MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

# Elementární metody řešení funkcionálních rovnic

Disertační práce

Petr Šatný

Školitel: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Brno 2018

# Obsah

# Úvod

Každá matematická disciplína je tvořena teoretickým základem (definicemi objektů a operací), ze kterého jsou odvozeny různá tvrzení a početní metody usnadňující tuto disciplínu nejen snadněji pochopit, ale taktéž ji efektivně aplikovat na rozličné problémy. Při bližším zkoumání té či oné disciplíny můžeme nabýt dojmu určité systematičnosti: příklad nebo problém, který se snažíme vyřešit, kategorizujeme a podle toho zvolíme vhodnou početní metodu nebo přímo aplikujeme obecný vzorec. Příkladem může být funkcionálním rovnicím blízká teorie diferenciálních rovnic. Při řešení diferenciální rovnice nejdříve určíme její typ a podle toho pak zvolíme vhodný způsob jejího řešení (pokud existuje). Tuto výhodu však u řešení funkcionálních rovnic zcela postrádáme. Můžeme sice tyto rovnice rozdělit do určitých tříd, např. podle počtu neznámých funkcí, podle počtu složení (iterací) hledané funkce atd., to nám ale nijak nepomůže k nalezení metody, jak rovnice daného typu explicitně vyřešit. Vzhledem k tomu ani metodika řešení funkcionálních rovnic (narozdíl od rovnic diferenciálních) netvoří ucelenou a od teoretického studia kvalitativních vlastností řešení oddělenou partii matematické disciplíny zabývající se funkcionálními rovnicemi, jejíž základy jsou shrnuty v monografiích [Kucz], [A-D]. Českému čtenáři poskytují dobrou základní představu o teorii funkcionálních rovnic publikace [Neu], [Smí], [Dav]. Nicméně i přes výše uvedený handicap lze v rozmanitých příkladech řešení těchto rovnic nalézt určitá opakující se pravidla a schémata, jejichž znalost poskytuje řešiteli výhodu a zvyšuje pravděpodobnost dosažení cíle.

Záměrem této práce, jak samotný název napovídá, je čtenáře seznámit právě s těmito pravidly a schématy při řešení funkcionálních rovnic a pokusit se je rozčlenit do tříd podle způsobu jejich užití. Jedná se o úkol vskutku nesnadný, proto bychom zde rádi ospravedlnili případy, kdy jsme funkcionální rovnice zahrnuli do určité kapitoly, přičemž čtenáři se může jevit, že by měly být zařazeny v jiné části práce. Protože řešení funkcionálních rovnic většinou nevyužívá pouze jedné metody, ale kombinuje více dílčích obratů vedoucích k výsledku, zvolili jsme zde výklad cestou „nabalování“, která spočívá v tom, že u řešení následujících rovnic někdy využíváme metody, které byly již na předchozích stranách představeny, tzn. že zatímco první uvedené rovnice mají nejjednodušší způsob řešení, postupy řešení posledních rovnic v dané části textu mohou obsahovat kombinace již uvedených metod.

Protože jsme zatím neuvedli pádný důvod, proč se funkcionálními rovnicemi vůbec zabývat, může se méně znalý čtenář dotázat, jaký užitek vůbec funkcionální rovnice přinášejí. Nebudeme zde uvádět příklady četných situací (lze je nalézt v [Kucz], [A-D]), kdy funkcionální rovnice je nejvhodnějším prostředkem popisu fungování matematických modelů v různých oblastech přírodních věd, techniky, ekonomie či sociálních oborů. Funkcionální rovnice mají svůj význam i v teoretické matematice. Vyjadřujeme jimi například pravidla, podle kterých „fungují" známé elementární funkce a které je mnohdy plně charakterizují. Třeba pravidlo *o mocnině součtu* lze zapsat funkcionální rovnicí $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Taková a jiné podobné funkcionální rovnice mají velkou přednost: jejich zápisům může porozumět i středoškolský student neznalý kupříkladu derivací a integrálů. Navíc i postup řešení takových rovnic je mnohdy elementární, tj. založen na algebraických úpravách a substitucích, úvahách o definičních oborech a oborech hodnot hledaných řešení, užití periodičnosti či parity funkcí, čímž rozumíme splnění jedné z funkcionálních rovnic $f(x) = f(-x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pro sudé, resp. liché funkce. Právě takové postupy nás budou zajímat, odpovídá tomu totiž i spojení *elementární metody* v názvu naší práce. Zdůrazněme, že k nim budeme řadit i účinné využití základních vlastností *spojitých* funkcí. Ostatně předpoklad spojitosti je pro mnohé modely popisované funkcionálními rovnicemi přirozený a do metodiky jejich řešení vnáší silně obohacující prvky. Všeobecně je kupříkladu známo, jakou roli hraje spojitost při řešení snad nejproslulejší funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x)+f(y)$, nesoucí přívlastek *Cauchyova.*

Těchto vlastností si všimli i tvůrci úloh středoškolských matematických olympiád, kteří funkcionální rovnice zahrnují do jejich nejvyšších, zejména mezinárodních kol. Díky snadné formulaci a neexistenci algoritmických postupů jsou řešitelé takových soutěží odkázáni více na své matematické schopnosti a uvažování než na rozpomenutí se na nějaký vzorec nebo rutinní početní postup. Přípravou tak může být jedině propočítání rovnic z minulých ročníků matematických olympiád, které lze dohledat na jejich internetových stránkách, nebo (v koncentrovanější podobě) v těch sbírkách soutěžních úloh, které obsahují speciální oddíly věnované funkcionálním rovnicím. Takových sbírek ovšem není mnoho, stejně jako publikací věnujících se výlučně metodice řešení funkcionálních rovnic (viz Seznam literatury). Pouze autoři jako G. Small nebo T. Andreescu se snažili svou publikační činností vnést nadhled do metodiky řešení funkcionálních rovnic a určitým způsobem tyto metody kategorizovat. Doposud bezesporu nejpropracovanější dílo ([And]) tohoto zaměření sestavil se svými spolupracovníky T. Andreescu a vydal v konečné verzi v roce 2012 (předběžná internetová verze byla dostupná již v roce 2011) pod názvem *Topics in Functional Equations.* Tímto počinem nás (ostatní autory usilující o zpracování dané problematiky) „okradl“ o pocit určité originality, neboť těžko budeme hledat metody, které by v této publikaci nebyly byť jen okrajově obsaženy. Nicméně věříme, že díky tomu mohlo vzniknout o to kvalitnější dílo, které bude pro čtenáře zajímavější a více srozumitelnější. S vědomím vysokého cíle jsme se tak pokusili zařadit naši práci mezi publikace výše zmíněných autorů, v neposlední řadě pro užitek českých čtenářů, zejména mladých řešitelů středoškolských olympiád, pro něž jsou nákladné zahraniční knihy prakticky nedostupné. Taktéž bychom rádi tímto dílem rozšířili portfolio českých a slovenských prací věnovaných funkcionálním rovnicím, mezi než nepochybně patří publikace F. Neumana ([Neu]), J. Smítala ([Smí]), J. Chvaliny ([Chv1], [Chv2]) nebo T. Zdráhala ([Zdr]).

Funkcionální rovnice jsme rozdělili do několika kapitol, a to buď podle významné rovnice (Cauchyova, d'Alembertova), na jejíž tvar lze některé typy rovnic po substitucích převést a poté snadno vyřešit odvoláním na již nalezený výsledek, nebo podle metod, které v postupu hledání neznámé funkce považujeme za stěžejní.

Rovnice, které se objevily v některé z matematických soutěží, jako například národní nebo mezinárodní kolo matematické olympiády pro středoškoláky, matematická soutěž Putnam určená pro vysokoškoláky USA a Kanady (bez ohledu na státní příslušnost) aj., jsme označili krátkým komentářem v poznámce pod čarou a lze je dohledat na internetových stránkách uvedených v [IMO1], [IMO2], [IMO3] nebo v [MKS].

Na tomto místě bych ještě rád poděkoval svému školiteli doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za pečlivý dohled a cenné rady, které mi během tvorby této práce poskytoval, a jeho nesmírnou trpělivost. Taktéž děkuji rodině za podporu a víru, že přípravu disertační práce dokončím a její obhajobou i celé doktorské studium zdárně ukončím.

# Kapitola 1

# Teoretický základ

## 1.1 Pojem funkcionální rovnice

Jak samotný název práce napovídá, zaměříme pozornost na řešení rovnic, v nichž v roli neznámých vystupují funkce. Tento intuitivní popis objektu našeho zájmu však v práci, která má disponovat kvalitou nejen po obsahové, ale i po formální stránce, nemůže stačit. Abychom vytyčili mantinely pro to, co funkcionální rovnice jsou a co už ne, uvedeme definici těchto rovnic tak, jak je František Neuman popsal v [Neu] na straně 14.

**Definice.** Pojem *členu* je vymezen těmito třemi podmínkami:

1. Nezávislé proměnné $x_1, \ldots, x_k$ jsou členy.
2. Jestliže $t_1, \ldots, t_n$ jsou členy a $f$ je $n$-místná funkce, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je také člen.
3. Jiné členy než členy tvořené pomocí bodů 1 a 2 nejsou.

*Funkcionální rovnice* je relace $t_1 = t_2$, kde $t_1$ a $t_2$ jsou členy obsahující alespoň jednu neznámou funkci a konečný počet nezávisle proměnných. Pro každou neznámou funkci musí být udáno, odkud tuto funkci lze vybírat, tzn. je určena množina *přípustných funkcí.*

Nechť funkcionální rovnice $t_1 = t_2$ obsahuje $r$ neznámých funkcí $f_1, \ldots, f_r$. Pak $r$ funkcí $\phi_1, \ldots, \phi_r$ patřících do množin přípustných funkcí je *řešením* této funkcionální rovnice, když po dosazení $\phi_i$ za $f_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ se z relace $t_1 = t_2$ stává identita.

Jestliže uvažujeme současně několik funkcionálních rovnic, mluvíme o *soustavě funkcionálních rovnic.*

Jak si můžeme všimnout, je při zavádění pojmu člen v podmínce 2 nazvána funkce $f$ jako $n$-místná, ačkoliv bývá obvyklejší pojmenování funkce $n$ proměnných. Tato termínová změna má své opodstatnění. Hovoříme-li totiž o funkcionální rovnici, v níž vystupuje člen $f(x+y)$, bylo by značně zavádějící hovořit o $f$ jako funkci dvou nezávislých proměnných. Místo toho označení $f$ jako 1-místné funkce s dvěma nezávislými proměnnými nám dává přesnější představu o členu $f(x+y)$.

Uvědomme si, že díky výše uvedené definici nepovažujeme za funkcionální rovnice ty, v jejichž zadané relaci vystupuje např. derivace nebo integrál. Za funkcionální rovnice tedy nepovažujeme rovnice diferenciální, integrální aj. Pro představu zde uvedeme několik funkcionálních rovnic, v nichž vystupují neznámé (obvykle dle předpokladu spojité) funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad f\Big(f\big(g(y)\big)\Big) = f\left(x\right) g\left(y\right), &&3)\quad \sum_{n=0}^{10} f(x_n) g\left(x_n\right) = f\left(\sum_{n=0}^{10} x_n\right),\\
&2)\quad f(x+y) = x f(y), &&4)\quad (x+y) f(x) = 1 + f\left(\frac{x}{1+y^2}\right).
\end{aligned}
$$

Při hledání řešení dané funkcionální rovnice jsme limitováni pouze naším důvtipem a tím, jak nejlépe dovedeme uplatnit rozličný matematický aparát. Lze tedy využít i derivování, resp. integrování a poté řešit rovnici jako diferenciální, resp. integrální. Avšak pro zdárné vyřešení mnoha funkcionálních rovnic stačí znalost elementárních postupů a pojmů, z nichž některé představíme v následující podkapitole, a jejich aplikací vyřešíme i rozmanité složitější funkcionální rovnice v kapitolách následujících.

Zde čtenáři můžeme jako úvodní stručný text doporučit článek P. Calábka a J. Švrčka [CŠ1], který o některých elementárních postupech při řešení funkcionálních rovnic pojednává.

## 1.2 Základní obraty při řešení funkcionálních rovnic

Jak jsme již zmínili v úvodu, neexistuje univerzální postup, jak začít řešit zadanou funkcionální rovnici. Nicméně je velmi výhodné začít s metodou zvanou *specifikace proměnných*[1], která nám poskytuje určitou představu o některých vlastnostech řešení dané rovnice, nevede-li přímo k jejich určení.

[1]Ekvivalentní pojem, který by zde mohl být použit, je *substituční* či *dosazovací* metoda.

*1) Specifikace proměnných*

Podstatu metody specifikace proměnných ukážeme na následujícím řešení dané funkcionální rovnice.

**Příklad 1.1.** *Určete všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které splňují rovnost*

$$f(x+y) = f(x) - y$$

*pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$.

*Řešení.* Budeme hledat všechna řešení dané úlohy tím, že označíme jako $f$ libovolnou funkci splňující všechny předpoklady příkladu. Protože definiční obor funkce $f$ je $\mathbb{R}$, můžeme za $x$ a $y$ dosadit (specifikovat) libovolná reálná čísla. Položením (specifikací) $x = 0$ přejde zadaná rovnost do tvaru

$$f(y) = f(0) - y.$$

Protože $f(0)$ je reálná konstanta a pojmenování nezávislých proměnných $x$, $y$ neovlivní řešení, můžeme psát $f(x) = c - x$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nyní však ještě nemůžeme prohlásit, že jsme nalezli řešení. K tomu je potřeba provést zkoušku dosazením nalezeného předpisu funkce do zadané funkcionální rovnice:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) = c - (x+y) = c - x - y,\\ P:&\quad f(x) - y = c - x - y. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme konstatovat, že jsme našli (všechna) řešení zadané rovnice. Jsou jimi právě funkce $f(x) = c - x$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

□

Specifikaci proměnné zřejmě nemá smysl uplatňovat neuváženě, neboť například pro $y{=}0$ bychom z rovnice z příkladu 1 získali rovnost $f(x){=}f(x)$, s níž již nelze více pracovat, neboť platí triviálně. Jaké proměnné určit pro specifikaci a pokud vůbec specifikovat, záleží na zkušenostech a jistém „citu“ řešitele.

Uvědomme si dále, že závěrečnou zkoušku řešení je nutné opravdu provést. Pokud by totiž v příkladu 1 byla zadaná rovnice tvaru

$$f(x+y) = 2f(x) - y,$$

obdrželi bychom pro $x = 0$ rovnost $f(y) = 2f(0) - y$ neboli $f(x) = 2c - x$, kde $c \in \mathbb{R}$. Avšak tato funkce není řešením pozměněné rovnice, protože po dosazení nalezeného předpisu funkce do zadání nedostaneme identické výrazy:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) = 2c-(x+y) = 2c-x-y,\\ P:&\quad 2f(x)-y = 2(2c-x)-y = 4c-2x-y. \end{aligned}$$

*2) Převedení do tvaru již vyřešené funkcionální rovnice*

Máme-li již kompletně vyřešeny některé funkcionální rovnice, je velmi výhodné využít vhodných substitucí pro transformaci aktuálně řešené funkcionální rovnice do tvaru rovnice, kterou jsme již dříve vyřešili. Takto mohou vzniknout řetězce návazností, ve kterých díky jedné vyřešené rovnici vyřešíme druhou, tato druhá rovnice poslouží pro řešení třetí atd. Čtenáři se o tom budou moci sami přesvědčit v dalších částech této práce.

Na následujícím „neřešeném“ příkladě ukážeme princip zmíněné metody s odkazem na řešení příkladu 1.1.

**Příklad 1.2.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2y$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

Pro získání tvaru rovnice z příkladu 1.1 zde stačí uvážit funkci $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ určenou předpisem

$$g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + x$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Přesvědčíme se o tom po malé úpravě zadané rovnice:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) &= f\left(\frac{x}{2}\right) - 2y,\\ g(x+y) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) + x + y &= f\left(\frac{x}{2}\right) + x - y = g(x) - y. \end{aligned}$$

Získali jsme tak dřívější rovnici $g(x+y) = g(x)-y$ z příkladu 1.1, o níž (za příslušných předpokladů) víme, že má řešení ve tvaru $g(x) = c-x$, kde $c \in \mathbb{R}$. Dosazením do předpisu funkce $g$ tak zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} g(x) = c - x &= f\left(\frac{x}{2}\right) + x,\\ c - 2x &= f\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

odkud nahrazením $x$ za $2t$ obdržíme $f(t) = c - 4t$. I přes zřejmost korektního postupu je nutné provést zkoušku, kterou pro její snadnost zde vynecháme.

Výše dvě uvedené metody jsou nejhojněji využívány při řešení funkcionálních rovnic, nicméně ke zdárnému vyřešení složitějších rovnic je někdy třeba brát ohled na specifický tvar zadané rovnosti, rozšířené předpoklady určující řešení aj. Čtenáři nyní představíme další metody, jejichž plnohodnotný význam ocení u řešení náročnějších funkcionálních rovnic.

*3) Sestavení vhodné soustavy rovnic s hledanou funkcí*

S ohledem na zadanou funkcionální rovnici se při řešení můžeme dostat do situace, kdy v odvozené rovnosti vystupuje hledaná funkce s odlišnými parametry obsahující nezávislou proměnnou, např. $f(-x)$ a $f(x)$, nebo $f(2x)$ a $f(x)$. Po sestavení vhodné soustavy rovnic a užitím sčítací, resp. dosazovací metody se tak můžeme lehce zbavit nechtěného členu, tj. $f(-x)$, nebo $f(2x)$ v námi uvedeném příkladě, a poté snadno odvodit předpis hledané funkce. Tuto metodu názorně ilustrujeme na následujícím příkladu.

**Příklad 1.3.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[2]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce, která splňuje zadání. Po volbě $x = y = 0$ obdržíme rovnost $f(0) - 2f(0) + f(0) - 2f(0) = -2$ neboli $-2f(0) = -2$, odkud plyne $f(0) = 1$.

Položením $x = 0$ v rovnosti ze zadání obdržíme s ohledem na předešlý výsledek $f(0) = 1$ rovnost

$$\begin{aligned} f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) &= y - 2, \\ -f(y) - 2f(-y) &= y - 3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vhodnými specifikacemi proměnné $y$ nyní vytvoříme soustavu dvou rovnic, jejíž řešení povede k nalezení předpisu funkce $f$. Nahrazením $y$ za $t$, resp. nahrazením $y$ za $-t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostaneme

$$\begin{aligned} -f(t) - 2f(-t) &= t - 3, \\ \text{respektive} \quad -f(-t) - 2f(t) &= -t - 3. \end{aligned}$$

Při řešení této soustavy (po odečtení dvojnásobku druhé rovnosti od rovnosti první) dojdeme k výsledku $3f(t) = 3t + 3$ neboli $f(t) = t + 1$.

Získali jsme tak předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = x + 1$ a snadným dosazením jejího předpisu do zadání zjistíme, že je tato funkce skutečně řešením.

□

[2][CŠ1, str. 325]

*4) Rozdělení funkce na sudou a lichou část*

Každou funkci (se symetrickým definičním oborem) můžeme vyjádřit (jediným způsobem) jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je sudá a druhá je lichá. Skutečně, označíme-li původní funkci jako $f$ a sčítané funkce jako $f_s$ a $f_l$ (dolním indexem označujeme jejich „paritu“), pak z rovností $f(x)=f_s(x)+f_l(x)$, $f(-x)=f_s(x)-f_l(x)$ ihned plynou vzorce

$$f_s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_l(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

pro funkce $f_s$ a $f_l$, které nazýváme sudou, resp. lichou částí funkce $f$ a které zřejmě mají požadovanou „paritu“.

Často se například stává, že úpravami nějaké funkcionální rovnice odvodíme identitu $f(x) + f(-x) = g(x) + g(-x)$ pro neznámé funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Znamená to, že funkce $f$ a $g$ mají stejné sudé části, a proto se v dalším postupu zabýváme vlastnostmi jejich lichých částí.

Jindy je výhodné již na počátku řešení dané funkcionální rovnice „rozdělit“ hledané funkce na jejich sudé a liché části a manipulací s danou rovnicí odvodit rovnice dvě – jednu pro neznámé sudé části a druhou pro neznámé liché části.

Využití této metody ilustrujeme na následujícím příkladu 1.4.

**Příklad 1.4.** *Určete všechny funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x + y) + f(y - x) = g(x - 2y) - g(2y - x)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ a $g$ dále označují funkce, které jsou řešením zadané rovnosti. Položením $y = 0$ obdržíme s ohledem na zavedené značení sudé a liché části funkce rovnost

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= g(x) - g(-x),\\ 2f_s(x) &= 2g_l(x),\\ f_s(x) &= g_l(x). \end{aligned}$$

Odvodili jsme, že sudá část funkce $f$ je rovna liché části funkce $g$. Poslední odvozená rovnost zřejmě platí jen v případě, kdy $f_s(x) = g_l(x) = 0$ (pouze konstantní nulová funkce je zároveň sudá a lichá). Odtud plyne, že $f$ je lichá a $g$ je sudá funkce.

Položením $x = y$ získáme s ohledem na rovnost $f(0) = 0$, která plyne z lichosti funkce $f$, a na doposud zjištěné vlastnosti vztah

$$f(2x) + f(0) = g(-x) - g(x) = -2g_l(x) = 0$$

neboli $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Vzhledem k sudosti funkce $g$ a nalezenému předpisu funkce $f$ pak platí

$$\begin{aligned} 0 &= g(x-2y) - g(2y-x), \\ g(2y-x) &= g\big(-(2y-x)\big). \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tak rovnost odpovídající definici sudé funkce, kterou $g$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že $g$ je libovolná sudá funkce.

Triviálním dosazením nalezeného předpisu a jednoduchou úvahou zjistíme, že příklad má nekonečně mnoho řešení, přičemž každé řešení je tvořeno dvojicí funkcí $f$, $g$, kde $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $g$ je libovolná sudá funkce.

□

*5) Využití symetrie jedné ze stran funkcionální rovnice*

V některých případech funkcionálních rovnic si můžeme všimnout, že jedna strana rovnice je vzhledem k (obvykle dvěma) zastoupeným proměnným symetrická, zatímco druhá strana nikoliv. Vzájemnou výměnou těchto dvou proměnných tak můžeme získat další rovnost, kterou hledaná funkce splňuje a která nám může dopomoci nalézt řešení. Na následujícím příkladu tuto metodu názorně ilustrujeme.

**Příklad 1.5.** *Určete všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f\big(f(x)+y\big) = f(x+y) + 1$$

*pro každá $x, y \in \mathbb{R}$.*[3]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující zadání příkladu. Pravá strana zadané rovnice je symetrická vzhledem k proměnným $x$ a $y$, proto pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f\big(f(x)+y\big) = f(x+y) + 1 = f\big(f(y)+x\big),$$

odkud vzhledem k předpokladu, že funkce $f$ je prostá, dostaneme

$$f(x) + y = f(y) + x.$$

Položením $y = 0$ v předešlém výsledku zjistíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí vztah $f(x) = f(0) + x$ neboli $f(x) = x + c$, kde $c = f(0) \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Snadným dosazením nalezeného předpisu funkce $f$ do zadání ještě ověříme, jestli je taková funkce opravdu řešením pro každé $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\big(x+c+y\big) &= x+y+c+1, \\ x+y+c+c &= x+y+c+1, \\ c &= 1. \end{aligned}$$

[3] [CŠ1, str. 326]

Jak vidíme, nalezený předpis funkce $f$ splňuje zadání pouze pro $c = 1$. Řešením příkladu je tedy pouze funkce tvaru $f(x) = x + 1$.

$\square$

*6) Využití oboru hodnot hledané funkce*

Někdy je výhodné, zejména u řešení funkcionálních rovnic obsahujících složené funkce, zaměřit se na tvar řešení na množině, která odpovídá oboru hodnot hledaných funkcí. Vhodnými úvahami pak lze tato vyjádření rozšířit na celý definiční obor, což ukážeme na následujícím příkladě 1.6.

**Příklad 1.6.** *Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(f(x+y)\big) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[4]

*Řešení.* Nechť $f$ dále značí funkci splňující zadání příkladu. Položením $y = 0$ dostaneme $f\big(f(x)\big) = f(x)(1 + f(0))$. Jak vidíme ze zastoupení hodnoty $f(x)$ v odvozené rovnosti, pro všechna $z$ z oboru hodnot funkce $f$ platí

$$f(z) = z(1 + a), \tag{1.2}$$

kde $a = f(0)$ je konstanta. Nahrazením $z$ hodnotou $f(x+y)$ v nalezeném předpisu (1.2) získáme jiný vztah pro levou stranu rovnosti uvedené v zadání: $f\big(f(x+y)\big) = f(x+y)(1+a)$. Porovnáním s pravou stranou tak dojdeme k závěru, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} f(x+y)(1+a) &= f(x+y) + f(x)f(y) - xy, \\ af(x+y) &= f(x)f(y) - xy. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Položením $x = a$ a $y = -a$ zjistíme s ohledem na označení $a = f(0)$, že platí $a^2 = f(a)f(-a) - a(-a)$ neboli $f(a)f(-a) = 0$. Odtud plyne, že alespoň jedna z hodnot $f(a)$, $f(-a)$ musí být rovna nule. Proto nula patří do oboru hodnot funkce $f$ a položením $z = 0$ v (1.2) obdržíme $f(0) = 0$, tj. $a = 0$. Díky nulové hodnotě levé strany (1.3) vychází rovnost

$$f(x)f(y) = xy. \tag{1.4}$$

Volbou $x = y = 1$ získáme $\big(f(1)\big)^2 = 1$, takže platí buď $f(1) = 1$, nebo $f(1) = -1$. Pro $y = 1$ přejde v prvním případě ($f(1) = 1$) rovnost (1.4) do tvaru $f(x) = x$, ve druhém případě ($f(1) = -1$) do tvaru $f(x) = -x$.

[4] Běloruská matematická olympiáda (1995).

Obdrželi jsme tak dvě funkce, které jediné mohou být řešením příkladu. Snadným dosazením však dojdeme k závěru, že řešením je pouze funkce s předpisem $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

*7) Nalezení pevného bodu hledané funkce*

Při řešení funkcionálních rovnic obsahující složené funkce (zejména jejich iterace) bývají někdy přínosné úvahy o tzv. *pevných bodech.* Řekneme, že hodnota $x_0 \in \mathbb{R}$ je pevným bodem funkce $f$, pokud leží jak v jejím definičním oboru, tak v oboru hodnot a platí $f(x_0) = x_0$.

Nalezneme-li pevný bod funkce, lze tuto informaci uplatnit například pro důkaz toho, že další jiný pevný bod funkce nemá a po dosazení jeho hodnoty za vhodnou proměnnou získat jednodušší rovnici, kterou jsme již schopni vyřešit (viz první příklad 7.1 kapitoly 7). Někdy lze zase dokázat, že existence jakéhokoliv dalšího pevného bodu vede k závěru, že každé $x \in \mathbb{R}$ je pevným bodem hledané funkce. Nalezení takového druhého pevného bodu u každého řešení nám pak zaručí, že funkce s předpisem ve tvaru $f(x) = x$ je jediným řešením.

Poslední zmiňovaný postup nyní uplatníme v následujícím příkladu 1.7.

**Příklad 1.7.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(xy - xf(y)\big) = xy - yf(x)$$

*pro každá $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce, která splňuje zadání. Volbou $x = y = 0$ snadno zjistíme, že $x = 0$ je pevným bodem funkce $f$: $f(0) = 0$.

Ukážeme, že existence jakéhokoliv jiného (nenulového) pevného bodu zaručí, že jediným řešením příkladu může být pouze funkce s předpisem ve tvaru $f(x) = x$, kde $x \in \mathbb{R}$. Označíme-li totiž $x_0 \neq 0$ jako libovolný, dále pevně daný, pevný bod funkce $f$, dostaneme pro $y = x_0$ s ohledem na podmínky $f(x_0) = x_0$ a $f(0) = 0$ rovnost

$$\begin{aligned} f\big(xx_0 - xf(x_0)\big) &= xx_0 - x_0 f(x), \\ f(0) &= xx_0 - x_0 f(x), \\ f(x) &= x, \end{aligned}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zbývá tedy dokázat, že funkce $f$ má alespoň jeden nenulový pevný bod, abychom funkci $f(x) = x$ mohli prohlásit za (jediné) řešení.

Po dosazení $x = y = 1$ do rovnosti ze zadání obdržíme

$$f\big(1 - f(1)\big) = 1 - f(1),$$

odkud vidíme, že $1 - f(1)$ je pevným bodem funkce $f$. V obou případech, které mohou pro hodnotu $1 - f(1)$ nastat, tj. $1 - f(1) = 0$, nebo $1 - f(1) \neq 0$, však zjistíme, že jsme nalezli nenulový pevný bod funkce $f$, a to buď $x = 1$ v případě prvním, nebo $x = 1 - f(1)$ v případě druhém.

Dokázali jsme tak, že jediným řešením příkladu může být opravdu pouze funkce s předpisem ve tvaru $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením předpisu funkce $f$ do zadání zjistíme, že jde skutečně o řešení.

