kolmý doplněk. Pouze složka p tedy přispívá k dopřednému pohybu lodi. Po dosazení (3.4) do vztahu pro p dostaneme vzorec pro tlak větru, působící ve směru pohybu lodi ve tvaru

$$p = P \cdot \sin \alpha \sin \beta.$$

Jelikož rychlost v lodi je úměrná tomuto tlaku větru, platí

$$v = k \cdot p = kP \cdot \sin \alpha \sin \beta, \quad (3.5)$$

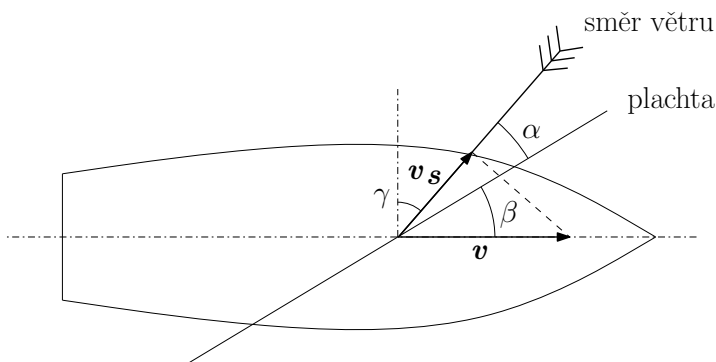
kde k je konstanta zmíněné úměrnosti. V případě $\alpha = \beta = 90^\circ$ dostáváme maximální možnou rychlost, které je plachetnice při daném větru a nejvýhodnějším natočení plachty schopna dosáhnout:

$$v_{max} = V = kP.$$

Výraz kP proto můžeme ve vztahu (3.5) nahradit za V , tedy rychlost lodi je

$$v = V \cdot \sin \alpha \sin \beta,$$

což je řešením úvodní otázky k naší úloze. Tento vztah tvoří základ pro řešení celé úlohy. Hodnota V v něm má význam rychlosti plachetnice v případě, že loď pluje přímo na jih a kolmo ke své ose má natočenou plachtu, do které se opírá severní vítr.



Obr. 3.6

Máme-li zjistit, jak nejrychleji může loď za daného severního větru plout na sever, musíme najít maximum rychlosti v_s , která je průmětem rychlosti v

lodi do směru jih–sever (viz obr. 3.6). Protože směr plavby lodi (směr osy lodi) svírá se směrem jih–sever úhel $\alpha + \beta$, bude zmíněný průmět rychlosti kladný právě tehdy, když bude platit $\alpha + \beta < 90^\circ$, a bude mít velikost

$$v_s = v \cdot \cos(\alpha + \beta) = V \cdot \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = V \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad (3.6)$$

kde γ doplněk součtu $\alpha + \beta$ do 90° . Stačí proto najít úhly α, β, γ , jejichž součet je 90° , pro které bude součin $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, a tedy i složka rychlosti v_s , maximální. K řešení tohoto problému nám pomůže následující věta:

Věta 3.1.1. *Nechť φ, ψ a φ', ψ' jsou dvě dvojice kladných úhlů takové, že*

$$\varphi + \psi = \varphi' + \psi' \leq 180^\circ.$$

*Potom platí*³

$$\sin \varphi \sin \psi > \sin \varphi' \sin \psi' \Leftrightarrow |\varphi - \psi| < |\varphi' - \psi'|.$$

