MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Gajdošíková

Geometrické úlohy na maxima a minima

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2010

Obsah

Úvod

Úlohy na maxima a minima se objevují nejenom ve vědě, strojírenství a jiných technických oborech, ale také v každodenním životě. Velká škála z nich má geometrický charakter: nalezení nejkratší přípustné cesty mezi dvěma objekty nebo zjištění jejich minimálního obvodu, povrchu či objemu. Toto jsou typy úloh, se kterými se setkáváme nejčastěji. Podobnými úlohami se lidé zabývají již po staletí a některé z nich jsou nyní považovány za proslulé. Již starověkým Řekům se podařilo objevit řešení podobných problémů, přestože k mnohým z nich neměli matematické nástroje pro provedení řádných důkazů.

Například je důležité zde zmínit Heronův objev (1. st. n. l.), že světelné paprsky vycházející z bodu A po odrazu zrcadla odcházejí do bodu B takovým způsobem, že vykonají nejkratší možnou cestou z A do B.

Jiný známý tzv. izoperimetrický problém byl zkoumán již např. Descartesem (1596–1650): Ze všech rovinných obrazců o pevně daném obvodu najděte ten, který má největší obsah. Takzvaný „dokonalý tvar“, který řeší tuto úlohu, je kruh, což bylo známo už za Descartesa (a pravděpodobně o hodně dříve), avšak řádný důkaz, který nám opravdu dává jistotu správného řešení, byl poprvé předložen Jacobem Steinerem v 19. století. [CRS, str. 373–376]

Trochu odlišný izoperimetrický problém je přisuzován Dido, legendární královně Kartága. Dido koupila od numidského krále takový kus země na pobřeží Afriky, který „může vymezit daná hovězí kůže“. Nařezáním kůže na úzké proužky vytvořila Dido dlouhou šňůru jisté délky, se kterou předpokládala, že ohraničí tak velké území, jaké je jen na pobřeží možné. Jak to provést nejlepším způsobem, to je úkol podobný předcházejícímu. Ve skutečnosti je řešení snadno uhodnutelné, ale obtížně dokazatelné. Je-li břeh moře přímočarý, bude největším pozemkem ohraničeným šňůrou dané délky půlkruh se středem na břehu moře. [Vi]

Jiný problém, který je jak zajímavý, tak i nečekaně lehce řešitelný, byl položen v roce 1775 I. F. Fagnanem: Vepište trojúhelník o minimálním obvodu do daného ostroúhlého trojúhelníku. Elegantní řešení tohoto relativně jednoduchého „síťového problému“ bylo podáno Hermannem Schwarzem (1843–1921), který ukázal, že hledaný vepsaný trojúhelník má vrcholy v patách výšek výchozího daného trojúhelníku. [CRS, str. 346–351]

Z mnoha známých přístupů k extremálním geometrickým úlohám jsem se v této práci zaměřila pouze na jejich nejběžnější prostředek, totiž řešení pomocí diferenciálního počtu. Spočívá v tom, že budeme vždy hledat nějakou funkci jedné nebo více proměnných, která danou situaci popisuje, a pak zjišťovat maxima nebo minima právě této funkce.

Sbírka je rozčleněna do dvou kapitol. V první redukujeme zkoumanou úlohu vždy na hledání extrému funkce jedné proměnné. Tato kapitola se dále dělí na dvě podkapitoly, přičemž v každé z nich je použita jiná metoda nalezení extrému. Druhá kapitola obsahuje několik ukázkových úloh, kde podobná redukce na vyšetřování extrémů funkce jedné proměnné není možná nebo je méně vhodná. Řešení těchto úloh proto převádíme na zkoumání extrému funkce dvou proměnných.

Tato sbírka je určená především pro studenty vysokých škol, kteří si chtějí ujasnit a osvojit danou problematiku na příkladech různých typů, avšak některé snazší úlohy (případně jejich jednodušší varianty) mohou být také použity ve výuce na střední škole.

Text je vysázen typografickým systémem TEX ve formátu LATEX2ε a obrázky jsou tvořeny programem Ipe.

Kapitola 1

Funkce jedné proměnné

1.1 Teoretický základ

Než přikročíme k samotnému řešení úloh, uvedeme několik základních vlastností funkcí jedné proměnné, které budou využity v této kapitole. Teorie je čerpaná převážně ze skript Diferenciální počet funkcí jedné proměnné [DoKu].

Existence extrémů funkcí jedné proměnné je často zaručena díky dobře známé vlastnosti spojitých funkcí:

Věta 1.1.1 (Weierstrassova[1]). *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Pak funkce f nabývá na I svého (absolutního) maxima a (absolutního) minima.*

Je důležité zmínit, že funkce f může nabývat svého maxima (minima) ve více bodech. K nalezení těchto bodů se pro diferencovatelné funkce běžně používá některá z následujících dvou vět.

Věta 1.1.2 (Věta o monotónnosti). *Nechť funkce f spojitá na intervalu I je diferencovatelná v každém vnitřním bodě intervalu I.*

a) Jestliže f je rostoucí na intervalu I, pak $f'(x) \geq 0$ pro všechny vnitřní body x intervalu I.

b) Jestliže $f'(x) \geq 0$ pro všechny vnitřní body x intervalu I, pak f je na tomto intervalu neklesající. Navíc, je-li $f'(x) > 0$ pro každý vnitřní bod x intervalu I, pak f je na tomto intervalu rostoucí.

Předpoklad, že množina $I \subset \mathbb{R}$ je (souvislý) interval, je nutný pro platnost části b). Podobně nerovnosti $f'(x) \leq 0$, resp. $f'(x) < 0$ charakterizují nerostoucí resp. klesající funkci na intervalu.

[1]Karl T. W. Weierstrass (1815–1897), německý matematik

Následující věta udává nutnou podmínku existence lokálního extrému, kterou uvedeme pod názvem běžným v anglické matematické literatuře.

Věta 1.1.3 (Fermatova[2]). *Nechť má funkce f v bodě x_0 své lokální maximum nebo minimum a nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak $f'(x_0) = 0$.*

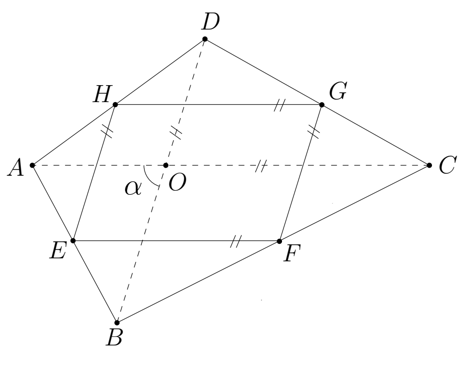
Ve speciálním případě, kdy f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na (a, b) a rovnice $f'(t) = 0$ nemá řešení na (a, b), nabývá taková funkce f svého (absolutního) maxima a minima v krajních bodech a, b intervalu a nikde jinde.

Věta 1.1.4 (Věta o mezihodnotě). *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $x \in (a, b)$ takový, že $f(x) = 0$.*

1.2 Řešené příklady – úprava na čtverec

V této podkapitole ukážeme, jak lze řešit extremální úlohy bez použití derivací. Kvadratickou funkci jedné proměnné, získanou vymodelováním daného geometrického problému, upravíme na čtverec a z takového vyjádření dotyčné funkce pak bude zřejmé, v jakém bodě nastává maximum či minimum.

Úloha 1.2.1. *Je dán konvexní čtyřúhelník o obsahu S. Uvažujme rovnoběžník se stranami rovnoběžnými s úhlopříčkami čtyřúhelníku a vrcholy ležícími po jednom na jeho stranách. Určete maximální obsah takového vepsaného rovnoběžníku.* [AMS, str. 36]



Obr. 1.1

Řešení. Označme $ABCD$ daný čtyřúhelník a O průsečík jeho úhlopříček. Pro libovolný rovnoběžník $EFGH$ s vrcholy $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$

[2]Pierre de Fermat (1601–1665), francouzský matematik, byl podle [Pro] patrně první, kdo dotyčnou podmínku popsal, a to v r. 1629 ve své práci *De Maximis et Minimis*.

(obr. 1.1) vyhovující podmínkám zadání položme $|AE| = x\,|AB|$, kde $0 < x < 1$. Z podobných trojúhelníků usoudíme, že $|EH| = x\,|BD|$ a $|EF| = (1-x)\,|AC|$. Je také zřejmé, že $\sin|\measuredangle FEH| = \sin\alpha$, kde α je úhel mezi úhlopříčkami AC a BD. Proto pro obsah vepsaného rovnoběžníku $EFGH$ platí

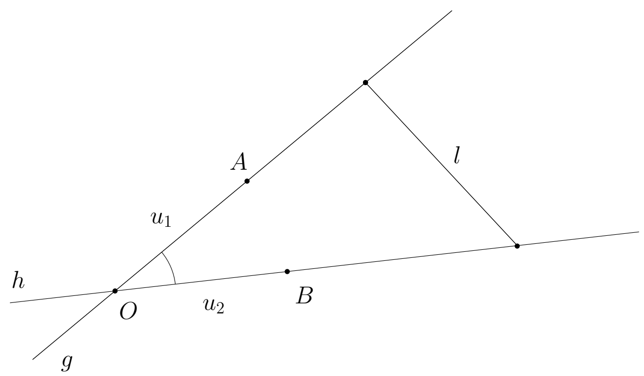
$$S_{EFGH} = |EH| \cdot |EF| \sin\alpha = x\,(1-x)\,|AC| \cdot |BD| \sin\alpha.$$

Jelikož $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\,|AC| \cdot |BD| \sin\alpha$, dostáváme $S_{EFGH} = 2x\,(1-x)\,S_{ABCD}$.

Maximum kvadratické funkce $x\,(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ na intervalu $(0,1)$ je zřejmě $\frac{1}{4}$ pro $x = \frac{1}{2}$. Proto je maximální obsah rovnoběžníku $EFGH$ roven $\frac{1}{2} S_{ABCD}$, a to nastane, pokud jeho vrcholy půlí strany daného čtyřúhelníku. ♣

Úloha 1.2.2. *Dvě lodě plují danými různoběžnými směry s konstantními rychlostmi. V 9 hodin je vzdálenost mezi nimi 20 mil, v 9:35 je vzdálenost 15 mil, zatímco v 9:55 je vzdálenost 13 mil. Zjistěte, kdy bude vzdálenost mezi loděmi minimální.* [AMS, str. 29]

Řešení. Předpokládejme, že jedna z lodí pluje po trajektorii g, zatímco druhá pluje po trajektorii h. Dále předpokládejme, že se trasy g a h protínají v bodě O (obr. 1.2). Označme α úhel mezi jejich směry pohybu a A, B pozice lodí v 9 hodin. Položme $u_1 = |OA|$ a $u_2 = |OB|$ pro $|\measuredangle BOA| = \alpha$ a $u_1 = -|OA|$ pro $|\measuredangle BOA| = 180° - \alpha$. Nechť v_1 a v_2 jsou rychlosti lodí. Použitím kosinové věty dostaneme



Obr. 1.2

pro vzdálenost l mezi loděmi v čase t vztah

$$l^2 = (u_1 + v_1 t)^2 + (u_2 + v_2 t)^2 - 2\,(u_1 + v_1 t)\,(u_2 + v_2 t)\cos\alpha,$$

kde $t = 0$ odpovídá reálnému času 9 hodin. Výraz l^2 tedy zadává kvadratickou funkci jedné proměnné t, kterou můžeme vyjádřit jako $l^2 = at^2 + 2bt + c$, kde a, b, c jsou reálné konstanty, jež mohou být vyjádřeny explicitně pomocí u_1, u_2, v_1, v_2. My však koeficienty a, b, c stanovíme jinak, totiž z údajů úlohy.

Předpokládejme, že naše jednotka času je 5 minut. Podle zadání úlohy dostáváme následující soustavu rovnic o třech neznámých a, b, c:

$$\begin{aligned} 400 &= c \\ 225 &= 49a + 14b + c \\ 169 &= 121a + 22b + c \end{aligned}$$

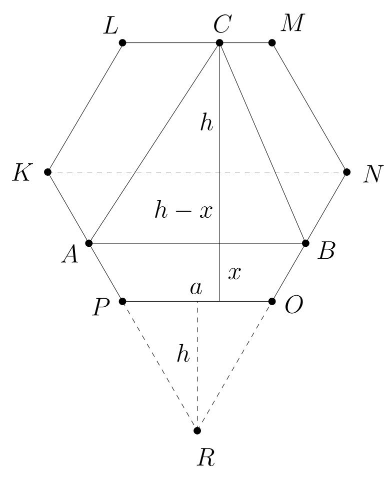
Jediné řešení této soustavy je $a = 1$, $b = -16$, $c = 400$, čímž dostáváme

$$l^2 = t^2 - 32t + 400 = (t - 16)^2 + 144.$$

Z toho vyplývá, že $l \geq 12$ a $l = 12$ pro $t = 16$, což odpovídá 80 minutám. Tedy vzdálenost mezi dvěma loděmi je minimální v 10:20. ♣

Úloha 1.2.3. *Ze všech trojúhelníků umístěných v daném pravidelném šestiúhelníku, jejichž jedna strana je rovnoběžná se stranou šestiúhelníku, vyberte ten, co má největší obsah.* [AMS, str. 36]

Řešení. Je okamžitě zřejmé, že vrcholy požadovaného trojúhelníku musí ležet na stranách šestiúhelníku. Označme vrcholy šestiúhelníku $KLMNOP$ a vrcholy hledaného trojúhelníku ABC. Nechť například strana AB trojúhelníku je rovnoběžná se stranou PO šestiúhelníku. Můžeme předpokládat, že PO je bližší z obou stran šestiúhelníku ke straně AB s touto vlastností. Pak je jasné, že bod C musí ležet na protilehlé straně LM šestiúhelníku (obr. 1.3).



Obr. 1.3

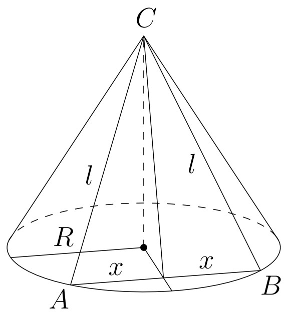
Nechť $a = |PO|$ a $2h$ značí vzdálenost mezi stranami PO a LM. Pak $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Označme x vzdálenost mezi úsečkami AB a PO, pro kterou platí $0 \leq x \leq h$. Pak vzdálenost bodu C od úsečky AB je rovna $2h - x$. Nechť bod R je průsečíkem polopřímek KP a NO. Z podobnosti rovnostranných trojúhelníků ABR a POR vyplývá závislost $|AB| = \frac{a(x+h)}{h}$. Tedy obsah trojúhelníku ABC je

$$S = \frac{a\,(x+h)\,(2h-x)}{2h}.$$

Kvadratická funkce $f\,(x) = (x+h)\,(2h-x) = 2h^2 + hx - x^2 = \frac{9}{4}h^2 - \left(\frac{h}{2} - x\right)^2$ má maximum $\frac{9}{4}h^2$ pro $x = \frac{h}{2}$. Tedy $S \leq \frac{9ah}{8}$, přičemž rovnost nastává pro $x = \frac{h}{2}$, kdy A, resp. B, je střed strany PK, resp. NO. Poloha bodu C na straně LM je přitom libovolná. ♣

Úloha 1.2.4. *Ze všech řezů daného rotačního kužele rovinami procházejícími jeho vrcholem najděte takový, který má největší obsah.* [AMS, str. 38]

Řešení. Je zřejmé, že hledaná rovina procházející vrcholem C rotačního kužele protne jeho kruhovou podstavu v tětivě hraniční kružnice s krajními body, které označíme A a B. Dále označme R poloměr podstavy kužele, délku strany kužele $l = |AC| = |BC|$ a $|AB| = 2x$, kde $0 < x \leq R$ (obr. 1.4). Řezem kužele je pak



Obr. 1.4

rovnoramenný trojúhelník ABC o obsahu $S\,(x) = x\sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{x^2\,(l^2 - x^2)}$. Úlohu proto můžeme po substituci $t = x^2$ redukovat na hledání maxima kvadratické funkce

$$f\,(t) = t\left(l^2 - t\right) \qquad \text{pro} \qquad 0 < t \leq R^2.$$

Doplněním na čtverec dostaneme

$$f\,(t) = t\left(l^2 - t\right) = -\left(t - \frac{l^2}{2}\right)^2 + \frac{l^4}{4}.$$

Úloha se dále rozpadá na dvě situace zvažující velikost l^2 ve vztahu k $2R^2$ (maximální hodnotě $2t$).