$\square$

Uvedli jsme nejhojněji využívané základní obraty, kterými lze funkcionální rovnice řešit. Nicméně existují příklady rovnic, kdy ani kombinace výše uvedených metod nestačí. Jako příklad takové funkcionální rovnice a jejího originálního řešení, v němž předpis hledané funkce zkoumáme nejdříve pro přirozená čísla, poté pro všechna racionální čísla až nakonec dojdeme k číslům reálným, uvádíme ve třetí kapitole nejznámější funkcionální rovnici pojmenovanou Cauchyova.

# Kapitola 2

# Nejjednodušší funkcionální rovnice

V této první praktické části naší práce čtenáři představíme elementární metody řešení na nejjednodušších funkcionálních rovnicích. Zařadili jsme sem dosazení konkrétních hodnot (specifikace) za vystupující nezávislé proměnné, využití vhodných substitucí za výrazy obsahující hledané funkce nebo substitucí zaměřených na nezávislé proměnné a sčítání, resp. odčítání funkcionálních rovnic, které v průběhu hledání řešení odvodíme. Jedná se o tak základní obraty využívané pro hledání vyhovujících funkcí, že alespoň jeden z výše jmenovaných uplatníme při řešení téměř každé funkcionální rovnice. Uvědomme si však, že i přes jejich jednoduchost je potřeba dbát na korektnost postupu, kupříkladu se vyvarovat chyb spočívajících v dosazování hodnot mimo definiční obor za nezávislé proměnné.

Připomeňme také, že nedílnou součástí každého postupu řešení je zkouška spočívající v dosazení nalezeného předpisu do zadání. Její provedení může například ukázat, že některé z nalezených funkcí nepatří do množiny řešení (jak si čtenář bude moci dále všimnout, u příkladů, kde nalezené řešení očividně splňuje zadání nebo je formální zápis provedení zkoušky zbytečně komplikovaný, zkoušku neprovádíme).

Nyní zde uvedeme příklady, na nichž ilustrujeme situaci, kde by mohl případný řešitel udělat chybu při substitucích nebo specifikaci proměnných.

**Příklad 2.1.** *Nalezněte všechny funkce* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, *které splňují rovnost*

$$f(xy) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

*pro všechna* $x, y \in (0,\infty)$.[1]

[1] [Smí, str. 32]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou funkci, která splňuje zadanou rovnost. Pro každé reálné $t > 0$ dosaďme do zadané rovnosti kladná čísla $x = y = \sqrt{t}$. Dostaneme tak rovnost $f(t) = f\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) = f(1)$. Jak vidíme, je funkce $f$ konstantní pro všechna kladná reálná čísla, lze tedy psát $f(x) = c$, kde $c = f(1) \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$.

Snadným dosazením nalezeného předpisu do zadání zjistíme, že libovolná konstantní funkce na $(0, \infty)$ je opravdu řešením příkladu.

□

Výše uvedený triviální příklad by neměl činit větší problémy při řešení žádnému čtenáři této práce, nicméně v průběhu řešení složitějších funkcionálních rovnic se po určitých substitucích můžeme dostat do situace, kdy máme za úkol vyřešit stejnou rovnici jako v příkladu 2.1, avšak s mírně upraveným zadáním:

**Příklad 2.2.** *Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f(xy) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

*pro všechna přípustná $x, y \in \mathbb{R}$.*

Slovo „přípustná“ v zadání příkladu znamená, že uvedená rovnost má platit pro všechny dvojice $(x, y)$ reálných čísel, které lze do rovnice dosadit. Jsou to zřejmě všechny dvojice, kromě dvojic $(x, 0)$, pro které zlomek $\frac{x}{y}$ v pravé části rovnosti ztrácí smysl.

Stejně jako v příkladu 2.1 je patrné, že řešením příkladu 2.2 je každá konstantní funkce $f$. Nesmíme však udělat ukvapený závěr, že jiná řešení neexistují. Přesvědčíme se, že tomu tak není.

*Řešení.* Označme $f$ jako funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání.

Nejdříve stejně jako v příkladu 2.1 dosadíme do zadané rovnice pro libovolné reálné $t > 0$ kladná čísla $x = y = \sqrt{t}$. Obdržíme tak stejně jako výše rovnost $f(t) = f(1)$, díky čemuž můžeme psát $f(x) = a$, kde $a = f(1) \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$.

Položením $x = -\sqrt{t}$ a $y = \sqrt{t}$, kde $t > 0$ je libovolné, přejde zadaná rovnost do tvaru $f(-t) = f\left(-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) = f(-1)$. Jak je vidět, je funkce $f$ konstantní i pro všechna záporná reálná čísla, proto pro tato čísla má její předpis tvar $f(x) = b$, kde $b = f(-1) \in \mathbb{R}$.

Zjistili jsme tak (při označení $f(0) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$), že každá funkce splňující zadání musí být tvaru

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{pro } x > 0, \\ b & \text{pro } x < 0, \\ c & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

kde $a, b, c$ jsou libovolné reálné konstanty. Zkouškou, v níž rozebereme všechny případy hodnot jaké mohou pro levou stranu zadané rovnosti nastat, nyní ukážeme, že taková funkce je skutečně řešením, ať jsou čísla $a, b, c$ zvolena jakkoliv.
Levá strana rovnosti $f(xy) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ je rovna jednomu z čísel $a, b, c$:

Rovnost $f(xy) = a$ platí, právě když $xy > 0$, což znamená, že obě čísla $x, y$ jsou buď kladná, nebo záporná, a proto platí také $\frac{x}{y} > 0$, a tudíž i $f\left(\frac{x}{y}\right) = a$.

Rovnost $f(xy) = b$ platí, právě když $xy < 0$, což znamená, že jedno z čísel $x, y$ je kladné a druhé záporné, a proto platí také $\frac{x}{y} < 0$, a tudíž i $f\left(\frac{x}{y}\right) = b$.

Konečně rovnost $f(xy) = c$ platí, právě když $xy = 0$, což znamená, že $x = 0$ a $y \neq 0$, neboť hodnota $y = 0$ není přípustná, a proto také platí $\frac{x}{y} = 0$, a tudíž i $f\left(\frac{x}{y}\right) = c$.

□

Porovnáním předchozích dvou zadání a řešení si můžeme všimnout, že zatímco v prvním příkladě, kde jsme uvažovali definiční obor ve tvaru intervalu $(0, \infty)$ a odvodili řešení ve tvaru konstantních (a tedy spojitých) funkcí, v druhém příkladě, který se lišil od prvního pouze v definičním oboru (tentokrát ve tvaru $\mathbb{R}$), jsme odvodili i nespojitá řešení. Jak vidíme, je zde požadavek, že hledaná funkce má být definovaná pouze pro kladná čísla, dostatečným pro to, aby zadané rovnosti neodpovídaly žádné nespojité funkce. Proto při řešení nějaké funkcionální rovnice je důležité si uvědomit, že změna předpokladu, za kterého hledáme jí vyhovující funkce, s sebou nese riziko i zásadní změny tvaru všech řešení. V našem případě jsme po změně obdrželi kromě řešení ve tvaru spojitých konstantních funkcí i funkce nespojité.

V další části se zaměříme na způsoby, jakými lze nejjednodušší funkcionální rovnice řešit, a to pomocí již výše avizovaných metod specifikace proměnné, substituce s výrazy obsahujících nezávislé proměnné nebo hledané funkce a součtu, resp. rozdílu odvozených funkcionálních rovnic.

**Příklad 2.3.** *Ukažte, že existuje jediná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

*a její předpis má tvar $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*[2]

*Řešení.* Nechť $f$ je funkce splňující zadanou rovnost. Po dosazení $x = 1$ a $y = 1$ dostaneme

$$f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1).$$

[2] [Ven, str. 109]

Vidíme tedy, že musí být $f(1) = 0$. S ohledem na tuto skutečnost po dosazení $y = 1$ do zadané rovnosti dojdeme k závěru

$$f(x) = xf(x) + f(1) = xf(x) \quad \text{neboli} \quad (1-x)f(x) = 0.$$

Odtud plyne, že $f(x) = 0$ pro každé $x \neq 1$. Celkově tedy platí $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Je patrné, že taková funkce $f$ je skutečně řešením.

□

**Příklad 2.4.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*

$$\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 = f(x+y)f(x-y).$$

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí. Položíme-li $y = x$, resp. $y = -x$, pak ze zadané funkcionální rovnice dostaneme

$$\big(f(x)\big)^2 = f(2x)f(0), \text{ resp.} \tag{2.1}$$

$$\big(f(0)\big)^2 = f(0)f(2x). \tag{2.2}$$

Nyní uvážíme dva případy, které mohou nastat pro hodnotu $f(0)$.

Je-li $f(0) = 0$, pak z rovnosti (2.1) plyne $\big(f(x)\big)^2 = 0$. Jedním řešením je v tomto případě tedy funkce $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, o čemž se přesvědčíme snadným dosazením.

Je-li $f(0) \neq 0$, pak z rovnosti (2.2) plyne $f(0) = f(2x)$. Odtud vidíme, že dalšími řešeními mohou být pouze konstantní funkce $f(x) = c$, kde $f(0) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dosazením do zadání se snadno přesvědčíme, že tyto funkce danou funkcionální rovnici opravdu splňují, neboť obě její strany získají tutéž hodnotu $c^2$.

Dohromady tak dostáváme, že zadání příkladu vyhovují všechny konstantní funkce (a žádné jiné).

□

**Příklad 2.5.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, u \in \mathbb{R}$ rovnosti*[3]

1) $f(x+u, y+u) = f(x,y) + u$,

2) $f(xu, yu) = f(x,y)u$.

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci, která splňuje zadání. Položením $x = 0$ a $y = 1$ v rovnosti 2) dostaneme $f(0,u) = f(0,1)u$, odkud plyne vzorec $f(0,x) = qx$ pro nějakou reálnou konstantu $q$. Volbou $u = -x$ v rovnosti 1) obdržíme

$$f(x-x, y-x) = f(x,y) - x \quad \text{neboli} \quad f(0, y-x) + x = f(x,y).$$

[3] [Ven, str. 113]

Odtud s ohledem na fakt, že $f(0,x) = qx$, dostaneme výsledný vzorec

$$f(x,y) = f(0,y-x) + x = q(y-x) + x = (1-q)x + qy.$$

Snadným dosazením do obou podmínek provedeme zkoušku:

$$\begin{aligned}
L_1:&\quad f(x+u,y+u) = (1-q)(x+u) + q(y+u) = (1-q)x + qy + u,\\
P_1:&\quad f(x,y) + u = (1-q)x + qy + u,\\
L_2:&\quad f(xu,yu) = (1-q)xu + qyu,\\
P_2:&\quad f(x,y)u = \big((1-q)x + qy\big)u = (1-q)xu + qyu.
\end{aligned}$$

Řešením jsou tedy pouze funkce tvaru $f(x,y) = (1-q)x + qy$, kde $q$ je libovolná reálná konstanta.

□

**Příklad 2.6.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ splňující*

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.*[4]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce splňující zadání. Záměnou $-\frac{1}{x}$ za $x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{-\frac{1}{x}}\right) &= -\frac{1}{x},\\
-xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) &= -\frac{1}{x}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Vyjádřením $f\left(\frac{1}{x}\right)$ z původní rovnice obdržíme

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x}f(-x).$$

Dosazením pravé strany předešlé rovnosti za hodnotu $f\left(\frac{1}{x}\right)$ v (2.3) získáme:

$$\begin{aligned}
-x\left(x - \frac{1}{x}f(-x)\right) + f(-x) &= -\frac{1}{x},\\
-x^2 + f(-x) + f(-x) &= -\frac{1}{x},\\
2f(-x) &= \frac{x^3-1}{x},\\
f(x) &= \frac{1+x^3}{2x}.
\end{aligned}$$

[4] [Ven, str. 114]

Snadno se přesvědčíme, že jsme opravdu nalezli (jediné) řešení:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x^3}{-2x^2} + \frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{2\frac{1}{x}} = \frac{1-x^3}{-2x^2} + \frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{2}{x}} = \\ &= \frac{x^3-1}{2x^2} + \frac{x^3+1}{2x^2} = x = P(x). \end{aligned}$$

□

V příkladech 2.3 až 2.6 jsme výhradně využívali metody specifikace nebo nahrazení nezávislé proměnné jinou proměnnou, resp. jednoduchým výrazem. V příkladech 2.7 a 2.8 ukážeme, že v některých případech je výhodné (někdy i nezbytné) definovat novou funkci, v jejímž předpisu se vyskytuje hledaná funkce.

Následující rovnice, v níž je zavedení nové funkce nezbytností, byla studována D. M. Sincovem již v roce 1903, a proto také byla nazvána jeho jménem ([Neu, str. 60]).

**Příklad 2.7.** ***(Sincovova funkcionální rovnice)*** *Určete všechny takové funkce $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, které rovnost*

$$F(x,y) + F(y,z) = F(x,z)$$

*splňují pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*[5]

*Řešení.* Nechť $F$ označuje funkci, která splňuje zadání, a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné, dále však pevně dané. Definujme novou funkci $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve tvaru

$$g(x) = -F(x,c)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Po dosazení $c$ za proměnou $z$ v zadané rovnosti získáme $F(x,y)+$ $+F(y,c) = F(x,c)$, odkud po úpravě zjistíme, že s ohledem na předpis funkce $g$ platí $F(x,y) = -F(y,c)+F(x,c) = g(y)-g(x)$. Obdrželi jsme tak předpis funkce $F$ ve tvaru $F(x,y) = g(y) - g(x)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Dosazením do zadání se přesvědčíme, že jsme opravdu našli všechna (i nespojitá) řešení:

$$\begin{aligned} L:&\quad F(x,y) + F(y,z) = g(y) - g(x) + g(z) - g(y) = g(z) - g(x), \\ P:&\quad F(x,z) = g(z) - g(x). \end{aligned}$$

Na funkci $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ z předpisu funkce $F$ tedy nejsou kladeny žádné podmínky.

□

[5] [Neu, str. 60]

**Poznámka.** Sincovova funkcionální rovnice popisuje známé pravidlo při počítání s určitými integrály

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcí (riemannovsky) integrovatelnou na každém intervalu konečné délky, a její řešení je obdobou Newtonovy-Leibnizovy formule

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = F(y) - F(x),$$

kde $F$ je primitivní funkce k funkci $f$.

**Příklad 2.8.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[6]

*Řešení.* Zadanou funkcionální rovnici budeme řešit užitím substituce

$$t = x - y \quad \text{a} \quad u = x + y.$$

Protože v původní rovnici vystupují libovolná $x, y \in \mathbb{R}$, ze vztahů

$$x = \frac{u+t}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{u-t}{2}$$

plyne, že i v přepsané rovnici budou hodnoty $t, u \in \mathbb{R}$ libovolné. Levá strana bude

$$tf(u) - uf(t),$$

pravou stranu nyní vypočteme:

$$4xy(x^2 - y^2) = 4 \cdot \frac{u+t}{2} \cdot \frac{u-t}{2}(x-y)(x+y) = (u^2 - t^2)tu = tu^3 - t^3u.$$

Hledáme tak každou funkci $f$, která splňuje rovnost $tf(u) - uf(t) = tu^3 - t^3u$ pro všechna $t, u \in \mathbb{R}$. Třetích mocnin na pravé straně se zbavíme tak, že uvážíme funkci $h$ danou předpisem $h(x) = f(x) - x^3$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Po dosazení funkce $h(x)$ ($f(x) = h(x) + x^3$) obdržíme

$$\begin{aligned} t(h(u) + u^3) - u(h(t) + t^3) &= tu^3 - t^3u, \\ th(u) - uh(t) + tu^3 - t^3u &= tu^3 - t^3u, \\ th(u) &= uh(t). \end{aligned}$$

[6] [Ven, str. 111]

Odtud po dosazení $t = 1$ a návratu k funkci $f$ dostaneme

$$\begin{aligned} h(u) &= uh(1), \\ f(u) - u^3 &= u(f(1) - 1), \\ f(u) &= u^3 - u(f(1) - 1). \end{aligned}$$

Našli jsme tedy předpis funkce $f$, $f(x) = x^3 - cx$, kde $f(1) - 1 = c \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání ověříme, zda jsme opravdu nalezli řešení funkcionální rovnice:

$$\begin{aligned} (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) &= (x-y)\big((x+y)^3 - c(x+y)\big) - \\ &\quad - (x+y)\big((x-y)^3 - c(x-y)\big) = \\ &= (x^2 - y^2)\big((x+y)^2 - c\big) - \\ &\quad (x^2 - y^2)\big((x-y)^2 - c\big) = \\ &= (x^2 - y^2)\Big((x+y)^2 - c - \big((x-y)^2 - c\big)\Big) = \\ &= (x^2 - y^2)(4xy). \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnost ze zadání platí pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ a že jedinými řešeními jsou tedy všechny funkce tvaru $f(x) = x^3 - cx$.

□

V následujícím příkladu 2.9 ilustrujeme metodu spočívající v získání soustavy funkcionálních rovnic ze zadání postupným nahrazováním nezávislých proměnných. Odčítáním (jindy zase sčítáním nebo dosazovací metodou) těchto rovnic pak můžeme snadno obdržet předpis hledané funkce.

**Příklad 2.9.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*[7]

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)(y+2) - y(x^2 - 2y).$$

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí. Po nahrazení $y$ za $x$ resp. $y$ za $-x$ získáme dvě rovnosti

$$f(2x) + f(0) = f(x)(x+2) - x(x^2 - 2x), \text{ resp.} \tag{2.4}$$

$$f(0) + f(2x) = f(x)(-x+2) + x(x^2 + 2x). \tag{2.5}$$

Odečtením druhé od první, tj. (2.4) – (2.5), obdržíme

$$\begin{aligned} 0 &= f(x)(x+2) - x(x^2 - 2x) - f(x)(-x+2) - x(x^2 + 2x), \\ 0 &= 2xf(x) - 2x^3, \\ 2xf(x) &= 2x^3. \end{aligned}$$

[7] [Ven, str. 109]

Pro každé $x \neq 0$ tak vidíme, že $f(x) = x^2$. Zbývá nalézt hodnotu funkce $f$ v bodě 0. Položíme-li $x = 0$ a předpokládáme-li, že $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, dostaneme

$$\begin{aligned} f(y) + f(-y) &= f(0)(y+2) + 2y^2, \\ y^2 + (-y)^2 &= f(0)(y+2) + 2y^2, \\ 0 &= f(0)(y+2). \end{aligned}$$

Poslední rovnost musí být splněna pro všechna $y$ různá od $-2$ a 0, díky čemuž dostáváme $f(0) = 0$. Hledaný předpis funkce $f$ má tedy tvar $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dosazením se snadno přesvědčíme, že jsme opravdu nalezli (jediné) řešení:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(x+y) + f(x-y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2), \\ P: &\quad f(x)(y+2) - y(x^2-2y) = x^2(y+2) - y(x^2-2y) = 2(x^2+y^2). \end{aligned}$$

□

Kapitolu ukončíme příkladem, v němž narozdíl od těch předešlých hledáme předpis komplexní funkce komplexní proměnné. Jak si čtenář bude moci všimnout, je metodika řešení opět stejná jako u příkladů již zde uvedených.

**Příklad 2.10.** *Nechť je dána funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a komplexní čísla $a, w$, kde $w \neq 1$ a $w^3 = 1$. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, které pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňují*[8]

$$f(z) + f(wz+a) = g(z). \tag{2.6}$$

*Řešení.* Nechť $f$ je nějaká funkce splňující zadání. Nejdříve si všimněme, že z předpokladu $w \neq 1$ a $w^3 = 1$ plyne ze známého rozkladu dvojčlenu $w^3 - 1$ rovnost

$$w^2 + w + 1 = 0.$$

Nahrazením $wz + a$ za $z$ v zadané rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} f(wz+a) + f\big(w(wz+a)+a\big) &= g(wz+a), \\ f(wz+a) + f(w^2z + wa + a) &= g(wz+a). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Po jiném nahrazení $w^2z + wa + a$ za $z$ v rovnosti (2.6) obdržíme

$$\begin{aligned} f(w^2z+wa+a) + f\big(w(w^2z+wa+a)+a\big) &= g(w^2z+wa+a), \\ f(w^2z+wa+a) + f(w^3z+w^2a+wa+a) &= g(w^2z+wa+a). \end{aligned} \tag{2.8}$$

[8] [Ven, str. 112]

Po provedení (2.6) − (2.7) + (2.8) dostaneme rovnost

$$f(z) + f(w^3z + w^2a + wa + a) = g(z) - g(wz + a) + g(w^2z + wa + a),$$

odkud s ohledem na fakt, že $w^3 = 1$ a $w^2 + w + 1 = 0$, plyne

$$\begin{aligned} f(z) + f\big(w^3z + a(w^2 + w + 1)\big) &= g(z) - g(wz + a) + g(w^2z + wa + a),\\ f(z) + f(z) &= g(z) - g(wz + a) + g(w^2z + wa + a),\\ f(z) &= \frac{1}{2}\Big(g(z) - g(wz + a) + g(w^2z + wa + a)\Big). \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak pro hledanou funkci $f$ předpis, kterým je určena pro každé $z \in \mathbb{C}$. O tom, že se jedná skutečně o řešení, se přesvědčíme dosazením do levé strany zadané rovnosti:

$$\begin{aligned} f(z) + f(wz + a) &= \frac{1}{2}\big(g(z) - g(wz + a) + g(w^2z + wa + a)\big) +\\ &+ \frac{1}{2}\big(g(wz + a) - g(w^2z + wa + a) + g(w^3z + w^2a + wa + a)\big) =\\ &= \frac{1}{2}\Big(g(z) + g\big(w^3z + a(w^2 + w + 1)\big)\Big) = g(z). \end{aligned}$$

□

## 2.1 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 2.11.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*[9]

$$f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

**Příklad 2.12.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*[9]

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y.$$

**Příklad 2.13.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x)f(x + y) = f^2(y)f^2(x - y)\mathrm{e}^{y+4}$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[9]

[9] [Ven, str. 109]

**Příklad 2.14.** *Nechť $\alpha$ je dané reálné číslo. Určete všechny takové funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, které pro všechna $x \in (0,\infty)$ splňují rovnost*[10]

$$\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

**Příklad 2.15.** *Určete všechny takové funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, které splňují rovnost*

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

*pro každé $z \in \mathbb{C}$.*[11]

[10] Izraelská matematická olympiáda (1995).
[11] [A-G, str. 188]

# Kapitola 3

# Cauchyova funkcionální rovnice

Metodika řešení příkladů daného matematického oboru musí být podpořena znalostmi jeho základních výsledků. V našem případě tento výklad nemůžeme začít jinak, než představením nejznámější funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pojmenované po francouzském matematikovi A. L. Cauchym. Ačkoliv nebyl první, kdo světu představil tuto rovnici spolu s jejím řešením, díky jejímu uvedení a na svou dobu preciznímu vyřešení spolu s jejími modifikacemi v díle *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* [Cau] si Cauchy zasloužil, aby tato rovnice nesla jeho jméno. Důležitost Cauchyovy funkcionální rovnice a jejího řešení oceníme později v dalších řešených příkladech, ve kterých bude zejména využito substituce pro převod zadané rovnice do tvaru Cauchyovy funkcionální rovnice nebo jiné již vyřešené rovnice, v jejímž řešení bylo takové substituce užito.

**Příklad 3.1.** ***(Cauchyova funkcionální rovnice)*** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání. Položením $x = y = 0$ zjistíme, že platí $f(0) = f(0) + f(0)$ neboli $f(0) = 2f(0)$, což je splněno pouze v jediném případě, kdy $f(0) = 0$.

Nahrazením $y$ opačnou hodnotou $x$, tj. $-x$, dostaneme $f(0) = f(x) + f(-x)$ neboli $f(-x) = -f(x)$. Jak vidíme, je $f$ lichá funkce, díky čemuž se hledání jejího předpisu značně zjednoduší.

Nyní budeme postupně zkoumat vlastnosti funkce $f$ na množině všech přirozených (celých), racionálních a reálných čísel. Nejdříve matematickou indukcí dokážeme, že vztah

$$f(nx) = nf(x) \tag{3.1}$$

platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Je-li $n = 1$, je dokazovaná rovnost splněna triviálně. Předpokládejme, že je splněna také pro dané $n_0 \in \mathbb{N}$. S ohledem na zadání a uvedené předpoklady můžeme psát

$$f\big((n_0+1)x\big) = f(n_0x + x) = f(n_0x) + f(x) = n_0f(x) + f(x) = (n_0+1)f(x).$$

Dokázali jsme tak, že rovnost $f(nx) = nf(x)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a vzhledem k tomu, že je funkce $f$ lichá, platí i pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$.

Položením $y = \frac{m}{n}x$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, a následnou úpravou do tvaru $ny = mx$, z něhož vyplývá rovnost $f(ny) = f(mx)$, dostaneme s ohledem na (3.1) vztah

$$\begin{aligned} f(ny) &= f(mx), \\ nf(y) &= mf(x), \\ f(y) &= \frac{m}{n}f(x), \end{aligned}$$

odkud plyne $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$. Položením $x = 1$ v poslední získané rovnosti dostaneme $f(q) = q \cdot c$, kde $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ a $c = f(1) \in \mathbb{R}$.

Jak vidíme, mají všechny funkce, které jsou řešením tohoto příkladu, na množině všech racionálních čísel předpis tvaru $f(r) = cr$, pro vhodné $c \in \mathbb{R}$ a všechna $r \in \mathbb{Q}$. Všimněme si také, že jsme nikde nevyužili předpoklad spojitosti, proto uvedený předpis platí i pro nespojité funkce, které splňují zadanou rovnost. Rozšířením výše uvedeného předpisu na všechna reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ již však spojitosti[1] funkce $f$ využijeme.

Nechť $x$ je libovolné, dále pevně dané reálné číslo a $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost racionálních čísel konvergující k $x$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. S ohledem na spojitost funkce $f$ a její předpis na množině racionálních čísel pak platí

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = \lim_{n\to\infty} r_n c = c \lim_{n\to\infty} r_n = cx.$$

Každá spojitá funkce, která je řešením Cauchyovy funkcionální rovnice, je tedy tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Dosazením nalezeného předpisu do zadání tento výsledek snadno potvrdíme:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) = c(x+y) = cx + cy, \\ P:&\quad f(x) + f(y) = cx + cy. \end{aligned}$$

$\square$

[1] Podmínka spojitosti zde není klíčová pro dosažení kýženého výsledku. Lze ji například nahradit předpokladem, že je funkce $f$ ohraničená na některém intervalu kladné délky. Toto tvrzení formulujeme ve Větě 3.1. Ale po vynechání tohoto předpokladu ze zadání budou řešením i nespojité funkce, jejichž popis lze nalézt v [S-K, str. 9].

Jak si čtenář může v řešení všimnout, analyzujeme vyhovující funkce nejdříve na množině všech přirozených čísel, poté zdůvodníme tvar těchto funkcí na množině všech racionálních čísel a až nakonec (s využitím spojitosti) přejdeme k číslům reálným. Tento specifický postup řešení je někdy považován za jednu z významných metod, jak funkcionální rovnice řešit, a nazývá se proto Cauchyova metoda řešení rovnic.

Předpoklad spojitosti lze přitom nahradit požadavkem ohraničenosti nebo monotónnosti, jak v následující větě (a jejím důsledku), jejíž důkaz lze nalézt v [S-K, str. 14], uvádíme.

**Věta 3.1.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

*a je dále buď monotónní, nebo shora, resp. zdola omezená na nějakém intervalu kladné délky, pak její předpis je tvaru $f(x) = cx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.*

**Důsledek.** *Splňuje-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ obě rovnosti*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad f(xy) = f(x)f(y),$$

*pak její předpis je jeden z tvarů $f(x) = 0$ nebo $f(x) = x$, kde $x \in \mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Nahrazením $x$ za $y$ v druhé rovnosti dostaneme $f(x^2) = \big(f(x)\big)^2 \geq 0$. Zjistili jsme tak, že funkce $f$ je pro $x \geq 0$ zdola omezená a z Věty 3.1 proto plyne, že její předpis je tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Dosazením nalezeného předpisu do druhé rovnosti v uvedených předpokladech obdržíme

$$cxy = c^2xy,$$

odkud již plyne, že musí být $c = 0$ nebo $c = 1$, aby poslední rovnost platila pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Dokázali jsme tak, že předpis funkce $f$ může mít opravdu pouze dvě podoby, a to $f(x) = 0$ nebo $f(x) = x$.

□

Taktéž definiční obor $\mathbb{R}$ hledané funkce lze nahradit. Vhodné množiny uvádíme v následující větě, na níž se v některých příkladech této práce odvoláváme a jejíž důkaz lze nalézt v [A-D, str. 12].

**Věta 3.2.** *Nechť $D$ je jedna z množin $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $\langle 0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ nebo $(-\infty, 0\rangle$. Pak každá spojitá funkce $f\colon D \to \mathbb{R}$, která splňuje rovnost*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

*pro všechna $x, y \in D$, má předpis $f(x) = cx$ pro vhodné $c \in \mathbb{R}$.*

## 3.1 Modifikace Cauchyovy funkcionální rovnice

Při řešení funkcionálních rovnic se po určitých substitucích nemusíme nutně dobrat přímo k výše uvedené Cauchyově funkcionální rovnici, ale k její modifikaci spočívající v záměně operace sčítání za operaci násobení na jedné či obou stranách rovnice. Celkem tak získáme tři následující rovnice[2], kde $x, y$ jsou libovolná reálná čísla:

$$\begin{aligned} &1) \qquad & f(x+y) &= f(x)f(y),\\ &2) \qquad & f(xy) &= f(x)+f(y),\\ &3) \qquad & f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

U každé z rovnic nyní nalezneme všechna spojitá řešení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť tedy $f$ dále označuje hledanou spojitou funkci splňující danou rovnost.