Hledejme tedy maximum součinu $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ za předpokladu, že pro kladné proměnné úhly α, β, γ platí $\alpha + \beta + \gamma = 3x$ ($\leq 180^\circ$), kde x je daný úhel (v naší úloze $x = 30^\circ$). Pokud některý ze tří úhlů α, β, γ není roven x , pak alespoň jeden z těchto úhlů, řekněme α , musí být větší než x a jiný, řekněme β , musí být menší než x . Utvořme novou trojici úhlů α', β', γ' (splňující zadané podmínky) následujícím způsobem:

$$\alpha' = x, \quad \beta' = \alpha + \beta - x, \quad \gamma' = \gamma.$$

Pak díky předpokladu $\alpha > x > \beta$ platí $\beta < \beta' < \alpha$, takže nejen hodnota $\alpha' = x$, ale i hodnota β' leží mezi čísly β a α , a proto kromě rovnosti $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ platí i nerovnost $|\alpha' - \beta'| < \alpha - \beta$. Podle výše uvedené věty je potom $\sin \alpha' \sin \beta' > \sin \alpha \sin \beta$, a tudíž

$$\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' > \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

neboli

$$\sin x \sin \beta' \sin \gamma' > \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \quad (3.7)$$

Jelikož $\beta' + \gamma' = 2x$, z výše uvedené věty opět vyplývá

$$\sin x \sin x \geq \sin \beta' \sin \gamma', \quad (3.8)$$

³Tvrzení vyplývá ze vztahů $2 \sin \varphi \sin \psi = \cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)$ a $2 \sin \varphi' \sin \psi' = \cos(\varphi' - \psi') - \cos(\varphi' + \psi')$, kde φ, ψ a φ', ψ' jsou dané dvojice úhlů. Z podmínky $\varphi + \psi = \varphi' + \psi' (\leq 180^\circ)$ vyplývá, že menšitelé na pravých stranách vztahů jsou stejně velcí. Větší součin sinů má proto ta dvojice úhlů, pro kterou je kosinus jejich rozdílu větší, tedy menší jejich absolutní rozdíl.

neboť v případě $\beta' \neq \gamma'$ platí (3.8) jako ostrá nerovnost, zatímco v případě $\beta' = \gamma'$ jde o zřejmou rovnost. Spojením (3.8) a (3.7) dostaneme

$$\sin x \sin x \sin x > \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Takto jsme ukázali, že hledané maximum nastane jedině pro $\alpha = \beta = \gamma = x$. Pro naši úlohu o plachetnici to znamená, že součin sinů úhlů α , β , γ a tím i rychlost v_s (viz vztah (3.6)) je tudíž maximální právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$.

Závěr: Plachetnice musí být natočena proti směru severního větru s odchylkou 60° a plachta musí půlit úhel sevřený směrem větru a osou lodi.



Následující úloha byla opět známá už v dobách antiky. Na první pohled se může zdát velmi jednoduchá a její řešení zřejmé, ale teprve v polovině 19. století přišel Jacob Steiner s geometrickým důkazem, který byl přijat. Steinerovo řešení mělo ovšem jisté nedostatky, které byly ke konci 19. století odstraněny pomocí matematické analýzy. Tato úloha je jednou z *izoperimetrických úloh*⁴.

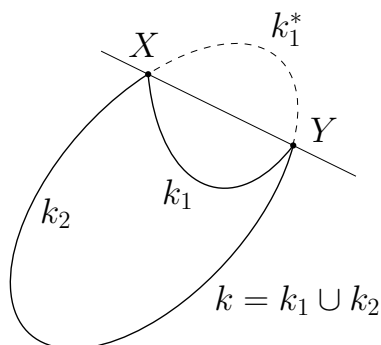
Úloha 3.1.3. *Mezi všemi uzavřenými rovinnými křivkami dané délky najděte tu, která ohraničuje plochu o největším obsahu. [Ped, str. 64][Pro, str. 28]*

Už ve starověku byla známa hypotéza, že hledanou křivkou je kružnice. Důkaz však teprve vyplynul z řešení, které zde vyložíme a které bývá někdy podle svého objevitele nazýváno Steinerův zvětšovací postup. Steiner ukázal, že ke každé rovinné uzavřené křivce k , která ohraničuje konvexní plochu a kterou není kružnice, lze nalézt takovou rovinnou uzavřenou křivku k'' , jež má stejnou délku a ohraničuje větší plochu než křivka k . Z tohoto vyplývá, že žádná křivka k , která není kružnice, nemůže být řešením izoperimetrické úlohy 3.1.3.