Jestliže platí $l^2 \leq 2R^2$, pak je funkce f rostoucí pro $t \in \left(0, \frac{l^2}{2}\right\rangle$ a klesající pro $t \in \langle\frac{l^2}{2}, R^2\rangle$. Maximum funkce f nastává pro $t = \frac{l^2}{2}$, proto je maxima $S\,(x)$

dosaženo pro $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Největší obsah řezu je v případě $l \leq R\sqrt{2}$ tedy roven $\frac{l^2}{2}$. Toho je dosaženo, je-li $|AB| = l\sqrt{2}$, což znamená, že $|\measuredangle ACB| = \frac{\pi}{2}$. Hledaným řezem je tak pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

V druhém případě platí $l^2 > 2R^2$. Pak je funkce f rostoucí na celém intervalu $(0, R^2\rangle$ a její maximum tedy nastává pro $t = R^2$. Maximální obsah $S(x)$ řezu kužele bude $R\sqrt{l^2 - R^2}$, a to pro $x = R$, kdy rovina řezu protne kruhovou podstavu v jejím průměru. ♣

Úloha 1.2.5. *Pro libovolný n-úhelník M vepsaný do jednotkové kružnice označme $s(M)$ součet čtverců nad jeho stranami. Ukažte, že*

a) jestliže $n = 3$, pak maximum $s(M)$ je 9, přičemž toho je dosaženo právě tehdy, když M je rovnostranný trojúhelník.

b) jestliže $n > 3$, pak $s(M) < 9$ a pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje vepsaný n-úhelník M takový, že platí $9 - \varepsilon < s(M) < 9$. [AMS, str. 37]

Řešení.

a) Nechť $n = 3$ a M je trojúhelník ABC. Pak AB je libovolná tětiva v jednotkové kružnici. Můžeme předpokládat, že bod C leží na větším z oblouků AB. Označme $|\measuredangle ACB| = \alpha$, kde α je konstanta, pro kterou platí $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Dále označme $|\measuredangle BAC| = \varphi$, odkud plyne $|\measuredangle ABC| = \pi - \alpha - \varphi$. Ze sinové věty dostaneme

$$\begin{aligned}
|AC|^2 + |BC|^2 &= 4\left[\sin^2\varphi + \sin^2(\alpha+\varphi)\right] = \\
&= 4\left[\frac{1-\cos 2\varphi}{2} + \frac{1-\cos 2(\alpha+\varphi)}{2}\right] = \\
&= 2\left[2 - \cos 2\varphi - \cos 2(\alpha+\varphi)\right] = \\
&= 2\left[2 - 2\cos(\alpha+2\varphi)\cdot\cos\alpha\right] \leq 4(1+\cos\alpha),
\end{aligned}$$

kde rovnost nastává, je-li $\alpha + 2\varphi = \pi$. Pak ovšem $\sin\varphi = \sin(\alpha+\varphi)$, neboli $|AC| = |BC|$. Pokud tedy bod C leží uprostřed uvažovaného oblouku AB, pak je $s(M)$ pro pevně danou tětivu AB největší.[3]

Zbývá nalézt maximum $s(M)$, pokud bude M rovnoramenný trojúhelník s ostrým úhlem α při hlavním vrcholu. V tomto případě dostáváme

$$\begin{aligned}
s(M) &= 4\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\alpha\right) = 4\left(1 + \cos\alpha + \sin^2\alpha\right) = \\
&= 4\left(2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha\right).
\end{aligned}$$

Kvadratická funkce $2 + t - t^2 = \frac{9}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ nabývá svého maxima $\frac{9}{4}$ pro $t = \frac{1}{2}$. Proto $s(M) \leq 9$, přičemž rovnost nastává pro $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, tj. pro $\alpha = \frac{\pi}{3}$. M je tehdy rovnostranný trojúhelník.

[3] Je-li uvažovaný oblouk AB půlkružnice, je pro všechny její body C hodnota $|AC|^2 + |BC|^2$ stejná podle Pythagorovy věty.

b) Nechť $n > 3$ a M je n-úhelník $A_1A_2\dots A_n$ vepsaný do kružnice. Součet vnitřních úhlů n-úhelníku M je $(n-2)\cdot\pi$. Z předpokladu $n \geq 4$ plyne nerovnost $n-2 \geq \frac{n}{2}$, což pro součet vnitřních úhlů n-úhelníku znamená, že je větší nebo roven $n\cdot\frac{\pi}{2}$. Existuje proto alespoň jeden z vnitřních úhlů M, který má velikost větší nebo rovnu $\frac{\pi}{2}$. Nechť je to například úhel $A_{n-1}A_nA_1$. Potom v $\triangle A_{n-1}A_nA_1$ platí $|A_1A_n|^2 + |A_{n-1}A_n|^2 \leq |A_1A_{n-1}|^2$, kde nastává rovnost pro $|\measuredangle A_{n-1}A_nA_1| = \frac{\pi}{2}$. Pro $(n-1)$-úhelník $M' = A_1A_2\dots A_{n-1}$ pak dostáváme $s(M) \leq s(M')$. Podobně (pokud $n-1 > 3$) najdeme $(n-2)$-úhelník M'' vepsaný do kružnice, pro který platí $s(M') \leq s(M'')$ atd., až skončíme u vepsaného trojúhelníku N, pro který platí $s(M) \leq s(N)$. Z části a) víme, že $s(N) \leq 9$, kde nastává rovnost pouze pro rovnostranný trojúhelník N. Kdyby existoval vepsaný čtyřúhelník M^* takový, že $s(M^*) = s(N) = 9$, byly by tři vrcholy čtyřúhelníku M^* vrcholy rovnostranného trojúhelníku N. V tom případě by měl vnitřní úhel u čtvrtého vrcholu M^* velikost $\frac{2\pi}{3}$,takže by platila ostrá nerovnost $s(M^*) < s(N)$. Z toho vyplývá, že v případě $n > 3$ platí $s(M) < 9$.

Předpokládejme dále, že $n \geq 4$. Dokážeme, že pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n-úhelník M vepsaný do jednotkové kružnice takový, že $s(M) > 9-\varepsilon$. Nechť $A_1A_2A_3$ je rovnostranný trojúhelník vepsaný do dané kružnice. Vybereme libovolné body A_4, $A_5\dots A_n$ na oblouku A_3A_1 tak, že $A_1A_2\dots A_n$ je konvexní n-úhelník (vepsaný do kružnice) a $|A_1A_n|^2 > |A_1A_3|^2 - \varepsilon$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} s(M) = |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + \sum_{i=3}^{n-1} |A_iA_{i+1}|^2 + |A_nA_1|^2 > \\ > 9 - \left(|A_1A_3|^2 - |A_1A_n|^2\right) > 9-\varepsilon, \end{aligned}$$

čímž je část b) dokázaná. ♣

Úloha 1.2.6. *Je dán pravidelný n-úhelník $M = A_1A_2\dots A_n$ s délkou strany a. Postupně konstruujme kružnice k_1, k_2,..., k_n se středy A_1, A_2,..., A_n tak, že kružnice k_1 má libovolný poloměr menší než a a každá kružnice k_{i+1} má vnější dotyk s kružnicí k_i, kde $i = 1, 2, \dots, n-1$. Najděte poloměr první kružnice k_1, pro kterou má část n-úhelníku M, jež je vně sestrojených n kružnic, maximální obsah.* [AMS, str. 37]

Řešení. Každý vnitřní úhel n-úhelníku M je roven $\frac{n-2}{n}\cdot\pi$, což je zároveň středový úhel kruhových výsečí, které na n-úhelníku vytínají sestrojené kružnice k_i. Obsah i-té z těchto výsečí je proto roven $\left[\left(\frac{n-2}{n}\cdot\pi\right)/2\pi\right]\cdot\pi r_i^2$, kde r_i je poloměr kružnice k_i. Označme S obsah celého n-úhelníku M a S_1 obsah jeho části vně kružnic k_i. Rozdělíme dále řešení úlohy na dva případy:

1. případ: Nechť $n = 2m$. V tomto případě má poslední kružnice k_n vnější dotyk s první kružnicí k_1. Navíc je-li x poloměr první kružnice, pak máme m kružnic k_{2i+1} o poloměru x a m kružnic k_{2i} o poloměru $a-x$, což je m výsečí

o obsahu $\frac{m-1}{2m} \cdot \pi x^2$ a m výsečí o obsahu $\frac{m-1}{2m} \cdot \pi \left(a-x\right)^2$. Z předcházejících úvah dostáváme

$$S_1 = S - \frac{1}{2}\left(m-1\right)\pi\left[x^2 + \left(a-x\right)^2\right] = S - \left(m-1\right)\pi\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right].$$

Po takovém rozepsání je zřejmé, že maximum funkce $S_1\left(x\right)$ pro $x \in (0, a)$ nastává pro $x = \frac{a}{2}$.

2. případ: Nechť $n = 2m+1$. Poloměr x kružnice k_1 mají i kružnice k_3, k_5,..., k_{2m+1}, zatímco kružnice k_2, k_4,..., k_{2m} mají poloměr $a-x$. Platí-li $x > \frac{a}{2}$, pak se kružnice k_1 a k_{2m+1} o shodném poloměru x protnou. Pokud nahradíme každou kružnici o poloměru x (resp. $a-x$) soustřednou kružnicí o poloměru $a-x$ (resp. x), bude obsah S_1 části n-úhelníku větší. Můžeme tedy uvažovat pouze $0 \le x \le \frac{a}{2}$. Kružnice k_i tehdy vytnou na mnohoúhelníku M $m+1$ výsečí o obsahu $\frac{2m-1}{2(2m-1)} \cdot \pi x^2$ a m výsečí o obsahu $\frac{2m-1}{2(2m-1)} \cdot \pi \left(a-x\right)^2$. Obsah S_1 je pak

$$\begin{aligned} S_1 &= S - \frac{\left(2m-1\right)\pi}{2\left(2m+1\right)}\left[\left(m+1\right)x^2 + m\left(a-x\right)^2\right] = \\ &= S - \frac{\left(2m-1\right)\pi}{2}\left[\left(x - \frac{ma}{2m+1}\right)^2 + \frac{\left(m^2+m\right)a^2}{\left(2m+1\right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Maximum funkce $S_1\left(x\right)$ proto nastává pro $x = \frac{ma}{2m+1}$. ♣

Úloha 1.2.7. *Vrcholy obecného $(n+1)$-úhelníku leží na stranách daného pravidelného n-úhelníku (na každé straně aspoň jeden) a dělí jeho hranici na části stejné délky. Jak sestrojit takový $(n+1)$-úhelník, aby jeho obsah byl:*

a) maximální;

b) minimální? [AMS, str. 37]

Řešení. Ze zadání plyne, že jedna strana $(n+1)$-úhelníku úplně leží na jedné straně n-úhelníku. Označme tyto strany A_1A_2 a B_1B_2 tak, aby body A_1, B_1, B_2, A_2 v tomto pořadí ležely na přímce. Další vrcholy obou mnohoúhelníků očíslujeme tak, aby pro každé $i = 2, 3, \ldots, n$ na straně A_iA_{i+1} pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ ležel vrchol B_{i+1} vepsaného $(n+1)$-úhelníku $B_1B_2\ldots B_{n+1}$ (přitom klademe $A_{n+1} = A_1$). Dále označme $b = |B_1B_2|$ a $a = |A_1A_2|$. Jelikož vrcholy $(n+1)$-úhelníku dělí hranici n-úhelníku délky na na $n+1$ částí stejné délky, platí $b = \frac{n}{n+1}a$.

Položme $x = |A_1B_1|$. Jelikož část hranice $B_2A_2B_3$ n-úhelníku má mít, stejně jako část B_1B_2, délku b, platí

$$|A_2B_2| = |A_1A_2| - |A_1B_1| - |B_1B_2| = a - x - b = a - \frac{n}{n+1}a - x = \frac{a}{n+1} - x,$$

$$|A_2B_3| = b - |A_2B_2| = \frac{n}{n+1}a - \left(\frac{a}{n+1} - x\right) = \frac{n-1}{n+1}a + x.$$

Indukcí pro $i = 2, 3, \ldots, n$ podobně odvodíme vztahy

$$|A_iB_i| = \frac{i-1}{n+1}a - x \qquad \text{a} \qquad |A_iB_{i+1}| = \frac{n-i+1}{n+1}a + x.$$

Velikost zbývající úsečky A_1B_{n+1} hranice n-úhelníku můžeme již snadno dopočítat:

$$|A_1B_{n+1}| = a - |A_nB_{n+1}| = a - \frac{n-n+1}{n+1}a - x = \frac{n}{n+1}a - x.$$

Jelikož každá z délek $|A_1B_1|$, $|A_1B_{n+1}|$, $|A_iB_i|$ a $|A_iB_{i+1}|$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$ musí být větší nebo rovna 0, dostáváme pro proměnnou x podmínku $0 \leq x \leq \frac{a}{n+1}$.

Zkoumaný obsah $S_{n+1}(x)$ vepsaného $(n+1)$-úhelníku $B_1B_2\ldots B_{n+1}$ dostaneme, pokud od obsahu S_n pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ odečteme obsah n trojúhelníků $B_iA_iB_{i+1}$ pro $i = 2, 3, \ldots, n+1$ (kde klademe kromě $A_{n+1} = A_1$ také $B_{n+2} = B_1$). V těchto trojúhelnících jsme již vyjádřili dvojice délek stran, které svírají stejný úhel $\varphi = \frac{(n-2)}{2}\pi$. Součet jejich obsahů je proto roven

$$\frac{\sin\varphi}{2} \cdot S(x),$$

kde

$$\begin{aligned}
S(x) &= |A_1B_{n+1}| \cdot |A_1B_1| + \sum_{i=2}^{n} |A_iB_i| \cdot |A_iB_{i+1}| = \\
&= \left(\frac{n}{n+1}a - x\right) \cdot x + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{i-1}{n+1}a - x\right) \cdot \left(\frac{n-i+1}{n+1}a + x\right) = \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{i-1}{n+1}a - x\right) \cdot \left(\frac{n-i+1}{n+1}a + x\right).
\end{aligned}$$

Stačí tedy najít extrémy funkce $S(x)$ na intervalu $\langle 0, \frac{a}{n+1}\rangle$.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{i-1}{n+1}a - x\right)\left(\frac{n-i+1}{n+1}a + x\right) = \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{(i-1)(n-i+1)}{(n+1)^2}a^2 - \frac{n-2i+2}{n+1}ax - x^2\right) = \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{(i-1)(n-i+1)}{(n+1)^2}a^2\right) + \frac{na}{n+1}x - nx^2.
\end{aligned}$$

(Koeficient u x jsme určili jako součet členů n-prvkové aritmetické posloupnosti s prvním členem $\frac{(2-n)a}{n+1}$ a posledním členem $\frac{na}{n+1}$.) První sčítanec upraveného výrazu je kladný a na proměnné x nezáleží, můžeme proto vyšetřování extrémů omezit na kvadratickou funkci $s(x) = \frac{na}{n+1}x - nx^2$. Z úpravy tohoto výrazu doplněním na čtverec

$$\frac{na}{n+1}x - nx^2 = -n\left(x - \frac{a}{2(n+1)}\right)^2 + \frac{na^2}{4(n+1)^2}$$

vyplývá, že funkce $s(x)$, a tedy i $S(x)$, nabývá na intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{n+1}\right\rangle$ svého maxima pro $x = \frac{a}{2(n+1)}$. Protože jde o střed zkoumaného intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{n+1}\right\rangle$, z průběhu kvadratické funkce je zřejmé, že její minimum bude v krajních bodech, tedy v bodech $x = 0$ a $x = \frac{a}{n+1}$.