1) Z tvaru zadané rovnice je zřejmé, že konstantní funkce $f(x) = 0$ je (triviálním) řešením. Dokonce podmínka ve tvaru $f(x_0) = 0$ pro nějakou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ je dostatečná pro to, aby rovnost $f(x) = 0$ platila pro libovolné reálné $x$. Podle rovnice 1) totiž tehdy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = f\big((x - x_0) + x_0\big) = f(x - x_0)f(x_0) = 0.$$

Předpokládejme proto dále, že $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pak s ohledem na tento fakt dostaneme

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Jak vidíme, je v tomto případě obor hodnot hledané funkce $f$ tvořen pouze kladnými reálnými čísly. Díky tomu můžeme uvážit novou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$g(x) = \ln f(x) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Tato funkce je zřejmě spojitá a vzhledem k jejímu předpisu a zadané rovnici 1) dostaneme

$$g(x + y) = \ln f(x + y) = \ln\big(f(x)f(y)\big) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y).$$

Obdrželi jsme tak rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou funkce $g$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že její předpis má tvar $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.

[2]Tyto rovnice jsou v některých odborných textech (např. [And]) pojmenovány postupně 1) Exponenciální Cauchyova rovnice, 2) Logaritmická Cauchyova rovnice a 3) Multiplikativní Cauchyova rovnice.

S ohledem na dosažené výsledky již snadno odvodíme tvar nenulových řešení rovnosti 1):

$$f(x) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{cx} = a^x,$$

kde $a = \mathrm{e}^c \in (0, \infty)$. Snadným dosazením zjistíme, že takové funkce jsou opravdu řešením.

Funkcionální rovnici 1), jak jsme právě ukázali, splňují pouze funkce $f(x) = 0$ a funkce $f(x) = a^x$, kde $a \in (0, \infty)$ je libovolná konstanta.

2) Položením $y = 0$ dostaneme ze zadání $f(xy) = f(x) + f(y)$ rovnost $f(0) = = f(x) + f(0)$, odkud plyne, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Proto modifikace 2) Cauchyovy rovnice se stane zajímavou, teprve když vyloučíme nulu z definičního oboru funkce $f$ a budeme hledat takové spojité funkce $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici $f(xy) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tehdy je možné uvážit funkci $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou pro všechna reálná $x$ předpisem

$$g(x) = f\left(\mathrm{e}^x\right),$$

neboť $\mathrm{e}^x \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce $g$ je zřejmě spojitá (neboť jak exponenciální, tak hledaná funkce $f$ jsou spojité) a s ohledem na rovnici 2) platí

$$g(x + y) = f\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = f\left(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y\right) = f\left(\mathrm{e}^x\right) + f\left(\mathrm{e}^y\right) = g(x) + g(y).$$

Dostali jsme tak rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou spojitá funkce $g$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Její předpis je proto tvaru $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Je-li $x > 0$, pak pro odpovídající hledanou funkci $f$ platí

$$f(x) = f\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right) = g(\ln x) = c \ln x.$$

Využitím právě získaného předpisu pro $x > 0$ a volbou $y = x$ v rovnici 2) odvodíme pro všechna záporná reálná $x$ vztah

$$2f(x) = f(x) + f(x) = f\left(x^2\right) = c \ln x^2 = 2c \ln |x|,$$

odkud $f(x) = c \ln |x|$. Snadným dosazením získaných výsledků do zadání dojdeme k závěru, že funkce tvaru $f(x) = c \ln |x|$ s konstantním $c \in \mathbb{R}$ je opravdu spojitou funkcí $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, která je řešením úlohy, kterou jsme výše vymezili, tedy splňující rovnici $f(xy) = f(x) + f(y)$ pro všechny nenulové hodnoty $x$, $y$.

Dodejme, že často se řeší rovnice $f(xy) = f(x) + f(y)$ pouze v množině spojitých funkcí $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, kdy se splnění rovnice samozřejmě vyžaduje pouze pro libovolná $x, y \in (0, \infty)$. Všechna řešení této úlohy jsou tvaru $f(x) = c \ln x$ (včetně funkce $f(x) = 0$ pro $c = 0$), neboť i tehdy je možné uplatnit předchozí postup díky tomu, že $\mathrm{e}^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro novou funkci $g(x) = f(\mathrm{e}^x)$ tak dostaneme opět Cauchyovu funkcionální rovnici s proměnnými $x, y \in \mathbb{R}$ bez omezení.

3) Položením $y = 0$ v rovnici $f(xy) = f(x)f(y)$ získáme $f(0) = f(x)f(0)$. Odtud pro $f(0) \neq 0$ plyne rovnost $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je-li naopak $f(0) = 0$ a existuje-li reálná hodnota $x_0 \neq 0$ tak, že $f(x_0) = 0$, zjistíme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0}x_0\right) = f\left(\frac{x}{x_0}\right)f(x_0) = 0.$$

Snadným dosazením zjistíme, že obě konstantní funkce $f(x) = 1$ a $f(x) = 0$ jsou řešením.

Předpokládejme dále, že rovnost $f(x) = 0$ platí pouze pro $x = 0$. S ohledem na tento fakt a díky tomu, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\mathrm{e}^x) = f\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right) = f\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)f\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right) = \left(f\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)\right)^2 > 0,$$

můžeme uvážit funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = \ln f(\mathrm{e}^x).$$

Pro ni platí

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = \ln f(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) = \ln\left(f(\mathrm{e}^x)f(\mathrm{e}^y)\right) = \ln f(\mathrm{e}^x) + \ln f(\mathrm{e}^y) = \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Získali jsme rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou spojitá funkce $g$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Její předpis má proto tvar $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Odtud plyne: je-li $x > 0$, pak pro odpovídající hledanou funkci $f$ platí

$$f(x) = \mathrm{e}^{g(\ln x)} = \mathrm{e}^{c \ln x} = x^c.$$

V postupu hledání předpisu funkce $f$ pro $x < 0$ využijeme hodnotu $f(-1)$, proto si ji nejdříve z rovnice 3) postupně odvodíme: položíme-li $x = y = 1$, dostaneme rovnost $f(1) = (f(1))^2$, ze které s ohledem na výše uvedenou podmínku ($f(x) = 0$ pouze pro $x = 0$) plyne $f(1) = 1$; pro $x = y = -1$ nakonec získáme $f(1) = (f(-1))^2$ a s ohledem na předchozí odvození ($f(1) = 1$) vidíme, že platí $f(-1) = 1$ nebo $f(-1) = -1$.

Zvolíme-li nyní $y = -1$ v rovnici 3), pak pro $x < 0$ obdržíme

$$f(x) = f\big(-(-x)\big) = f(-1)f(-x) = f(-1)(-x)^c = f(-1)|x|^c,$$

odkud s ohledem na odvozené hodnoty $f(-1)$ platí, že pro všechna $x < 0$ je buď současně $f(x) = |x|^c$, nebo je současně $f(x) = -|x|^c$.

Shrnutím všech získaných výsledků zjišťujeme, že všechna řešení rovnice 3) musí být funkce ve tvaru $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, kde $x \in \mathbb{R}$, a (pro konstantní $c \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \begin{cases} x^c & \text{pro } x > 0 \\ |x|^c & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}, \text{ respektive } \quad f(x) = \begin{cases} x^c & \text{pro } x > 0 \\ -|x|^c & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Dosazením do rovnice 3) se můžeme přesvědčit, že tyto funkce jsou opravdu řešením, které však v případě funkcí definovaných po částech nejsou spojité, je-li $c \leq 0$.

Stejně jako u rovnice 2) se často rovnice 3) uvažuje jen pro funkce s užším definičním oborem $(0, \infty)$, který omezuje i volbu proměnných $x$ a $y$ v samotné rovnici. Podle našeho postupu lze ukázat, že každé spojité řešení $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ takové úlohy je jedna z funkcí tvaru $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ a $f(x) = x^c$ (pro konstantní $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Pro lepší orientaci nyní shrneme ta spojitá řešení, která jsme v postupech pro modifikované Cauchyovy funkcionální rovnice odvodili. Předpokládáme přitom, že proměnné $x$, $y$ v každé rovnici nabývají všech hodnot z definičního oboru funkce $f$.

1) $f(x + y) = f(x)f(y),\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   Řešení: $f(x) = 0,\ f(x) = a^x,$ kde $a \in (0, \infty)$.

2) $f(xy) = f(x) + f(y),\ f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$
   Řešení: $f(x) = c \ln x,$ kde $c \in \mathbb{R}$,

3) $f(xy) = f(x)f(y),\ f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$
   Řešení: $f(x) = 0$ a $f(x) = x^c,$ kde $c \in \mathbb{R}$.

**Poznámka.** Uvědomme si, že podobně jako u Cauchyovy funkcionální rovnice lze i zde, u jejích modifikací, nahradit definiční obor hledané funkce vhodnou množinou. Například v případě 3) můžeme uvážit funkci $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$. Řešení lze pak stejnými metodami jako výše odvodit ve tvaru $f(x) = x^c$, kde $x \in \mathbb{Q}^+$ a $c \in \mathbb{Z}$.

## 3.2 Jensenova funkcionální rovnice

Abychom podpořili naše tvrzení z úvodu kapitoly o důležitosti Cauchyovy rovnice a jejího řešení, představíme nyní funkcionální rovnici pojmenovanou po dánském matematikovi Johanovi Jensenovi, kterou snadno vyřešíme právě pomocí vhodné substituce převádějící zadanou rovnost do tvaru Cauchyovy funkcionální rovnice.

**Příklad 3.2.** ***(Jensenova funkcionální rovnice)*** *Určete všechny spojité funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

*pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$.

*Řešení.* Nejdříve označme $f$ libovolnou funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání. Všimněme si, že zřejmě platí

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{(x+y)+0}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2},$$

díky čemuž můžeme přepsat levou stranu zadané rovnosti právě získaným výsledkem:

$$\frac{f(x+y)+f(0)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Úpravou pak dostaneme $f(x+y)+f(0) = f(x)+f(y)$, odkud dále plyne

$$f(x+y) - f(0) = f(x) - f(0) + f(y) - f(0).$$

Definujme spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Poslední získanou rovnost tak můžeme přepsat do tvaru

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Tento výsledek odpovídá Cauchyově funkcionální rovnosti, jež spojitá funkce $g$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Platí tedy, že $g$ má předpis ve tvaru $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Dosazením nalezeného předpisu do definice funkce $g$ zjistíme, že platí $cx = f(x) - f(0)$ neboli $f(x) = cx + a$, kde $a = f(0) \in \mathbb{R}$. Dosazením nalezeného tvaru funkcí do zadání dojdeme k závěru, že jsme opravdu nalezli (všechna spojitá) řešení příkladu:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = c\left(\frac{x+y}{2}\right) + a = \frac{cx+cy}{2} + a, \\ P:&\quad \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{cx+a+cy+a}{2} = \frac{cx+cy}{2} + a. \end{aligned}$$

Konstanty $a, c$ v předpisu $f(x) = cx + a$ jsou tedy libovolné.

□

Zřejmě lze na Jensenovu rovnici pohlížet jako na zobecnění Cauchyovy funkcionální rovnice, neboť jejími řešeními jsou všechny lineární funkce (nejen funkce přímé úměrnosti).

Existuje však i obecnější zadání této rovnice, kterou nyní uvedeme ve formě věty a na níž se v textu budeme taktéž odvolávat. Odvození jejího řešení může čtenář nalézt v [Kucz, str. 351].

**Věta 3.3.** *Nechť $I$ označuje libovolný neprázdný interval. Pak každá spojitá funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, která splňuje rovnost*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

*pro všechna $x, y \in I$, má předpis $f(x) = cx + a$, kde $a, c \in \mathbb{R}$.*

## 3.3 Pexiderova funkcionální rovnice

Významných výsledků v oblasti funkcionálních rovnic dosáhl na počátku 20. století i český matematik Jan Vilém Pexider z Prahy [Neu, str. 98]. Naší pozornosti by neměla uniknout zejména funkcionální rovnice pojmenovaná po tomto matematikovi, na níž lze pohlížet jako na zobecnění Cauchyovy funkcionální rovnice.

**Příklad 3.3.** ***(Pexiderova funkcionální rovnice)*** *Najděte všechny spojité funkce $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující vztahu*

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$, $g$, a $h$ dále označují libovolné spojité funkce, které splňují zadanou rovnost. Položením $x = 0$, resp. $y = 0$ dostaneme

$$f(y) = g(0) + h(y), \text{ respektive } f(x) = g(x) + h(0),$$

což po přeznačení a úpravě dává $h(x) = f(x) - a$, resp. $g(x) = f(x) - b$, kde $a = g(0) \in \mathbb{R}$ a $b = h(0) \in \mathbb{R}$. Dosazením posledních dvou vyjádření funkcí $g$ a $h$ do zadání získáme rovnost

$$f(x+y) = f(x) - b + f(y) - a. \tag{3.2}$$

Definujme novou spojitou funkci $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$k(x) = f(x) - a - b$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkci $f$ můžeme pomocí právě zavedené funkce $k$ vyjádřit jako $f(x) = k(x) + a + b$ a poté dosadit do (3.2), díky čemuž získáme rovnost

$$\begin{aligned} k(x+y) + a + b &= (k(x) + a + b) - b + (k(y) + a + b) - a, \\ k(x+y) &= k(x) + k(y). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnost, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnosti, již spojitá funkce $k$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Platí tedy, že $k$ má předpis ve tvaru $k(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Dosazením nalezeného předpisu do vztahu, kterým jsme funkci $k$ zavedli, zjistíme, že platí $cx = f(x) - a - b$ neboli

$$f(x) = cx + a + b.$$

Nakonec z výše uvedených vztahů pro funkce $g$ a $h$ ($g(x) = f(x) - b$ a $h(x) = f(x) - a$) dostaneme s ohledem na nalezený tvar funkce $f$ rovnosti

$$\begin{aligned} g(x) &= (cx + a + b) - b = cx + a, \\ h(x) &= (cx + a + b) - a = cx + b, \end{aligned}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Nalezli jsme tak možné tvary všech trojic $f$, $g$, $h$ spojitých řešení Pexiderovy rovnice vyjádřených pomocí konstant $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání se přesvědčíme, že to jsou řešení, ať jsou čísla $a, b, c$ zvolena jakkoli:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(x+y) = c(x+y) + a + b, \\ P: &\quad g(x) + h(y) = cx + a + cy + b = c(x+y) + a + b. \end{aligned}$$

□

Podobně jako jsme u Cauchyovy funkcionální rovnice uvažovali modifikace spočívající v záměně součtu za součin, i zde můžeme stejným způsobem získat následující tři modifikované Pexiderovy funkcionální rovnice pro spojité funkce $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &1) &\quad f(x+y) &= g(x)h(y), \\ &2) &\quad f(xy) &= g(x) + h(y), \\ &3) &\quad f(xy) &= g(x)h(y). \end{aligned}$$

Princip řešení spočívá podobně jako u Cauchyových modifikací ve vhodně použitých substitucích s nově definovanými funkcemi, díky nimž nám zadaná rovnice přejde do původního tvaru, který jsme již výše vyřešili. Tentokrát však budeme klást jistá omezení na definiční obor a obor hodnot hledaných funkcí. Obecnější řešení by totiž nebyla natolik velkým přínosem, abychom kvůli nim uváděli komplikovanější rozbory.

Například u rovnice 1) si můžeme všimnout, že pokud každá ze tří hledaných funkcí $f$, $g$ a $h$ nabývá pro všechna $x \in \mathbb{R}$ stejného znaménka, pak mohou nastat následující situace: je-li $f(x) < 0$, pak funkce $g$ a $h$ mají opačné znaménko, je-li naopak $f(x) > 0$, jsou funkce $g$ i $h$ vždy obě kladné, nebo vždy obě záporné. Těmto rozvětveným řešením se v případě 1) snadno vyhneme tak, že jako obor hodnot hledaných funkcí budeme uvažovat interval všech kladných reálných čísel.

1) Nechť spojité funkce $f, g, h\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ splňují zadanou rovnost $f(x+y) = g(x)h(y)$. Uvažme funkce $F, G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisy

$$F(x) = \ln f(x),\ \ G(x) = \ln g(x),\ \ H(x) = \ln h(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tyto funkce jsou zřejmě spojité a splňují vzhledem k zadání rovnost

$$F(x+y) = \ln f(x+y) = \ln\big(g(x)h(y)\big) = \ln g(x) + \ln h(y) = G(x) + H(y).$$

Dostali jsme rovnost, která odpovídá Pexiderově funkcionální rovnici a kterou funkce $F$, $G$ a $H$ splňují pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že jejich předpisy mají tvar $F(x) = Cx + A + B$, $G(x) = Cx + A$, $H(x) = Cx + B$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$.

S ohledem na dříve dosažený výsledek již nyní snadno odvodíme tvar řešení rovnice 1):

$$\begin{aligned} F(x) = \ln f(x) &= Cx + A + B, \\ f(x) &= \mathrm{e}^{Cx+A+B}, \\ f(x) &= abc^x, \end{aligned}$$

kde $a = \mathrm{e}^A, b = \mathrm{e}^B, c = \mathrm{e}^C \in (0, \infty)$. Stejným způsobem odvodíme předpisy funkcí $g$ a $h$ ve tvaru $g(x) = ac^x$ a $h(x) = bc^x$.

Za daných předpokladů splňují rovnost 1) pouze funkce $f(x) = abc^x$, $g(x) = ac^x$ a $h(x) = bc^x$, o čemž se můžeme přesvědčit snadným dosazením do zadání.

2) Nechť funkce $f, g, h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ jsou spojité a splňují pro libovolná čísla $x, y \in (0, \infty)$ výše zadanou rovnost $f(xy) = g(x) + h(y)$.

Definujme nejdříve funkce $F, G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisy tvaru

$$F(x) = f\left(\mathrm{e}^x\right),\ \ G(x) = g\left(\mathrm{e}^x\right),\ \ H(x) = h\left(\mathrm{e}^x\right)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tyto funkce jsou zřejmě spojité a vzhledem k zadání pro ně platí

$$F(x+y) = f\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = f\left(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\right) = g\left(\mathrm{e}^x\right) + h\left(\mathrm{e}^y\right) = G(x) + H(y).$$

Získali jsme rovnost odpovídající Pexiderově funkcionální rovnici, kterou spojité funkce $F$, $G$, $H$ splňují pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Jejich předpis má proto tvar $F(x) = cx + a + b$, $G(x) = cx + a$, $H(x) = cx + b$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Díky tomu již můžeme odvodit tvar řešení zadané rovnice 2):

$$\begin{aligned} F(x) = f\left(\mathrm{e}^x\right) &= cx + a + b, \\ f(x) &= c \ln x + a + b. \end{aligned}$$

Stejným postupem zjistíme, že předpisy zbývajících hledaných funkcí $g$ a $h$ jsou tvaru $g(x) = c \ln x + a$ a $h(x) = c \ln x + b$.

Dosazením do zadání se přesvědčíme, že funkce tvaru $f(x) = c \ln x + a + b$, $g(x) = c \ln x + a$ a $h(x) = c \ln x + b$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$, jsou opravdu řešením:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(xy) = c \ln xy + a + b, \\ P: &\quad g(x) + h(y) = c \ln x + a + c \ln y + b = c \ln xy + a + b. \end{aligned}$$

3) Nechť spojité funkce $f, g, h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ splňují pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost $f(xy) = g(x)h(y)$. Položením $x = y = 1$ dostaneme $f(1) = g(1)h(1)$. Je-li $f(1) = 0$, pak platí $g(1) = 0$ nebo $h(1) = 0$. Pro $x = 1$ a $g(1) = 0$, resp. $y = 1$ a $h(1) = 0$ dostaneme ze zadané rovnosti vztah

$$f(y) = g(1)h(y) = 0, \text{ respektive } f(x) = g(x)h(1) = 0$$

pro každé $y \in \mathbb{R}$, resp. každé $x \in \mathbb{R}$. V obou případech je funkce $f$ spolu s jednou z funkcí $g$, $h$ nulová a zbývající funkce ($g$ nebo $h$) je libovolná spojitá. Tyto trojice funkcí zřejmě splňují zadání, proto je můžeme považovat za řešení.

Předpokládejme dále, že $f(1) \neq 0$, tudíž i $g(1)h(1) \neq 0$, a vyjádřeme funkci $g$, resp. $h$ volbou $y = 1$, resp. $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)h(1), \quad \text{respektive} & f(y) &= g(1)h(y), \\ g(x) &= \frac{f(x)}{h(1)}, & h(y) &= \frac{f(x)}{g(1)} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (0, \infty)$. Dosazením těchto vyjádření za funkce $g$ a $h$ v zadání dostaneme

$$f(xy) = g(x)h(y) = \frac{f(x)f(y)}{g(1)h(1)}. \tag{3.3}$$

Definujme nyní novou funkci $k\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem ve tvaru

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(1)h(1)}$$

pro každé $x \in (0, \infty)$. Tato funkce je zřejmě spojitá, neboť $f$ je spojitá, a vzhledem k (3.3) splňuje

$$k(xy) = \frac{f(xy)}{g(1)h(1)} = \frac{\frac{f(x)f(y)}{g(1)h(1)}}{g(1)h(1)} = \frac{f(x)}{g(1)h(1)} \cdot \frac{f(y)}{g(1)h(1)} = k(x)k(y).$$

Získali jsme tak rovnost odpovídající modifikované Cauchyově funkcionální rovnici, kterou spojitá funkce $k$ splňuje pro všechna $x, y \in (0, \infty)$. Její předpis má proto tvar $k(x) = x^c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

S ohledem na definici funkce $k$ a výše uvedené výsledky již snadno vyjádříme hledanou funkci $f$ a poté i $g$ a $h$ ve tvaru

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{f(x)}{g(1)h(1)}, \\ f(x) &= k(x)g(1)h(1), \\ f(x) &= abx^c, \end{aligned}$$

odkud dále s ohledem na značení $a = g(1)$, $b = h(1)$ dostaneme

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)}{h(1)}, & h(x) &= \frac{f(x)}{g(1)}, \\ g(x) &= \frac{abx^c}{b} = ax^c, & h(x) &= \frac{abx^c}{a} = bx^c, \end{aligned}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $bc \neq 0$.

Snadným dosazením do zadání bychom se přesvědčili, že spojité funkce tvaru $f(x) = abx^c$, $g(x) = ax^c$ a $h(x) = bx^c$ s výše uvedenými podmínkami na konstanty $a, b, c$ jsou opravdu řešením rovnice 3).

## 3.4 Vinczeova funkcionální rovnice

Následující rovnici, jejímž řešením se jako první zabýval maďarský matematik Endre Vincze a po němž je tato rovnice pojmenována[3], lze považovat za zobecnění („sloučení“) Pexiderovy rovnice a její modifikace 1) z podkapitoly 3.3 ([And, str. 25]).

**Příklad 3.4.** ***(Vinczeova funkcionální rovnice)*** *Určete všechny spojité funkce $f, g, h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y).$$

[3] Název rovnice lze dohledat pouze v cizojazyčných textech.

*Řešení.* Nechť $f, g, h, k$ dále označuje funkce, které splňují zadání.

Předpokládejme nejdříve, že funkce $f$ je konstantní, tj. $f(x) = K_1$, kde $K_1 \in \mathbb{R}$. Tehdy lze zadanou rovnost přepsat do tvaru

$$K_1 = g(x)k(y) + h(y). \tag{3.4}$$

Existuje-li $y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $k(y_0) \neq 0$, pak nahrazením $y$ za $y_0$ v (3.4) obdržíme pro funkci $g$ rovnost

$$g(x) = \frac{K_1 - h(y_0)}{k(y_0)} = K_2$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, kde $K_2 \in \mathbb{R}$. Pro funkci $h$ pak s ohledem na $f(x) = K_1$ a $g(x) = K_2$ snadno z (3.4) odvodíme $h(y) = K_1 - K_2 k(y)$, kde $k$ je libovolná spojitá funkce nabývající nenulové hodnoty v nějakém bodě.

Naopak, pokud neexistuje žádné $y_0 \in \mathbb{R}$ s výše uvedenou vlastností, tj. platí-li $k(y) = 0$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$, pak rovnost (3.4) přejde do tvaru $K_1 = h(y)$ a funkce $g$ může být libovolná.

Celkem jsme tak zjistili, že jedním typem řešení je čtveřice funkcí $f, g, h, k$ tvaru $f(x) = K_1$, $g(x) = K_2$ a $h(x) = K_1 - K_2 k(x)$, kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ a $k$ je libovolná nenulová spojitá funkce, druhým typem řešení je čtveřice tvořená dvěma konstantními funkcemi $f(x) = h(x) = K_1$, nulovou funkcí $k$ a libovolnou spojitou funkcí $g$. U všech dalších řešení je už funkce $f$ nekonstantní.

Všimněme si, že pokud platí $k(y_1) = 0$ pro nějaké $y_1 \in \mathbb{R}$, lze zadanou rovnost pro $y = y_1$ zapsat ve tvaru $f(x + y_1) = h(y_1)$, což však bude znamenat, že funkce $f$ je konstantní. To je ale případ, který jsme již rozebrali výše.

Předpokládejme proto dále, že funkce $k$ nenabývá v žádném bodě nulové hodnoty a $f$ je nekonstantní funkcí. Označme $a = k(0) \neq 0$ a $b = h(0)$. Položením $y = 0$ v zadání dostaneme s ohledem na předchozí označení rovnost $f(x) = ag(x) + b$ neboli

$$g(x) = \frac{f(x) - b}{a}. \tag{3.5}$$

Přepsáním funkce $g$ v zadání podle (3.5) obdržíme

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \frac{f(x) - b}{a} k(y) + h(y), \\ f(x + y) &= f(x)\frac{k(y)}{a} + h(y) - \frac{bk(y)}{a}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Definujme nové spojité funkce $\phi, \psi, \chi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisy

$$\phi(x) = \frac{k(x)}{a}, \qquad \psi(x) = h(x) - \frac{bk(x)}{a}, \qquad \chi(x) = f(x) - f(0)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dosazením funkcí $\phi, \psi$ za příslušné výrazy v rovnosti (3.6) dostaneme

$$f(x+y) = f(x)\phi(y) + \psi(y). \tag{3.7}$$

Položením $x = 0$ získáme $f(y) = f(0)\phi(y) + \psi(y)$ neboli $\psi(y) = f(y) - f(0)\phi(y)$. Nyní nahradíme funkci $\psi$ v (3.7) pravou stranou poslední rovnosti a výsledný vztah upravíme tak, abychom přepsali výrazy s $f$ za výrazy s $\chi$ :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)\phi(y) + f(y) - f(0)\phi(y), \\ f(x+y) - f(0) &= \big(f(x) - f(0)\big)\phi(y) + f(y) - f(0), \\ \chi(x+y) &= \chi(x)\phi(y) + \chi(y). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Po vzájemné výměně $x$ za $y$ vzhledem k symetrii levé strany (3.8) dostaneme porovnáním pravých stran $\chi(x)\phi(y) + \chi(y) = \chi(y)\phi(x) + \chi(x)$ neboli

$$\big(\phi(y) - 1\big)\chi(x) = \big(\phi(x) - 1\big)\chi(y). \tag{3.9}$$

Další postup rozdělíme na dva případy podle toho, zda funkce $\phi$ nabývá nějaké hodnoty různé od 1 či nikoliv.