Řešení. V úvodu celého postupu ukážeme, proč stačí uvažovat pouze takové uzavřené křivky, které ohraničují konvexní plochu. Nemá-li křivka k tuto vlastnost, potom na ní existují dva různé body X , Y takové, že vnitřek úsečky XY leží celý vně útvaru, který ohraničuje křivka k (viz obr. 3.7). Tyto dva body rozdělí křivku k na dvě kratší křivky, označme je k_1 , k_2 . Uvažme osovou souměrnost podle osy XY a nahraďme například křivku k_1 křivkou s ní souměrně sdruženou (označme ji k_1^*) podle osy XY . Potom bude mít nová křivka $k^* = k_1^* \cup k_2$ zřejmě stejnou délku jako původní křivka k , ale bude ohraničovat větší plochu. Pro další diskuzi proto stačí uvažovat pouze křivky ohraničující konvexní plochy.

Zvolme nyní libovolnou křivku k , která ohraničuje konvexní plochu a kterou není kružnice, a na ní body A a B tak, aby rozdělily křivku k na dvě křivky k_1 , k_2

⁴Název pochází z latinského výrazu *perimeter* – obvod. Takto označované úlohy se zabývají hledáním extrémů na množině křivek dané délky.

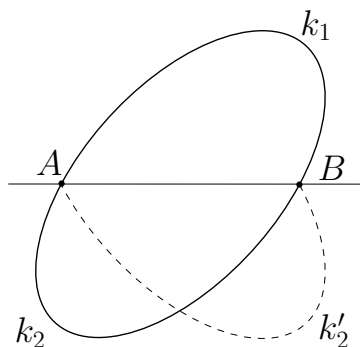


Obr. 3.7

stejně délky (viz obr. 3.8). Označme S_1 obsah plochy, kterou ohraničuje křivka k_1 s úsečkou AB , a S_2 obsah plochy, kterou ohraničuje křivka k_2 s úsečkou AB . Pak jistě pro obsah S plochy, kterou ohraničuje křivka k , platí $S = S_1 + S_2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $S_1 \geq S_2$. Nyní nahraďme křivku k_2 křivkou k'_2 , která je souměrně sdružená s k_1 podle přímky AB . Nová křivka, označme ji k' , složená z k_1 a k'_2 má zřejmě stejnou délku jako původní křivka k a obsah S' plochy, kterou ohraničuje, je roven

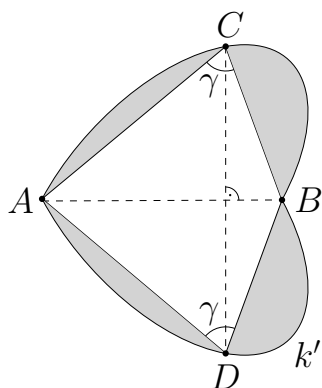
$$S' = 2 \cdot S_1 \geq S_1 + S_2 = S. \quad (3.9)$$

Jelikož může v tomto vztahu obecně nastat rovnost, není prozatím zamýšlený zvětšovací postup hotový.

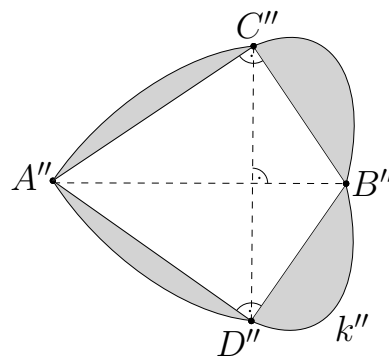


Obr. 3.8

Podle předpokladu křivka k není kružnice, tedy v úvodu je možné vybrat body A, B tak, aby křivky k_1, k_2 nebyly půlkružnice. Nově sestavená křivka k' , jež je souměrná podle přímky AB , proto také nebude kružnice, tudíž na ní lze najít takový bod C různý od bodů A, B , aby platilo $|\angle ACB| = \gamma \neq 90^\circ$. Nechť bod $D \in k'$ je obrazem bodu C v osové souměrnosti podle přímky AB . Vyřizneme-li z plochy ohraničené křivkou k' čtyřúhelník $ACBD$, rozpadne se zbytek této plochy na čtyři části, kterým budeme říkat výseče (viz obr. 3.9).