Jelikož $S_{n+1}(x) = S_n - \frac{\sin\varphi}{2} \cdot S(x)$, obsah vepsaného $(n+1)$-úhelníku $S_{n+1}(x)$ má v bodě $x = \frac{a}{2(n+1)}$ minimum a v krajních bodech $x = 0$ a $x = \frac{a}{n+1}$ intervalu definičního oboru má svá maxima.

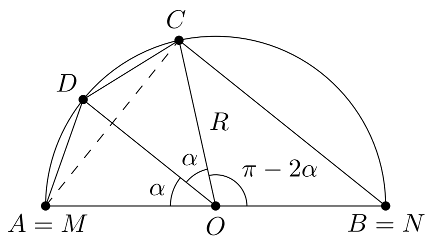
Všimněme si, že v případě $x = \frac{a}{2(n+1)}$, kdy je obsah $S_{n+1}(x) = S_n - \frac{\sin\varphi}{2} \cdot \cdot S(x)$ minimální, platí nejen $|A_1B_1| = x$, ale také $|B_2A_2| = x$ a $|B_1B_2| = 2nx$. To znamená, že krajní body té strany vepsaného $(n+1)$-úhelníku, jež celá leží na jedné straně n-úhelníku, dělí tuto stranu v poměru $\frac{1}{2} : n : \frac{1}{2}$. Oba případy $x = 0$ a $x = \frac{a}{n+1}$, kdy je obsah $S_{n+1}(x)$ maximální, lze (díky tomu, že v prvním případě $B_1 = A_1$ a ve druhém $B_2 = A_2$) popsat jako situaci, kdy jedna strana vepsaného $(n+1)$-úhelníku leží celá na jedné straně n-úhelníku tak, že jedna dvojice jejich krajních bodů splývá. ♣

1.3 Řešené příklady – derivace funkce jedné proměnné

Další běžně známá metoda hledání extrémů funkce jedné proměnné je použití první derivace (příp. i druhé derivace, kterou v našich výpočtech nevyužijeme, protože vždy vystačíme s úvahami o monotónnosti na základě znaménka její první derivace). Jak derivace funkce souvisí s jejími extrémy, popisují matematické věty na začátku kapitoly.

Úloha 1.3.1. *Ze všech čtyřúhelníků vepsaných do daného půlkruhu najděte ten, který má největší obsah.* [AMS, str. 37]

Řešení. Nechť MN je průměr daného půlkruhu, O je střed MN a $ABCD$ je libovolný čtyřúhelník, který je do daného půlkruhu vepsaný. Můžeme jistě uvažovat pouze případ, kdy $A = M$, $B = N$ a body C, D leží na hraniční půlkružnici (obr. 1.5). Je zřejmé, že obsah trojúhelníku ACD pro pevně daný bod C je maximální, pokud D leží uprostřed oblouku AC. Můžeme tedy předpokládat $|\measuredangle AOD| = |\measuredangle COD| = \alpha$, kde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Jelikož $\sin|\measuredangle BOC| =$



Obr. 1.5

$= \sin(\pi - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$, obsah čtyřúhelníku $ABCD$ rovný součtu obsahů $\triangle AOD$, $\triangle DOC$, $\triangle COB$ je dán rovností

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot (2\sin\alpha + \sin 2\alpha)\,,$$

kde $R = |OM|$. Máme tedy funkci $S = S(\alpha)$ jedné proměnné α kde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= R^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = R^2\left(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1\right) \\ &= R^2(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)\,. \end{aligned}$$

Z takového vyjádření derivace vyplývá, že $S(\alpha)$ je rostoucí na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ a klesající na intervalu $\left\langle\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Maxima funkce $S(\alpha)$ na daném intervalu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ je proto dosaženo pro $\alpha = \frac{\pi}{3}$, tedy pokud poloměry OC a OD rozdělí půlkruh na tři shodné části. Obsah hledaného vepsaného čtyřúhelníku je roven $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ♣

Úloha 1.3.2. *Konvexní čtyřúhelník o obsahu větším než $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ leží v jednotkovém kruhu. Ukažte, že střed kruhu leží uvnitř čtyřúhelníku.* [AMS, str. 37]

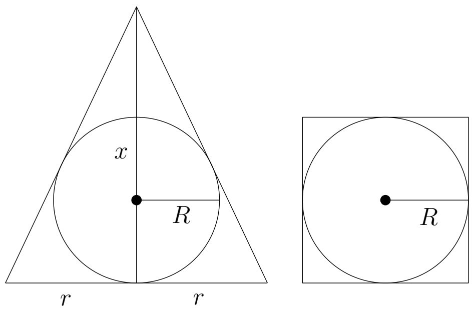
Řešení. Připusťme, že střed O kruhu leží mimo čtyřúhelník. Uvažujme průměr procházející středem O tak, že čtyřúhelník leží uvnitř jednoho půlkruhu, vymezeného tímto průměrem. Ze závěru řešení úlohy 1.3.1 vyplývá, že obsah takového čtyřúhelníku je menší nebo roven $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, což je spor. Proto musí střed kruhu ležet uvnitř čtyřúhelníku. ♣

Úloha 1.3.3. *Rotačnímu kuželu o objemu V_1 a povrchu S_1 a rotačnímu válci o objemu V_2 a povrchu S_2 je vepsána stejná koule. Dokažte, že:*

a) $3V_1 \geq 4V_2$;

b) $3S_1 \geq 4S_2$.

Rovněž zjistěte, pro který kužel nastane v a), resp. v b), rovnost. [AMS, str. 38]



Obr. 1.6

Řešení. Označme R poloměr vepsané koule, r poloměr podstavy kuželu a x jeho výšku.

Uvažujme řez kuželem, kolmý na jeho podstavu a procházející jeho vrcholem, tedy rovnoramenný trojúhelník se základnou délky $2r$ a délkou výšky na tuto základnu x, kterému je vepsána kružnice o poloměru R (obr. 1.6). Pro obsah S tohoto trojúhelníku platí

$$S = rx, \qquad \text{ale také} \qquad S = \frac{2r + \sqrt{x^2 + r^2} + \sqrt{x^2 + r^2}}{2} \cdot R.$$

Porovnáním dostaneme rovnici

$$\frac{rx}{R} = r + \sqrt{x^2 + r^2},$$

ze které snadno vyjádříme r^2 pomocí x a R:

$$r^2 = \frac{R^2 x}{x - 2R}.$$

Je zřejmé, že $x > 2R$ a že podstava jediného opsaného válce má poloměr R a jeho výška je $2R$.

a) Objem kuželu V_1 a objem válce V_2 jsou tedy rovny

$$V_1 = \frac{\pi r^2 x}{3} = \frac{\pi R^2 x^2}{3\,(x - 2R)} \qquad \text{a} \qquad V_2 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Poměr těchto objemů je

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x^2}{6R\,(x - 2R)} = \frac{\frac{x^2}{R^2}}{6\left(\frac{x}{R} - 2\right)}.$$

Po substituci $\frac{x}{R} = y$ dostaneme funkci $f\,(y) = \frac{y^2}{6(y-2)}$ jedné proměnné y na intervalu $(2, \infty)$, jejíž derivace je

$$f'\,(y) = \frac{y\,(y - 4)}{6\,(y - 2)^2}.$$

Funkce f je proto na intervalu $(2,4\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 4,\infty)$ rostoucí. Minimum funkce f je tedy v bodě $y=4$ a má hodnotu $\frac{4}{3}$. Proto $\frac{V_1}{V_2} \geq \frac{4}{3}$. Rovnost nastává pro $y=4$, tedy pro kužel o výšce $x=4R$.

b) Povrch kuželu S_1 a povrch válce S_2, podle výpočtů z úvodu řešení, jsou

$$S_1 = \pi r\left(r+\sqrt{x^2+r^2}\right) = \pi r\cdot\frac{rx}{R} = \frac{\pi R x^2}{x-2R},$$
$$S_2 = 2\pi R^2 + 2\pi R\cdot 2R = 6\pi R^2.$$

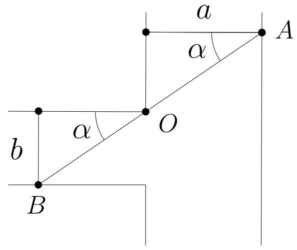
Poměr obsahů je pak

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{6R\,(x-2R)}.$$

Dostáváme tak stejnou funkci f definovanou na stejném intervalu jako v předchozí části, hledané minimum poměru $\frac{S_1}{S_2}$ je proto také stejné, tedy $\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{4}{3}$ s rovností pro jediné $y=4$. ♣

Úloha 1.3.4. *Kolmo k řece o šířce a je přiveden kanál o šířce b. Jakou maximální délku může mít kláda, kterou lze splavit z řeky do tohoto kanálu? (Předpokládáme, že tloušťka klády je vůči rozměrům řeky a kanálu zanedbatelná a že během pohybu zůstává kláda v horizontální poloze.)* [Děm, str. 139]

Řešení. Uvažujme libovolný úhel α mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$ a nechť AB je úsečka vedoucí napříč řekou a kanálem tak, že se dotýká vrcholu O, prvního rohu začátku kanálu ve směru splavování) a tvoří úhel α s jednou z jeho stěn (obr. 1.7). Pak délka takové úsečky je kladnou funkcí f úhlu α danou předpisem



Obr. 1.7

$$f(\alpha) = |AB| = |OA| + |OB| = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Kláda délky l může být splavena z řeky do kanálu, jestliže nerovnost $l \leq f(\alpha)$ platí pro každé $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Je proto jasné, že maximální délka klády l bude minimem (příp. infimem) funkce f na otevřeném intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Derivováním funkce dostáváme

$$f'(\alpha) = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\alpha - \frac{b}{a}\right).$$

Protože $\operatorname{tg}^3\alpha$ je rostoucí od 0 do ∞ pro α od 0 do $\frac{\pi}{2}$, existuje jediné $\alpha_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ takové, že $\operatorname{tg}^3\alpha = \frac{b}{a}$. Pro takové α_0 máme $f'(\alpha_0) = 0$ a navíc platí $f'(\alpha) < 0$ pro $\alpha \in (0, \alpha_0)$ a $f'(\alpha) > 0$ pro $\alpha \in \left(\alpha_0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tedy funkce f má na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ globální minimum v bodě α_0. Z rovnosti $\operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ vyplývá

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{\cos^2\alpha_0}{\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_0} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3}},$$

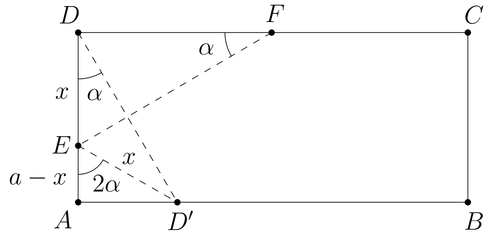
$$\sin^2\alpha_0 = 1 - \cos^2\alpha_0 = \frac{b^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3}},$$

$$f(\alpha_0) = \frac{a}{\cos\alpha_0} + \frac{b}{\sin\alpha_0} = a^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2} + b^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2},$$

$$f(\alpha_0) = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Maximální délka klády, kterou můžeme splavit z řeky do kanálu, je tudíž $l_{max} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$. ♣

Úloha 1.3.5. *Dlouhý list papíru mající tvar obdélníku $ABCD$ je přeložen podél úsečky EF, kde E je bod ležící na kratší straně AD a F bod ležící na delší straně CD tak, že vrchol D po přeložení papíru přejde do bodu D' na straně AB, který je tudíž s bodem D souměrně sdružený podle přímky EF (obr. 1.8). Jaký je nejmenší možný obsah přeložené části papíru, tj. trojúhelníku EFD?* [AMS, str. 36]



Obr. 1.8

Řešení. Nechť $a = |AD|$, $\alpha = |\measuredangle DFE| = |\measuredangle ADD'|$ a S je obsah trojúhelníku EFD. Obsah S získáme ze vztahu $S = \frac{1}{2} \cdot S_{DED'F} = \frac{1}{4}|EF| \cdot |DD'|$. Platí $|\measuredangle AED'| = 180^\circ - 2|\measuredangle DEF| = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$. Označme

$x = |DE| = |ED'|$. Pak z rovnosti $|EA| = x \cdot \cos 2\alpha$ vyplývá $a - x = x \cdot \cos 2\alpha$, tedy $x = \frac{a}{1+\cos 2\alpha}$. Odtud odvodíme $|EF| = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha(1+\cos 2\alpha)}$ a $|DD'| = \frac{a}{\cos\alpha}$. Nyní můžeme dosadit do výrazu pro obsah

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha)} = \frac{a^2}{8\sin\alpha\cos^3\alpha}.$$

Zbývá už jen najít maximum funkce $f(\alpha) = \sin\alpha\cos^3\alpha$ pro $\alpha \in (0\,^\circ, 90\,^\circ)$. Z derivace

$$f'(\alpha) = \cos^4\alpha - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(1 - 4\sin^2\alpha\right)$$

vidíme, že maximum f nastává pro $\alpha = 30\,^\circ$ a jeho hodnota je $f(30\,^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. (Předpokládáme, že list papíru je natolik dlouhý, že hodnota $|\measuredangle DEF| = 30\,^\circ$ je bodem $F \in DC$ dosažitelná.) Minimální obsah S je tedy roven $\frac{2\sqrt{3}a^2}{9}$. ♣

Úloha 1.3.6. *Je dána krychle $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Najděte bod M na hraně AB, pro který je:*

a) velikost úhlu $\angle B_1MC_1$ maximální;

b) velikost úhlu $\angle A_1MC_1$ minimální. [AMS, str. 38]

Řešení.

a) Pro jednoduchost uvažujme jednotkovou krychli $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Označme $|BM| = x$, kde $0 \le x \le 1$, a $|\measuredangle B_1MC_1| = \varphi$ (obr. 1.9). Dostáváme pak

$$|B_1M| = \sqrt{1+x^2}, \qquad |C_1M| = \sqrt{|B_1M|^2 + |B_1C_1|^2} = \sqrt{2+x^2}.$$

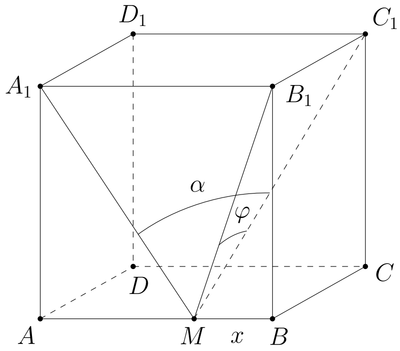
Jelikož $|\measuredangle MB_1C_1| = \frac{\pi}{2}$, platí

$$\cos\varphi = \frac{|B_1M|}{|C_1M|} = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2\,(2+x^2)}},$$

z čehož vyplývá $\cos\varphi \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy $\varphi \le \frac{\pi}{4}$. Maximum úhlu φ je $\frac{\pi}{4}$, což nastává při $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy pokud $x = 0$. Úhel $\angle B_1MC_1$ je proto maximální, jestliže body M a B splývají.