1. Je-li $\phi(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostaneme z definice funkce $\phi$ ($\phi(x) = \frac{k(x)}{a}$) předpis funkce $k$ :

$$k(x) = a \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Dále (3.8) přejde do rovnosti $\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y)$, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Spojitá funkce $\chi$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, a její předpis má proto tvar $\chi(x) = dx$, kde $d \in \mathbb{R}$. Vzhledem k zavedení funkce $\chi$ obdržíme $\chi(x) = f(x) - f(0) = dx$ neboli

$$f(x) = dx + c \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},$$

kde $c = f(0) \in \mathbb{R}$ a vzhledem k předpokladu, že $f$ je nekonstantní, $d \neq 0$. Dosazením posledního vztahu za funkci $f$ do (3.5) získáme předpis funkce $g$ :

$$g(x) = \frac{dx + c - b}{a} \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Položením $x = 0$ v (3.7) s ohledem na nalezený předpis funkce $f$ a rovnost $\phi(x) = 1$ získáme $dy + c = c + \psi(y)$, odkud plyne $\psi(x) = dx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dosazením předpisu funkce $\psi$ do její definice s ohledem na $k(x) = a$ nakonec dostaneme $dx = h(x) - \frac{ba}{a}$ neboli

$$h(x) = dx + b \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

2. Předpokládejme naopak, že pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $\phi(x_0) \neq 1$. Položením $y = x_0$ v (3.9) obdržíme rovnost

$$\begin{aligned}\big(\phi(x_0) - 1\big)\chi(x) &= \big(\phi(x) - 1\big)\chi(x_0),\\ \chi(x) &= \big(\phi(x) - 1\big)\frac{\chi(x_0)}{\phi(x_0) - 1} = s\big(\phi(x) - 1\big),\end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $s = \frac{\chi(x_0)}{\phi(x_0)-1} \in \mathbb{R}$. S ohledem na předpoklad, že funkce $f$ je nekonstantní (existuje $x \in \mathbb{R}$, pro které $\chi(x) = f(x) - f(0) \neq 0$) platí $s \neq 0$ a po dosazení pravé strany ze (3.10) za funkci $\chi$ do rovnosti (3.8) získáme vztah

$$\begin{aligned}s\big(\phi(x + y) - 1\big) &= s\big(\phi(x) - 1\big)\phi(y) + s\big(\phi(y) - 1\big),\\ \big(\phi(x + y) - 1\big) &= \big(\phi(x) - 1\big)\phi(y) + \big(\phi(y) - 1\big),\\ \phi(x + y) &= \phi(x)\phi(y).\end{aligned}$$

Získali jsme tak rovnost odpovídající modifikované Cauchyově funkcionální rovnici, kterou spojitá funkce $\phi$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Funkce $\phi$ má proto předpis tvaru $\phi(x) = t^x$ $(x \in \mathbb{R})$ s vhodnou konstantou $t > 0$ a podle předpokladu $\phi(x_0) \neq 1$ je $t \neq 1$. Z definice $\phi$ ($\phi(x) = \frac{k(x)}{a}$) obdržíme předpis funkce $k$ ve tvaru

$$k(x) = at^x \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosazením nalezeného předpisu $\phi$ do rovnosti (3.10) získáme $\chi(x) = s\big(t^x - 1\big)$, odkud vzhledem k definici $\chi$ ($\chi(x) = f(x) - f(0)$) obdržíme předpis funkce $f$ ve tvaru $s\big(t^x - 1\big) = f(x) - f(0)$ neboli

$$f(x) = st^x + c \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $c = f(0) - s \in \mathbb{R}$. Z rovnosti (3.5) obdržíme vzhledem k poslednímu výsledku předpis funkce $g$ ve tvaru

$$g(x) = \frac{st^x + c - b}{a} \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nakonec získané výsledky dosadíme do zadané rovnosti, ve které položíme $x = 0$, a získáme předpis funkce $h$ :

$$\begin{aligned}st^y + c &= \frac{s + c - b}{a}at^y + h(y),\\ h(y) &= c + (b - c)t^y \quad \text{pro každé} \quad y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Shrnutím všech odvozených předpisů dostaneme všechna spojitá řešení Vinczeovy funkcionální rovnice (o jejich správnosti se nyní ještě přesvědčíme zkouškou dosazením).

1. $f(x) = K_1$, $g(x) = K_2$ a $h(x) = K_1 - K_2 k(x)$, kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ a $k$ je libovolná nenulová spojitá funkce.
   Zkouška:
   $$K_1 = f(x+y) = g(x)k(y) + h(y) = K_2 k(y) + K_1 - K_2 k(y) = K_1.$$

2. $f(x) = h(x) = K_1$, $k(x) = 0$ a $g$ je libovolná spojitá funkce, kde $K_1 \in \mathbb{R}$. Zkouška: $K_1 = g(x) \cdot 0 + K_1 = K_1$.

3. $f(x) = dx + c$, $g(x) = \frac{dx+c-b}{a}$, $h(x) = dx + b$ a $k(x) = a$, kde $b, c \in \mathbb{R}$ a $a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zkouška:
   $$\begin{aligned} d(x+y) + c = f(x+y) = g(x)k(y) + h(y) = \frac{dx+c-b}{a} a + dy + b = \\ = d(x+y) + c. \end{aligned}$$

4. $f(x) = st^x + c$, $g(x) = \frac{st^x+c-b}{a}$, $h(x) = c + (b-c)t^x$ a $k(x) = at^x$, kde $b, c \in \mathbb{R}$ a $a, s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, přičemž $t > 0$, $t \neq 1$. Zkouška:
   $$\begin{aligned} st^{x+y} + c = f(x+y) = g(x)k(y) + h(y) = \frac{st^x + c - b}{a} at^y + \\ + c + (b-c)t^y = st^{x+y} + c. \end{aligned}$$

□

Následující důsledek Vinczeovy funkcionální rovnice využijeme později v části pojednávající o vlastnostech tzv. *kvaziaritmetického průměru.*

**Důsledek.** *Každá nekonstantní spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje rovnost*

$$f(x+y) = f(x)k(y) + h(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce s vlastností $k(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, je tvaru:*

$$f(x) = dx + c, \quad \textit{nebo} \quad f(x) = st^x + c,$$

*kde $c, d, s \in \mathbb{R}$, přičemž $d, s \neq 0$ a $t > 0$, $t \neq 1$.*

*Důkaz.* Zadaná rovnost odpovídá Vinczeově funkcionální rovnici z příkladu 3.4 ve speciálním případě $f = g$.

Protože hledáme jen nekonstantní spojité funkce $f$, stačí se v závěrečném přehledu řešení příkladu 3.4 omezit jen na řešení z bodů 3 a 4. V bodě 3 z podmínky $f = g$ obdržíme rovnost

$$dx + c = \frac{dx + c - b}{a},$$

která je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$, právě když $a = 1$ a $b = 0$, takže $k(x) = 1$ a $h(x) = dx$.

V bodě 4 má odpovídající rovnost tvar

$$st^x + c = \frac{st^x + c - b}{a},$$

takže vyhovuje opět $a=1$, $b=0$ a odpovídající funkce $k(x)=t^x$ a $h(x)=c(1 - t^x)$.

□

**Poznámka.** Všimněme si, že v předpokladech právě dokázaného důsledku není požadována spojitost funkcí $k$ a $h$. Jak však můžeme v řešení příkladu 3.4 vypozorovat, v případě nekonstantní funkce $f$ není zapotřebí předpokládat, že funkce $k$ a $h$, které spolu s funkcemi $f$, $g$ jsou řešeními rovnice

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y),$$

jsou spojité, jejich spojitost totiž plyne z předpokládané spojitosti příslušné funkce $f$.

## 3.5 Kvaziaritmetický průměr

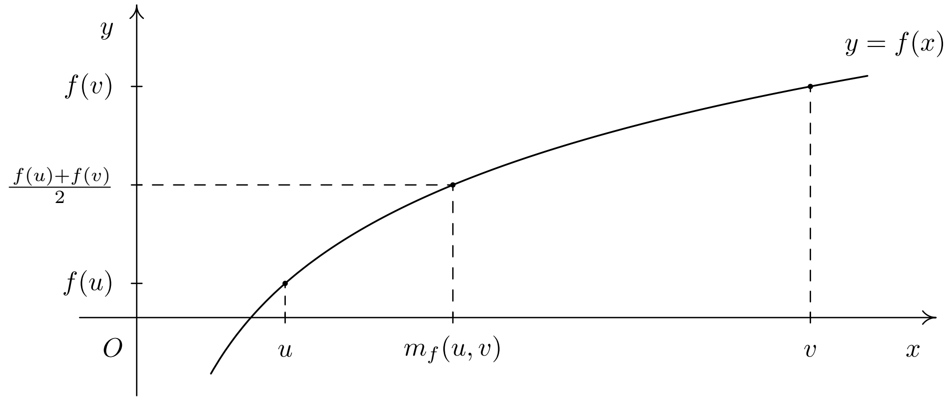
Názorné využití předešlých výsledků, konkrétně Jensenovy rovnice a důsledku Vinczeovy rovnice, ilustrujeme v důkazech tří tvrzení o *kvaziaritmetických průměrech* ze dvou čísel.

**Definice.** Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je prostá spojitá funkce, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval. Definujme pro libovolná $x, y \in I$ funkci $m_f\colon I \times I \to \mathbb{R}$ vztahem

$$m_f(x, y) = f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right). \tag{3.11}$$

Tato funkce se nazývá kvaziaritmetický průměr na intervalu $I$ hodnot $x$ a $y$ generovaný funkcí $f$.

Všimněme si, že předpoklad injektivnosti spojité funkce $f$ lze ekvivalentně zaměnit za předpoklad, že spojitá funkce $f$ je ryze monotónní (rostoucí nebo klesající na celém svém definičním oboru).




Obr. 1: Grafická interpretace průměru $m_f(u,v) = f^{-1}\left(\frac{f(u)+f(v)}{2}\right)$.

Dříve než uvedeme obecné vlastnosti kvaziaritmetického průměru, ukážeme, že vhodnou volbou funkce $f$ obdržíme známé průměry (aritmetický, geometrický, harmonický).

Položením $f(x) = x$ v (3.11) obdržíme aritmetický průměr

$$m_f(x,y) = \frac{x+y}{2}.$$

Pro geometrický, resp. harmonický průměr stačí uvážit funkci $f(x) = \ln x$, resp. $f(x) = \frac{1}{x}$, obě na intervalu $(0,\infty)$, při kterých přejde (3.11) do tvaru

$$m_f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x + \ln y}{2}} \quad \text{neboli} \quad m_f(x,y) = \sqrt{xy},$$

respektive

$$m_f(x,y) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}} \quad \text{neboli} \quad m_f(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Uvědomme si dále, že pojem průměr je v definici použit zcela oprávněně, neboť kvaziaritmetickým průměrem dvou čísel $x$ a $y$ je vždy hodnota mezi nimi (pro $x \neq y$), resp. hodnota rovna $x$ a $y$ (pro $x = y$), tj.

$$\min\{x,y\} \leq m_f(x,y) \leq \max\{x,y\}.$$

Tuto skutečnost dokážeme sporem pouze pro rostoucí funkci $f$ (pro klesající funkci se postupuje analogicky). Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá invertibilní funkce, která je rostoucí, a $m_f\colon I \times I \to \mathbb{R}$ je kvaziaritmetický průměr generovaný touto funkcí. Připusťme existenci takových hodnot $x_0, y_0 \in I$ $(x_0 < y_0)$, že neplatí

$$x_0 < m_f(x_0,y_0) < y_0,$$

tj. že platí buď nerovnost $m_f(x_0, y_0) \le x_0$ nebo $y_0 \le m_f(x_0, y_0)$. Vzhledem k předpokladu, že je funkce $f$ rostoucí (zřejmě je pak rostoucí i funkce $f^{-1}$), platí jedna z upravovaných nerovností:

$$\begin{aligned} m_f(x_0, y_0) &\le x_0, & y_0 &\le m_f(x_0, y_0), & & \\ f^{-1}\left(\frac{f(x_0)+f(y_0)}{2}\right) &\le x_0, & y_0 &\le f^{-1}\left(\frac{f(x_0)+f(y_0)}{2}\right), & & /f(\ ) \\ \frac{f(x_0)+f(y_0)}{2} &\le f(x_0), & f(y_0) &\le \frac{f(x_0)+f(y_0)}{2}, & & \\ f(y_0) &\le f(x_0), & f(y_0) &\le f(x_0). & & (3.12) \end{aligned}$$

Jak vidíme, v obou případech jsme se dostali do sporu s úvodní nerovností $x_0 < y_0$, neboť funkce $f$ je rostoucí.

Pro $x_0 = y_0$ obdržíme z definice kvaziaritmetického průměru rovnost

$$m_f(x_0, y_0) = f^{-1}\left(\frac{f(x_0)+f(x_0)}{2}\right) = f^{-1}\left(f(x_0)\right) = x_0.$$

Dokázali jsme tak, že libovolný kvaziaritmetický průměr dvou hodnot generovaný rostoucí spojitou funkcí $f$ splňuje nerovnosti

$$\min\{x, y\} \le m_f(x, y) \le \max\{x, y\},$$

přitom obě rovnosti nastanou pouze současně, a to právě v případě $x = y$.

Zřejmým důsledkem, který později využijeme, je fakt, že kvaziaritmetický průměr kladných, resp. záporných hodnot je vždy kladný, resp. záporný.

Nyní i s důkazy, v nichž využijeme řešení Jensenovy funkcionální rovnice, uvedeme tři vlastnosti kvaziaritmetického průměru:

1. *Je-li každá z daných spojitých funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertibilní a platí-li pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{2}\right), \tag{3.13}$$

*pak platí $g(x) = af(x) + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \ne 0)$.*

*Důkaz.* Označme $u_x = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože je funkce $f$ spojitá a invertibilní, existuje ke každému $u_x$ z intervalu $H(f)$ jediné $x \in \mathbb{R}$ tak, že $u_x = f(x)$.

S ohledem na $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$ můžeme rovnost (3.13) přepsat do tvaru

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{g\left(f^{-1}\big(f(x)\big)\right)+g\left(f^{-1}\big(f(y)\big)\right)}{2}\right), \quad /g(\ )$$

$$(g\circ f^{-1})\left(\frac{u_x+u_y}{2}\right) = \frac{(g\circ f^{-1})(u_x)+(g\circ f^{-1})(u_y)}{2}.$$

Obdrželi jsme rovnost, která odpovídá Jensenově funkcionální rovnici. Spojitá funkce $g\circ f^{-1}$ ji splňuje pro všechna $u_x, u_y \in H(f)$ a má tedy předpis ve tvaru $(g\circ f^{-1})(u_x) = au_x + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. S ohledem na substituci $u_x = f(x)$ dostaneme $g(x) = af(x)+b$. Pro $a = 0$ bychom obdrželi konstantní funkci $g$, což je spor s předpokladem, že k této funkci existuje funkce inverzní, proto $a \neq 0$.

$\square$

Mezi další vlastnosti některých kvaziaritmetických průměrů na celém $\mathbb{R}$ patří *translativita*. Řekneme, že kvaziaritmetický průměr $m_f(x,y)$ na $\mathbb{R}$ je translativní, pokud platí rovnost

$$m_f(x+p, y+p) = m_f(x,y)+p.$$

pro všechna $x, y, p \in \mathbb{R}$. Následující tvrzení a jeho důkaz odpoví na otázku, jakého tvaru jsou generující funkce $f$, pro které je příslušný kvaziaritmetický průměr translativní.

2. *Je-li $m_f(x,y)$ translativní kvaziaritmetický průměr, tj.*

$$m_f(x+p,y+p)=f^{-1}\left(\frac{f(x+p)+f(y+p)}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)+p, \tag{3.14}$$

*kde $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá invertibilní funkce a $x, y, p \in \mathbb{R}$ libovolná, pak platí $m_f(x,y) = \frac{x+y}{2}$ (aritmetický průměr) nebo $m_f(x,y) = \log_t \frac{t^x+t^y}{2}$ (tzv. exponenciální průměr), kde $t > 0$ a $t \neq 1$.*

*Důkaz.* Nechť $p \in \mathbb{R}$ je libovolné, dále pevně dané. Definujme spojitou invertibilní funkci $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = f(x+p) \quad \text{pro} \quad \text{všechna} \quad x \in \mathbb{R}.$$

S ohledem na zavedenou funkci $g$ a invertibilitu obou funkcí $f, g$ obdržíme po úpravě

(3.14) rovnost

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{2}\right) &= f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)+p, && /f(\ )\\
\frac{g(x)+g(y)}{2} &= f\left(f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)+p\right), && /f(x+p)=g(x)\\
\frac{g(x)+g(y)}{2} &= g\left(f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)\right), && /g^{-1}(\ )\\
g^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{2}\right) &= f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Znamená to, že funkce $f, g$ generují týž kvaziaritmetický průměr. Jak jsme v předchozím ukázali, existují taková $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$), že platí $g(x)=af(x)+b$. Dosazením za funkci $g$, pro niž platí $g(x) = f(x+p)$, dostaneme pro dané $p$ : $f(x+p) = af(x)+b$. Změnou hodnoty $p \in \mathbb{R}$ v předešlé rovnosti ovšem získáme i (obecně) jiné hodnoty pro $a$ a $b$, proto existují funkce $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že platí rovnost

$$f(x+p) = a(p)f(x) + b(p) \tag{3.15}$$

pro libovolná $x, p \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $a(p) \neq 0$ pro všechna $p \in \mathbb{R}$. Kdyby totiž existovalo $p_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $a(p_0) = 0$, obdrželi bychom

$$f(x+p_0) = a(p_0)f(x) + b(p_0) = b(p_0),$$

což je spor s tím, že k funkci $f$ existuje inverzní funkce ($f$ nemůže být konstantní). Funkce $a, b, f$ splňují s ohledem na rovnost (3.15) všechny předpoklady dříve uvedeného důsledku Vinczeovy funkcionální rovnice. Předpis funkce $f$ je proto tvaru $f(x) = dx + c$ nebo $f(x) = st^x + c$, kde $c, d, s, t \in \mathbb{R}$ a $d, s \neq 0$, $t > 0$, $t \neq 1$. Pro $f(x) = dx + c$, resp. $f(x) = st^x + c$ získáme inverzní funkci ve tvaru $f^{-1}(x) = \frac{x-c}{d}$, resp. $f^{-1}(x) = \log_t\left(\frac{x-c}{s}\right)$.

Dosazením do kvaziaritmetického průměru za funkci $f$ a $f^{-1}$, tj. $f(x) = dx + c$ a $f^{-1}(x) = \frac{x-c}{d}$, resp. $f(x) = st^x + c$ a $f^{-1}(x) = \log_t\left(\frac{x-c}{s}\right)$, obdržíme:

$$1)\ m_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \frac{\frac{(dx+c)+(dy+c)}{2} - c}{d} = \frac{x+y}{2},$$

$$2)\ m_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \log_t\left(\frac{\frac{(st^x+c)+(st^y+c)}{2} - c}{s}\right) = \log_t \frac{t^x+t^y}{2}.$$

$\square$

Druhou vlastností některých kvaziaritmetických průměrů, kterou ještě posoudíme, je jejich případná *homogenita*. Kvaziaritmetický průměr $m_f(x,y)$ na $\mathbb{R}^+$ nazveme homogenní, jestliže rovnost

$$m_f(tx,ty) = tm_f(x,y)$$

platí pro všechny kladné reálné hodnoty $x,y,t$. Nyní dokážeme tvrzení, že mezi homogenními kvaziaritmetickými průměry najdeme pouze dva typy průměrů.

3. *Je-li $m_f(x,y)$ homogenní kvaziaritmetický průměr na $\mathbb{R}^+$, tj. platí-li*

$$m_f(tx,ty) = tm_f(x,y)$$

*pro všechna $x,y,t \in \mathbb{R}^+$, kde $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je spojitá invertibilní funkce, pak platí $m_f(x,y) = \sqrt{xy}$ (geometrický průměr) nebo $m_f(x,y) = \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}$ (tzv. mocninný průměr stupně $p$), kde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

*Důkaz.* Vzhledem k tomu, že hodnoty $x,y,t$ jsou kladné, je i příslušný kvaziaritmetický průměr kladný a můžeme obě strany zadané rovnosti „zlogaritmovat“, díky čemuž dostaneme

$$\ln m(tx,ty) = \ln\left(tm(x,y)\right) = \ln t + \ln m(x,y).$$

Nahrazením $x$, resp. $y$, resp. $t$ za $\mathrm{e}^x$, resp. $\mathrm{e}^y$, resp. $\mathrm{e}^t$ získáme

$$\begin{aligned} \ln m(\mathrm{e}^t\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^t\mathrm{e}^y) &= \ln \mathrm{e}^t + \ln m(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y), \\ \ln m(\mathrm{e}^{t+x}, \mathrm{e}^{t+y}) &= t + \ln m(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y). \end{aligned}$$

Funkci $m'\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definujme předpisem $m'(x,y) = \ln m(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y)$ pro každá $x,y \in \mathbb{R}$. Poslední získanou rovnost pak můžeme snadno přepsat do tvaru

$$m'(t+x, t+y) = t + m'(x,y).$$

Obdrželi jsme vztah odpovídající translativnímu kvaziaritmetickému průměru $m'$ (na $\mathbb{R}$) a podle předchozího tvrzení platí $m'(x,y) = \frac{x+y}{2}$ nebo $m'(x,y) = \log_t \frac{t^x+t^y}{2}$. Přejdeme-li k průměru $m$ podle předpisu $m'$, obdržíme v prvním případě s ohledem na kladné hodnoty $x$ a $y$ rovnost

$$\begin{aligned} \ln m(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y) &= \frac{x+y}{2}, \\ m(x,y) &= \mathrm{e}^{\frac{\ln x + \ln y}{2}} = \sqrt{xy} \end{aligned}$$

a ve druhém případě dostaneme s využitím logaritmických vzorců $\mathrm{e}^x = t^{x \log_t \mathrm{e}}$ a $\log_t \mathrm{e} = \frac{1}{\ln t}$ rovnost

$$\begin{aligned}
\ln m(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y) &= \log_t \frac{t^x + t^y}{2}, \\
m(x,y) &= \mathrm{e}^{\log_t\left(\frac{t^{\ln x} + t^{\ln y}}{2}\right)} = t^{\log_t\left(\frac{t^{\ln x} + t^{\ln y}}{2}\right)\log_t \mathrm{e}} = \left(\frac{t^{\ln x} + t^{\ln y}}{2}\right)^{\log_t \mathrm{e}} = \\
&= \left(\frac{x^{\ln t} + y^{\ln t}}{2}\right)^{\frac{1}{\ln t}} = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

kde $p = \ln t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tvrzení je tak dokázáno.

□

## 3.6 Příklady funkcionální rovnic

V závěrečné části kapitoly představíme několik funkcionálních rovnic, které vyřešíme využitím předešlých výsledků. Dosazováním do zadání za proměnné a následnými úpravami se budeme snažit získat Cauchyovu funkcionální rovnici nebo některou z jejích posouzených modifikací.

**Příklad 3.5.** *Najděte všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ rovnost*[4]

$$f\big(f(x) + yz\big) = x + f(y)f(z).$$

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Nejdříve zjistíme, jaká může být hodnota $f(0)$, a to tak, že uvážíme $x = y = 0$, díky čemuž získáme rovnost

$$f(f(0)) = f(0)f(z).$$

Vidíme, že je-li $f(0) \neq 0$, pak má hledaná funkce předpis $f(z) = \frac{f(f(0))}{f(0)} = c$ pro libovolné $z \in \mathbb{R}$. Zkouškou však dojdeme k rovnosti

$$\begin{aligned}
f\big(c + yz\big) &= x + c^2, \\
c &= x + c^2,
\end{aligned}$$

která jistě neplatí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ať je konstanta $c$ jakákoliv. Musí tedy platit rovnost $f(0) = 0$.

Na druhou stranu je vidět, že nemůže být $f(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, neboť po dosazení takové funkce do zadané rovnosti bychom dostali $0 = x + 0$, což není

[4] [And, str. 34]

pro $x \neq 0$ splněno. Existuje proto takové $t_1 \neq 0$, že $f(t_1) \neq 0$. Položíme-li nyní $x = 0$, $y = 1$ a $z = t_1$, získáme rovnost

$$\begin{aligned} f\big(f(0) + t_1\big) &= 0 + f(1)f(t_1), \\ f(t_1) &= f(1)f(t_1), \end{aligned}$$

ze které s ohledem na $f(t_1) \neq 0$ plyne $f(1) = 1$. Po nahrazení $y = 0$ v zadané rovnosti vzhledem k faktu, že $f(0) = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) &= x + f(0)f(z), \\ f\big(f(x)\big) &= x. \end{aligned}$$

S ohledem na poslední rovnost po nahrazení $z = 1$ a $x = f(t)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ a s využitím toho, že $f(1) = 1$, nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} f\big(f(f(t)) + y\big) &= f(t) + f(y)f(1), \\ f\big(t + y\big) &= f(t) + f(y). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou hledaná funkce $f$ splňuje pro *všechna* $t, y \in \mathbb{R}$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ proto plyne (s ohledem na $f(1) = 1$), že její předpis je tvaru $f(x) = x$. Dosazením této funkce $f$ do zadání se přesvědčíme, že nalezená funkce je skutečně řešení:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\big(f(x) + yz\big) = f\big(x + yz\big) = x + yz, \\ P:&\quad x + f(y)f(z) = x + yz. \end{aligned}$$

□

**Příklad 3.6.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f\big(y + zf(x)\big) = f(y) + xf(z)$$

*pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*[5]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí. Po dosazení $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ dostaneme

$$f\big(0\big) = f(0) + f(0), \quad \text{odkud } f(0) = 0.$$

Jiným dosazením $y = 0$, $z = 1$ získáme s ohledem na $f(0) = 0$ rovnost

$$f\big(0 + f(x)\big) = f(0) + xf(1), \quad \text{odkud } f\big(f(x)\big) = xf(1). \tag{3.16}$$

[5] [And, str. 42]

Přepíšeme-li nyní v zadané rovnosti proměnou $x$ na hodnotu $f(t)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$, dostaneme s ohledem na (3.16)

$$\begin{aligned} f\big(y + zf(f(t))\big) &= f(y) + f(t)f(z), \\ f\big(y + ztf(1)\big) &= f(y) + f(t)f(z). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Přípustné hodnoty pro $f(1)$ nyní určíme (s využitím (3.16)) tak, že v rovnosti (3.17) položíme $t = z = 1$ a $y = 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f\big(0 + f(1)\big) &= f(0) + f(1)f(1), \\ f(1) &= \big(f(1)\big)^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že může nastat pouze jeden ze dvou případů: buď je $f(1) = 0$, nebo $f(1) = 1$.

Pro $f(1) = 0$ přejde (3.17) do rovnosti $f(y) = f(y) + f(x)f(z)$, odkud plyne $f(x)f(z) = 0$ pro libovolná $x, z \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že tuto rovnost splňuje pouze funkce $f(x) = 0$. Triviálním dosazením do zadání zjistíme, že tato funkce je řešením příkladu.

Pro $f(1) = 1$ přejde (3.17) do rovnosti $f(y + tz) = f(y) + f(t)f(z)$. Nahrazením $z = 1$ obdržíme rovnost $f(t + y) = f(t) + f(y)$, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici a funkce $f$ ji splňuje pro všechna $t, y \in \mathbb{R}$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ proto plyne (s přihlédnutím k $f(1) = 1$), že její předpis má tvar $f(x) = x$. Dosazením do zadání snadno ověříme řešení:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\big(y + zf(x)\big) = y + zf(x) = y + zx, \\ P:&\quad f(y) + xf(z) = y + xz. \end{aligned}$$

Celkem jsme tedy nalezli dvě funkce vyhovující zadání, a to $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

□

**Příklad 3.7.** *Určete všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(xf(z) + f(y)\big) = zf(x) + y$$

*pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*[6]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce, která splňuje zadání. Dosazením $x = -1$, $y = z = 0$ dostaneme $f\big(-f(0) + f(0)\big) = 0f(-1) + 0$, což znamená, že $f(0) = 0$. S ohledem na tuto skutečnost získáme ze zadání položením $x = 0$ rovnost

$$\begin{aligned} f\big(f(y)\big) &= zf(0) + y, \\ f\big(f(y)\big) &= y. \end{aligned} \tag{3.18}$$

[6] [Ven, str. 110]

Záměnou $f(u)$ za $y$ a $f(v)$ za $z$ v původní rovnici pro libovolná $u, v \in \mathbb{R}$ dostaneme s ohledem na (3.18) rovnost

$$\begin{aligned} f\Big(xf\big(f(v)\big) + f\big(f(u)\big)\Big) &= f(v)f(x) + f(u), \\ f\big(xv + u\big) &= f(v)f(x) + f(u). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nahrazením $x = v = 1, u = 0$ v poslední získané rovnosti obdržíme $f(1) = f(1)f(1)$. Odtud vidíme, že buď $f(1) = 0$, nebo $f(1) = 1$.

Je-li $f(1) = 0$, pak po položení $u = 0$ a $v = 1$ do (3.19) získáme rovnost

$$f(x) = f(1)f(x) + f(0), \quad \text{odkud} \quad f(x) = 0.$$

Po dosazení této funkce do zadání však dojdeme k rovnosti $0 = y$, která zřejmě neplatí pro obecné $y \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = 0$ tedy není řešením a platí $f(1) = 1$.

Díky odvozenému výsledku $f(1) = 1$ obdržíme po dosazení $v = 1$ do (3.19) rovnost

$$f(x + u) = f(x) + f(u),$$

která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Funkce $f$ ji splňuje pro všechna $u, x \in \mathbb{R}$ a s ohledem na fakt, že platí $f(1) = 1$ a hledaná funkce $f$ je podle předpokladu spojitá, je její předpis tvaru $f(x) = x$. Dosazením ověříme nalezené řešení:

$$\begin{aligned} L: &\quad f\big(xf(z) + f(y)\big) = xf(z) + f(y) = xz + y, \\ P: &\quad zf(x) + y = zx + y. \end{aligned}$$

□

Využití výsledku o tvaru řešení Cauchyovy funkcionální rovnice se samozřejmě neomezuje pouze na 1-místné funkce, jejichž předpis hledáme, jak ukážeme na dalším příkladu 3.8.