Obr. 3.9



Obr. 3.10

Představme si, že strany čtyřúhelníku jsou příčky spojené v bodech A, B, C, D pohyblivými klouby a že výseče jsou k těmto příčkám připevněny. Pozměňme nyní vzdálenost bodů A, B posunutím příček tak, aby pro nové polohy bodů A, B, C, D platilo $|\angle ACB| = |\angle ADB| = 90^\circ$. Označme $A''C''B''D''$ takový čtyřúhelník a k'' nově vzniklou křivku, kterou je hranice rovinného útvaru tvořeného čtyřúhelníkem $A''C''B''D''$ sjednoceného se zmíněnými výsečemi připevněnými k jeho stranám (viz obr. 3.10). Křivka k'' je opět souměrná podle osy AB . Jelikož každá z výsečí křivky k'' je shodná s příslušnou výsečí křivky k' , je délka k'' rovna délce k' . Rozdíl obsahů ploch ohraničených křivkami k'' a k' je pak roven rozdílu $S'' - S'$ obsahů čtyřúhelníků $A''C''B''D''$ a $ACBD$, pro které platí $|A''D''| = |AD|$, $|D''B''| = |DB|$, $|B''C''| = |BC|$, $|C''A''| = |CA|$, takže

$$\begin{aligned} S'' - S' &= |C''A''| \cdot |C''B''| \sin |\angle A''C''B''| - |CA| \cdot |CB| \sin |\angle ACB| = \\ &= |CA| \cdot |CB| (1 - \sin \gamma) > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Z nerovností (3.9) a (3.10) vyplývá $S'' > S' \geq S$, a proto křivka k'' má sice stejnou délku jako daná křivka k , ohraničuje však plochu o větším obsahu. Tím je Steinerův zvětšovací postup završen.⁵

Právě popsaný postup zvětšování plochy ohraničené křivkou k dané délky bychom mohli provést pro každou dvojici bodů A, B , které dělí křivku na dvě stejně dlouhé části, a pro každý bod $X \in k$ různý od bodů A a B , pro který platí $|\angle AXB| \neq 90^\circ$. Pokud takový bod X neexistuje, znamená to podle Thaletovy věty, že danou uzavřenou křivkou k je kružnice nad průměrem AB .

Zjistili jsme tedy, že pokud mezi všemi uzavřenými rovinnými křivkami dané délky můžeme najít takovou, která ohraničuje plochu o větším obsahu než všechny ostatní křivky, pak se jedná o kružnici. Nemáme však prozatím zaručeno,

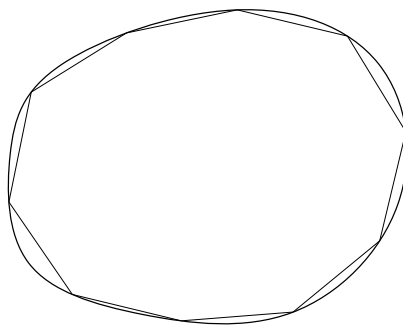
⁵Jak je zdůrazněno v [Pro, str. 31], podaný popis Steinerova postupu má slabé místo: při otáčení příček se žádné dvě výseče z obr. 3.9 nesmí překrýt, jinak je závěr o rozdílu obsahů neplatný. Na stejném místě citované knihy je však čtenář ujištěn, že tento nedostatek lze podrobnějším rozбором odstranit.