b) Označme $|BM| = x$, kde $0 \le x \le 1$, a $|\measuredangle A_1MC_1| = \alpha$ (obr. 1.9). Potom platí

$$|A_1M| = \sqrt{(1-x)^2 + 1},$$
$$|C_1M| = \sqrt{|BM|^2 + |BC_1|^2} = \sqrt{x^2+2},$$
$$|A_1C_1| = \sqrt{2}.$$



Obr. 1.9

Z kosinové věty vyplývá

$$\cos\alpha = \frac{|A_1M|^2 + |C_1M|^2 - |A_1C_1|^2}{2\,|A_1M|\,|C_1M|} = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{(1-x)^2 + 1}\cdot\sqrt{x^2+2}}.$$

Jelikož je výraz v čitateli x^2-x+1 pro všechna x kladný, můžeme úlohu redukovat na hledání minima funkce

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2)}$$

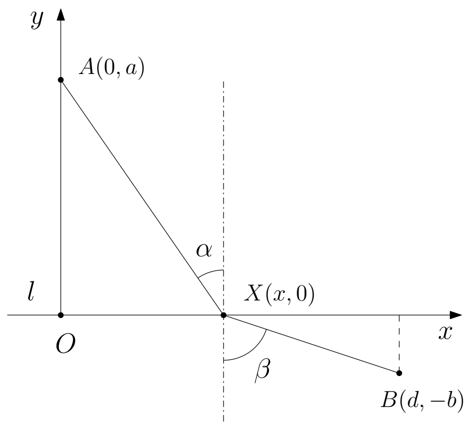
na témže intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Derivace této funkce je

$$f'(x) = \frac{2\,(x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 + 6x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2 (x^2 + 2)^2}.$$

Znaménko $f'(x)$ je shodné se znaménkem hodnoty funkce $h(x) = x^3 - 3x^2 + {} + 6x - 2$, jelikož ostatní činitelé ve vyjádření $f'(x)$ jsou kladní. Protože derivace $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3\,(x-1)^2 + 3$ je kladná pro všechna x, tedy h je rostoucí na celém $\mathbb{R}$, a jelikož $h(0) = -2$ a $h(1) = 2$, pak podle věty o mezihodnotě existuje právě jedno $x_0 \in (0, 1)$, pro které platí $h(x_0) = 0$. Funkce f je proto na intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle x_0, 1\rangle$ rostoucí. Zároveň platí $f(0) = \frac{1}{4}$ a $f(1) = \frac{1}{3}$. Funkce f, a tedy i zkoumaná hodnota $\cos\alpha$, má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ své maximum v bodě $x = 1$. Úhel $\angle A_1MC_1$ je proto minimální, pokud body M a A splývají. ♣

Úloha 1.3.7. *V rovině je dána přímka l a dva body A a B, které leží v různých polorovinách určených přímkou l. V polorovině obsahující bod A se částice pohybuje konstantní rychlostí v_1 a v polorovině obsahující bod B se pohybuje konstantní rychlostí v_2. Najděte cestu z bodu A do bodu B, již částice urazí za nejkratší dobu.* [AMS, str. 30]

Řešení. Uvažme souřadnicový systém Oxy tak, že se osa x shoduje s přímkou l a bod A leží na kladné části osy y. Souřadnicové vyjádření daných bodů je tedy $A = (0, a)$ a $B = (d, -b)$. Bez újmy na obecnosti můžeme kromě $a > 0$ a $b > 0$ předpokládat také $d > 0$ (obr. 1.10). Dále předpokládejme, že bod X, ve kterém



Obr. 1.10

částice při cestě z A do B protne osu x, má souřadnice $(x, 0)$. Pak dostáváme

$$|AX| = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \text{a} \qquad |BX| = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Čas, který částice potřebuje k projití lomené trajektorie AXB, je pak

$$t\,(x) = \frac{|AX|}{v_1} + \frac{|BX|}{v_2} = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Tak jsme převedli naši úlohu na hledání nejmenší hodnoty funkce $t = t\,(x)$, kde $0 \le x \le d$ (mimo tento interval zřejmě nemůže mít taková funkce minimum). Snadným derivováním dostáváme

$$t'\,(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Z úpravy výrazu

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}}$$

vyplývá, že funkce $u_1\,(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ je rostoucí na intervalu $\langle 0, d\rangle$. Podobně je na tomto intervalu rostoucí funkce $u_2\,(x) = -\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, tedy i $t'\,(x) = \frac{u_1(x)}{v_1} + \frac{u_2(x)}{v_2}$ je rostoucí na $\langle 0, d\rangle$. Jelikož je zřejmě $t'\,(x)$ spojitá na intervalu $\langle 0, d\rangle$, $t'\,(0) < 0$ a $t'\,(d) > 0$, věta o mezihodnotě nám říká, že pro (jediné) $x_0 \in (0, d)$ platí

$t'(x_0) = 0$. Nyní je zřejmé, že $t'(x) < 0$ pro $x \in (0, x_0)$ a $t'(x) > 0$ pro $x \in$ $\in (x_0, d)$. Z věty o monotónnosti plyne, že $t(x)$ je klesající na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle x_0, d \rangle$. Tedy $t(x)$ má své minimum v bodě x_0. Všimněme si, že pro bod $X_0 = (x_0, 0)$ může být podmínka $t'(x_0) = 0$ zapsána jako

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d - x_0}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x_0)^2}} = \frac{\sin\beta}{v_2},$$

kde α je úhel mezi AX_0 a Oy, zatímco β je úhel mezi BX_0 a přímkou vedenou bodem X_0 rovnoběžně s osou y. Existuje tedy jediný bod X_0 na přímce l takový, že částice urazí cestu AX_0B v minimálním čase. Tento bod je charakterizován rovnicí

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

♣

Poslední rovnost se v optice nazývá *Snellův-Fermatův* zákon a popisuje difrakci světelných paprsků při přechodu z jednoho homogenního prostředí do jiného. Tento zákon je založený na základním principu, že se světelné paprsky šíří přímočaře nejrychlejší cestou.

Úloha 1.3.8. *Dvě kružnice s vnějším dotykem jsou vepsány do zadaného úhlu Opq. Najděte takové body A a D na polopřímce p a body B a C na polopřímce q, aby úsečky AB a CD byly rovnoběžné, aby čtyřúhelník $ABCD$ obsahoval dané dvě kružnice a aby úsečka AD měla minimální délku.* [AMS, str. 31]

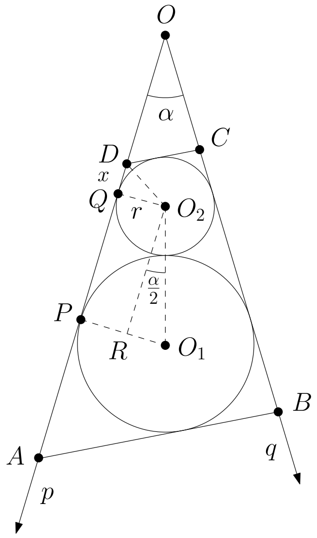
Řešení. Nechť r a R, kde $r < R$, jsou poloměry daných kružnic a O_2 a O_1 jejich středy (obr. 1.11). Můžeme předpokládat, že AB je tečna ke kružnici s poloměrem R a DC tečna ke kružnici s poloměrem r. Nechť P a Q jsou body dotyku těchto dvou kružnic s AD, kde P leží mezi body A a Q. Položme $x = |QD|$. Nyní budeme hledat délku úsečky AD jako funkci proměnné x z otevřeného intervalu $(0, x_0)$, kde $x_0 = |QO|$. Jelikož $|O_1O_2| = R + r$ a PO_1O_2Q je pravoúhlý lichoběžník, dostáváme pomocí Pythagorovy věty

$$|O_1O_2|^2 = (R + r)^2 = |PQ|^2 + (R - r)^2,$$
$$|PQ| = \sqrt{R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Na druhou stranu platí

$$|\measuredangle PAO_1| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\measuredangle QDC|) = 90^\circ - |\measuredangle QDO_2| = |\measuredangle QO_2D|,$$

tedy $\triangle AO_1P \sim \triangle O_2DQ$. Odtud plyne $\frac{R}{|AP|} = \frac{x}{r}$, neboli $|AP| = \frac{Rr}{x}$. Délku AD proto můžeme vyjádřit jako $|AD| = |AP| + |PQ| + |QD| = f(x) + 2\sqrt{Rr}$, kde $f(x) = x + \frac{Rr}{x}$.



Obr. 1.11

Nyní musíme najít minimum funkce $f(x)$ na zmíněném intervalu $(0, x_0)$. Upozorněme, že relace $\triangle PO_1O \sim \triangle QO_2O$ nám udává, že $\frac{|QO|}{r} = \frac{|PQ|}{R-r}$, odkud $|QO| = x_0 = \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}$.

Derivováním dostaneme $f'(x) = 1 - \frac{Rr}{x^2}$, z čehož snadno vyplývá, že $f(x)$ je klesající pro $x \in \left(0, \sqrt{Rr}\right\rangle$ a rostoucí pro $x \in \left\langle\sqrt{Rr}, \infty\right)$. Pro další úvahy bude proto jistě důležité, která z hodnot x_0 a $\sqrt{Rr}$ je větší. Z pravoúhlého trojúhelníku OO_2Q dostáváme

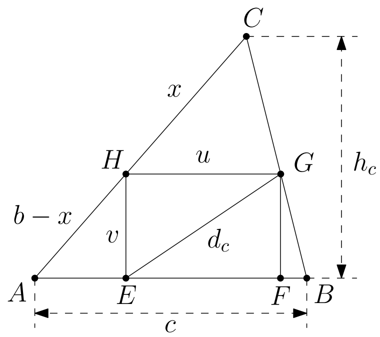
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|O_2Q|}{|OQ|} = \frac{r}{\frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}} = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}.$$

Kdy platí $x_0 \le \sqrt{Rr}$? Zřejmě $x_0 \le \sqrt{Rr} \Leftrightarrow \frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r} \le \sqrt{Rr} \Leftrightarrow 3r \le R$. Pro $3r \le R$ platí $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R}{r}} - \sqrt{\frac{r}{R}}\right) \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3r}{r}} - \sqrt{\frac{r}{3r}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$, odkud $\alpha \ge 60^\circ$. Podobně pro $3r > R$ se odvodí $\alpha < 60^\circ$. Rozlišíme tedy dva případy:

1. případ: $3r \le R$ ($\alpha \ge 60^\circ$). Pak platí $x_0 \le \sqrt{Rr}$ a $f(x)$ je tedy klesající na intervalu $(0, x_0)$, tzn. že $f(x)$ nemá na tomto intervalu minimum. Jinými slovy, pokud $3r \le R$, pak úloha nemá řešení.
2. případ: $3r > R$ ($\alpha < 60^\circ$). Platí $x_0 > \sqrt{Rr}$. Je zřejmé, že na intervalu $(0, x_0)$ má $f(x)$ minimum v bodě $x_1 = \sqrt{Rr}$ a jeho hodnota je $f\left(\sqrt{Rr}\right) = 2\sqrt{Rr}$. Proto minimální délka úsečky AD je $f(x_1) + 2\sqrt{Rr} = 4\sqrt{Rr}$. Jelikož platí $x_1 = \sqrt{Rr} = \frac{1}{2}|PQ|$, konstrukce odpovídajícího lichoběžníku $ABCD$ může být provedena určením bodu D na úsečce QO tak, že $|QD| = \frac{1}{2}|PQ|$. Sestrojení bodů A, B, C je už pak zřejmé. ♣

Úloha 1.3.9. *Pro libovolný trojúhelník T o obsahu $S(T)$ označme $d(T)$ minimální délku úhlopříčky obdélníku, který je do trojúhelníku T vepsaný (tak, že jeho vrcholy leží uvnitř stran T). Pro jaké trojúhelníky T je poměr $\frac{d^2(T)}{S(T)}$ maximální?* [AMS, str. 36]

Řešení. Nechť T je trojúhelník ABC s délkami stran a, b a c a $EFGH$ je obdélník vepsaný do T, přičemž E a F leží na straně AB, G leží na BC a H leží na CA (obr. 1.12). Položme $x = |CH|$, $u = |HG|$, $v = |HE|$, $d_c = |EG|$. Použitím



Obr. 1.12

odpovídajících párů podobných trojúhelníků dostáváme $\frac{u}{c} = \frac{x}{b}$ a $\frac{v}{h_c} = \frac{b-x}{b}$, kde h_c je výška trojúhelníka ABC z vrcholu C. Dosazením do Pythagorovy věty dostáváme

$$d_c^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{cx}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_c(b-x)}{b}\right)^2,$$

Pravá strana této rovnice je kvadratická funkce proměnné x, která, jak je patrno z vyjádření

$$d_c^2 = \left(\frac{\sqrt{c^2+h_c^2}}{b}x - \frac{h_c^2}{\sqrt{c^2+h_c^2}}\right)^2 + \frac{c^2h_c^2}{c^2+h_c^2},$$

nabývá své minimální hodnoty $d_c^2 = \frac{c^2h_c^2}{c^2+h_c^2} = \frac{4S^2(T)}{c^2+h_c^2}$ pro $x_0 = \frac{h_c^2 b}{c^2+h_c^2}$. (Je zřejmé, že $0 < \frac{h_c^2}{c^2+h_c^2} \cdot b < 1 \cdot b$, tedy $x_0 \in (0, b)$.) Podobně kdyby dva vrcholy obdélníku ležely na straně BC nebo CA, dostaneme příslušná minima $d_a^2 = \frac{4S^2(T)}{a^2+h_a^2}$ a $d_b^2 = \frac{4S^2(T)}{b^2+h_b^2}$. Porovnejme nyní hodnoty $a^2 + h_a^2$, $b^2 + h_b^2$ a $c^2 + h_c^2$ v jednom trojúhelníku ABC. Jestliže $a \le b$, pak z rovnic $a^2 + h_a^2 = a^2 + b^2 \sin^2\gamma$ a $b^2 + h_b^2 = b^2 + a^2 + a^2 \sin^2\gamma$ vyplývá, že $a^2 + h_a^2 \ge b^2 + h_b^2$. Předpokládejme nyní $a \le b \le c$. Pak pro nejmenší úhlopříčku platí $d^2(T) = d_c^2 = \frac{4S^2(T)}{c^2+h_c^2}$ a pro zkoumaný poměr dostáváme

$$\frac{d^2(T)}{S(T)} = \frac{2c \cdot h_c}{c^2 + h_c^2} = \frac{2}{\frac{1}{x} + x},$$

kde $x = \frac{h_c}{c}$. Jelikož platí $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, tedy $\alpha \leq 60\,^\circ$, máme

$$\frac{h_c}{c} = \frac{b \cdot \sin\alpha}{c} \leq \frac{c \cdot \sin 60\,^\circ}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

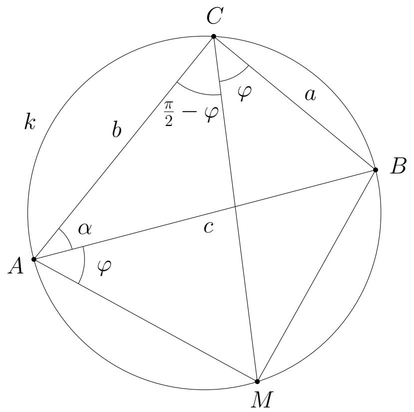
a jelikož je funkce $f(x) = \frac{1}{x} + x$ klesající pro $x \in (0,1)$ (neboť $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$), vyvozujeme, že

$$\frac{d^2(T)}{S(T)} \leq \frac{2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \tag{1.1}$$