**Příklad 3.8.** *Určete všechny spojité funkce* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *splňující rovnost*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

*pro všechna* $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.[7]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci splňující zadání příkladu. Volbou $x_i = y_i = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ vystupující v zadané rovnosti zjistíme, že platí $f(0, 0, \ldots, 0) = f(0, 0, \ldots, 0) + f(0, 0, \ldots, 0)$ neboli $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

[7] [Ven, str. 149]

Pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, definujme funkce $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_j(x) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, x, 0, \dots)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Takové funkce jsou zřejmě spojité, všechny s ohledem na předešlý výsledek splňují rovnost $f_j(0) = 0$ a navíc nám umožňují vzhledem k zadané rovnosti zapsat předpis hledané funkce $f$ ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, 0, \dots, 0) + f(0, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \\ &+ f(0, x_2, 0, \dots, 0) + f(0, 0, x_3, \dots, x_n) = \dots = \\ &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Zvolme si pevně nějaké $j$, $1 \leq j \leq n$, a položme v rovnosti ze zadání $x_i = y_i = 0$ pro $i \neq j$ a $x_j = x$, $y_j = y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Dostaneme tak rovnost

$$\begin{aligned} f(0, \dots, x + y, \dots, 0) &= f(0, \dots, x, \dots, 0) + f(0, \dots, y, \dots, 0), \\ f_j(x + y) &= f_j(x) + f_j(y), \end{aligned}$$

která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici a funkce $f_j$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Ze spojitosti funkce $f_j$ proto plyne, že její předpis má tvar $f_j(x) = c_j x$, kde $c_j \in \mathbb{R}$ libovolné. Protože na začátku jsme si $j$ zvolili libovolně, platí odvozený předpis pro všechny funkce $f_j$. Dosazením do rovnosti (3.20) nakonec získáme řešení

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Snadným dosazením do zadání zjistíme, že jsme opravdu nalezli řešení.

□

## 3.7 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 3.9.** *Určete všechny spojité funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \lambda f(x) f(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je dané.*[8]

[8] [A-D, str. 33]

**Příklad 3.10.** *Najděte všechny spojité funkce $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, které rovnost*

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

*splňují pro každé $x, y \in (0,\infty)$.*[9]

**Příklad 3.11.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[9]

**Příklad 3.12.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[10]

**Příklad 3.13.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující podmínky*

1) $f(xy) = f(x)f(y)$ *pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$,*
2) *pro nějaký bod $z_1 \neq 0$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x+z_1) = f(x) + f(z_1)$.*[11]

**Příklad 3.14.** *Za předpokladu, že $n \geq 2$ je dané celé číslo, určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňující pro každá $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ následující podmínky:*

1) $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$,
2) $\overline{f(n)}f(x) = f(n)\overline{f(x)}$.[12]

[9] [Eng, str. 278]
[10] [A-G, str. 190]
[11] [Ven, str. 110]
[12] Zobecnění příkladu z [Ven, str. 150].

# Kapitola 4

# Rozdělení funkce na sudou a lichou část

Jak jsme již uvedli v kapitole 1 v části Základní obraty při řešení funkcionálních rovnic, lze každou funkci $f$ se symetrickým definičním oborem vyjádřit jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je sudá (značíme $f_s$) a druhá je lichá (značíme $f_l$). Připomeňme dále, že ze vztahu $f(x) = f_s(x) + f_l(x)$ plynou následující vzorce pro sudou a lichou část funkce $f$:

$$f_s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \ f_l(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Využitím rozdělení libovolné funkce na její sudou a lichou část můžeme úspěšně vyřešit některé typy funkcionálních rovnic, jak ukážeme v této kapitole, která je úmyslně umístěna za kapitolu věnující se Cauchyově funkcionální rovnici a jejímu řešení, neboť se na ni v následujících příkladech odvoláváme. Přitom řešení prvních dvou příkladů 4.1 a 4.2 jsou stěžejní, protože jsou základem k vyřešení dalších navazujících příkladů.

Jak si bude moci čtenář všimnout u prvního příkladu, je postup hledání neznámé funkce totožný s postupem hledání funkce splňující Cauchyovu funkcionální rovnici.

**Příklad 4.1.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující všechny předpoklady zadání. Postupně nyní prozkoumáme vlastnosti funkce $f$ na množině všech přirozených, celých, racionálních a reálných čísel.

Položením $x = y = 0$ zjistíme, že platí $f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0)$ neboli $2f(0) = 4f(0)$, odkud plyne $f(0) = 0$.

Pro $x = 0$ obdržíme rovnost $f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y)$, odkud s ohledem na předchozí výsledek plyne $f(-y) = f(y)$. Jak vidíme, funkce $f$ je nutně sudá.

Abychom získali nějaký další podklad pro zformulování hypotézy o tvaru řešení, položme v zadání $y = x$. Dostaneme $f(2x)+f(0) = 2f(x)+2f(x)$, odkud s ohledem na rovnost $f(0) = 0$ plyne $f(2x) = 4f(x)$. Nahrazením $2x$ za $y$ přejde zadaná rovnost vzhledem k předešlému výsledku a dokázané sudosti funkce $f$ do tvaru

$$\begin{aligned} f(3x) + f(-x) &= 2f(x) + 2f(2x), \\ f(3x) &= f(x) + 8f(x), \\ f(3x) &= 9f(x). \end{aligned}$$

S ohledem na poslední dva odvozené výsledky můžeme tušit, že předpis hledané funkce splňuje rovnost $f(nx) = n^2 f(x)$, kde $n$ nemusí být pouze libovolným přirozeným číslem, čemuž předešlá odvození odpovídají, ale díky sudosti funkce $f$ jej můžeme považovat za libovolné celé číslo.

Nyní tedy pomocí matematické indukce dokážeme, že vztah

$$f(nx) = n^2 f(x) \tag{4.1}$$

opravdu platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ (a vzhledem k sudosti funkce $f$ tedy i pro všechna $n \in \mathbb{Z}$).

Je-li $n = 1$, je dokazovaná rovnost splněna triviálně. Předpokládejme, že je také splněna pro všechna přirozená $n$ až do nějakého $n_0 \in \mathbb{N}$, dále pevně daného. S ohledem na zadání a uvedené předpoklady můžeme pro $x = n_0 y$ psát

$$\begin{aligned} f(n_0 y + y) + f(n_0 y - y) &= 2f(n_0 y) + 2f(y), \\ f\big((n_0 + 1)y\big) + f\big((n_0 - 1)y\big) &= 2f(n_0 y) + 2f(y), \\ f\big((n_0 + 1)y\big) &= 2n_0^2 f(y) + 2f(y) - (n_0 - 1)^2 f(y), \\ f\big((n_0 + 1)y\big) &= \Big(2n_0^2 + 2 - (n_0 - 1)^2\Big) f(y), \\ f\big((n_0 + 1)y\big) &= (n_0 + 1)^2 f(y). \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnost (4.1) je splněna i pro $n = n_0 + 1$. Dokázali jsme tak, že vztah $f(nx) = n^2 f(x)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a vzhledem k tomu, že je funkce $f$ sudá, platí i pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$.

Položením $y = \frac{m}{n} x$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, a následnou úpravou do tvaru $ny = mx$, z něhož vyplývá rovnost $f(ny) = f(mx)$, dostaneme s ohledem na (4.1) vztah

$$\begin{aligned} f(ny) &= f(mx), \\ n^2 f(y) &= m^2 f(x), \\ f(y) &= \frac{m^2}{n^2} f(x), \end{aligned}$$

odkud plyne $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(x)$. Položením $x = 1$ v poslední získané rovnosti dostaneme $f(q) = q^2 \cdot \alpha$ pro libovolné $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, přitom $\alpha = f(1) \in \mathbb{R}$.

Jak vidíme, mají všechny funkce $f$, které jsou řešením tohoto příkladu, na množině všech racionálních čísel předpis tvaru $f(r) = \alpha r^2$ pro vhodné $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvědomme si, že jsme stejně jako v řešení Cauchyovy funkcionální rovnice nikde nevyužili předpoklad spojitosti, proto uvedený předpis platí i pro nespojité funkce $f$, které splňují zadanou funkcionální rovnici. Rozšířením výše uvedeného předpisu na všechna reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ již však spojitosti funkce $f$ využijeme.

Nechť $x$ je libovolné, dále pevně dané reálné číslo a $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ označuje posloupnost racionálních čísel konvergující k $x$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. S ohledem na spojitost funkce $f$ a její předpis na množině racionálních čísel pak platí

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n^2 f(1) = \lim_{n\to\infty} r_n^2 \alpha = \alpha \lim_{n\to\infty} r_n^2 = \\ &= \alpha x^2. \end{aligned}$$

Každá spojitá funkce, která je řešením tohoto příkladu, je tedy tvaru $f(x) = \alpha x^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Dosazením nalezeného předpisu do zadání tento výsledek snadno potvrdíme:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) + f(x-y) = \alpha(x+y)^2 + \alpha(x-y)^2 = \alpha\left(2x^2 + 2y^2\right), \\ P:&\quad 2f(x) + 2f(y) = 2\alpha x^2 + 2\alpha y^2 = \alpha\left(2x^2 + 2y^2\right). \end{aligned}$$

□

Funkcionální rovnice uvedená v předchozím příkladě 4.1 se někdy nazývá *kvadratická* podle tvaru všech spojitých řešení. Budeme se proto dále odkazovat na tuto rovnici s tímto pojmenováním.

Zatímco předchozí příklad 4.1 vede k sudým funkcím (konkrétně kvadratickým), následující příklad 4.2 povede k hledání liché části obecného řešení, které samo lichou funkcí není.

**Příklad 4.2.** *Najděte všechny spojité funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *rovnost*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).$$

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Položením $x = 0$ dostaneme $f(y) + f(-y) = 2f(0)$, odkud plyne

$$f(0) = \frac{f(y) + f(-y)}{2} = f_s(y).$$

Jak vidíme, je sudá část funkce $f$ konstantní, můžeme proto psát $f(x) = f_l(x) + c$, kde $c = f(0) \in \mathbb{R}$, a po dosazení do zadání dostaneme

$$\begin{aligned} f_l(x+y) + c + f_l(x-y) + c &= 2(f_l(x) + c), \\ f_l(x+y) + f_l(x-y) &= 2f_l(x). \end{aligned}$$

Hledání řešení se tímto zúžilo pouze na obor lichých funkcí.

Nahrazením $y$ hodnotou $x$ dostaneme s ohledem na $f_l(0) = 0$ rovnost $f_l(2x) = 2f_l(x)$. Nechť dále $t, u \in \mathbb{R}$ označují libovolná reálná čísla. Položením $x = \frac{t+u}{2}$ a $y = \frac{t-u}{2}$ obdržíme s ohledem na $f_l(2x) = 2f_l(x)$ rovnost

$$\begin{aligned} f_l\left(\frac{t+u}{2} + \frac{t-u}{2}\right) + f_l\left(\frac{t+u}{2} - \frac{t-u}{2}\right) &= 2f_l\left(\frac{t+u}{2}\right), \\ f_l(t) + f_l(u) &= f_l(t+u), \end{aligned}$$

která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Spojitá funkce $f_l$ ji splňuje pro všechna $t, u \in \mathbb{R}$, proto je její předpis tvaru $f_l(x) = \beta x$, kde $\beta \in \mathbb{R}$.

Spojením dílčích výsledků tak dostáváme, že hledaná funkce $f$ má předpis $f(x) = \beta x + c$, kde $\beta, c \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání se přesvědčíme, že všechny tyto funkce jsou skutečně řešením:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) + f(x-y) = \beta(x+y) + c + \beta(x-y) + c = 2\beta x + 2c, \\ P:&\quad 2f(x) = 2(\beta x + c) = 2\beta x + 2c. \end{aligned}$$

□

V následujících příkladech nalezne uplatnění zejména důsledek vyřešeného příkladu 4.2, který pro jeho zřejmost ponecháme bez důkazu.

**Důsledek.** *Každá spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je lichá (nebo splňuje alespoň podmínku $f(0) = 0$) a splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x),$$

*má předpis tvaru $f(x) = \beta x$, kde $\beta \in \mathbb{R}$.*

Vidíme, že rovnice $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$ má v oboru lichých funkcí stejné řešení jako Cauchyova funkcionální rovnice a jednoduchými substitucemi ji lze i do její podoby upravit (viz řešení Příkladu 4.2), budeme se proto také na ni dále odvolávat s pojmenováním Cauchyova.

Nyní jsme schopni snadněji vyřešit některé typy funkcionálních rovnic, které zde i s takovými řešeními založenými na předchozích výsledcích uvedeme.

**Příklad 4.3.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, které pro všechna $x,y,z\in\mathbb{R}$ splňují rovnost*[1]

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z).$$

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou funkci splňující zadání. Položením $x=y=z=0$ obdržíme rovnost $3f(0)=4f(0)$ neboli $f(0)=0$. Volbou $z=-x$ s ohledem na $f(0)=0$ dostaneme

$$f(x+y)+f(y-x)=f(x)+f(y)+f(-x)+f(y).$$

Nahrazením funkce $f$ za součet její sudé a liché části $f_s$ a $f_l$ získáme

$$f_s(x+y)+f_l(x+y)+f_s(y-x)+f_l(y-x)=2f_s(x)+2f_s(y)+2f_l(y).$$

Přepsáním proměnných $x$ a $y$ za jejich opačné hodnoty $-x$ a $-y$ obdržíme rovnost

$$f_s(x+y)-f_l(x+y)+f_s(y-x)-f_l(y-x)=2f_s(x)+2f_s(y)-2f_l(y),$$

ze které po sečtení, resp. po odečtení od předchozí dostaneme:

$$\begin{aligned} 2f_s(x+y)+2f_s(y-x)&=4f_s(x)+4f_s(y),\\ f_s(x+y)+f_s(x-y)&=2f_s(x)+2f_s(y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

respektive

$$\begin{aligned} 2f_l(x+y)+2f_l(y-x)&=4f_l(y),\\ f_l(x+y)+f_l(x-y)&=2f_l(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Rovnost (4.2) odpovídá kvadratické funkcionální rovnici, kterou funkce $f_s$ splňuje pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$, a vzhledem k předpokladu spojitosti funkce $f$, a tedy i $f_s$, platí $f_s(x)=\alpha x^2$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Poslední uvedená rovnost (4.3) odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici, kterou spojitá funkce $f_l$ splňuje pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$. Předpis funkce $f_l$ má za těchto předpokladů tvar $f_l(x)=\beta x$, kde $\beta\in\mathbb{R}$. Dohromady tak dostáváme, že hledaná řešení musí být tvaru:

$$f(x)=f_s(x)+f_l(x)=\alpha x^2+\beta x.$$

[1] [S-K, str. 139]

Dosazením do zadání se přesvědčíme, že taková funkce je řešením při libovolné volbě konstant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
L:\quad & f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=\alpha(x+y)^2+\beta(x+y)+\alpha(y+z)^2+\\
& +\beta(y+z)+\alpha(z+x)^2+\beta(z+x)=2\alpha(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)+\\
& +2\beta(x+y+z),\\
P:\quad & f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)=\alpha x^2+\beta x+\alpha y^2+\beta y+\alpha z^2+\beta z+\\
& +\alpha(x+y+z)^2+\beta(x+y+z)=2\alpha(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)+\\
& +2\beta(x+y+z).
\end{aligned}
$$

□

Jak si čtenář bude moci všimnout v řešení následujícího příkladu 4.4, nikde v něm nevyužijeme a ani neodvodíme sudost nebo lichost funkcí, jejichž předpisy budeme hledat. Nicméně tento příklad navazuje na předchozí, jehož výsledek zde uplatníme.

**Příklad 4.4.** *Nalezněte všechny spojité funkce $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=g(x)+g(y)+g(z)+h(x+y+z)$$

*pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*[2]

*Řešení.* Nechť $f, g$ a $h$ dále označují libovolné spojité funkce splňující zadanou rovnost. Položením $x=y=z=0$ dostaneme

$$3f(0)=3g(0)+h(0). \tag{4.4}$$

Definujme funkce $F, G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisy

$$F(x)=f(x)-f(0),\quad G(x)=g(x)-g(0),\quad H(x)=h(x)-h(0)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tyto funkce jsou zřejmě spojité a platí $F(0)=G(0)=H(0)=0$. Dosadíme-li je do rovnosti ze zadání, získáme vzhledem k (4.4) rovnost

$$F(x+y)+F(y+z)+F(z+x)=G(x)+G(y)+G(z)+H(x+y+z).$$

Položením $y=z=0$ obdržíme $2F(x)=G(x)+H(x)$ neboli

$$F(x)=\frac{G(x)+H(x)}{2}.$$

[2] [Ven, str. 150]

Po dosazení za funkci $F$ v předchozí rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}&\frac{G(x+y)+H(x+y)}{2}+\frac{G(y+z)+H(y+z)}{2}+\frac{G(z+x)+H(z+x)}{2}= \\ &=G(x)+G(y)+G(z)+H(x+y+z),\end{aligned} \tag{4.5}$$

odkud pro $z = 0$ plyne

$$\begin{aligned}&\frac{G(x+y)+H(x+y)}{2}+\frac{G(y)+H(y)}{2}+\frac{G(x)+H(x)}{2}= \\ &=G(x)+G(y)+H(x+y)\end{aligned}$$

neboli

$$G(x+y)-H(x+y)=G(x)-H(x)+G(y)-H(y).$$

Zavedením funkce $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ určené předpisem $\varphi(x)=G(x)-H(x)$ pro každé $x\in\mathbb{R}$ přejde poslední rovnost do tvaru $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, který odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Vzhledem ke spojitosti funkcí $G$ a $H$, a tedy i $\varphi$, je předpis funkce $\varphi$ tvaru $\varphi(x)=\alpha x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Zjistili jsme tak, že $G(x)-H(x)=\alpha x$ neboli $G(x)=\alpha x+H(x)$. Dosazením pravé strany za funkci $G$ v rovnosti (4.5) zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha(x+y)+2H(x+y)}{2}+\frac{\alpha(y+z)+2H(y+z)}{2}+\frac{\alpha(z+x)+2H(z+x))}{2}= \\ &=\alpha x+H(x)+\alpha y+H(y)+\alpha z+H(z)+H(x+y+z)\end{aligned}$$

neboli

$$H(x+y)+H(y+z)+H(z+x)=H(x)+H(y)+H(z)+H(x+y+z).$$

Všimněme si, že funkce $H$ splňuje všechny předpoklady příkladu 4.3, který jsme již vyřešili. Vzhledem k jeho výsledku je funkce $H$ tvaru

$$H(x)=\gamma x^2+\beta x,$$

kde $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, takže funkce $G(x)=\alpha x+H(x)$ má tvar

$$G(x)=\gamma x^2+(\beta+\alpha)x,$$

a tudíž konečně funkce $F(x)=\frac{G(x)+H(x)}{2}$ má vyjádření

$$F(x)=\frac{\gamma x^2+(\beta+\alpha)x+\gamma x^2+\beta x}{2}=\gamma x^2+\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)x.$$

Nyní již snadno z předpisu funkcí $F, G, H$ určíme funkce $f, g, h$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + f(0) = \gamma x^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) x + a, \\ g(x) &= G(x) + g(0) = \gamma x^2 + (\beta + \alpha)x + b, \\ h(x) &= H(x) + h(0) = \gamma x^2 + \beta x + c, \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a $a = f(0), b = g(0), c = h(0)$ jsou reálné konstanty, které podle (4.4) splňují rovnost $3a = 3b + c$.

Dosazením do zadání provedeme zkoušku nalezeného řešení:

$$\begin{aligned} L:\quad & f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) = 2\gamma(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) + \\ & + (\alpha + 2\beta)(x + y + z) + 3a, \\ P:\quad & g(x) + g(y) + g(z) + h(x + y + z) = 2\gamma(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) + \\ & + (\alpha + 2\beta)(x + y + z) + 3b + c. \end{aligned}$$

Vidíme, že na konstanty $\alpha, \beta, \gamma$ nejsou kladena žádná omezení.

□

**Příklad 4.5.** *Určete všechny takové spojité funkce $f, g, h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*[3]

$$f(x + y) + g(x - y) = 2h(x) + 2k(y).$$

*Řešení.* Nechť $f, g, h, k$ označují libovolné spojité funkce, které splňují zadání. Definujme spojité funkce $H, K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisy tvaru

$$H(x) = h(x) - h(0) \quad \text{a} \quad K(x) = k(x) - k(0) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Náš postup řešení bude spočívat v tom, že zadanou rovnost nejprve upravíme tak, aby v ní vystupovaly pouze funkce $h, k$, které poté nahradíme novými funkcemi $H$ a $K$.

Dosazením $y = 0$, resp. $x = 0$ dostaneme

$$f(x) + g(x) = 2h(x) + 2k(0), \quad \text{resp.} \quad f(y) + g(-y) = 2h(0) + 2k(y).$$

Odečtením druhé rovnosti od první (po přepsání proměnné $y$ na $x$) získáme

$$g(x) - g(-x) = 2h(x) + 2k(0) - 2h(0) - 2k(x).$$

Zaměníme-li zde $-x$ za $x$, obdržíme rovnost

$$g(-x) - g(x) = 2h(-x) + 2k(0) - 2h(0) - 2k(-x),$$

[3] [Ven, str. 149]

ze které po sečtení s předchozí rovnicí dostaneme

$$0 = 2\big(h(x) - h(0)\big) + 2\big(h(-x) - h(0)\big) - 2\big(k(x) - k(0)\big) - 2\big(k(-x) - k(0)\big)$$

neboli $H(x)+H(-x) = K(x)+K(-x)$. Nahrazením funkce $H$ a $K$ za součet jejich lichých a sudých částí zjistíme, že platí

$$2H_s(x) = 2K_s(x) \text{ neboli } \; H_s(x) = K_s(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Položením $y=x$ v zadané rovnosti získáme $f(2x)+g(0)=2h(x)+2k(x)$, odkud

$$f(x) = 2h\left(\frac{x}{2}\right) + 2k\left(\frac{x}{2}\right) - g(0). \tag{4.6}$$

Dosazením $y = 0$ v zadané rovnosti s ohledem na (4.6) obdržíme

$$g(x)=2h(x)+2k(0)-2h\left(\frac{x}{2}\right)-2k\left(\frac{x}{2}\right)+g(0). \tag{4.7}$$

S využitím (4.6) a (4.7) přejde rovnost ze zadání do tvaru

$$\begin{aligned} &2h\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2k\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2h(x-y) + 2k(0) - 2h\left(\frac{x-y}{2}\right) - \\ &-2k\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2h(x) + 2k(y). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Po záměně $-y$ za $y$ v (4.8) dostaneme

$$\begin{aligned} &2h\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2k\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2h(x+y) + 2k(0) - 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) - \\ &-2k\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2h(x) + 2k(-y). \end{aligned}$$

Sečtením předchozích dvou rovností pak získáme

$$\begin{aligned} 2h(x-y) + 2h(x+y) + 4k(0) &= 4h(x) + 2k(y) + 2k(-y), \\ h(x-y)+h(x+y)-2h(0) &= 2h(x)-2h(0)+k(y)-k(0)+k(-y)-k(0), \\ H(x-y) + H(x+y) &= 2H(x) + K(y) + K(-y), \end{aligned}$$

Po přechodu k lichým a sudým částem funkce $H$ a $K$ obdržíme

$$H_l(x-y)+H_s(x-y)+H_l(x+y)+H_s(x+y)=2H_l(x)+2H_s(x)+2K_s(y). \tag{4.9}$$

Po záměně $x$ za $-x$ a $y$ za $-y$ získáme rovnost

$$H_s(x-y)-H_l(x-y)-H_l(x+y)+H_s(x+y)=2H_s(x)-2H_l(x)+2K_s(y), \tag{4.10}$$

Ze součtu (4.9)+(4.10) získáme s ohledem na fakt, že platí $H_s(x) = K_s(x)$, rovnost

$$H_s(x-y) + H_s(x+y) = 2H_s(x) + 2H_s(y),$$

která odpovídá kvadratické funkcionální rovnici. Spojitá funkce $H_s$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, a proto je její předpis tvaru $H_s(x) = \alpha x^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Z rozdílu (4.9) − (4.10) dostaneme

$$H_l(x+y) + H_l(x-y) = 2H_l(x).$$

Obdrželi jsme tak rovnost, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici a spojitá funkce $H_l$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Z uvedených skutečností plyne, že předpis funkce $H_l$ je tvaru $H_l(x) = \beta x$, kde $\beta \in \mathbb{R}$.

Spojením dílčích výsledků dostaneme předpis funkce $h$ :

$$\begin{aligned} h(x) - h(0) = H(x) = H_s(x) + H_l(x) &= \alpha x^2 + \beta x, \\ h(x) &= \alpha x^2 + \beta x + a, \end{aligned}$$

kde $h(0) = a$ a $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$.

Nahrazením funkcí $h$ a $k$ novými funkcemi $H$ a $K$ v rovnosti (4.8) získáme

$$\begin{aligned} &H\left(\frac{x+y}{2}\right) + K\left(\frac{x+y}{2}\right) + H(x-y) - H\left(\frac{x-y}{2}\right) - K\left(\frac{x-y}{2}\right) = \\ &= H(x) + K(y), \end{aligned}$$

odkud po přechodu k lichým a sudým částem s ohledem na již získané výsledky ($H_s(x) = K_s(x)$ a $H(x) = \alpha x^2 + \beta x$) dostaneme

$$\begin{aligned} &2\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{x+y}{2}\right) + K_l\left(\frac{x+y}{2}\right) + \alpha(x-y)^2 + \beta(x-y) - 2\alpha\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - \\ &- \beta\left(\frac{x-y}{2}\right) - K_l\left(\frac{x-y}{2}\right) = \alpha x^2 + \beta x + \alpha y^2 + K_l(y), \end{aligned}$$

odkud po úpravě získáme

$$K_l\left(\frac{y+x}{2}\right) + K_l\left(\frac{y-x}{2}\right) = K_l(y).$$

Nahrazením $x$ za novou proměnnou $2x$ a $y$ za $2y$ obdržíme rovnost

$$K_l(y+x) + K_l(y-x) = K_l(2y),$$

která pro $x = 0$ přejde do tvaru $2K_l(y) = K_l(2y)$. Využitím tohoto výsledku tak dostaneme rovnost
$$K_l(y + x) + K_l(y - x) = 2K_l(y),$$
která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici a funkce $K_l$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Za předpokládané spojitosti funkce $K_s$ proto plyne, že její předpis má tvaru $K_l(x) = \gamma x$, kde $\gamma \in \mathbb{R}$.

Celkem jsme tak zjistili, že funkce $H, K$ a $h$ jsou určeny předpisy tvaru
$$H(x) = \alpha x^2 + \beta x,\ \ K(x) = \alpha x^2 + \gamma x \ \text{ a } \ h(x) = \alpha x^2 + \beta x + a$$
pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, a \in \mathbb{R}$. Postupným dosazováním nyní obdržíme předpisy zbývajících funkcí $f, g, k$.

Pro funkci $k$ dostaneme předpis tvaru
$$k(x) = K(x) + k(0) = K_s(x) + K_l(x) + k(0) = \alpha x^2 + \gamma x + b,$$
kde $k(0) = b \in \mathbb{R}$.

Pro funkci $f$, jejíž vyjádření vzhledem k $h$ a $k$ jsme uvedli v (4.6), dostaneme
$$\begin{aligned} f(x) &= 2h\left(\frac{x}{2}\right) + 2k\left(\frac{x}{2}\right) - g(0) = \alpha\frac{x^2}{2} + \beta x + 2a + \alpha\frac{x^2}{2} + \gamma x + 2b - g(0) = \\ &= \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + 2a + 2b - c, \end{aligned}$$
kde $g(0) = c \in \mathbb{R}$.

Nakonec pro funkci $g$ uvedenou v (4.7) získáme rovnost
$$\begin{aligned} g(x) = 2h(x) + 2k(0) - 2h\left(\frac{x}{2}\right) - 2k\left(\frac{x}{2}\right) + g(0) = 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2a + 2b - \\ - \alpha\frac{x^2}{2} - \beta x - 2a - \alpha\frac{x^2}{2} - \gamma x - 2b + c = \alpha x^2 + (\beta - \gamma)x + c. \end{aligned}$$

Nalezli jsme tedy předpisy funkcí
$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + 2a + 2b - c, \\ g(x) &= \alpha x^2 + (\beta - \gamma)x + c, \\ h(x) &= \alpha x^2 + \beta x + a, \\ k(x) &= \alpha x^2 + \gamma x + b, \end{aligned}$$
kde $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání se snadno přesvědčíme, že splňují zadanou funkcionální rovnici:
$$\begin{aligned} L:\quad f(x + y) + g(x - y) &= \alpha(x + y)^2 + (\beta + \gamma)(x + y) + 2a + 2b - c + \\ &\quad + \alpha(x - y)^2 + (\beta - \gamma)(x - y) + c = \\ &= 2\alpha(x^2 + y^2) + 2(\beta x + \gamma y) + 2a + 2b, \\ P:\quad 2h(x) + 2k(y) &= 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2a + 2\alpha x^2 + 2\gamma x + 2b = \\ &= 2\alpha(x^2 + y^2) + 2(\beta x + \gamma y) + 2a + 2b. \end{aligned}$$
$\square$

## 4.1 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 4.6.** *Určete všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *rovnost*[4]

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

**Příklad 4.7.** *Určete všechny takové spojité funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$, *které splňují rovnost*

$$f(x^2+y^2) = f(x^2-y^2) + f(2xy)$$

*pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$.[5]

**Příklad 4.8.** *Určete všechny spojité funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *splňují rovnost*[6]

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(xy+1) - f(x)f(y) - 4.$$

[4] [Ven, str. 113]
[5] [And, str. 42]
[6] [Ven, str. 151]

# Kapitola 5

# Využití symetrie jedné ze stran rovnice

V této kapitole se zaměříme na příklady, v jejichž zadání či v průběhu řešení obdržíme takovou funkcionální rovnici, v níž jedna její strana bude symetrická vzhledem k zastoupeným proměnným. Po jejich vzájemně výměně tak získáme další rovnost, kterou hledaná funkce splňuje a která nám může dopomoci nalézt řešení.