že taková křivka existuje (což byl nedostatek v úvahách Steinera). Příklady úloh, kde maximum neexistuje a kde bychom bez ověření jeho existence při použití podobné úvahy jako v naší úloze dospěli k chybnému závěru, lze nalézt například v [Pro, str. 32].

Abychom řešení izoperimetrické úlohy 3.1.3 udělali úplným, museli bychom ještě kromě Steinerovy konstrukce podat důkaz existence křivky dané délky, která ohraničuje plochu o maximálním obsahu. Takový úkol je poměrně náročný a je vyplněn v [Ped, str. 66–78]. Uvedeme pouze, že je založen na odvození nerovnosti

$$S \leq \frac{l^2}{4\pi}, \quad (3.11)$$

která omezuje velikost obsahu S plochy ohraničené jakoukoliv uzavřenou křivkou délky l . Nerovnost (3.11) je nejprve dokázána pro pravidelné n -úhelníky, poté pro n -úhelníky, jejichž všechny strany mají tutéž délku. Hranice takových n -úhelníků jsou uzavřené lomené čáry, které lze vepsat do každé uzavřené křivky délky l tak, že délky těchto uzavřených čar pro $n \rightarrow \infty$ konvergují k délce l , zatímco obsahy příslušných n -úhelníků konvergují k obsahu S plochy omezené původní uzavřenou křivkou (viz obr.3.11). Takovým způsobem je důkaz nerovnosti (3.11) v knize [Ped] ukončen. Dodejme, že rovnost v (3.11) zřejmě nastane pro uzavřenou křivku, kterou je kružnice délky l . Steinerův zvětšovací postup ukazuje, že pro žádnou jinou uzavřenou křivku rovnost v (3.11) nenastane. Kružnice je tak jediným řešením izoperimetrické úlohy 3.1.3. ♣



Obr. 3.11

Závěr

Tato diplomová práce je zaměřená na příklady geometrických extrémálních úloh, které byly v dostupné literatuře řešeny především dvěma metodami, a to geometrickými transformacemi a tečnovým principem. Volně tak navazuje na mou předchozí bakalářskou práci s názvem *Geometrické úlohy na maxima a minima*, ve které byly úkoly téhož zaměření řešeny prostředky matematické analýzy.

Text výkladových kapitol není pouhým překladem příslušných částí použité literatury. V mnoha případech bylo vhodné a účelné rozvést podrobněji argumenty původních důkazů a pečlivěji diskutovat možné případy. Některá pojednání a příklady jsou zpracovány pozměněným způsobem. Všechny tyto doplňky a změny konzultované se školitelem mi umožnily lépe a hlouběji poznat geometrickou problematiku, kterou jsem si pro svůj diplomový projekt vybrala.

Vytvořený text je vlastně sbírkou řešených příkladů, které mohou sloužit k upevnění a rozšíření znalostí jejího čtenáře v příslušných oblastech geometrie. Toto praktické využití geometrie může být užitečné zejména studentům učitelské matematiky, a to jak pro zdokonalení a prohloubení vlastních znalostí, tak pro možnou demonstraci zajímavých aplikací geometrie při jejich budoucí práci učitele, zejména ve třídách s rozšířenou výukou matematiky a fyziky. Jelikož problematika tečnového principu dosud není dostatečně prezentovaná v české matematické literatuře, domnívám se, že práce může být užitečná také díky zařazení teorie a řešených příkladů z této oblasti.

Seznam literatury

- [AMS] Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L.: *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser, Boston 2006
- [Dör] Dörrie H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York 1965
- [Ped] Pedoe D.: *Circles: A Mathematical View*, The Mathematical Association of America, USA 1995
- [Pro] Protasov V. Ju.: *Maksimumy i minimumy v geometrii*, Izdatelstvo Moskovskovo centra nepreryvnovo matematičeskovo obrazovania, Moskva 2005
- [KoBo] Kočandrlé M., Boček L.: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie*, Prometheus, Praha 2006