Rovnost nastává, právě když $\frac{h_c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tedy pokud platí $c = b$ a $\alpha = 60\,^\circ$ (což vyplývá z nerovnosti (1.1)). Zkoumaný poměr je proto maximální pro rovnostranné trojúhelníky. ♣

Úloha 1.3.10. *Pravoúhlému trojúhelníku ABC ($|\measuredangle BCA| = 90\,^\circ$) je opsána kružnice k. Najděte na této kružnici bod M, pro který je součet $|MA| + |MB| + |MC|$ maximální.* [AMS, str. 37]

Řešení. Nechť M je bod na kružnici k opsané zmíněnému trojúhelníku ABC a nechť $d(M) = |MA| + |MB| + |MC|$. Jestliže M leží na jednom z oblouků AC nebo BC, pak pro obraz M' bodu M v osové souměrnosti podle osy AB dostáváme $d(M') \geq d(M)$, jelikož $|MA| = |M'A|$, $|MB| = |M'B|$ a $|MC| \leq |M'C|$. Můžeme tedy uvažovat pouze body M ležící na kružnici k tak, že úsečka MC protne úsečku AB (obr. 1.13). Délky stran trojúhelníku ABC a jeho vnitřní úhel BAC



Obr. 1.13

označme standardním způsobem a, b, c a α. Položme $\varphi = |\measuredangle MCB| = |\measuredangle MAB|$ (obvodový úhel příslušný oblouku MB). Podle rozšířené sinové věty pro $\triangle BMC$ a $\triangle AMC$ platí

$$|MA| = c \cdot \sin(90\,^\circ - \varphi) = c \cdot \cos\varphi, \qquad |MB| = c \cdot \sin\varphi \qquad \text{a}$$
$$|MC| = c \cdot \sin(\alpha + \varphi) = c \cdot \sin\alpha\cos\varphi + c \cdot \cos\alpha\sin\varphi = a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi.$$

Sečtením těchto tří rovností dostaneme pro zkoumanou hodnotu $d(M)$ vyjádření

$$d(M) = (a+c)\cos\varphi + (b+c)\sin\varphi = f(\varphi).$$

Derivováním této funkce jedné proměnné φ dostáváme

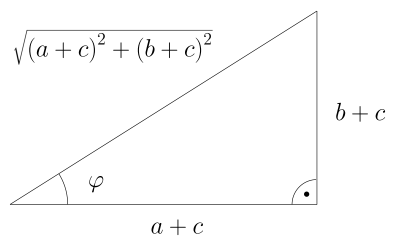
$$f'(\varphi) = -(a+c)\sin\varphi + (b+c)\cos\varphi.$$

Odtud vyplývá, že funkce f je na intervalu $\left\langle 0, \operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}\right\rangle$ rostoucí a na intervalu $\left\langle \operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ klesající. Maximum tedy nastává pro $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}$ a má hodnotu

$$d(M) = (a+c)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}\right) + (b+c)\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}\right).$$

Po zjednodušení (viz obr. 1.14) dostaneme

$$d(M) = \frac{(a+c)^2}{\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}} + \frac{(b+c)^2}{\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}} = \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}.$$



Obr. 1.14

Vzdálenosti hledaného bodu M od bodů A, B (určující jeho polohu) jsou dány vzorci

$$|MA| = c\cdot\cos\varphi = \frac{c\cdot(a+c)}{\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}},$$

$$|MB| = c\cdot\sin\varphi = \frac{c\cdot(b+c)}{\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}}.$$

♣

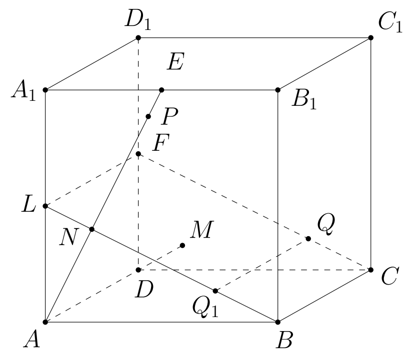
Poznámka. Úlohu je možné též řešit použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro dvojici vektorů $u = (u_1, u_2) = (a+c, b+c)$ a $v = (v_1, v_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, podle které platí

$$d(M) = \langle u, v\rangle \le \sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} = \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2},$$

přitom rovnost nastane, právě když jsou vektory u, v lineárně závislé, což je případ $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b+c}{a+c}$.

Úloha 1.3.11. *Délka hrany krychle $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je 1. Na polopřímce AD je umístěn bod M tak, že D leží mezi A a M a $|AM| = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Nechť E je střed úsečky A_1B_1 a F střed úsečky DD_1. Jaká je maximální možná hodnota poměru $\frac{|MP|}{|PQ|}$, když bod P leží na úsečce AE a bod Q leží na úsečce CF?* [AMS, str. 34]

Řešení. Jestliže L bude střed úsečky AA_1, pak bude zřejmě $BLFC$ obdélník (obr. 1.15). Protože $AE \perp BL$, z podobnosti $\triangle ANL \sim \triangle AA_1E$, kde N je



Obr. 1.15

průsečík polopřímek AE a BL, dostáváme $|AN| = |AA_1| \cdot \frac{|AL|}{|AE|} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Uvažujme libovolné body P a Q na úsečkách AE a CF v tomto pořadí. Nechť bod Q_1 leží na úsečce BL tak, že $QQ_1 \parallel BC$ a nechť $x = |AP| - |AN|$ a $y = |NQ_1|$. Pak dostáváme

$$|PQ_1|^2 = x^2 + y^2, \qquad |PQ|^2 = |QQ_1|^2 + |PQ_1|^2 = 1 + \left(x^2 + y^2\right)$$
$$|MP|^2 = |AM|^2 + |AP|^2 = \frac{8}{5} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + x\right)^2.$$

Proto

$$\frac{|MP|^2}{|PQ|^2} = \frac{\frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{\frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2}{1 + x^2},$$

kde platí rovnost pro $y = 0$, což nastane, pokud $QN \parallel BC$. Toto vymezuje pozici bodu Q pro hledané maximum. Jelikož $|AN| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $|AE| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, pro $x = |AP| - |AN|$ platí $x \in \Delta = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}} \right\rangle$. Nyní zbývá nalézt maximum funkce

$$f(x) = \frac{\frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2}{1 + x^2} = 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}x}{1 + x^2},$$

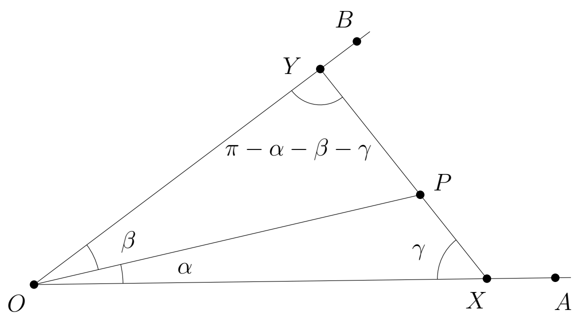
kde $x \in \Delta$. Funkce $g(x) = \frac{2+\sqrt{5}x}{1+x^2}$ má derivaci

$$g'(x) = \frac{\sqrt{5} - 4x - \sqrt{5}x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{-\sqrt{5}\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

Jmenovatel funkce $g'(x)$ je vždy kladný a čitatel je na intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ kladný a na intervalu $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$ záporný. Odtud plyne, že $g(x)$ je na intervalu $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle$ rostoucí a na intervalu $\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right\rangle$ klesající. Jelikož je $g(x)$ na intervalu $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right\rangle$ spojitá, má tedy maximum $g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{2}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tudíž maximální hodnota výrazu $\frac{|MP|}{|PQ|}$ je $\sqrt{2}$. Toho je dosaženo, pokud $QN \| BC$ a $|AP| = 2\,|AN| = 2\sqrt{5}$.♣

Úloha 1.3.12. *Je dán úhel AOB a jeho vnitřní bod P. Najděte na polopřímce OA bod X a na polopřímce OB bod Y tak, aby zadaný bod P ležel na úsečce XY a aby součin $|PX| \cdot |PY|$ byl minimální.* [La, str. 264]

Řešení. Označme neměnné úhly $|\measuredangle XOP| = \alpha$, $|\measuredangle YOP| = \beta$ a proměnný úhel $|\measuredangle OXP| = \gamma$, který určuje polohy bodů X a Y, přičemž $\gamma \in (0, \pi - \alpha - \beta)$ (obr. 1.16). Ze sinové věty pro trojúhelníky OPX a OPY dostaneme



Obr. 1.16

$$\frac{|PX|}{\sin\alpha} = \frac{|OP|}{\sin\gamma} \qquad \text{a} \qquad \frac{|PY|}{\sin\beta} = \frac{|OP|}{\sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma)}.$$

Pro zkoumaný součin pak platí

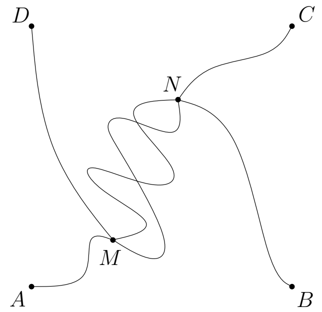
$$|PX| \cdot |PY| = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma)} \cdot |OP|^2 .$$

Jelikož $\sin\alpha$, $\sin\beta$ a $|OP|$ jsou kladné konstanty, stačí se omezit na hledání maxima kladné funkce jedné proměnné

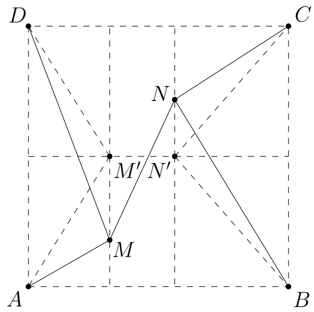
$$f(\gamma) = \sin\gamma \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Její derivace je

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= \cos\gamma \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma) - \sin\gamma \cdot \cos(\pi - \alpha - \beta - \gamma) = \\ &= \sin[(\pi - \alpha - \beta - \gamma) - \gamma] = \sin(\alpha + \beta + 2\gamma). \end{aligned}$$



Obr. 1.17



Obr. 1.18

Probíhá-li proměnná γ interval $(0, \pi - \alpha - \beta)$, pak hodnota $\alpha + \beta + 2\gamma$ probíhá interval $(\alpha + \beta, 2\pi - \alpha - \beta)$. Číslo π, pro které je sinus roven 0, je vnitřním bodem tohoto intervalu, neboť $0 < \alpha + \beta < \pi$. Vidíme proto, že $f'(\gamma) > 0$ pro $\gamma \in \left(0, \frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right)$ a $f'(\gamma) < 0$ pro $\gamma \in \left(\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}, \pi - \alpha - \beta\right)$. Funkce f má proto na intervalu $(0, \alpha + \beta)$ maximum v bodě $\gamma = \frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$. Pro takovéto γ jsou oba úhly u vrcholů X, Y trojúhelníku XOY shodné. Součin $|PX| \cdot |PY|$ je tedy minimální, právě když platí $|OX| = |OY|$, tj. když trojúhelník XOY je rovnoramenný se základnou XY. ♣

Poznámka. Úlohu by bylo možné řešit i bez použití derivace. Pro zkoumanou funkci f platí

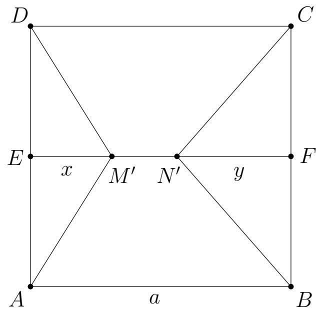
$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \sin\gamma \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta + 2\gamma - \pi) - \cos(\pi - \alpha - \beta)\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\alpha + \beta)\right), \end{aligned}$$

přitom rovnost a tedy i maximum funkce f nastane, právě když $\alpha + \beta + 2\gamma - \pi$, úhel z intervalu $(\alpha + \beta - \pi, \pi - \alpha - \beta)$, je roven 0. To je případ, kdy $\gamma = \frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$, což je přípustná hodnota z intervalu $(0, \pi - \alpha - \beta)$.

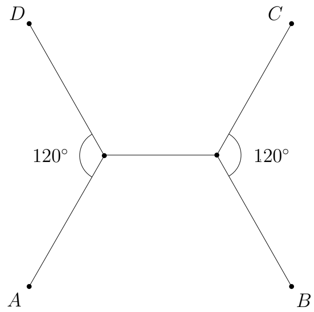
Úloha 1.3.13. *Čtyři města leží ve vrcholech čtverce. Najděte systém cest spojujících tato města tak, aby součet délek všech cest byl minimální.* [AMS, str. 38]

Řešení. Označme zadaná města A, B, C, D jako vrcholy čtverce $ABCD$. Uvažujme libovolný systém cest, který je všechny propojuje. Můžeme zřejmě předpokládat, že tyto cesty leží uvnitř čtverce $ABCD$.

Na cestě z A do C označme M a N první a poslední průsečík této cesty s cestou, vedoucí z B do D (obr. 1.17). Součet délek všech cest tohoto sytému můžeme zmenšit nahrazením za systém, skládající se z pěti úseček AM, DM, MN, BN, CN (nejedná-li se přímo o tento systém).



Obr. 1.19



Obr. 1.20

Uvažujme dvě přímky procházející body M a N, které jsou rovnoběžné s úsečkou AD, resp. BC. Dále uvažujme úsečku, která spojuje středy stran AD a BC, a označme její průsečíky se zmíněnými rovnoběžkami M' a N'. Body M' a N' jsou tedy ekvidistantní vůči stranám AB a CD (obr. 1.18). Z řešení Heronovy úlohy[4] vyplývá

$$|AM| + |DM| \geq |AM'| + |DM'| \qquad \text{a} \qquad |BN| + |CN| \geq |BN'| + |CN'| .$$

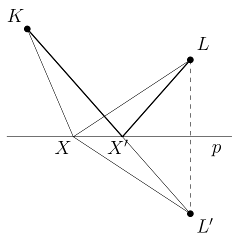
Dále je zřejmá nerovnost $|MN| \geq |M'N'|$, jelikož $|M'N'|$ je vzdálenost mezi rovnoběžkami, které prochází body M' a N'. Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$|AM| + |DM| + |MN| + |BN| + |CN| \geq |AM'| + |DM'| + |M'N'| + |BN'| + |CN'| .$$

Úlohu jsme tedy zredukovali na následující úkol:

Nechť body E a F jsou středy stran AD a BC čtverce $ABCD$. Najděte body M' a N' ležící na úsečce EF takové, aby součet $|AM'| + |DM'| + |M'N'| + |BN'| + |CN'|$ byl minimální.

[4]**Heronova úloha:** *V jedné polorovině určené přímkou p jsou dány body K a L. Najděte takový bod X ležící na přímce p, pro který je součet $|KX| + |LX|$ minimální.*



Řešení. Nechť X' je průsečík přímky p s úsečkou KL', kde L' je bod souměrně sdružený s bodem L podle přímky p. Pak pro libovolný bod X přímky p platí trojúhelníková nerovnost

$$|KX| + |LX| = |KX| + |L'X| \geq |KL'| = |KX'| + |L'X'| = |KX'| + |LX'| .$$

Hledaným bodem přímky p je tedy bod X'.