U prvních dvou příkladů, které zde uvádíme, si čtenář může všimnout, že v zadání každého z nich vystupuje funkcionální rovnice, která již má symetrickou jednu ze svých stran. Díky tomu lze metodu popsanou v předchozím odstavci ihned aplikovat.

**Příklad 5.1.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(xy) = f(x)y^2 + f(y) - f(1)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*[1]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující všechny předpoklady zadání. Levá strana zadané rovnice je vzhledem k nezávislým proměnným $x$ a $y$ symetrická, díky čemuž platí rovnost

$$f(x)y^2 + f(y) - f(1) = f(xy) = f(yx) = f(y)x^2 + f(x) - f(1),$$

z níž po úpravě dostaneme

$$f(x)(y^2 - 1) = f(y)(x^2 - 1). \tag{5.1}$$

[1] Upravený příklad z [And, str. 63].

Položením $y = \sqrt{2}$ obdržíme pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = c(x^2 - 1)$, kde $c = f(\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$. Po dosazení do zadání se přesvědčíme, že jsme opravdu našli všechna řešení:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(xy) = c((xy)^2 - 1) = c(xy)^2 - c,\\ P: &\quad f(x)y^2 + f(y) - f(1) = cy^2(x^2 - 1) + c(y^2 - 1) = c(xy)^2 - c. \end{aligned}$$

□

**Příklad 5.2.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které rovnost*

$$f\big((x-y)^2\big) = \big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2$$

*splňují pro jakákoliv $x, y \in \mathbb{R}$.*[2]

*Řešení.* Nejdříve označme jako $f$ libovolnou funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání. Všimněme si, že levá strana zadané rovnice je vzhledem k proměnným $x$, $y$ symetrická, díky čemuž získáme rovnost

$$\big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2 = f\big((x-y)^2\big) = f\big((y-x)^2\big) = \big(f(y)\big)^2 - 2yf(x) + x^2,$$

odkud pro $y = 0$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \big(f(x)\big)^2 - 2xf(0) &= \big(f(0)\big)^2 + x^2,\\ \big(f(x)\big)^2 &= x^2 + 2xf(0) + \big(f(0)\big)^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Položením $x = 0$ v zadané rovnosti získáme pro každé $y \in \mathbb{R}$:

$$f\big(y^2\big) = \big(f(0)\big)^2 + y^2. \tag{5.3}$$

Nakonec dosazením $x = \frac{1}{2}$ a vyjádřením hodnoty $f(y)$ z pravé strany rovnosti uvedené v zadání ($2xf(y) = \big(f(x)\big)^2 + y^2 - f\big((x-y)^2\big)$) dostaneme s ohledem na (5.2) a (5.3) předpis funkce $f$ ve tvaru

$$\begin{aligned} f(y) &= \underbrace{\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}_{(5.2)} + y^2 - \underbrace{f\left(\left(\frac{1}{2} - y\right)^2\right)}_{(5.3)} =\\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + f(0) + \big(f(0)\big)^2}_{(5.2)} + y^2 - \underbrace{\left(\big(f(0)\big)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2\right)}_{(5.3)} =\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + f(0) + y^2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y + y^2\right) =\\ &= y + f(0). \end{aligned}$$

[2] [A-G, str. 185]

Hodnotu $f(0)$ určíme z (5.3) položením $y = 0$: $f(0) = \big(f(0)\big)^2$, odkud $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$. Předpis funkce $f$ je tedy tvaru $f(x) = x$ nebo $f(x) = x+1$. Dosazením do zadání se přesvědčíme, že obě nalezené funkce jsou řešením: Pro $f(x) = x$ platí

$$\begin{aligned} L: &\quad f\big((x-y)^2\big) = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2, \\ P: &\quad \big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2 = x^2 - 2xy + y^2, \end{aligned}$$

pro $f(x) = x + 1$ je splněno

$$\begin{aligned} L: &\quad f\big((x-y)^2\big) = (x-y)^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + 1, \\ P: &\quad \big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2 = (x+1)^2 - 2xy - 2x + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 1. \end{aligned}$$

□

Funkcionální rovnice v následujících dvou příkladech již nebudou zadány tak, že jedna z jejich stran bude vzhledem k vystupujícím nezávislým proměnným symetrická, proto využijeme takových substitucí, abychom se k rovnici se symetrickou stranou dostali.

**Příklad 5.3.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x)f\big(y - f(x)\big) = 4xy - 4f\left(x^2\right)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[3]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující zadání příkladu. Nahrazením $y$ za $y + f(x)$ (pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$) obdržíme

$$f(x)f(y) = 4x\big(y + f(x)\big) - 4f\left(x^2\right) = 4xy + 4xf(x) - 4f\left(x^2\right),$$

odkud získáme rovnost

$$f(x)f(y) = 4xy + 4xf(x) - 4f\left(x^2\right), \tag{5.4}$$

jež má symetrickou levou stranu vzhledem k vystupujícím proměnným $x$ a $y$. S ohledem na tuto skutečnost dostaneme po vzájemné záměně $x$ za $y$ rovnost $f(y)f(x) = 4yx + 4yf(y) - 4f\left(y^2\right)$, která má stejnou levou stranu jako předešlá, proto jsou si pravé strany obou rovností rovny pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} 4xy + 4xf(x) - 4f\left(x^2\right) &= 4yx + 4yf(y) - 4f\left(y^2\right), \\ 4xf(x) - 4f\left(x^2\right) &= 4yf(y) - 4f\left(y^2\right). \end{aligned}$$

[3][And, str. 55]

Vzhledem k tvaru poslední získané rovnosti je zřejmé, že její pravá i levá strana nabývá vždy stejné hodnoty nezávisle na zvolených $x$ a $y$. Tento fakt je zřetelnější, položíme-li $y = 0$, pak již snadno vidíme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí vztah $4xf(x) - 4f(x^2) = -4f(0) = a$, kde $a \in \mathbb{R}$. S pomocí rovnosti (5.4) nyní ukážeme, že hodnota $a$ je rovna nule.

Nahrazením $x$ za $y$, resp. položením $y = 1$ v (5.4) obdržíme s ohledem na výše získané výsledky a přepis $a = 4xf(x) - 4f(x^2)$ rovnosti

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= 4x^2 + 4xf(x) - 4f(x^2) = 4x^2 + a, \\ \text{respektive } f(x)f(1) &= 4x + 4xf(x) - 4f(x^2) = 4x + a. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Využitím předchozích dvou rovností lze $(f(x))^2 (f(1))^2$ vyjádřit dvěma způsoby jako

$$\begin{aligned} (f(x))^2 (f(1))^2 &= (f(1))^2 (4x^2 + a) = 4 (f(1))^2 x^2 + a (f(1))^2, \\ \text{respektive } (f(x))^2 (f(1))^2 &= (4x + a)^2 = 16x^2 + 8xa + a^2. \end{aligned}$$

Pravé strany obou rovností jsou si proto rovny pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tudíž i koeficienty u příslušných mocnin proměnné $x$ se navzájem rovnají. Porovnáním koeficientů u lineárních členů dojdeme k rovnosti $8xa = 0$, která je splněna pro libovolně zvolené $x \in \mathbb{R}$. Platí tedy $a = 0$.

Porovnáním kvadratických členů získáme rovnost

$$4 (f(1))^2 x^2 = 16x^2 \quad \text{neboli} \quad (f(1))^2 x^2 = 4x^2,$$

která je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Musí proto platit buď $f(1) = 2$, nebo $f(1) = -2$.

S ohledem na nalezené hodnoty $a$ a $f(1)$ přejde rovnost (5.5) pro $f(1) = 2$ do tvaru $2f(x) = 4x$ neboli $f(x) = 2x$, pro $f(1) = -2$ do tvaru $-2f(x) = 4x$ neboli $f(x) = -2x$.

Dosazením do zadání, které přenecháme čtenáři jako malé cvičení, zjistíme, že obě nalezené funkce jsou opravdu řešením.

□

**Příklad 5.4.** *Nalezněte všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující rovnost*

$$f\big(y + f(x)\big) = f(x)f(y) + f\big(f(x)\big) + f(y) - xy$$

*pro libovolná* $x, y \in \mathbb{R}$.[4]

*Řešení.* Nechť $f$ je dále libovolná funkce splňující zadání příkladu. Položením $y = 0$ dostaneme $f\big(f(x)\big) = f(x)f(0) + f\big(f(x)\big) + f(0)$, odkud po úpravě získáme

[4] [And, str. 63]

$f(0)\big(f(x)+1\big)=0$. Kdybychom připustili, že $f(0)\neq 0$, měli bychom $f(x)=-1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Takový případ ale nemůže nastat, neboť po dosazení předpisu $f(x)=-1$ do zadání zjistíme, že pro každé $x,y\in\mathbb{R}$ má platit

$$\begin{aligned}-1&=1-1-1-xy,\\ xy&=0,\end{aligned}$$

což je spor, proto je tedy $f(0)=0$. Jak nyní ukážeme, funkce $f$ nabývá hodnoty 0 pouze v bodě 0.

Uvažujme libovolný bod $x_0\in\mathbb{R}$ takový, že $f(x_0)=0$, pak po dosazení $x=x_0$ v zadané rovnosti zjistíme s ohledem na předchozí výsledek, že pro každé $y\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}f\big(y+f(x_0)\big)&=f(x_0)f(y)+f\big(f(x_0)\big)+f(y)-x_0y,\\ f(y)&=f(0)+f(y)-x_0y,\\ x_0y&=0.\end{aligned}$$

Aby poslední rovnost opravdu platila pro libovolné reálné $y$, musí být $x_0=0$, čímž jsme dokázali, že hodnota $f$ je rovna 0 skutečně pouze v bodě 0.

Nahrazením $f(y)$ za $y$ v zadání obdržíme rovnost

$$f\big(f(y)+f(x)\big)=f(x)f\big(f(y)\big)+f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big)-xf(y),$$

jejíž levá strana je vzhledem k proměnným $x$ a $y$ symetrická. Je-li $x,y\neq 0$ (a tedy i $f(x),f(y)\neq 0$), pak po vzájemné záměně těchto proměnných získáme z rovnosti pravých stran:

$$\begin{aligned}f(x)f\big(f(y)\big)+f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big)-xf(y)&=f(y)f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big)+f\big(f(x)\big)\\ &\quad-yf(x),\\ f(x)f\big(f(y)\big)+yf(x)&=f(y)f\big(f(x)\big)+xf(y),\\ \frac{f\big(f(y)\big)+y}{f(y)}&=\frac{f\big(f(x)\big)+x}{f(x)}.\end{aligned}$$

Pro $y=1$ dostaneme $\frac{f(f(x))+x}{f(x)}=\frac{f(f(1))+1}{f(1)}=k$ neboli $f\big(f(x)\big)=kf(x)-x$, kde $k\in\mathbb{R}$ a $x\neq 0$ je libovolné. Všimněme si však, že položením $x=0$ v předchozím výsledku obdržíme s ohledem na vztah $f(0)=0$ platnou rovnost

$$\begin{aligned}f\big(f(0)\big)&=kf(0),\\ f(0)&=0.\end{aligned}$$

Odvozený výsledek $f\big(f(x)\big) = kf(x) - x$ tak platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, díky čemuž můžeme rovnost ze zadání přepsat do tvaru

$$f\big(y + f(x)\big) = f(x)f(y) + kf(x) - x + f(y) - xy.$$

Položením $y = -1$, resp. nahrazením $f(y) - 1$ za $y$ v předešlé rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} f\big(f(x) - 1\big) &= f(x)f(-1) + kf(x) - x + f(-1) + x = \\ &= (b + k)f(x) + b \qquad (\text{kde } b = f(-1) \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} f\big(f(x)+f(y)-1\big) &= f(x)f\big(f(y)-1\big)+kf(x)-x+f\big(f(y)-1\big)-xf(y)+x = \\ &= f(x)f\big(f(y)-1\big)+kf(x)+f\big(f(y)-1\big)-xf(y). \end{aligned}$$

Poslední rovnost můžeme s ohledem na předchozí přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} f\big(f(x)+f(y)-1\big) &= f(x)\Big((b+k)f(y)+b\Big)+kf(x)+(b+k)f(y)+b-xf(y) = \\ &= (b+k)\Big(f(x)f(y)+f(y)\Big)+bf(x)+kf(x)+b-xf(y) = \\ &= (b + k)\Big(f(x)f(y) + f(y) + f(x)\Big) + b - xf(y). \end{aligned}$$

Jak si můžeme v poslední získané rovnosti všimnout, jsou její levá strana a součin dvou výrazů v závorkách na její pravé straně symetrické vzhledem k proměnným $x$ a $y$. Po vzájemné záměně těchto proměnných tak získáme rovnost pravých stran, kde se vzhledem k popsané symetrii oba součiny odečtou, díky čemuž získáme pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned} b - xf(y) &= b - yf(x), \\ yf(x) &= xf(y). \end{aligned}$$

Položením $y = 1$ dostaneme předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = cx$, kde $c = f(1) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Dosazením nalezeného předpisu hledané funkce $f$ do zadání zjistíme, že má platit rovnost, kterou ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} f\big(y + f(x)\big) &= f(x)f(y) + f\big(f(x)\big) + f(y) - xy, \\ f\big(y + cx\big) &= c^2xy + f\big(cx\big) + cy - xy, \\ cy + c^2x &= c^2xy + c^2x + cy - xy, \\ xy &= c^2xy, \end{aligned}$$

odkud vidíme, že $c = 1$ nebo $c = -1$. Díky výše provedenému dosazení, které lze zřejmě považovat za zkoušku, jsou jediné dvě funkce splňující zadání tvaru $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.

$\square$

## 5.1 Přidání nové nezávislé proměnné

V některých příkladech je výhodné přidat do zadané funkcionální rovnice další nezávislou proměnnou, díky čemuž získáme nejen více možností při specifikacích za proměnné, ale i (a to v následujících příkladech zejména) můžeme uplatnit metody využívající symetrie jedné ze stran rovnice vzhledem k jejím nezávislým proměnným.

Jak uvidíme na některých následujících příkladech, bude mít zadaná funkcionální rovnice vzhledem ke svým nezávislým proměnným symetrické obě strany. Vzájemnou záměnou těchto proměnných bychom zřejmě nezískali žádnou novou informaci o hledané funkci, proto nejdříve aplikujeme postup přidáním nové proměnné, abychom se poté ke vhodné funkcionální rovnici s jednou symetrickou stranou dostali.

**Příklad 5.5.** *Určete všechny takové funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*[5]

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Předpokládejme, že existuje takové $x_0 \in \mathbb{R}$, pro které je $f(x_0) = 0$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0)f(x - x_0)f\big(x_0(x - x_0)\big) = 0.$$

Funkce $f(x) = 0$ zřejmě splňuje zadání, proto ji můžeme považovat za (triviální) řešení.

Dále již můžeme předpokládat, že $f(x) \neq 0$ pro libovolné reálné $x$. Uvážíme-li levou stranu v rovnosti ze zadání ve tvaru $f(x+y+z)$, pak po odlišném uzávorkování $x + (y+z) = (x+y) + z$ dostaneme ze zadané rovnosti porovnáním odpovídajících pravých stran a následné úpravě vydělením společnými nenulovými činiteli na obou stranách:

$$\begin{aligned} f(x)f(y+z)f(x(y+z)) &= f(x+y)f(z)f(z(x+y)), \\ f(x)\Big(f(y)f(z)f(yz)\Big)\Big(f(xy)f(xz)f(x^2yz)\Big) &= \Big(f(x)f(y)f(xy)\Big)f(z)\cdot \\ &\quad \cdot \Big(f(zx)f(zy)f(z^2xy)\Big), \\ f(x^2yz) &= f(z^2xy). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dosazením $z = y = 1$ v získané rovnosti dostaneme $f(x^2) = f(x)$. Nahrazením $x$ za $y$ a $\frac{1}{x}$ za $z$ pro každé $x \neq 0$ v rovnosti (5.6) obdržíme

$$f\left(x^2 x \frac{1}{x}\right) = f\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 xx\right) \quad \text{neboli} \quad f(x^2) = f(1).$$

[5] [Ven, str. 112]

Odtud s ohledem na rovnost $f(x^2) = f(x)$ platí $f(x) = c$ pro každé $x \neq 0$, kde $c = f(1)$ je nenulová reálná konstanta. Její hodnotu zjistíme, když do zadané rovnosti dosadíme libovolná nenulová $x, y \in \mathbb{R}$, pro něž je i $x + y \neq 0$. Dostaneme rovnost $c = c^3$, které vyhovují pouze dvě nenulová $c$, totiž $c = 1$ a $c = -1$. Zbývá určit hodnotu $f(0)$. Dosazením $x = 1$ a $y = -1$ v zadané rovnosti získáme

$$f(0) = f(1)f(-1)f(-1) = c^3 = c,$$

takže dříve provedená prověrka zadané rovnosti pro *nenulová* $x, y$ a $x+y$ je platná, i když $x = 0$ nebo $y = 0$ nebo $x + y = 0$.

Řešením příkladu jsou právě tři funkce $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ a $f(x) = -1$.

□

**Příklad 5.6.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*[6]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující všechny předpoklady zadání. Zřejmě jedním (triviálním) řešením je konstantní funkce tvaru $f(x) = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že existuje alespoň jedno takové $x_0 \in \mathbb{R}$, že $f(x_0) \neq 0$.

Uvážíme-li zadání ve tvaru $f(x + y) = f(x) + f(y) + f(xy) - f(x)f(y)$, pak po záměně $y$ za $y + z$ a následné úpravě s ohledem na stejnou rovnost s dvojicí $(x, y)$ postupně zaměněnou za $(y, z)$, $(xy, xz)$ a $(y, z)$ dostaneme

$$\begin{aligned} f\bigl(x + (y + z)\bigr) &= f(x) + f(y + z) + f(xy + xz) - f(x)f(y + z) = \\ &= f(x) + f(y) + f(z) + f(yz) - f(y)f(z) + \\ &\quad + f(xy) + f(xz) + f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - \\ &\quad - f(x)\Bigl(f(y) + f(z) + f(yz) - f(y)f(z)\Bigr) = \\ &= f(x)+f(y)+f(z)+f(xy)+f(yz)+f(xz)+f(x)f(y)f(z)+ \\ &\quad - f(x)f(y) - f(y)f(z) - f(x)f(z) + \\ &\quad + f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - f(x)f(yz). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Na druhou stranu po odlišném uzávorkování součtu $x + y + z$ získáme s ohledem na předchozí výsledek rovnost

$$\begin{aligned} f\bigl((x + y) + z\bigr) &= f(x)+f(y)+f(z)+f(xy)+f(yz)+f(xz)+f(x)f(y)f(z)+ \\ &\quad - f(x)f(y) - f(y)f(z) - f(x)f(z) + \\ &\quad + f(xyz^2) - f(xz)f(yz) - f(z)f(xy), \end{aligned} \tag{5.8}$$

[6] The International Mathematical Olympiad Training Camp (Indie, 2003).

kde jsme ve výsledku (5.7) zaměnili trojici nezávislých proměnných $(x, y, z)$ novou trojicí $(z, x, y)$. Z rovnosti pravých stran (5.7) a (5.8) zjistíme po následné úpravě spočívající v odečtení stejných členů vystupujících v prvních dvou řádcích jejich zápisu, že platí

$$f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - f(x)f(yz) = f(xyz^2) - f(xz)f(yz) - f(z)f(xy).$$

Položením $z = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^2y) - f(xy)f(x) - f(x)f(y) &= f(xy) - f(x)f(y) - f(1)f(xy), \\ f(x^2y) &= f(xy) - f(1)f(xy) + f(x)f(xy), \\ f(x^2y) &= (1 - f(1))f(xy) + f(x)f(xy), \\ f(x^2y) &= (a - 1)f(xy) + f(x)f(xy), \end{aligned}$$

kde $a = 2 - f(1) \in \mathbb{R}$. Nahrazením $xy$ za $y$ v původní rovnosti ze zadání obdržíme

$$\begin{aligned} f(x + xy) + f(x)f(xy) &= f(x) + f(xy) + f(x^2y), \\ f(x^2y) &= f(x + xy) + f(x)f(xy) - f(x) - f(xy), \end{aligned}$$

odkud porovnáním s pravou stranou předchozí rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} f(x + xy) + f(x)f(xy) - f(x) - f(xy) &= (a - 1)f(xy) + f(x)f(xy), \\ f(x + xy) &= af(xy) + f(x). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Položením $y = 0$ zjistíme, že platí $f(x) = af(0) + f(x)$ neboli $af(0) = 0$, odkud plyne $a = 0$ nebo $f(0) = 0$.

V případě $a = 0$, kdy z rovnosti $a = 2 - f(1)$ plyne $f(1) = 2$, získáme pro každé $t \in \mathbb{R}$ volbou $x = 1$ a $y = t - 1$ v (5.9) rovnost

$$f(t) = f(1) = 2.$$

Snadným dosazením do zadání zjistíme, že konstantní funkce $f(x) = 2$ je opravdu řešením.

V druhém případě, kdy $f(0) = 0$, obdržíme v (5.9) pro $y = -1$ rovnost

$$\begin{aligned} f(x - x) &= af(-x) + f(x), \\ f(x) &= -af(-x) = -a\Big(-af(x)\Big) = a^2 f(x), \end{aligned}$$

v níž jsme na $f(-x)$ aplikovali ještě jednou právě odvozený vztah.

S ohledem na předpoklad ze začátku řešení ($f(x_0) \neq 0$) můžeme po dosazení $x = x_0$ v posledním výsledku vydělit obě strany rovnosti nenulovou hodnotou $f(x_0)$, odkud pak zjistíme, že musí platit buď $a = 1$, nebo $a = -1$.

Pro $a = -1$ přejde (5.9) do tvaru $f(x + xy) = f(x) - f(xy)$, odkud položením $y = 1$ obdržíme pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(2x) = f(x) - f(x) = 0$, což je spor s předpokladem, že $f(x_0) \neq 0$ pro nějaké reálné $x_0$. Platí tedy $a = 1$ a rovnost (5.9) můžeme zapsat jako $f(x+xy) = f(xy)+f(x)$. Nahrazením $\frac{z}{x}$ za $y$ dostaneme pro libovolná $x, z \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, rovnost

$$f(x + z) = f(z) + f(x). \tag{5.10}$$

Všimněme si však, že poslední získaná rovnost zaručuje výsledek $f(0) = 0$, musí proto pro hledanou funkci $f$ platit pro všechna $x, z \in \mathbb{R}$ i bez omezení $x \neq 0$. S ohledem na tento výsledek pak lze rovnost ze zadání

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

zjednodušit do tvaru

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{5.11}$$

Hledaná (ne nutně spojitá) funkce $f$ splňuje Cauchyovu funkcionální rovnici (5.10) a současně i její modifikaci (5.11) pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Podle důsledku Věty 3.1 uvedeného v kapitole 3 je proto její předpis tvaru $f(x) = x$ (vyloučíme-li již ověřený výsledek $f(x) = 0$), kde $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že tato funkce je opravdu (netriviálním) řešením:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(x + y) + f(x)f(y) = x + y + xy, \\ P: &\quad f(x) + f(y) + f(xy) = x + y + xy. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že jedinými funkcemi, které splňují zadání, jsou funkce tvaru $f(x) = 0$, $f(x) = 2$ a $f(x) = x$.

□

Při řešení posledního příkladu této kapitoly ukážeme, že z důvodu složitosti zápisů je někdy v průběhu řešení výhodné definovat novou funkci. Po přidání nové proměnné tak přehledněji využijeme symetrií, které nám zadaná funkcionální rovnice a nově definovaná funkce nabízejí.

**Příklad 5.7.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy + 1)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[7]

[7] [S-K, str. 225]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje dále funkci, která splňuje předpoklady příkladu. Položením $x = y = 0$ zjistíme, že platí $f(0)+f(0) = f(0)+f(0)+f(1)$ neboli $f(1) = 0$.

Definujeme-li pomocnou funkci $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ předpisem

$$F(x,y) = f(x)+f(y)-f(x+y),$$

vidíme, že je zřejmě spojitá, a platí rovnost

$$F(x+y,z)+F(x,y) = F(x,y+z)+F(y,z), \tag{5.12}$$

neboť po dosazení za $F$ podle jejího předpisu obdržíme pro všechna $x,y,z\in\mathbb{R}$ identitu:

$$\begin{aligned}&f(x+y)+f(z)-f(x+y+z)+f(x)+f(y)-f(x+y) =\\ &= f(x)+f(y+z)-f(x+y+z)+f(y)+f(z)-f(y+z), \quad \text{neboli} \quad 0=0.\end{aligned}$$

Dále s ohledem na zadání obdržíme pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$ rovnost

$$F(x,y) = f(x)+f(y)-f(x+y) = f(xy)-f(xy+1),$$

jejíž pravou stranu dosadíme do (5.12) za každou hodnotu $F$, a dostaneme

$$\begin{aligned}&f(xz+yz)-f(xz+yz+1)+f(xy)-f(xy+1) =\\ =&f(xy+xz)-f(xy+xz+1)+f(yz)-f(yz+1).\end{aligned}$$

Nahrazením $z$ za $\frac{1}{y}$ pro $y\neq 0$ získáme s ohledem na $f(1)=0$ rovnost

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{x}{y}+1\right)-f\left(\frac{x}{y}+2\right)+f(xy)-f(xy+1) =\\ =&f\left(xy+\frac{x}{y}\right)-f\left(xy+\frac{x}{y}+1\right)-f(2).\end{aligned}$$

Využitím substitucí $u=\frac{x}{y}$ a $v=xy$, kde $x,y\in\mathbb{R}$ splňují jediné omezení $y\neq 0$, přejde poslední získaný výsledek do tvaru

$$f(u+1)-f(u+2)+f(v)-f(v+1)=f(v+u)-f(v+u+1)-f(2). \tag{5.13}$$

Ze substitucí si všimněme, že pouze pro $x=0$ bude $u=v=0$ (jinak budou obě hodnoty $u$, $v$ vždy nenulové) a že $u$ a $v$ musí mít stejné znaménko (buď jsou obě kladná nebo záporná, jinak bychom obdrželi spor, že součin dvou čísel může mít opačné znaménko než podíl těchto čísel). Žádná další omezení na čísla $u,v\in\mathbb{R}$

neexistují, protože pro jejich libovolné nenulové hodnoty stejného znaménka vždy najdeme vhodná $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{y}, & v &= xy, \\ uy &= x, & v &= (uy)y, \\ \pm u\sqrt{\frac{v}{u}} &= x, & \pm\sqrt{\frac{v}{u}} &= y. \end{aligned}$$

Záměnou $u$ a $v$ v (5.13) obdržíme rovnost

$$f(v+1) - f(v+2) + f(u) - f(u+1) = f(u+v) - f(u+v+1) - f(2),$$

po jejímž odečtení od (5.13) získáme

$$2f(u+1) - f(u+2) + f(v) - 2f(v+1) + f(v+2) - f(u) = 0,$$

$$2f(u+1) - f(u+2) - f(u) = 2f(v+1) - f(v+2) - f(v). \tag{5.14}$$

Dosazením $v = 1$ do (5.14) dostaneme, že pro každé $u > 0$ platí

$$2f(u+1) - f(u+2) - f(u) = c_1, \text{ kde } c_1 = 2f(2) - f(3) - f(1).$$

Podobně dosazení $v = -1$ vede pro každé $u < 0$ k rovnosti

$$2f(u+1) - f(u+2) - f(u) = c_2, \text{ kde } c_2 = 2f(0) - f(1) - f(-1).$$

Díky předpokládané spojitosti funkce $f$ můžeme v uvedených rovnostech provést limitní přechody $u \to 0^+$, resp. $u \to 0^-$ a zjistit tak, že obě konstanty $c_1, c_2$ se rovnají téže hodnotě

$$2f(1) - f(2) - f(0).$$

Tomuto číslu se tedy rovná levá strana (5.14) jak pro každé $u > 0$, tak pro každé $u < 0$, i zřejmě pro $u = 0$. S ohledem na $f(1) = 0$ tak pro každé $u \in \mathbb{R}$ vychází

$$2f(u+1) - f(u+2) - f(u) = -f(2) - f(0)$$

neboli

$$f(u+1) - f(u+2) = f(u) - f(u+1) - f(2) - f(0).$$

Dosazením pravé strany právě získané rovnosti za první rozdíl v levé straně rovnosti (5.13) obdržíme

$$f(u) - f(u+1) - f(2) - f(0) + f(v) - f(v+1) = f(v+u) - f(v+u+1) - f(2),$$

odkud

$$f(u+1)-f(u)+f(0)+f(v+1)-f(v)+f(0)=f(v+u+1)-f(v+u)+f(0).$$

Uvážíme-li funkci $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$h(x)=f(x+1)-f(x)+f(0)$$

pro každé $x\in\mathbb{R}$, přejde poslední rovnost do tvaru

$$h(u)+h(v)=h(u+v).$$

Právě získaný výsledek odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Spojitá funkce $h$ ji podle odvození (5.13) splňuje jak pro všechna $u,v\ge 0$, tak pro všechna $u,v\le 0$, a proto je její předpis podle Věty 3.2 z kapitoly 3 tvaru $h(x)=\alpha_1 x$ pro $x\ge 0$ a $h(x)=\alpha_2 x$ pro $x\le 0$, kde $\alpha_1,\alpha_2$ jsou vhodné konstanty. Ukážeme, že $\alpha_1=\alpha_2$.