Jistě můžeme předpokládat, že bod M' leží mezi body E a N'. Označme a délku strany čtverce $ABCD$, $|EM'| = x$ a $|FN'| = y$, kde $0 \leq x \leq a$ a $0 \leq y \leq \leq a - x$ (obr. 1.19). Pak

$$|AM'| = |M'D| = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}, \qquad |M'N'| = a - x - y,$$
$$|BN'| = |CN'| = \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Hledáme tedy minimum funkce

$$F(x, y) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + a - x - y + 2\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}$$

pro $0 \leq x \leq a$ a $0 \leq y \leq a - x$. Za tím účelem přejděme nejprve k pomocné funkci $f(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - x$ na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Z upraveného vyjádření derivace

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4x^2}}} - 1$$

je vidět, že tato derivace je na intervalu $(0, a\rangle$ rostoucí funkce s nulovým bodem $x_0 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Odtud vyplývá, že funkce f je na intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle x_0, a\rangle$ rostoucí. Minimum funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, a\rangle$ proto nastává v bodě $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ a je rovno $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

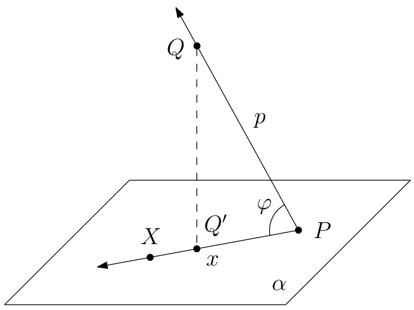
Jelikož $F(x, y) = f(x) + f(y) + a$, můžeme díky nerovnosti $\frac{a}{2\sqrt{3}} < \frac{a}{2}$ usoudit, že minimum funkce $F(x, y)$ na zadané množině dvojic (x, y) nastává pro $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ a $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ a je rovno $a\left(1 + \sqrt{3}\right)$. Řešení úlohy je tedy dáno systémem cest znázorněných na obr. 1.20. ♣

Úloha 1.3.14. *Bod P leží v dané rovině α, zatímco bod Q leží mimo ni. Najděte bod X v rovině α, pro který je poměr $d(X) = \frac{|PQ|+|PX|}{|QX|}$ maximální.* [AMS, str. 38]

Řešení. Pro libovolný bod X v rovině α označme $x = |PX|$, $\varphi = |\measuredangle XPQ|$ a pro přehlednost $|PQ| = p$ (obr. 1.21). Pro zkoumaný poměr $d(X)$ pak dostáváme

$$d(X) = \frac{p + x}{\sqrt{p^2 + x^2 - 2px\cos\varphi}}.$$

Pro konkrétní hodnotu x je $d(X)$ maximální, jestliže je maximální $\cos\varphi$. Toto nastane, pokud bude bod X ležet na ortogonální projekci polopřímky $\overrightarrow{PQ}$ do roviny α. Ve speciálním případě, kdy je polopřímka $\overrightarrow{PQ}$ kolmá na rovinu α, pro konkrétní hodnotu x poměr $d(X)$ na směru polopřímky $\overrightarrow{PX}$ nezáleží.



Obr. 1.21

Budeme dále uvažovat pouze takové body X, které vyhovují předchozím úvahám, tedy úhel φ bude úhel mezi polopřímkou $\overrightarrow{PQ}$ a rovinou α. Jelikož je čitatel i jmenovatel výrazu pro $d(X)$ kladný, můžeme uvažovat funkci

$$f(x) = \frac{(p+x)^2}{p^2 + x^2 - 2px\cos\varphi},$$

proměnné $x \geq 0$, jejíž derivace je

$$f'(x) = \frac{2p\left(p^2 - x^2\right)(1+\cos\varphi)}{\left(p^2 + x^2 - 2px\cos\varphi\right)^2}.$$

Funkce f je pro $x \leq p$ rostoucí a pro $x \geq p$ klesající. Maximum funkce f proto nastává pro $x = p$. Poměr $d(X)$ je tedy maximální, pokud $|PX| = |PQ|$, roviny PQX a α jsou navzájem kolmé a $|\measuredangle QPX| \leq 90\,°$. ♣

Úloha 1.3.15. *Dva body A a B leží na dané kružnici. Najděte na ní takový třetí bod C, aby byl maximální součet*

a) $|AC| + |BC|$;
b) $|AC|^2 + |BC|^2$;
c) $|AC|^3 + |BC|^3$. [AMS, str. 37]

Řešení. Předpokládejme, že poloměr kružnice je 1. Můžeme zřejmě uvažovat, že bod C leží na delším oblouku AB zadané kružnice. Pak $|\measuredangle ACB| = \alpha$ je konstantní a platí $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dále označme $|\measuredangle BAC| = \varphi$, kde $0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha$. Ze sinové věty vyplývá

$$|AC| = 2\sin(\alpha+\varphi), \qquad |BC| = 2\sin\varphi.$$

a) Dosazením do zkoumaného součtu dostáváme

$$|AC| + |BC| = 2\left[\sin(\alpha+\varphi) + \sin\varphi\right] = 4\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Jelikož α je konstanta a φ proměnná, úlohu řeší odhad

$$4\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\le 4\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Součet $|AC|+|BC|$ je tedy maximální, jestliže $\alpha+2\varphi=\pi$, kdy oba úhly ACB a BAC mají velikost $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$, takže bod C půlí uvažovaný (delší) oblouk AB.

b) Řešení vyplývá z úlohy 1.2.5 a). Maximum součtu $|AC|^2+|BC|^2$ tedy nastává, pokud bod C (opět jako v případě a)) leží uprostřed delšího oblouku AB.

c) Dosazením do zkoumaného součtu získáme

$$\begin{aligned}
&|AC|^3+|BC|^3=\\
&\quad=8\left[\sin^3(\alpha+\varphi)+\sin^3\varphi\right]=\\
&\quad=8\left[\sin(\alpha+\varphi)+\sin\varphi\right]\cdot\left[\sin^2(\alpha+\varphi)-\sin(\alpha+\varphi)\sin\varphi+\sin^2\varphi\right]=\\
&\quad=16\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\\
&\qquad\cdot\left[\frac{1-\cos2(\alpha+\varphi)}{2}-\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+\varphi)}{2}+\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right]=\\
&\quad=8\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left[2-\cos\alpha+\cos(\alpha+2\varphi)-2\cos(\alpha+2\varphi)\cos\alpha\right].
\end{aligned}$$

Položíme-li $t=\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}$, z podmínky $0\le\varphi\le\pi-\alpha$ plyne $\sin\frac{\alpha}{2}\le t\le 1$, pak bude

$$\cos(\alpha+2\varphi)=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha+2\varphi}{2}\right)=1-2t^2.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}
|AC|^3+|BC|^3&=8t\cos\frac{\alpha}{2}\left[2-\cos\alpha+\left(1-2t^2\right)-2\left(1-2t^2\right)\cos\alpha\right]=\\
&=8\cos\frac{\alpha}{2}\left[3(1-\cos\alpha)t-2(1-2\cos\alpha)t^3\right]=\\
&=8\cos\frac{\alpha}{2}\cdot g(t).
\end{aligned}$$

Funkce g určená výrazem v poslední hranaté závorce má derivaci

$$g'(t)=3(1-\cos\alpha)-6(1-2\cos\alpha)t^2.$$

Jelikož hledáme maximální hodnotu $g(t)$ na intervalu $I=\left\langle\sin\frac{\alpha}{2},1\right\rangle$, musíme rozlišit, zda kladný stacionární bod

$$t_0=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2(1-2\cos\alpha)}}$$

funkce g (tj. řešení rovnice $g'(t)=0$) vůbec existuje a zda pak leží v intervalu I či nikoliv.

1. V případě $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, kdy $\frac{1}{2} \leq \cos\alpha < 1$, bod t_0 neexistuje. Zároveň platí $g'(t) > 0$ pro všechna $t \in I$, což znamená, že $g(t)$ je pro tato t rostoucí. Jelikož $t \leq 1$, pak bude součet $|AC|^3 + |BC|^3$ maximální pro $t = 1$, tzn. pokud $\frac{\alpha}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2}$. Maximum proto nastává opět, pokud bod C leží uprostřed uvažovaného oblouku AB.
2. Zbývá posoudit případy, kdy $\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ neboli $0 \leq \cos\alpha < \frac{1}{2}$. Z rozkladu

$$\frac{1-\cos\alpha}{2(1-2\cos\alpha)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1-2\cos\alpha)}$$

je vidět, že výše zmíněný stacionární bod t_0 existuje, ovšem v situaci, kdy platí $1-2\cos\alpha \leq \frac{1}{3}$ neboli $\cos\alpha \geq \frac{1}{3}$, platí $t_0 \geq 1$. Bod t_0 potom leží napravo od intervalu I, na kterém je proto funkce g rostoucí a platí tedy stejný závěr jako v případě 1. Hodnota $|AC|^3 + |BC|^3$ je tudíž maximální pro bod C ležící uprostřed delšího oblouku ve všech případech, kdy platí $\frac{1}{3} \leq \cos\alpha < 1$.
3. Zůstal k řešení případ, kdy $0 \leq \cos\alpha < \frac{1}{3}$. Tehdy, jak víme z části 2, pro bod t_0 platí $0 < t_0 < 1$, takže je nutné porovnat t_0 s levým krajním bodem $\sin\frac{\alpha}{2}$ intervalu I. Ukážeme, že v našem případě vždy platí $t_0 \geq \sin\frac{\alpha}{2}$, tj. $t_0 \in I$. Po dosazení $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ dostaneme

$$t_0 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2(1-2\cos\alpha)}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

Tedy $t_0 \geq \sin\frac{\alpha}{2}$ vyplyne z nerovnosti $4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 \leq 1$ neboli $\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, což je triviální důsledek odhadu $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ pro obvodový úhel většího oblouku AB.

Z předchozích úvah vyplývá, že funkce g je v tomto případě rostoucí na intervalu $\left\langle \sin\frac{\alpha}{2}, t_0 \right\rangle$ a klesající na intervalu $\langle t_0, 1\rangle$. Její hodnota v bodě t_0

$$g(t_0) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2(1-2\cos\alpha)}} \cdot [3(1-\cos\alpha) - (1-\cos\alpha)] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(1-\cos\alpha)^{3/2}}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)}} = \frac{4\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)}}$$

je proto maximem funkce g na uvažovaném intervalu $I = \left\langle \sin\frac{\alpha}{2}, 1 \right\rangle$. Maximální hodnota zkoumaného součtu

$$|AC|^3 + |BC|^3 = \frac{32\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^3\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)}} = \frac{8\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)}}$$

proto nastane pro takové dvě polohy bodu C na delším oblouku AB, při kterých je velikost φ úhlu BAC řešením rovnice

$$\sin\frac{\alpha + 2\varphi}{2} = t_0 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2(1-2\cos\alpha)}}.$$

Zdůrazněme, že zmíněné dvě polohy bodu C jsou souměrně sdružené podle osy tětivy AB, neboť řešení $\varphi = \varphi_{1,2}$ mají vyjádření

$$\varphi_1 = \arcsin t_0 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \varphi_2 = \pi - \arcsin t_0 - \frac{\alpha}{2},$$

takže ze $\sin \frac{\alpha}{2} < t_0 < 1$ plyne $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \varphi_2 < \pi - \alpha$. Trojúhelník ABC má proto při obou polohách bodu C u vrcholů A, B úhly φ_1, φ_2 (které doplňují úhel α u vrcholu C do přímého úhlu, tj. $\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha = \pi$). ♣

Úloha 1.3.16. *Je dána přímka l a body A a B, které leží ve stejné polorovině, určené přímkou l. Najděte systém cest spojujících bod A, bod B a přímku l tak, aby součet délek všech cest byl minimální.* [AMS, str. 38]

Řešení. Uvažujme libovolný systém cest, který propojuje body A, B a přímku l. Na cestě z bodu A na přímku l označíme X bod, který současně leží i na cestě z bodu B do bodu A a který je z těchto bodů na cestě z B do A první, je-li jich více (obr. 1.22).[5] Je zřejmé, že součet délek cest systému můžeme zmenšit nahrazením za systém, skládající se z trojice úseček AX, BX, XP, kde P je kolmý průmět X na l (nejedná-li se přímo o tento systém). Proto stačí hledat bod X, pro který je minimální součet

$$t\,(X) = |AX| + |BX| + d\,(X, l)\,,$$

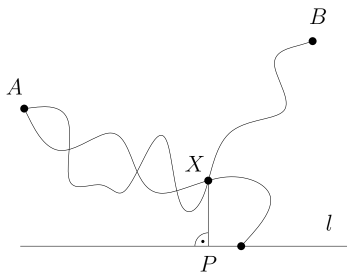
kde $d\,(X, l)$ je vzdálenost bodu X od přímky l.

Můžeme zřejmě uvažovat pouze body X ležící v polorovině určené přímkou l společně s body A a B. Označme a vzdálenost bodu A od přímky l a b vzdálenost bodu B od přímky l. Předpokládejme, že $a \le b$. Uvažujme souřadnicový systém Oxy zvolený tak, že se osa x shoduje s přímkou l a na kladné poloose y leží bod A. Bod A má potom souřadnice $(0, a)$ a bod B (d, b). Osu x lze orientovat tak, aby platilo $d \ge 0$. Sestrojme ještě přímku l', která prochází bodem X a je rovnoběžná s přímkou l.

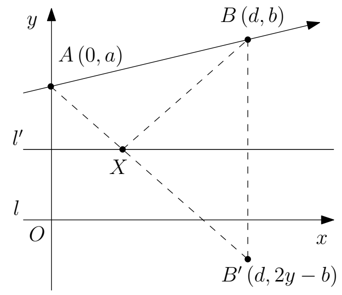
Jak jsme se dohodli, bod X leží v horní polorovině určené osou x. Pokud přímka l' protne úsečku AB, bude zřejmě platit $t\,(A) \le t\,(X)$, přičemž rovnost nastane v případě $a < b$ jedině pro $X = A$ a v případě $a = b$ pro všechny body X úsečky AB (a žádné jiné). Dále je zřejmé, že pokud bude mít bod X souřadnice (m, n), kde n je nějaké pevné číslo a přitom bude $m < 0$ (resp. $m > d$), jistě bude $t\,((0, n)) < t\,((m, n))$ (resp. $t\,((d, n)) < t\,((m, n))$). Je proto postačující uvažovat pouze body X, které mají souřadnice (x, y), kde $0 \le x \le d$ a $0 \le y \le a$.

Uvažujme konkrétní hodnotu y-ové souřadnice bodů X, kde $y \in \langle 0, a \rangle$. Pak platí $d\,(X, l) = y$ pro každý bod X neměnné přímky l'. Je-li bod $B' = (d, 2y - b)$

[5] Takový bod X vždy existuje. V krajním případě může být $X = A$, je-li A jediný společný bod obou cest.



Obr. 1.22



Obr. 1.23

obraz bodu B v osové souměrnosti podle l', z Heronovy úlohy (pozn. str. 33) vyplývá, že součet $|AX| + |BX|$ je minimální, právě když bod X přímky l' leží na jejím průsečíku s úsečkou AB' (obr. 1.23). Zkoumaný součet je potom

$$t(X) = y + |AB'| = y + \sqrt{(a+b-2y)^2 + d^2}.$$

Budeme proto hledat minimum funkce

$$f(y) = y + \sqrt{(a+b-2y)^2 + d^2}$$

na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Derivace této funkce je

$$f'(y) = 1 - \frac{2(a+b-2y)}{\sqrt{d^2 + (a+b-2y)^2}} =$$

$$= \frac{d^2 - 3(a+b-2y)^2}{\sqrt{d^2 + (a+b-2y)^2} \cdot \left[\sqrt{d^2 + (a+b-2y)^2} + 2(a+b-2y)\right]}.$$

Z rozkladu čitatele

$$d^2 - 3(a+b-2y)^2 = \left(d - \sqrt{3}(a+b-2y)\right) \cdot \left(d + \sqrt{3}(a+b-2y)\right)$$

s ohledem na $0 \le a \le b$ a $d \ge 0$ plyne, že předpis $f'(y)$ zadává funkci, která je kladná právě ve vnitřních bodech intervalu $\langle y_1, y_2\rangle$, kde

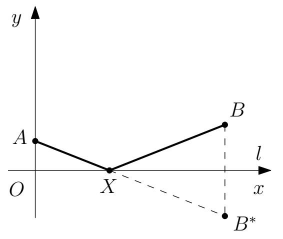
$$y_1 = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{d}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{a} \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{d}{\sqrt{3}}\right).$$

Protože platí

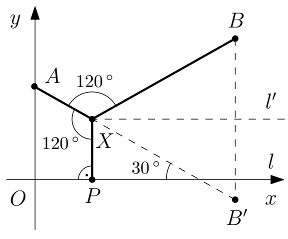
$$y_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{d}{\sqrt{3}}\right) \ge \frac{1}{2}(a+b) \ge a,$$

stačí k vyšetřování funkce f na intervalu $\langle 0, a\rangle$ pouze uvážit, zda v něm leží bod y_1 či nikoliv. Před vyšetřováním případů

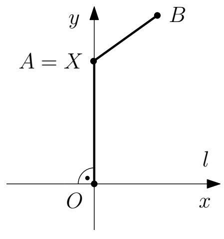
$$y_1 < 0, \qquad 0 \le y_1 \le a \qquad \text{a} \qquad y_1 \le a$$



Obr. 1.24



Obr. 1.25



Obr. 1.26

uveďme, že z úvah o znaménku hodnot $f'(y)$ obecně plyne, že funkce f je klesající (resp. rostoucí) na té části intervalu $\langle 0, a\rangle$, která je určena nerovnicí $y \leq y_1$ (resp. $y \geq y_1$).

1. případ: $y_1 < 0$. Tento případ zřejmě popisuje podmínka $d > \sqrt{3}\,(a+b)$. Funkce f je potom na intervalu $\langle 0, a\rangle$ rostoucí, takže bod X s minimální hodnotou $t\,(X)$ má y-ovou souřadnici 0, tzn. $l' = l$. Hledaný bod X je tedy průsečík dané přímky l s úsečkou AB^*, kde B^* je obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky l (obr. 1.24). Řešením naší úlohy je tedy systém cest tvořený dvěma úsečkami AX a BX, kde X je stejný bod jako v řešení Heronovy úlohy – viz pozn. str. 33.)
2. případ: $0 \leq y_1 \leq a$. Jde zřejmě o případ, kdy $\sqrt{3}\,(b-a) \leq d \leq \sqrt{3}\,(a+b)$. Funkce f je tehdy na intervalu $\langle 0, y_1\rangle$ klesající a na intervalu $\langle y_1, a\rangle$ rostoucí, má proto minimum v bodě y_1. Abychom odpovídající bod X minima funkce $t\,(X)$ geometricky popsali, určeme směrnici k přímky AB':

$$k = \frac{(2y_1 - b) - a}{d} = \frac{a + b - \frac{d}{\sqrt{3}} - b - a}{d} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6},$$

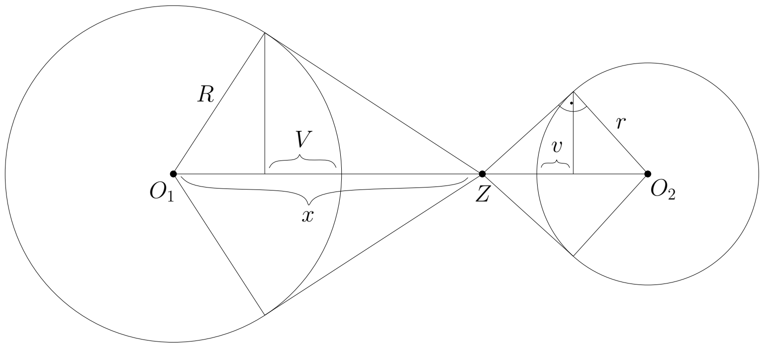
což znamená, že rovnoramenný trojúhelník XBB' je pro $y = y_1$ rovnostranný a poloha bodu X je znázorněna na obr. 1.25. Řešením naší úlohy je tedy systém cest tvořený třemi úsečkami AX, BX a XP, kde P je kolmý průmět určeného bodu X na přímku l.
3. případ: $y_1 > a$, což určuje podmínka $d < \sqrt{3}\,(b-a)$. Funkce f je pak na $\langle 0, a\rangle$ klesající, takže má minimum v bodě $y = a$. Tomu odpovídá situace, kdy přímka l' prochází bodem A (obr. 1.26). Bod X s minimální hodnotou $t\,(X)$ je proto buď sám bod $X = A$ (je-li $a < b$), nebo libovolný bod X úsečky AB (je-li $a = b$, kdy úsečka BB' je částí přímky l'). Řešením naší úlohy je systém cest tvořený dvěma úsečkami AB a AO. ♣

Úloha 1.3.17. *V prostoru jsou dány dvě koule o poloměrech R a r ($R \geq r$), které nemají žádný společný bod. Najděte pozici zdroje Z světelného paprsku ležícího vně koulí na spojnici jejich středů O_1, O_2 tak, aby součet osvětlených částí jejich povrchů byl maximální.* [Děm, str. 139]

Řešení. Označme x vzdálenost zdroje Z od středu O_1 a vzdálenost středů koulí $d = |O_1O_2| > R + r$. Zdroj osvětlí kulové vrchlíky o plochách

$$S_1 = 2\pi RV \qquad \text{a} \qquad S_2 = 2\pi rv,$$

kde V je výška vrchlíku koule s poloměrem R a v výška vrchlíku koule s polomě-



Obr. 1.27

rem r (obr. 1.27). Z Euklidovy věty o odvěsně dostáváme vztahy

$$V = R - \frac{R^2}{x} = \frac{R\,(x-R)}{x} \qquad \text{a} \qquad v = r - \frac{r^2}{d-x} = \frac{r\,(d-x-r)}{d-x}.$$

Pro celkový součet osvětlených ploch koulí pak platí

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi\,(RV + rv) = 2\pi \left(R^2 \cdot \frac{x-R}{x} + r^2 \cdot \frac{d-x-r}{d-x} \right).$$

Dostáváme vzorec pro funkci $S\,(x)$ jedné proměnné, kde x v naší situaci leží v intervalu $\langle R, d-r \rangle$. Derivace této funkce je

$$S'\,(x) = 2\pi \left(\frac{R^3}{x^2} - \frac{r^3}{(d-x)^2} \right),$$

což je předpis, který na intervalu $(0, d)$ zadává funkci, jež klesá od ∞ do $-\infty$. Existuje proto jediné $x_0 \in (0, d)$, pro něž $S'\,(x_0) = 0$. Z nerovností $S'\,(x) > 0$ $(0 < x < x_0)$ a $S'\,(x) < 0$ $(x_0 < x < d)$ plyne, že funkce S je na intervalu $(0, x_0\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle x_0, d)$ klesající. Bude proto účelné rozlišit, zda bod x_0 do uvažovaného intervalu $\langle R, d-r \rangle$ padne, či nikoliv. Vyjádření x_0 snadno dostaneme řešením rovnice

$$\frac{R^3}{x^2} = \frac{r^3}{(d-x)^2}, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{R^{3/2}}{x} = \frac{r^{3/2}}{d-x},$$

odkud dostáváme

$$x_0 = \frac{d}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}.$$

Vidíme, že v závislosti na hodnotě podílu $\frac{r}{R}$, jež leží v intervalu $(0,1\rangle$, probíhá x_0 interval $\left\langle \frac{d}{2}, d\right)$. Z předpokladu $d > R + r$ po dosazení d z předchozího vzorce dostaneme podmínku

$$x_0 > \frac{R+r}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}} = R + \frac{r - R\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}} = R + \frac{r\left(1-\sqrt{\frac{r}{R}}\right)}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}.$$

Díky předpokladu $\frac{r}{R} \leq 1$ odtud plyne $x_0 > R$. Úloha se tak rozpadá na dva možné případy:

1. případ: $R < x_0 \leq d - r$. Zatímco levá nerovnost platí obecně (viz předchozí), pravou nerovnost můžeme po dosazení x_0 upravit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}} &\leq d - r, \\ d &\geq \frac{r\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\right)}{\left(\frac{r}{R}\right)^{2/3}}, \\ d &\geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \end{aligned}$$

Za této podmínky je hledaná pozice zdroje Z daná vzdáleností $x_0 = \frac{d}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}$ od středu O_1, neboť funkce S má na intervalu $\langle R, d-r\rangle$ maximum právě v bodě x_0.

2. případ: $d - r < x_0 < d$. Pravá nerovnost platí automaticky, zatímco levou nerovnost můžeme po dosazení x_0 upravit:

$$\begin{aligned} d - r &< \frac{d}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}, \\ d &< \frac{r\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\right)}{\left(\frac{r}{R}\right)^{2/3}}, \\ d &< r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \end{aligned}$$

Za podmínky[6] $R + r < d < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ je funkce S na intervalu $\langle R, d-r\rangle$ rostoucí, proto má maximum v bodě $d-r$ a hledaná pozice zdroje Z je proto na povrchu koule o poloměru r. ♣

[6] Levou nerovnost vyjadřující podmínku zadání jsme připsali proto, aby bylo výrazněji vidět, že diskuse všech případů $d \in (R+r, \infty)$ je rozdělením na možnosti 1. a 2. úplná.

Kapitola 2

Funkce dvou proměnných

V této kapitole je uvedeno několik ukázkových příkladů geometrických úloh, jejichž řešení vede na vyšetřování absolutních extrémů funkcí dvou proměnných. Ve srovnání s funkcemi jedné proměnné jde o úkol náročnější, neboť nelze využít úvahy o monotónnosti a je zapotřebí zkoumat hodnoty funkcí v hraničních bodech rovinných množin, na kterých příslušné extrémy hledáme.

2.1 Teoretický základ

I když se vlastnosti spojitých funkcí dvou proměnných v mnohém podobají vlastnostem spojitých funkcí jedné proměnné, hledání extrémů se řídí složitějšími pravidly, která nyní uvedeme. Teorie pro funkce dvou proměnných je převzatá ze skript Diferenciální počet funkcí více proměnných [DoDo].

Věta 2.1.1 (Weierstrassova)**.** *Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$ (tj. uzavřené a ohraničené). Pak nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.*

Definice 2.1.1. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je stacionární bod funkce f, jestliže v bodě (x_0, y_0) existují obě parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

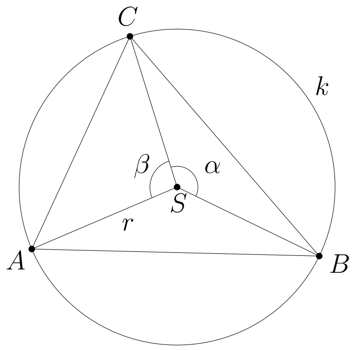
Věta 2.1.2 (Fermatova)**.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lokální extrém. Pak pro její parciální derivace f'_x, f'_y, pokud v tomto bodě existují, platí $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Věta 2.1.3. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř množiny M, nebo v některém jejím hraničním bodě.*

2.2 Řešené příklady

Úloha 2.2.1. *Je dána kružnice k. Najděte trojúhelník ABC o maximálním obsahu, který lze do této kružnice vepsat.* [AMS, str. 27]

Řešení. Označme r poloměr kružnice k a S její střed. Stačí jistě uvažovat pouze trojúhelníky ABC, které obsahují střed S. Jejich obsah pak bude součtem obsahů



Obr. 2.1

trojúhelníků SAB, SBC, SAC. Označme dále $\alpha = |\measuredangle BSC|$, $\beta = |\measuredangle ASC|$. Pak platí $|\measuredangle ASB| = 2\pi - \alpha - \beta$, kde proměnné α, β splňují podmínky

$$0 < \alpha < \pi, \qquad 0 < \beta < \pi \qquad \text{a} \qquad \alpha + \beta > \pi. \tag{2.1}$$

Obsah trojúhelníku ABC je pak dán vztahem

$$S = \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}r^2 \sin\beta + \frac{1}{2}r^2 \sin(2\pi - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}r^2 \cdot f(\alpha, \beta),$$

kde

$$f(\alpha, \beta) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(2\pi - \alpha - \beta).$$

Hledáme tedy maximum funkce f na množině D všech dvojic (α, β) určených podmínkami (2.1), kterou je vnitřek trojúhelníku znázorněného na obr. 2.2. Množina D není uzavřená, avšak funkce f je spojitá na jejím uzávěru $\overline{D}$, takže na množině $\overline{D}$ maximum funkce f existuje. Je-li takový bod maxima vnitřním bodem $\overline{D}$, tj. bodem D, musí jít o stacionární bod funkce f, neboť první parciální derivace funkce f všude existují. Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} f'_\alpha(\alpha, \beta) &= \cos\alpha - \cos(2\pi - \alpha - \beta) = 0, \\ f'_\beta(\alpha, \beta) &= \cos\beta - \cos(2\pi - \alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

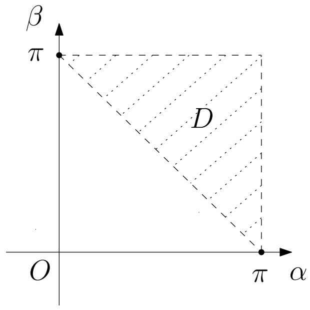
dostáváme

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos(2\pi - \alpha - \beta).$$

Protože argumenty α, β a $2\pi - \alpha - \beta$ leží v intervalu $(0, \pi)$, na kterém je funkce kosinus prostá, pak jistě platí

$$\alpha = \beta = 2\pi - \alpha - \beta, \qquad \text{tedy} \qquad \alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}.$$

Uvnitř množiny $\overline{D}$ tedy má funkce f jediný stacionární bod $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ a v něm má, jak snadno zjistíme dosazením, hodnotu $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Obr. 2.2

Zbývá prozkoumat, zda bod maxima funkce f na množině $\overline{D}$ může ležet na její hranici. Ta je tvořena třemi úsečkami, tedy body (α, β) tří druhů:

$$\begin{array}{ll} \alpha = \pi & f(\pi, \beta) = \sin\beta - \sin(\pi + \beta) = 2\sin\beta \le 2, \\ \beta = \pi & f(\alpha, \pi) = \sin\alpha - \sin(\alpha + \pi) = 2\sin\alpha \le 2, \\ \beta = \pi - \alpha & f(\alpha, \pi - \beta) = \sin\alpha + \sin(\pi - \alpha) = 2\sin\alpha \le 2. \end{array}$$

Vidíme, že na hranici množiny $\overline{D}$ funkce f splňuje nerovnost $f(\alpha, \beta) \le 2$. Protože číslo 2 je menší než hodnota $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ v jediném stacionárním bodě, je bod $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ bodem maxima funkce f na $\overline{D}$, a tedy i na D. Poznamenejme, že v případě $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$ je trojúhelník ABC z obr. 2.1 rovnostranný. Trojúhelník vepsaný do dané kružnice proto bude mít maximální obsah, pokud bude rovnostranný. ♣