Dosazením předpisu funkce $h$ do její definice přes funkci $f$ obdržíme

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x)&=\alpha_1 x-f(0) \quad \text{pro} \quad x\ge 0,\\ f(x+1)-f(x)&=\alpha_2 x-f(0) \quad \text{pro} \quad x\le 0. \end{aligned}$$

Položením $x=1$, resp. $x=-1$, resp. $x=-2$ (díky $f(1)=0$) dostaneme:

$$\begin{aligned} f(2)-f(1)=\alpha_1-f(0) &\quad \text{neboli} \quad \alpha_1=f(2)+f(0), \text{ respektive}\\ f(0)-f(-1)=-\alpha_2-f(0) &\quad \text{neboli} \quad 2f(0)=f(-1)-\alpha_2, \text{ respektive}\\ f(-1)-f(-2)=-2\alpha_2-f(0) &\quad \text{neboli} \quad f(-2)-f(0)=f(-1)+2\alpha_2. \end{aligned}$$

Sečtením posledních dvou rovností získáme $f(-2)+f(0)=2f(-1)+\alpha_2$ neboli $\alpha_2=f(-2)+f(0)-2f(-1)$. Volbou $x=2$ a $y=-1$ v rovnosti ze zadání s ohledem na $f(1)=0$ získáme rovnost $f(-2)=f(2)+2f(-1)$, jejíž pravou stranu dosadíme za $f(-2)$ v předešlé rovnosti a obdržíme

$$\alpha_2=f(2)+2f(-1)+f(0)-2f(-1)=f(2)+f(0)=\alpha_1.$$

Zjistili jsme tak, že platí $f(x+1)-f(x)=\alpha x-f(0)$ pro každé $x\in\mathbb{R}$, kde $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$.

Přepsáním $x$ za $xy$ pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$ dostaneme $f(xy+1)-f(xy)= =\alpha xy-f(0)$, díky čemuž lze rovnost ze zadání přepsat do tvaru

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\alpha xy-f(0). \tag{5.15}$$

Uvažme funkci $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$g(x)=f(x)-\frac{\alpha}{2}\cdot x^2-f(0)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že s ohledem na (5.15) platí $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Náhradou funkce $g$ v uvažované rovnosti za její předpis totiž získáme ekvivalentními úpravami při užití (5.15) pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ identitu

$$\begin{aligned} f(x+y) - \frac{\alpha}{2}(x+y)^2 - f(0) &= f(x) - \frac{\alpha}{2}\cdot x^2 + f(y) - \frac{\alpha}{2}\cdot y^2 - 2f(0), \\ \alpha xy - \frac{\alpha}{2}(x+y)^2 &= -\frac{\alpha}{2}\cdot x^2 - \frac{\alpha}{2}\cdot y^2, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Rovnost s funkcí $g$ (která, jak jsme ukázali, platí) tedy odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici. Spojitá funkce $g$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, proto je její předpis tvaru $g(x) = \beta x$, kde $\beta \in \mathbb{R}$. Dosazením nalezeného předpisu do její definice zjistíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \beta x &= f(x) - \frac{\alpha}{2}\cdot x^2 - f(0), \\ f(x) &= \frac{\alpha}{2}\cdot x^2 + \beta x + \gamma, \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma = f(0) \in \mathbb{R}$ jsou takové hodnoty, že podle podmínky $f(1) = 0$ platí $\frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma = 0$.

Dosazením do zadání se přesvědčíme, že všechny takové funkce jsou řešeními:

$$\begin{aligned} L:\ f(x+y) + f(xy) &= \frac{\alpha}{2}(x+y)^2 + \beta(x+y) + \gamma + \frac{\alpha}{2}(xy)^2 + \beta xy + \gamma = \\ &= \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + 2xy + x^2y^2) + \beta(x+y+xy) + 2\gamma, \\ P:\ f(x)+f(y)+f(xy+1) &= \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\alpha}{2}y^2 + \beta y + \gamma + \frac{\alpha}{2}(xy+1)^2 + \\ &\quad + \beta(xy+1) + \gamma = \\ &= \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+2xy+x^2y^2)+\beta(x+y+xy)+2\gamma+ \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

□

**Poznámka.** Řešení příkladu 5.7 se nijak nezmění, bude-li definičním oborem hledaných funkcí pouze interval $(0, \infty)$ (namísto $\mathbb{R}$), tzn. $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Uvědomme si však, že odvození rovností nahrazením nezávislých proměnných zápornou hodnotou nebo nulou nebudou přípustná. Například klíčový výsledek $f(1) = 0$ odvodíme ze zadané rovnosti položením $x = y = 1$, odkud dostaneme

$$f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(2) \quad \text{neboli} \quad f(1) = 0.$$

## 5.2 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 5.8.** *Určete všechny dvojice funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x) - f(y) = (x - y)\big(g(x) + g(y)\big)$$

*pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.*[8]

**Příklad 5.9.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[8]

**Příklad 5.10.** *Určete všechny spojité funkce $f, g, h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in (0, \infty)$ rovnost*[9]

$$f(x + y) + g(xy) = h(x) + h(y).$$

[8] [And, str. 64]
[9] [Ven, str. 150]

# Kapitola 6

# Využití oboru hodnot hledané funkce

V této části práce se zaměříme na funkcionální rovnice řešené pomocí metod využívajících úvah o oboru hodnot hledaných funkcí. Jedná se o rovnice, v nichž vystupují složené funkce a jejichž řešení má předpis, který lze většinou lehce odvodit pro všechny proměnné z množiny odpovídající oboru hodnot hledaných funkcí. Vhodnými úvahami lze pak tohoto výsledku využít pro rozšíření nalezeného předpisu na celý definiční obor. Při těchto úvahách je ale třeba jisté ostražitosti, jak ukážeme na prvním příkladu, který nebudeme úplně řešit, pouze jej okomentujeme.

**Příklad 6.1.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(xf(y)\big) = f(x)\,(f(y))^2$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

Předpokládejme nejprve, že $f$ označuje hledanou funkci. Položením $x = 1$ získáme ze zadání rovnost $f\big(f(y)\big) = f(1)\,(f(y))^2$ neboli $f\big(f(y)\big) = c\,(f(y))^2$, kde $c = f(1) \in \mathbb{R}$. Řešitele by nyní mohla svádět myšlenka, že po nahrazení závislé proměnné $f(y)$ nezávislou proměnnou $x$ obdržíme předpis ve tvaru $f(x) = cx^2$ (po dosazení do zadání ovšem zjistíme, že takovým řešením jsou pouze dvě funkce, pro které je $c = 0$ nebo $c = 1$). Uvědomme si však, že jsme za hodnotu $f(y)$ z oboru hodnot funkce $f$, která obecně nemusí nabývat všech reálných hodnot, dosadili proměnnou $x$ z definičního oboru hledané funkce $f$, která podle zadání musí nabývat libovolné reálné hodnoty. Nekorektnost postupu zde tedy způsobuje fakt, že množiny odpovídající definičnímu oboru a oboru hodnot mohou být různé (pokud bychom dokázali, že jsou totožné, ospravedlnili bychom tak poslední provedenou substituci a tím i způsob, jak jsme se dopracovali k uvedenému tvaru řešení).

Na dalších příkladech již ukážeme, jakými způsoby lze obor hodnot hledané funkce využít korektně.

**Příklad 6.2.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(f(x)+y\big) = 2x + f\big(f(y)-x\big)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[1]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí splňujících zadání. Nahrazením $-f(x)$ za $y$ dostaneme

$$f(0) = 2x + f\Big(f\big(-f(x)\big)-x\Big) \quad \text{neboli} \quad f\Big(f\big(-f(x)\big)-x\Big) = -2x + f(0).$$

Pravá strana poslední získané rovnosti může nabývat se změnou $x \in \mathbb{R}$ libovolných reálných hodnot, kterých vzhledem k tvaru levé strany nabývá i hledaná funkce, tzn. obor hodnost $H(f)$ je roven $\mathbb{R}$. Existuje proto takové $a \in \mathbb{R}$, pro které je $f(a) = 0$. (Dokonce můžeme určit, že vyhovuje $a = f\big(-f(x)\big) - x$ pro $x = \frac{1}{2}f(0)$.) Položením $x = a$ v zadané rovnosti zjistíme, že pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} f(0+y) &= 2a + f\big(f(y)-a\big),\\ f(y)-a &= a + f\big(f(y)-a\big). \end{aligned}$$

Dosazením $z = f(y) - a$, kde $z$ je vzhledem k oboru hodnot funkce $f$ libovolné reálné číslo, nakonec dostaneme $z = a + f(z)$ neboli $f(z) = z - a$. Získali jsme tak předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = x - a$ pro vhodné $a \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením do zadání ověříme, že všechny takové funkce jsou opravdu řešením:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\big(f(x)+y\big) = f(x-a+y) = x+y-2a,\\ P:&\quad 2x + f\big(f(y)-x\big) = 2x + f(y-a-x) = x+y-2a. \end{aligned}$$

□

**Příklad 6.3.** *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*[2]

$$f(x) + f(y) = f\big(f(x)f(y)\big).$$

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci splňující zadání a $t \in \mathbb{R}$ je libovolné, dále však pevně dané. Zřejmě platí $f(t) \in H(f)$ a položením $x = t$ a $y = t$ v zadané rovnosti obdržíme $2f(t) = f\left(\big(f(t)\big)^2\right)$, což s ohledem na tvar pravé strany znamená,

[1] Rovnice byla vybrána na seznam navržených příkladů pro Mezinárodní matematickou olympiádu (Shortlist, 2002).

[2] [Luk]

že i $2f(t) \in H(f)$. Existuje tedy takové číslo $b \in \mathbb{R}$, pro které je $f(b) = 2f(t)$. Položením $x = b$ a $y = b$ v zadané rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} f(b) + f(b) &= f\big(f(b)f(b)\big), \\ 2f(t) + 2f(t) &= f\left(\big(2f(t)\big)^2\right), \\ 4f(t) &= f\left(4\big(f(t)\big)^2\right). \end{aligned}$$

Vidíme, že i hodnota $4f(t)$ patří do oboru hodnot $H(f)$ funkce $f$. Existuje tedy takové $c \in \mathbb{R}$, že $f(c) = 4f(t)$. Dosazením $x = t$ a $y = c$, resp. $x = b$ a $y = b$ zjistíme s ohledem na výše získané výsledky, že platí

$$\begin{aligned} f(t) + f(c) &= f\big(f(t)f(c)\big), \\ 5f(t) &= f\left(4\big(f(t)\big)^2\right), \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} f(b) + f(b) &= f\big(f(b)f(b)\big), \\ 4f(t) &= f\left(4\big(f(t)\big)^2\right), \end{aligned}$$

odkud porovnáním levých stran posledních dvou rovností dostaneme

$$\begin{aligned} 5f(t) &= 4f(t), \\ f(t) &= 0. \end{aligned}$$

Protože na začátku bylo $t \in \mathbb{R}$ libovolně zvoleno, platí zřejmě rovnost $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že tato funkce je opravdu řešením.

Příkladu tedy vyhovuje pouze jediná funkce, a to ve tvaru $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

**Příklad 6.4.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(y)\big) + xf(y) + f(x) - 1$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[3]

[3]Mezinárodní matematická olympiáda (1999).

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce, která splňuje zadání. Za předpokladu, že $x$ je z oboru hodnot funkce $f$, získáme po nahrazení $x$ za $f(y)$ rovnost

$$\begin{aligned} f\big(0\big) &= f\big(x\big) + x^2 + f(x) - 1, \\ f(x) &= \frac{c+1-x^2}{2}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

kde $c = f(0) \in \mathbb{R}$ a $x \in H(f)$ je libovolné. Položením $y = 0$ v zadané rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} f\big(x - f(0)\big) &= f\big(f(0)\big) + xf(0) + f(x) - 1, \\ f(x-c) - f(x) &= f(c) + cx - 1, \end{aligned} \tag{6.2}$$

odkud pro $x = 0$ plyne $f(-c) - c = f(c) - 1$. Pokud $c = f(0) = 0$, obdržíme $f(0) = f(0) - 1$ neboli $0 = -1$, což je spor, a proto je $c = f(0) \neq 0$. Díky tomu lze z rovnosti (6.2) vyvodit závěr, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ (odpovídající celé pravé straně této rovnosti) najdeme taková $y_1, y_2 \in H(f)$ (odpovídající hodnotám vystupujícím na levé straně rovnosti: $y_1 = f(x-c)$, $y_2 = f(x)$), že platí $t = y_1 - y_2$. S ohledem na výsledek (6.1) a fakt, že $y_1, y_2 \in H(f)$, obdržíme s využitím rovnosti ze zadání předpis funkce $f$ pro každé $t \in \mathbb{R}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} f(t) = f(y_1 - y_2) &= f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 = \\ &= \frac{c+1-y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1-y_1^2}{2} - 1 = c - \frac{(y_1-y_2)^2}{2} = \\ &= c - \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Přejmenováním $t$ na $x$ a porovnáním pravých stran ze získané rovnosti a z rovnosti (6.1) zjistíme (za předpokladu $x \in H(f)$), že

$$\begin{aligned} c - \frac{x^2}{2} &= \frac{c+1-x^2}{2}, \\ \frac{c}{2} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Platí tedy, že $c = 1$ a nalezený předpis funkce $f$ je tvaru $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Dosazením ještě ověříme, že jsme opravdu nalezli řešení:

$$
\begin{aligned}
L:\quad & f\big(x-f(y)\big)=f\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)=1-\frac{\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2}{2}=\\
&=1-\frac{x^2-2x+1+xy^2-y^2+\frac{y^4}{4}}{2}=1-\frac{1-y^2+\frac{y^4}{4}}{2}+x-\frac{xy^2}{2}-\frac{x^2}{2},\\
P:\quad & f\big(f(y)\big)+xf(y)+f(x)-1=f\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+x\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+1-\frac{x^2}{2}-1=\\
&=1-\frac{\left(1-\frac{y^2}{2}\right)^2}{2}+x-\frac{xy^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1-\frac{1-y^2+\frac{y^4}{4}}{2}+x-\frac{xy^2}{2}-\frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Při využívání oboru hodnot v postupech hledání vyhovujících funkcí je někdy výhodné odvodit nějakou z jejich dalších vlastností, například že je funkce surjektivní nebo prostá. Jak nám obě z uvedených vlastností mohou pomoci, ukážeme na řešení příkladu 6.5.

**Příklad 6.5.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující rovnost*[4]

$$f\big(f(x)+xf(y)\big)=xf(y+1)$$

*pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nejdříve označme $f$ libovolnou funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání, a položme $a=f(0)$. Dosazením $x=0$ zjistíme, že $f\big(f(0)\big)=0$ neboli $f(a)=0$. S ohledem na tento fakt získáme položením $y=a$ v zadání rovnost

$$
\begin{aligned}
f\big(f(x)+xf(a)\big)&=xf(a+1),\\
f\big(f(x)\big)&=xf(a+1). \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

Uvažujme dále dva případy, které mohou nastat.

Je-li $f(a+1)=0$, pak $f\big(f(x)\big)=0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Předpokládejme, že existuje takové reálné $y_1$, pro které je $f(y_1+1)\neq 0$. Položením $y=y_1$ v zadané rovnosti dostaneme $f\big(f(x)+xf(y_1)\big)=xf(y_1+1)$, odkud vidíme, že hodnoty funkce $f$ nabývají všech reálných hodnot (funkce je surjektivní), proto tedy i $f\big(f(x)\big)$ nabývá všech hodnot. To je ale spor s tím, že $f\big(f(x)\big)=0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Zjistili jsme, že v případě $f(a+1)=0$ má hledaná funkce $f$ předpis ve tvaru $f(x)=0$

[4] [And, str. 53]

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením do zadání zjistíme, že taková funkce je (triviálním) řešením.

Je-li naopak $f(a+1) \neq 0$, pak z rovnosti (6.3) vyplývá, že hledaná funkce $f$ je nejen surjektivní, ale také prostá. Pokud pro nějaká $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ totiž nastane rovnost $f(x_1)= f(x_2)$, pak platí $x_1 f(a+1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = x_2 f(a+1)$ neboli $x_1 = x_2$. Dosazením $x = 1$ do rovnosti ze zadání dostaneme po úpravě s ohledem na poslední výsledek rovnost

$$\begin{aligned} f\big(f(1) + f(y)\big) &= f(y+1), \\ f(1) + f(y) &= y + 1, \\ f(y) &= y + 1 - f(1), \end{aligned}$$

kde $y \in \mathbb{R}$ je libovolné. Získali jsme předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = x + 1 - f(1)$. Dosazením $x = 1$ v nalezeném vyjádření $f$ si můžeme všimnout, že platí rovnost $f(1) = 1 + 1 - f(1)$ neboli $f(1) = 1$. Předpis hledané funkce má tedy tvar $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dosazením zjistíme, že se opravdu jedná o řešení:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\big(f(x) + xf(y)\big) = f\big(x + xy\big) = x + xy, \\ P:&\quad xf(y+1) = x(y+1) = x + xy. \end{aligned}$$

Jediné dvě funkce, které splňují zadání tohoto příkladu, mají pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpis tvaru $f(x) = 0$ nebo $f(x) = x$.

□

V dosud uvedených příkladech této kapitoly jsme nikde nepožadovali spojitost hledané funkce. Tuto vlastnost však nyní uplatníme v posledním příkladu 6.6, kde nejdříve najdeme předpis funkce $f$ na jejím oboru hodnot a poté sporem ukážeme, že není zdola ani shora omezený, tj. že díky předpokládané spojitosti funkce $f$ platí $H(f) = \mathbb{R}$, čímž potvrdíme nalezený předpis pro všechna reálná čísla.

**Příklad 6.6.** *Najděte všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*[5]

$$f(x+y) = f\big(x + f(y)\big).$$

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Zřejmě libovolné konstantní funkce jsou (triviálním) řešením, vynechme proto tyto případy v našich dalších úvahách.

Dosazením $x = 0$ dostaneme $f(y) = f\big(f(y)\big)$. Vidíme tedy, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in H(f)$. Označme $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, resp. $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jako infimum, resp. supremum množiny $H(f)$ (v případě $H(f) = \mathbb{R}$ je pak zřejmě $a = -\infty$ a $b = \infty$). Protože pro každou (nekonstantní) spojitou funkci je podle Bolzanovy věty jejím

[5] [Sma, str. 78]

oborem hodnot nějaký interval, budeme v našem případě mít $f(x) = x$ pro všechna $x \in (a, b)$, přitom $a < b$, neboť konstantní řešení jsme z našich úvah vyloučili. Rovnosti $a = -\infty$ a $b = \infty$ nyní dokážeme sporem.

Připusťme, že $a \neq -\infty$, tj. $a \in \mathbb{R}$. Ze spojitosti funkce $f$ v bodě $a$ zprava plyne, že rovnost $f(x) = x$ platí nejen pro každé $x \in (a, b)$, ale také pro $x = a$, tzn. $f(a) = a$. Proto ze spojitosti funkce $f$ v bodě $a$ zleva najdeme díky předpokladu $a < b$ takové $t > 0$, že platí nerovnost $f(a - t) + t < b$ (její levá strana má totiž pro $t \to 0^+$ limitu rovnou $f(a) = a < b$). Díky rovnosti $a = \min H(f)$ ovšem máme $f(a - t) + t \geq a + t > a$, takže dohromady dostáváme, že $f(a - t) + t \in H(f)$. Proto můžeme podle rovnosti ze zadání pro $x = t$ a $y = a - t$ psát

$$f(a) = f(t + (a - t)) = f\big(t + f(a - t)\big) = t + f(a - t) \geq t + a,$$

odkud $f(a) > a$, což je ve sporu s rovností $f(a) = a$.

Stejnými kroky bychom došli k závěru, že také podmínka $b \neq \infty$ je sporná. Obor hodnot funkce $f$ je tedy totožný s množinou všech reálných čísel a tudíž platí $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že tato funkce je opravdu řešením.

Zjistili jsme tedy, že jediné spojité funkce, které jsou řešením, mají tvar $f(x) = c$ a $f(x) = x$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

$\square$

## 6.1 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 6.7.** *Určete všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ *splňující rovnost*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = x$$

*pro všechna* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.[6]

**Příklad 6.8.** *Určete všechny dvojice funkcí* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které splňují následující podmínky*

1) *Funkce $g$ je prostá.*

2) $f\big(g(x) + y\big) = g\big(x + f(y)\big)$ *pro libovolná* $x, y \in \mathbb{R}$.[7]

[6] [Eng, str. 278]
[7] [Ven, str. 111]

Následující příklad byl vybrán jako jeden ze soutěžních na Mezinárodní matematickou olympiádu, která se konala v Rio de Janeiro v roce 2017. Vzhledem k roku jejího konání a období, kdy vznikala tato práce, si troufáme tvrdit, že řešení tohoto příkladu nebylo touto dobou zveřejněno v žádné jiné tištěné publikaci.

**Příklad 6.9.** *Určete všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které splňují rovnost*

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy)$$

*pro každá* $x, y \in \mathbb{R}$.[8]

[8] Mezinárodní matematická olympiáda (2017).

# Kapitola 7

# Využití pevných bodů hledané funkce

V předchozí kapitole jsme představili metodu, kterou lze použít při řešení funkcionálních rovnic obsahujících složené funkce. Touto kapitolou dále rozšíříme arzenál metod, které je možné pro tyto rovnice použít. Více zde totiž rozebereme jeden ze způsobů, který jsme představili v teoretickém základu této práce, zabývající se nalezením a využitím pevných bodů hledaných funkcí. Předtím však ještě připomeňme, že pevným bodem funkce $f$ je takové $x_0 \in \mathbb{R}$, které leží jak v jejím definičním oboru, tak v oboru hodnot, a splňuje přitom rovnost $f(x_0) = x_0$.

Jak si čtenář jistě všiml, spousta funkcionálních rovnic má řešení ve tvaru $f(x) = x$. Pokud by se nám u těchto rovnic podařilo dokázat, že každé $x \in \mathbb{R}$ je pevným bodem hledané funkce, dospěli bychom zřejmě ke stejnému závěru. Někdy je zase naopak výhodné ukázat, že hledaná funkce $f$ nemá žádný pevný bod, díky čemuž budeme mít například zaručeno, že dělení hodnotou $f(0)$ je přípustnou operací.

Jak jsme již avizovali v 1. kapitole při představování metod řešení využitím pevných bodů hledané funkce, je následující příklad vyřešen tak, že nejdříve nalezneme pevný bod funkce a dokážeme, že žádný jiný nemá. Nakonec dosazením jeho hodnoty za vhodný výraz obdržíme rovnost, z níž pak snadno odvodíme předpis pro hledané řešení.

**Příklad 7.1.** *Určete všechny funkce* $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ *splňující podmínky*

1) $f(x) \in (1,\infty)$ *pro každé* $x \in (0,1)$*,*

2) $f(xf(y)) = yf(x)$ *pro libovolná* $x, y \in (0,\infty)$*.*[1]

[1] [Ven, str. 111]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce, která splňuje zadání. Dosazením $y = 1$ do rovnosti v podmínce 2) dostaneme

$$f(xf(1)) = f(x). \tag{7.1}$$

Po jiném dosazení $x = 1$ obdržíme rovnost $f(f(y)) = yf(1)$, kterou nyní využijeme, položíme-li v podmínce 2) $y = f(1)$. Získáme

$$\begin{aligned} f(xf(f(1))) &= f(1)f(x), \\ f(xf(1)) &= f(1)f(x). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Porovnáním pravých stran u (7.1) a (7.2) s ohledem na fakt, že $f(x) \neq 0$, zjistíme, že $f(1) = 1$, což podle předchozího znamená, že $f\big(f(y)\big) = y$ pro každé $y \in (0, \infty)$.

Nyní ukážeme, že $x = 1$ je jediným pevným bodem funkce $f$. Po nahrazení $y$ za $f(y)$ (místo $y$ budeme psát $f(y)$) v 2) s ohledem na $f(f(y)) = y$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(xf(f(y))) &= f(y)f(x), \\ f(xy) &= f(y)f(x). \end{aligned}$$

Záměnou $y$ za $\frac{1}{x}$ v poslední získané rovnosti s ohledem na $f(1) = 1$ získáme

$$f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right)f(x), \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{f(x)} = f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7.3}$$

Pro $x \in (1, \infty)$ s ohledem na podmínku 1) platí $f\left(\frac{1}{x}\right) \in (1, \infty)$ a podle (7.3) je pro tato $x$ také $\frac{1}{f(x)} \in (1, \infty)$ neboli $f(x) \in (0, 1)$. Funkce tedy zobrazuje interval $(0, 1)$ do intervalu $(1, \infty)$ a naopak, takže rovnost $f(x) = x$ je splněna jedině pro $x = 1$. Tvrzení o jediném pevném bodě funkce $f$ je tak dokázáno.

Zvolíme-li nyní $y = x$ v rovnosti uvedené v podmínce 2), dostaneme

$$f(xf(x)) = xf(x),$$

což znamená, že $xf(x)$ je pevným bodem funkce $f$ pro libovolné $x \in (0, \infty)$. V předešlém odstavci jsme ukázali, že jediným pevným bodem je $x = 1$, musí tedy pro každé $x \in (0, \infty)$ platit

$$xf(x) = 1, \quad \text{neboli} \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Funkce $f$ s nalezeným předpisem zřejmě splňuje podmínku 1), podmínku 2) snadno ověříme dosazením:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x}, \\ P:&\quad yf(x) = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

$\square$

V úvodu této kapitoly jsme zmínili, že je někdy výhodné ukázat, že hledaná funkce nemá žádný pevný bod. Jak můžeme tuto informaci dále využít, ukážeme v řešení následujícího příkladu.

**Příklad 7.2.** *Určete všechny funkce* $f\colon (-1,\infty)\to(-1,\infty)$ *splňující podmínky*

1) $f\big(x+f(y)+xf(y)\big)=y+f(x)+yf(x)$ *pro každá* $x,y\in(-1,\infty)$,

2) $\frac{f(x)}{x}$ *je rostoucí na intervalech* $(-1,0)$ *a* $(0,\infty)$.[2]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání. Z podmínky 2) plyne, že funkce $f$ má na každém z intervalů $(-1,0)$, $(0,\infty)$ nejvýše jeden pevný bod. Pokud by tomu tak nebylo a platilo by $f(a)=a$ a $f(b)=b$ pro $a\neq b$, kde $a,b\in(-1,0)$, získali bychom ve 2) postupným nahrazením $a$ a $b$ za $x$ zlomky $\frac{f(a)}{a}=\frac{a}{a}=1$ a $\frac{f(b)}{b}=\frac{b}{b}=1$, což je spor s předpokladem, že $\frac{f(x)}{x}$ je na $(-1,0)$ rostoucí. Stejnou úvahu lze pak použít i pro interval $(0,\infty)$.

Předpokládejme dále, že funkce $f$ má právě jeden pevný bod na $(-1,0)$, označme jej $a$, a právě jeden pevný bod na $(0,\infty)$, označme jej $b$, tzn. $f(a)=a$ a $f(b)=b$, kde $a\in(-1,0)$ a $b\in(0,\infty)$.

Položením $x=y$ v podmínce 1) dostaneme

$$f\big(x+f(x)+xf(x)\big)=x+f(x)+xf(x), \tag{7.4}$$

odkud dále dosazením $x=a$ získáme

$$\begin{aligned} f\big(a+f(a)+af(a)\big)&=a+f(a)+af(a),\\ f\big(a^2+2a\big)&=a^2+2a. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $a\in(-1,0)$, je také $a^2+2a=(a+1)^2-1\in(-1,0)$. Na intervalu $(-1,0)$ je ale $a$ jediným pevným bodem funkce $f$, proto platí

$$\begin{aligned} a^2+2a&=a,\\ a(a+1)&=0, \end{aligned}$$

což znamená, že $a=0$ nebo $a=-1$. Tím jsme ale získali spor s předpokladem, že $-1<a<0$. Stejnou úvahou dojdeme k závěru, že funkce $f$ nemá žádný pevný bod na intervalu $(0,\infty)$.

Ukázali jsme, že hledaná funkce $f$ nemá žádný pevný bod ani na jednom z intervalů $(-1,0)$ a $(0,\infty)$, což znamená, že rovnost (7.4) může být splněna pouze v případě $x+f(x)+xf(x)=0$. Vyjádřením hledané funkce dostaneme její předpis ve tvaru $f(x)=-\frac{x}{x+1}$, kde $x\in(-1,\infty)$.