Úloha 2.2.2. *Vnitřek nádoby s daným objemem V je tvořen pěti stěnami kvádru. Určete jeho rozměry, při kterých má takový vnitřek minimální povrch.* [Děm, str. 306]

Řešení. Označme a, b rozměry vnitřního dna nádoby a c jeho vnitřní výšku. Povrch S vnitřku nádoby a její objem V jsou dány vzorci

$$S = ab + 2bc + 2ac \qquad \text{a} \qquad V = abc.$$

Vyloučením c dostaneme vyjádření

$$S = ab + \frac{2V}{a} + \frac{2V}{b}.$$

Pří konstantním $V > 0$ tedy hledáme minimum funkce

$$f(a,b) = ab + \frac{2V}{a} + \frac{2V}{b}$$

dvou proměnných a, b na množině D určené nerovnostmi $a > 0$, $b > 0$. V této otevřené množině D nejdříve určíme všechny stacionární body. (Pokud má funkce f na množině D minimum, musí to být stacionární bod, jelikož parciální derivace f'_a, f'_b existují v každém bodě z D.) Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} f'_a(a,b) &= b - \frac{2V}{a^2} = 0, \\ f'_b(a,b) &= a - \frac{2V}{b^2} = 0 \end{aligned}$$

plyne $2V = a^2 b = ab^2$. Jelikož $ab \neq 0$, dostáváme tak $a = b$. Jediný stacionární bod funkce f v D je proto tvaru (d,d), kde $d^3 = 2V$ neboli $d = \sqrt[3]{2V} > 0$, přičemž platí

$$f(d,d) = d^2 + \frac{4V}{d} = d^2 + \frac{2d^3}{d} = 3d^2.$$

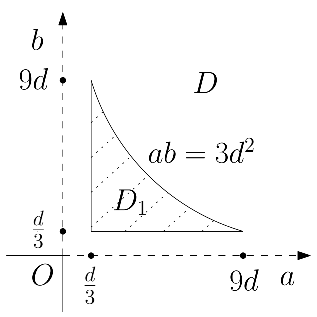
Všimněme si nyní, v jaké části množiny D, jež je prvním kvadrantem roviny Oab, máme zaručenu nerovnost

$$f(a,b) > 3d^2, \qquad \text{neboli} \qquad ab + \frac{d^3}{a} + \frac{d^3}{b} > 3d^2.$$

Poslední nerovnosti jsou zřejmě splněny, platí-li alespoň jedna z podmínek

$$ab \geq 3d^3, \qquad a \leq \frac{d}{3}, \qquad b \leq \frac{d}{3}.$$

(Můžeme psát neostré nerovnosti, protože hodnota $f(a,b)$ je součtem tří kladných



Obr. 2.3

sčítanců.) Uvažme tedy kompaktní podmnožinu D_1 množiny D

$$D_1 = \left\{ (a,b) \in D \;\middle|\; a \geq \frac{d}{3} \wedge b \geq \frac{d}{3} \wedge ab \leq 3d^3 \right\},$$

viz obr. 2.3. Množina D_1, na které je funkce f spojitá, je sestrojena tak, že nerovnost $f(a,b) > f(d,d)$ platí jak pro každý bod $(a,b) \in D \backslash D_1$, tak pro každý bod (a,b) na hranici podmnožiny D_1 (tvořené dvěma úsečkami a obloukem hyperboly). Proto je minimum funkce f na D shodné s minimem funkce f na D_1, jež existuje díky Weierstrassově větě. Funkce f tedy nabývá minima ve vnitřním bodě D_1, takže to musí být (jediný) nalezený stacionární bod (d,d). Všimněme si, že v případě $a = b = d$ platí pro vnitřní výšku nádoby

$$c = \frac{V}{ab} = \frac{\frac{1}{2}d^3}{d^2} = \frac{d}{2}.$$

Vnitřní rozměry nádoby s minimálním povrchem vnitřku jsou $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, jsou tedy v poměru $1:1:\frac{1}{2}$ (vnitřní dno nádoby je tvaru čtverce a její vnitřní výška má poloviční délku strany tohoto čtverce). ♣

Poznámka. Úlohu by bylo možné řešit i bez použití derivování. Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, užitého pro tři hodnoty ab, $\frac{2V}{a}$, $\frac{2V}{b}$, platí

$$S = ab + \frac{2V}{a} + \frac{2V}{b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{ab \cdot \frac{2V}{a} \cdot \frac{2V}{b}} = 3\sqrt[3]{4V^2} = 3d^2$$

(jako dříve $d = \sqrt[3]{2V}$), přičemž rovnost nastane, právě když

$$ab = \frac{2V}{a} = \frac{2V}{b}, \qquad \text{neboli} \qquad a = b = \sqrt[3]{2V} = d.$$

Podobně lze pomocí zmíněné klasické nerovnosti řešit další úlohy, které se při aplikacích kalkulu funkcí dvou proměnných obvykle uvádějí:

- ze všech kvádrů daného objemu vybrat kvádr s minimálním povrchem,
- ze všech kvádrů vepsaných do dané koule vybrat kvádr s maximálním objemem,
- ze všech trojúhelníků s daným obvodem vybrat trojúhelník o největším obsahu.

Při obvyklém označení vypadají příslušné aplikace nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem takto

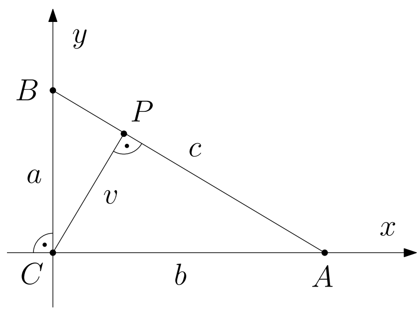
$$\begin{aligned} abc = V \qquad & \Rightarrow S = 2(ab + bc + ac) \geq 6\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} = 6\sqrt[3]{V^2}, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 4r^2 \qquad & \Rightarrow V = abc = \sqrt[2]{a^2b^2c^2} \leq \sqrt[2]{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3} = \frac{8}{3\sqrt{3}}r^3, \end{aligned}$$

$$a+b+c=2s \quad \Rightarrow (s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$$
$$\Rightarrow S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

Je zřejmé, že rovnost ve všech získaných odhadech je dosažitelná, a to v případě $a=b=c$.

Úloha 2.2.3. *Najděte bod s minimálním součtem druhých mocnin vzdáleností od tří přímek, na kterých leží strany daného pravoúhlého trojúhelníku. Přesvědčete se, že nalezený bod je středem výšky z vrcholu pravého úhlu k přeponě zmíněného trojúhelníku.* [Návrh vedoucího práce]

Řešení. Stačí zřejmě uvažovat pouze body v rovině daného trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Zavedeme v ní souřadnicový systém Cxy tak, aby platilo $C[0,0]$, $A[b,0,]$ a $B[0,a]$, kde a, b jsou obvykle značené délky odvěsen. Dále označme v výšku spuštěnou z bodu C na stranu AB, kde P je pata této výšky (obr. 2.4). Protože přímka AB má rovnici $ax+by-ab=0$, má libovolný



Obr. 2.4

bod $M(x,y)$ od přímek BC, AC, AB po řadě vzdálenosti

$$|x|, \qquad |y| \qquad \text{a} \qquad \frac{|ax+by-ab|}{c},$$

kde $c=\sqrt{a^2+b^2}$ je délka přepony trojúhelníku. Hledáme tedy minimum funkce

$$f(x,y) = x^2+y^2+\frac{(ax+by-ab)^2}{c^2}$$

na množině $\mathbb{R}^2$. Tato funkce je spojitá a diferencovatelná v každém bodě, najdeme proto nejdřív její stacionární body, tedy řešení soustavy rovnic

$$f'_x(x,y) = 2x + \frac{2a(ax+by-ab)}{c^2} = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 2y + \frac{2b(ax+by-ab)}{c^2} = 0.$$

Ze soustavy dostaneme $ax + by - ab = -\frac{c^2x}{a} = -\frac{c^2y}{b}$, odtud $ay - bx = 0$. Každý stacionární bod funkce f tudíž leží na přímce dané rovnicí $ay - bx = 0$, což je kolmice z (počátku) C na přímku AB, tedy přímka CP. Po dořešení zkoumané soustavy rovnic zjistíme, že funkce f má jediný stacionární bod M_0 o souřadnicích

$$x_0 = \frac{a^2b}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2b}{2c^2}, \qquad y_0 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ab^2}{2c^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + \frac{(ax_0 + by_0 - ab)^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{a^2b^2}{4c^2} = \frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

Díky rovnosti $ab = cv$ lze hodnotu $f(x_0, y_0)$ přepsat pomocí výšky v do tvaru

$$f(x_0, y_0) = \frac{v^2}{2}.$$

Nalezený stacionární bod M_0 je tedy skutečně středem výšky v na stranu AB (neboť $|CM_0| = |M_0P| = \frac{1}{2}v$). Zbývá ukázat, že je to bod minima funkce f na $\mathbb{R}^2$.

Podle předpisu pro funkci f je nerovnost $f(x, y) > f(x_0, y_0) = \frac{v^2}{2}$ určitě splněna pro body $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, které vyhovují alespoň jedné z nerovnic $|x| \geq v$ nebo $|y| \geq v$. Stačí proto hledat minimum funkce f uvnitř čtverce $\langle -v, v\rangle^2$ (na kterém minimum f podle Weierstrassovy věty existuje). Musí tedy jít o stacionární bod funkce f, a tím je (jediný) dříve nalezený bod M_0. ♣

Úloha 2.2.4. *Je dána kružnice k. Najděte trojúhelník ABC o minimálním obvodu, který lze této kružnici opsat.* [Návrh vedoucího práce]

Řešení. Označme r poloměr kružnice k a S její střed. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC opsaný kolem kružnice k a podle obr. 2.5 označme P, Q, R body dotyku kružnice k se stranami trojúhelníku a α, β, γ úhly u středu S. Z pravoúhlých trojúhelníků dostaneme

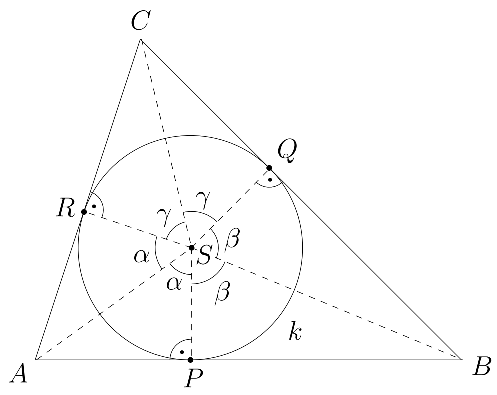
$$|AP| = |AR| = r \cdot \operatorname{tg} \alpha, \qquad |BP| = |BQ| = r \cdot \operatorname{tg} \beta, \qquad |CQ| = |CR| = r \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

takže obvod o trojúhelníku ABC je dán vzorcem

$$o = 2r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma).$$

Považujme úhly α, β za nezávislé proměnné. Jsou to ostré úhly, stejně jako úhel γ, který z rovnosti $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$ má vyjádření $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Hledáme proto minimum funkce

$$f(\alpha, \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta)$$



Obr. 2.5

na množině D všech dvojic (α, β) určených podmínkami

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Množina D je otevřená. Jelikož parciální derivace f'_α, f'_β existují v každém bodě množiny D, najdeme v ní všechny stacionární body funkce f. Ze soustavy rovnic

$$f'_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2(\pi - \alpha - \beta)} = 0,$$
$$f'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{1}{\cos^2(\pi - \alpha - \beta)} = 0$$

dostáváme $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2(\pi - \alpha - \beta)$. Jelikož argumenty α, β a $\pi - \alpha - \beta$ leží v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, na kterém je funkce $g(t) = \cos^2 t$ prostá, uvedené rovnosti nastanou právě když

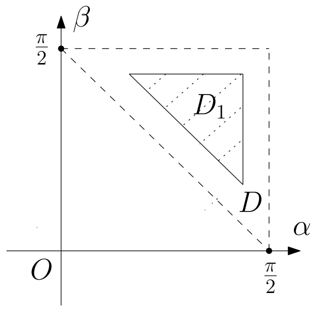
$$\alpha = \beta = \pi - \alpha - \beta, \qquad \text{tedy} \qquad \alpha = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Funkce f má tudíž v D jediný stacionární bod $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ a má v něm hodnotu $3\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$. Abychom ukázali, že se jedná o minimum funkce f na množině D, zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) > 3\sqrt{3}$. Pak z předpisu pro funkci f je jasné, že nerovnost $f(\alpha, \beta) > 3\sqrt{3}$ bude platit pro všechny body $(\alpha, \beta) \in D$, které splňují alespoň jednu z podmínek

$$\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \delta, \qquad \beta \geq \frac{\pi}{2} - \delta, \qquad \pi - \alpha - \beta \geq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Uvažme nyní uzavřenou podmnožinu D_1 množiny D

$$D_1 = \left\{ (\alpha, \beta) \in D \;\middle|\; \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \delta \wedge \beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta \wedge \pi - \alpha - \beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\},$$



Obr. 2.6

viz obr. 2.6. Množina D_1, na které je funkce f spojitá, je sestrojena tak, že nerovnost $f(\alpha, \beta) > f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ platí jak pro každý bod $(\alpha, \beta) \in D \backslash D_1$, tak pro každý bod (α, β) na hranici D_1 (tvořené třemi úsečkami). Minimum funkce f na D je proto shodné s minimem funkce f na D_1 (jež existuje díky Weierstrassově větě). Toto minimum je vnitřním bodem D_1, takže to musí být (jediný) nalezený stacionární bod $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ funkce f. Pro tento bod je hledaný trojúhelník ABC rovnostranný.

Trojúhelník opsaný dané kružnici proto bude mít minimální obvod, pokud bude rovnostranný. ♣

Závěr

V předložené práci jsem soustředila příklady extremálních geometrických úloh, které byly v dostupné literatuře řešeny prostředky diferenciálního počtu. Vytvořená sbírka má sloužit k upevnění znalostí v příslušné oblasti matematické analýzy i elementární geometrie (Pythagorova věta, Eukleidovy věty, věty o úhlech v kružnicích a o podobných trojúhelnících, sinová a kosinová věta). Domnívám se, že takové praktické využití diferenciálního počtu může být prospěšné v rámci základního kurzu matematické analýzy zejména studentům učitelské matematiky. V tomto ohledu přinesla příprava textu i velký užitek mně osobně.

Jelikož k řešení extremálních geometrických úloh lze kromě diferenciálního počtu použít i jiné specificky geometrické metody, chtěla bych v naznačené problematice pokračovat v budoucím diplomovém projektu. Jsem si vědoma, že užití diferenciálního počtu funkcí více proměnných mohlo být v bakalářské práci rozšířeno o téma vázaných extrémů, tedy o použití Lagrangeových multiplikátorů. Z důvodu rozsahu celé práce jsem se rozhodla tento námět odložit a vrátit se k němu při psaní diplomové práce.

Seznam literatury

[AMS] Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L.: *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser, Boston 2006

[Děm] Děmidovič B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Havlíčkův Brod 2003

[DoKu] Došlá Z., Kuben J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2004

[DoDo] Došlá Z., Došlý O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2010

[La] Larson L. C.: *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava 1990

[Pro] Protasov V. Ju.: *Maksimumy i minimumy v geometrii*, Izdatelstvo Moskovskovo centra nepreryvnovo matematičeskovo obrazovania, Moskva 2005

[Vi] Vihan P.: *Didoniny úlohy*, Rozhledy matematicko – fyzikální, 1972–1973, roč. 51, č. 4, str. 152–155

[CRS] Courant R., Robbins H., Stewart I.: *What is Matematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Oxford 1996