[2]Mezinárodní matematická olympiáda (1994).

Dosazením nalezeného předpisu do obou podmínek výsledek ještě potvrdíme:

1)

$$L: \quad f\bigl(x+f(y)+xf(y)\bigr) = f\left(x - \frac{y}{y+1} - \frac{xy}{y+1}\right) = f\left(\frac{x-y}{y+1}\right) =$$
$$= -\frac{\frac{x-y}{y+1}}{\frac{x-y}{y+1}+1} = -\frac{\frac{x-y}{y+1}}{\frac{x+1}{y+1}} = -\frac{x-y}{x+1},$$
$$P: \quad y + f(x) + yf(x) = y - \frac{x}{x+1} - \frac{xy}{x+1} = \frac{y-x}{x+1} = -\frac{x-y}{x+1}.$$

V případě dosazení do levé strany rovnice (L) však ještě musíme ověřit, že hodnota $\frac{x-y}{y+1}$ je pro všechna $x, y \in (-1, \infty)$ také z intervalu $(-1, \infty)$:

$$\frac{x-y}{y+1} = -1 + \frac{x+1}{y+1}, \text{ odkud pro } x, y > -1 \text{ platí } -1 + \frac{x+1}{y+1} > -1.$$

2) Funkce ve tvaru

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-\frac{x}{x+1}}{x} = -\frac{x}{x^2+x} = -\frac{1}{x+1}$$

je zřejmě rostoucí na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$.

□

**Příklad 7.3.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x) \tag{7.5}$$

*pro každá $x, y \in \mathbb{R}$.*[3]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání, a $P_f$ množinu všech jejích pevných bodů. Volbou $y = 1$ v (7.5) dostaneme

$$f\bigl(x + f(x+1)\bigr) + f(x) = x + f(x+1) + f(x),$$
$$f\bigl(x + f(x+1)\bigr) = x + f(x+1).$$

Jak si můžeme všimnout, je hodnota $x + f(x+1)$ pevným bodem funkce $f$, ať je $x \in \mathbb{R}$ zvoleno jakkoliv. Zaměníme-li přitom $x$ za $x - 1$, získáme následující poznatek o množině $P_f$ všech pevných bodů funkce $f$ :

$$x - 1 + f(x) \in P_f \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

[3] Příklad z Mezinárodní matematické olympiády konané v roce 2015, jehož řešení jsme zveřejnili ve článku [Šat1].

Víme tak, že množina $P_f$ je neprázdná. Podívejme se, zda lze všechny pevné body hledané funkce $f$ snadno zjistit. Vezmeme-li libovolný prvek $y_0 \in P_f$, pak s ohledem na $f(y_0) = y_0$ volbou $x = 0$ a $y = y_0$ v (7.5) získáme

$$\begin{aligned} f\bigl(f(y_0)\bigr) + f(0) &= f(y_0) + y_0 f(0), \\ y_0 + f(0) &= y_0 + y_0 f(0), \\ f(0)(1 - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Vše o množině $P_f$ je tedy jasné za podmínky $f(0) \neq 0$, kdy z poslední rovnosti vychází $1 - y_0 = 0$, takže hledaná funkce $f$ má jediný pevný bod $y_0 = 1$ neboli $P_f = \{1\}$. Tedy podle (7.6) musí platit

$$x - 1 + f(x) = 1 \;\text{ čili }\; f(x) = 2 - x \;\text{ pro každé }\; x \in \mathbb{R}.$$

Odvodili jsme tak předpis funkce $f$ v případě, kdy $f(0) \neq 0$.

V celém dalším řešení se proto budeme zabývat zbývajícím případem, kdy naopak platí $f(0) = 0$ a předchozí úvaha o obecném bodě $y_0 \in P_f$ nevede k žádnému závěru.

Vzhledem k $f(0) = 0$ volbou $y = -x$ v rovnosti (7.5) obdržíme

$$f(x) + f(-x^2) = x - xf(x). \tag{7.7}$$

Pro $x = -1$ tak zjistíme, že platí $f(-1)+f(-1) = -1+f(-1)$ neboli $f(-1) = -1$. S ohledem na tuto skutečnost nyní z rovnosti (7.7) pro $x = 1$ máme $f(1)+f(-1) = = 1 - f(1)$ neboli $f(1) = 1$. Zjistili jsme tak, že pevnými body funkce $f$ jsou – vedle předpokládané nuly – i čísla $-1$ a $1$.

Druhý významný důsledek předpokladu $f(0) = 0$ získáme, když v (7.5) zvolíme $y = 0$. Dostaneme vztah

$$f(x + f(x)) = x + f(x),$$

podle kterého rovněž hodnoty $x + f(x)$ patří k pevným bodům funkce $f$ :

$$x + f(x) \in P_f \;\text{ pro každé }\; x \in \mathbb{R}. \tag{7.8}$$

Porovnejme nyní závěry (7.6) a (7.8): pevný bod $x + f(x)$ funkce $f$ je o 1 větší než její pevný bod $x - 1 + f(x)$. Nyní ukážeme, že platí následující závěr: je-li pro nějaké $y_0 \in P_f$ rovněž $y_0 + 1 \in P_f$, pak také $y_0 + 2 \in P_f$. Skutečně, z rovností $f(y_0) = y_0$ a $f(y_0+1) = y_0+1$ při volbě $x = 1$ a $y = y_0$ v (7.5) obdržíme (s ohledem na výše dokázaný výsledek $f(1) = 1$)

$$\begin{aligned} f\bigl(1 + f(1 + y_0)\bigr) + f(y_0) &= 1 + f(1 + y_0) + y_0 f(1), \\ f(1 + 1 + y_0) + y_0 &= 1 + (1 + y_0) + y_0 \end{aligned}$$

neboli $f(y_0 + 2) = y_0 + 2$, jak jsme chtěli ukázat.

Právě dokázaná vlastnost vede k následujícímu důsledku závěrů (7.6) a (7.8): rovněž hodnota $x + 1 + f(x)$ je pevným bodem funkce $f$. Po nahrazení $x$ za $x - 1$ dostaneme

$$x + f(x-1) \in P_f \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

To je výsledný poznatek o množině $P_f$, který k dokončení řešení v případě $f(0) = 0$ budeme potřebovat. Uplatníme ho tak, že odpovídající rovnost

$$f\bigl(x + f(x-1)\bigr) = x + f(x-1)$$

využijeme při úpravě výsledku po dosazení $y = -1$ do (7.5):

$$\begin{aligned} f\bigl(x + f(x-1)\bigr) + f(-x) &= x + f(x-1) - f(x), \\ x + f(x-1) + f(-x) &= x + f(x-1) - f(x), \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Jak vidíme, je hledaná funkce $f$ lichá, díky čemuž po nahrazení $x$ opačnou hodnotou $-x$ v rovnosti (7.7) obdržíme rovnost

$$\begin{aligned} f(-x) + f(-x^2) &= -x + xf(-x), \\ -f(x) + f(-x^2) &= -x - xf(x). \end{aligned}$$

Odečtením právě získané rovnosti od (7.7) dostaneme $2f(x) = 2x$ neboli $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odvodili jsme tak druhé řešení příkladu, a to pro případ $f(0) = 0$.

Celkem jsme tedy zjistili, že řešením příkladu jsou pouze dvě funkce, a to $f(x) = 2 - x$ a $f(x) = x$. Snadným dosazením do zadání ještě ověříme, že tomu tak opravdu je: Pro $f(x) = x$ platí

$$\begin{aligned} L:&\quad f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = x + f(x+y) + xy = 2x + y + xy, \\ P:&\quad x + f(x+y) + yf(x) = 2x + y + xy, \end{aligned}$$

pro $f(x) = 2 - x$ dostaneme

$$\begin{aligned} L:&\quad f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = f\bigl(x + 2 - x - y\bigr) + 2 - xy = \\ &\quad = 2 - (2 - y) + 2 - xy = 2 + y - xy, \\ P:&\quad x + f(x+y) + yf(x) = x + 2 - (x+y) + y(2 - x) = 2 + y - xy. \end{aligned}$$

□

**Příklad 7.4.** *Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková kvadratická funkce, že jejím složením $g\bigl(g(x)\bigr)$ získáme funkci, která má alespoň tři navzájem různé pevné body. Dokažte, že pak neexistuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnost*[4]

$$f\bigl(f(x)\bigr) = g(x).$$

[4] [And, str. 192]

*Řešení.* Nechť $f$ a $g$ dále označují funkce splňující všechny předpoklady zadání. Uvědomme si nejdříve, že každý pevný bod funkce $g$ je i pevným bodem složené funkce $g \circ g$. Pokud by však $g$ neměla žádný pevný bod, musela by vzhledem ke spojitosti kvadratické funkce $g$ platit pro každé $x \in \mathbb{R}$ buď nerovnost $g(x) < x$, nebo $g(x) > x$. V obou případech bychom však obdrželi spor s předpokladem, že $g \circ g$ má alespoň tři pevné body, protože bychom pro každé $x \in \mathbb{R}$ obdrželi buď nerovnost $g\big(g(x)\big) < g(x) < x$, nebo $g\big(g(x)\big) > g(x) > x$.

Dokázali jsme tak existenci alespoň jednoho pevného bodu $g$ a označme dále jako $x_1, x_2$ všechny pevné body této funkce s tím, že připouštíme i možnost $x_1 = x_2$. Složená funkce $g \circ g$ má podle předpokladu tři navzájem různé pevné body mezi něž patří jak $x_1$, tak $x_2$, proto existují jeden, nebo dva další pevné body různé od $x_1$, $x_2$, které označme jako $x_3$ a $x_4$, přičemž stejně jako předtím připouštíme i možnost $x_3 = x_4$.

S využitím rovnosti ze zadání platí

$$f\big(g(x)\big) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = g\big(f(x)\big), \tag{7.9}$$

odkud pro $x_1$ (a podobně také pro $x_2$) dostaneme

$$f(x_1) = f\big(g(x_1)\big) = g\big(f(x_1)\big),$$

což znamená, že $f(x_1)$ (a zřejmě také $f(x_2)$) je pevným bodem funkce $g$. Protože pro $x_1 \neq x_2$ plyne s ohledem na rovnost ze zadání výsledek

$$f\big(f(x_1)\big) = g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2) = f\big(f(x_2)\big),$$

který znamená, že $f(x_1) \neq f(x_2)$, platí množinová rovnost $\{f(x_1), f(x_2)\} = \{x_1, x_2\}$.

Vzhledem k výsledku (7.9) a rovnosti ze zadání dále platí

$$f\Big(f\big(f(g(x))\big)\Big) = f\Big(f\big(g(f(x))\big)\Big),$$
$$f\Big(g\big(g(x)\big)\Big) = g\Big(g\big(f(x)\big)\Big),$$

odkud pro libovolný pevný bod $a \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ funkce $g \circ g$ obdržíme

$$f(a) = f\Big(g\big(g(a)\big)\Big) = g\Big(g\big(f(a)\big)\Big).$$

To znamená, že $f(a)$ je taktéž pevným bodem složené funkce $g \circ g$, a proto platí $f(x_3), f(x_4) \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Nyní ukážeme, že kvadratická funkce $g$ má další (třetí) pevný bod, což bude spor dokazující tvrzení příkladu.

Předpokládejme, že $f(x_l) = x_k$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$ a $l \in \{3, 4\}$ (neboli $f(x_3) \in \{x_1, x_2\}$, nebo $f(x_4) \in \{x_1, x_2\}$). Vzhledem k výše uvedenému značení pevných bodů, v němž $x_3, x_4 \notin \{x_1, x_2\}$, a s ohledem na rovnost ze zadání dostaneme

$$x_l = g\big(g(x_l)\big) = f\Big(f\big(f(f(x_l))\big)\Big) = f\big(g(x_k)\big) = f(x_k) \in \{x_1, x_2\},$$

což je spor s podmínkou $x_3, x_4 \notin \{x_1, x_2\}$, platí tedy $f(x_3), f(x_4) \in \{x_3, x_4\}$.

Pro $x_3 = x_4$ je vzhledem k výše uvedenému splněn vztah $f(x_3) = x_3$, což s ohledem na rovnost ze zadání znamená, že $g(x_3) = f\big(f(x_3)\big) = x_3$, což je spor s předpokladem, že $g$ je kvadratická funkce (a tedy má nejvýše dva pevné body $x_1$ a $x_2$, jak jsme ze začátku řešení vyznačili).

V případě $x_3 \neq x_4$ ze vztahů

$$f\Bigg(f\Big(f\big(f(x_3)\big)\Big)\Bigg) = g\big(g(x_3)\big) = x_3 \neq x_4 = g\big(g(x_4)\big) = f\Bigg(f\Big(f\big(f(x_4)\big)\Big)\Bigg)$$

plyne $f(x_3) \neq f(x_4)$, odkud dále s ohledem na $f(x_3), f(x_4) \in \{x_3, x_4\}$ vyplývá, že $\{f(x_3), f(x_4)\} = \{x_3, x_4\}$. Tedy pro každou variantu, která může nastat, tj.

$$f(x_3) = x_3,\ f(x_4) = x_4, \ \text{ nebo } \ f(x_3) = x_4,\ f(x_4) = x_3,$$

vždy platí $g(x_3) = f\big(f(x_3)\big) = x_3$. To ale znamená, že kvadratická funkce $g$ má další pevný bod $x_3$ (ze začátku řešení jsme všechny její pevné body již vyznačili jako $x_1$ a $x_2$), což je spor.

Dokázali jsme tak, že neexistuje žádná taková funkce $f$, která by splňovala zadání příkladu.

□

**Poznámka.** Dodejme k příkladu 7.4 poněkud delší komentář. Pro kvadratickou funkci $g$ v zadání příkladu uvedená podmínka na počet pevných bodů složené funkce $g \circ g$ je *podstatná*, tj. nelze ji vypustit. Kupříkladu pro nejjednodušší kvadratickou funkci $g(x) = x^2$, která podmínku příkladu 7.4 nesplňuje, je příslušná funkcionální rovnice

$$f\big(f(x)\big) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

řešitelná, neboť jí zřejmě vyhovuje spojitá funkce $f(x) = |x|^{\sqrt{2}}$. Tato rovnice má, jak ukázali J. Beránek a J. Chvalina v práci [B–Ch] z roku 1990, nekonečně mnoho dalších řešení (každé z nich má nekonečnou množinu bodů nespojitosti).

Překvapující výsledek ovšem dokázali R. E. Rice, B. Schweizer a A. Sklar v článku [RSS] z roku 1980, že totiž stejná funkcionální rovnice z příkladu 7.4 v oboru komplexních čísel, tedy rovnice

$$f\big(f(z)\big) = g(z) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

nemá žádné řešení $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ať je kvadratická funkce $g(z) = az^2 + bz + c$ vybrána jakkoliv ($a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$).

Stejně tak rámec naší disertace přesahuje s příkladem 7.4 související výsledek R. Isaacse z článku [Isa] z roku 1950 o nutných i postačujících podmínkách pro danou funkci $g\colon E \to E$, za kterých existuje funkce $f$ splňující rovnost $f\big(f(x)\big) = g(x)$ pro každé $x \in E$, kde $E$ je daná obecná (neprázdná) množina. Tyto Isaacsovy podmínky jsou vyjádřeny jako vlastnosti tzv. *orbit* funkce $g$, o kterých se ještě zmíníme v poznámce v samotném závěru této kapitoly. Orbitám kvadratických funkcí (a možnostem jejich výkladu žákům středních škol) se ve své disertační práci [Bin] z roku 2006 věnovala H. Binterová.

Posledním řešeným příkladem této kapitoly se dostáváme k metodě, jež je hlavní náplní kapitoly bezprostředně následující. Při hledání předpisu funkce (opět zejména u funkcionálních rovnic, v nichž vystupují složené funkce) je totiž někdy výhodné zadané rovnice zapsat pomocí vhodné rekurentně zadané posloupnosti, jejíž explicitní vyjádření nám může usnadnit práci při hledání řešení. Tento případ nyní i demonstrujeme.

**Příklad 7.5.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f\big(f(x)\big) = 3f(x) - 2x$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*[5]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou spojitou funkci $f$, která vyhovuje dané podmínce. Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x_1) = f(x_2)$, vyplývá ze zadání rovnost

$$\begin{aligned} f\big(f(x_1)\big) &= f\big(f(x_2)\big),\\ 3f(x_1) - 2x_1 &= 3f(x_2) - 2x_2,\\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tak, že funkce $f$ je prostá a díky její předpokládané spojitosti je zřejmě navíc i ryze monotónní. Nyní vyšetříme, zda je klesající nebo rostoucí. Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zvolená tak, že $x_1 < x_2$, dostaneme v případě klesající funkce $f$ implikace

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f\big(f(x_1)\big) < f\big(f(x_2)\big)$$

a v případě rostoucí funkce $f$ implikace

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f\big(f(x_1)\big) < f\big(f(x_2)\big).$$

[5] [And, str. 194]

Jak vidíme z obou případů, je složená funkce $f \circ f$ vždy rostoucí. S ohledem na tuto skutečnost a z vyjádření funkce $f$ ze zadání

$$f(x) = \frac{2x + f\big(f(x)\big)}{3} \tag{7.10}$$

pak plyne, že i sama funkce $f$ je rostoucí na celém $\mathbb{R}$.

Vzhledem k (7.10) a tomu, že $f \circ f$ je rostoucí funkce, a tedy platí $f\big(f(x)\big) > f\big(f(0)\big)$ pro každé $x > 0$ a zároveň $f\big(f(x)\big) < f\big(f(0)\big)$ pro každé $x < 0$, existují limity

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + f\big(f(x)\big)}{3} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + f\big(f(x)\big)}{3} = -\infty,$$

díky nimž a předpokládané spojitosti $f$ je patrné, že $f$ je na $\mathbb{R}$ navíc surjektivní.

Shrnutím dosavadních výsledků vidíme, že $f$ je na $\mathbb{R}$ rostoucí bijekcí, takže k ní zřejmě existuje i funkce inverzní $f^{-1}$.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dále pevně dané, a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentně rovnostmi

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = f(\alpha) \quad \text{a} \quad x_{n+1} = f\big(x_n\big) \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Z rovnosti ze zadání pak po dosazení $x = \alpha$ plyne

$$x_2 = 3x_1 - 2x_0$$

a obecněji po dosazení $x = x_n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ obdržíme

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n. \tag{7.11}$$

Získali jsme tak rekurentní vyjádření posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a ještě než nalezneme její explicitní tvar, uvědomme si, že díky existenci $f^{-1}$ můžeme členy $x_n$ uvažovat i pro celá záporná $n$, kde $x_n = f^{-1}(x_{n+1})$ pro každé $n \le -1$, přičemž pro posloupnost $(x_{-n})_{n=0}^{\infty}$ zřejmě také platí vztah odvozený v (7.11).

Charakteristická rovnice pro (7.11) má tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ má tedy explicitní vyjádření

$$x_n = c_1 1^n + c_2 2^n = c_1 + c_2 2^n,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Položením $n = 0$, resp. $n = 1$ dostaneme s ohledem na zavedené značení $x_0 = \alpha$ a $x_1 = f(\alpha)$ soustavu rovnic (pro neznámé $c_1$ a $c_2$)

$$\alpha = c_1 + c_2,$$
$$f(\alpha) = c_1 + 2c_2.$$

Odečtením první od druhé získáme $c_2 = f(\alpha) - \alpha$, díky čemuž již snadno (po dosazení do jedné z rovnic) obdržíme druhou konstantu $c_1 = 2\alpha - f(\alpha)$. Dosazením $c_1$ a $c_2$ do vyjádření $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dostaneme s ohledem na výše zmíněnou definici členů $x_{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ rovnost

$$x_n = 2\alpha - f(\alpha) + 2^n\bigl(f(\alpha) - \alpha\bigr) \tag{7.12}$$

pro každé $n \in \mathbb{Z}$, z níž plyne existence konečné limity

$$\lim_{n\to-\infty} x_n = 2\alpha - f(\alpha).$$

Ze spojitosti funkce $f$ odtud plyne

$$f\bigl(2\alpha - f(\alpha)\bigr) = \lim_{n\to-\infty} f(x_n) = \lim_{n\to-\infty} x_{n+1} = 2\alpha - f(\alpha).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$ bylo na začátku zvoleno libovolně, dokázali jsme tak, že hodnota $2x - f(x)$ je pevným bodem funkce $f$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Označme dále jako $A$ množinu všech pevných bodů funkce $f$, která je vzhledem k výše uvedenému zřejmě neprázdná. Existují-li v $A$ alespoň dva různé body $a$ a $b$, kde $a < b$, uvažme libovolné $c \in (a, b)$, dále pevně dané, a definujme spojitou funkci $g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ předpisem

$$g(x) = f(x) - 2x + c.$$

Tato funkce nabývá s ohledem na předpoklady $f(a) = a$, $f(b) = b$ a $c \in (a, b)$ v krajních bodech svého definičního oboru opačných znamének, neboť

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - 2a + c = a - 2a + c = c - a > 0,\\ g(b) &= f(b) - 2b + c = b - 2b + c = c - b < 0. \end{aligned}$$

Máme tak s ohledem na spojitost funkce $g$ zaručenu existenci takového bodu $c_0 \in (a, b)$, pro který platí $g(c_0) = 0$.[6] Po dosazení bodu $c_0$ do předpisu $g$ obdržíme $0 = f(c_0) - 2c_0 + c$ neboli $c = 2c_0 - f(c_0)$. Jak vidíme, lze $c$ zapsat ve tvaru, který odpovídá pevnému bodu funkce $f$, jak jsme již výše ukázali, proto $c$ je taktéž pevným bodem této funkce. Navíc vzhledem k tomu, že na začátku úvahy bylo $c \in (a, b)$ libovolné, platí pro všechny body intervalu $(a, b)$, že jsou pevnými body $f$, tj. $(a, b) \subset A$. Uvědomme si dále, že ze spojitosti funkce $f$ dále plyne, že je-li $(a, b) \subset A$ $(a, b \in \mathbb{R})$, pak dokonce $\langle a, b\rangle \subset A$.

Ukázali jsme tak, že není-li množina $A$ jednoprvková, může být jedině nějakým intervalem tvaru $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, \infty)$ nebo $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Tyto případy nyní prozkoumáme odděleně.

[6] Existence bodu $c_0 \in (a, b)$ s uvedenou vlastností $g(c_0) = 0$ plyne z Bolzanovy věty.

Pro $A = \mathbb{R}$ je zřejmě $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a jednoduchým dosazením do zadání zjistíme, že se opravdu jedná o řešení.

V případě, kdy $A = (-\infty, a\rangle$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, platí předně $f(x) = x$ pro každé $x \le a$. Nyní ukážeme, že pro ostatní $x \in \mathbb{R}$ (zadaná nerovností $x > a$) má funkce $f$ předpis $f(x) = 2x - a$ ekvivalentní s rovností $2x - f(x) = a$. Jak víme z dřívější úvahy, $2x - f(x)$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ pevným bodem funkce $f$, patří tedy do množiny $A = (-\infty, a\rangle$, což zaručuje nerovnost $2x - f(x) \le a$. Zbývá tedy vyloučit existenci takového čísla $\beta > a$, pro něž $2\beta - f(\beta) < a$. Připusťme, že takové $\beta$ existuje. Stejně jako výše definujme oboustranně nekonečnou posloupnost $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ rekurentně rovnostmi

$$x_0 = \beta \quad \text{a} \quad x_{n+1} = f\bigl(x_n\bigr) \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{Z},$$

pro jejíž členy podle výsledku (7.12) platí pro každé $n \in \mathbb{Z}$ vzorec

$$x_n = 2\beta - f(\beta) + 2^n\bigl(f(\beta) - \beta\bigr).$$

Díky předpokladu $2\beta - f(\beta) < a$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že $x_{-n_0} < a$. (Plyne to z předchozího vzorce, neboť $2^{-n} \to 0$ pro $n \to \infty$.) To ale znamená, že $x_{-n_0}$ je pevným bodem funkce $f$, a tudíž platí $x_{-n_0+1} = x_{-n_0}$ neboli

$$\begin{aligned} 2\beta - f(\beta) + 2^{-n_0+1}\bigl(f(\beta) - \beta\bigr) &= 2\beta - f(\beta) + 2^{-n_0}\bigl(f(\beta) - \beta\bigr), \\ 2\bigl(f(\beta) - \beta\bigr) &= f(\beta) - \beta, \\ f(\beta) &= \beta. \end{aligned}$$

To je ale spor s předpokladem, že $\beta > a$, a tak je předpis $f(x) = 2x - a$ dokázán pro každé $x > a$.

Stejnými úvahami bychom došli k závěru, že pro $A = \langle a, \infty)$ je $f(x) = 2x - a$ na $(-\infty, a\rangle$ a pro $A = \langle a, b\rangle$ je $f(x) = 2x - a$ na $(-\infty, a\rangle$ a $f(x) = 2x - b$ na $\langle b, \infty)$.

V posledním případě, kdy je $A$ jednoprvkovou množinou $\{a\}$, je vzhledem k dosaženým výsledkům zřejmé, že funkce $f$ má předpis tvaru $f(x) = 2x - a$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že všechny nalezené funkce jsou řešeními. Stačí si přitom uvědomit, že větší z čísel ve dvojici $(x, a)$ je na stejné pozici jako větší z čísel ve dvojici $(2x - a, a)$.

Pro přehlednost zde ještě proveďme shrnutí všech řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ jsou to $f(x) = x$, $f(x) = 2x - a$ a dále (kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \le a, \\ 2x - a & \text{pro } x > a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \ge a, \\ 2x - a & \text{pro } x < a, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{pro } x < a, \\ x & \text{pro } a \le x \le b, \\ 2x - b & \text{pro } x \ge b, \end{cases}$$

□

**Poznámka.** V řešení příkladu jsme využili posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž členy jsme pro dané číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ určili rekurentně rovnostmi

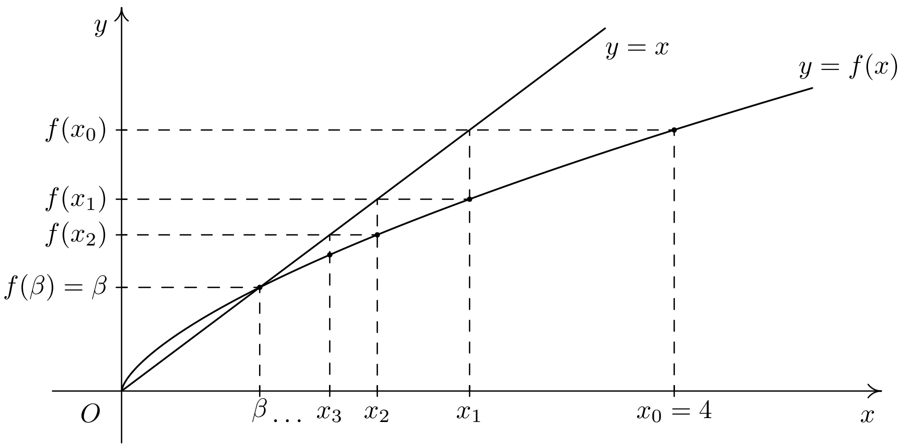
$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = f(\alpha) \quad \text{a} \quad x_{n+1} = f\big(x_n\big) \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Taková posloupnost se nazývá *orbita bodu $\alpha$ funkce $f$* a její členy jsou *iteracemi funkce $f$ v daném bodě $\alpha$* (člen $x_n = f(x_{n-1}) = \ldots = f^{(n)}(\alpha)$ nazýváme $n$-tou iterací funkce $f$ v bodě $\alpha$).

V řešení příkladu jsme využili vlastnosti, která obecně platí pro konvergentní orbity bodů a kterou zde nyní uvedeme bez důkazu (lze jej nalézt v [Smí, str. 72]).

*Nechť $I$ je otevřený interval a $f\colon I \to I$ je spojitá funkce a nechť pro nějaké $x_0 \in I$ posloupnost $\big(f^{(n)}(x_0)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nějakému $\beta$ ($\beta \in I$). Potom $\beta$ je pevným bodem funkce $f$, tzn. $f(\beta) = \beta$.*

Uvedené tvrzení ilustrujeme pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ a bod $x_0 = 4$ na následujícím obrázku.




Obr. 2: Grafické znázornění orbity bodu $x_0 = 4$ pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Jedním z pevných bodů funkce $f$ je zřejmě bod s hodnotou rovnou 1 (dalším už je pouze 0), s čímž koresponduje obrázek 2, kde je zřejmě $\beta = 1$.

## 7.1 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 7.6.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující rovnost*

$$f\big(f(x)\big) = x^3 + \frac{3}{4}\,x$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že existují taková tři navzájem různá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, že platí $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.*[7]

**Příklad 7.7.** *Dokažte, že alespoň jeden pevný bod mají všechny (i nespojité) rostoucí funkce $f\colon\ \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$.*[8]

**Příklad 7.8.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková spojitá funkce, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $n$-tá iterace $f$ v bodě $x$ je rovna jedné, tj. $f^{(n)}(x) = 1$. Dokažte, že funkce $f$ má pevný bod.*[7]

[7] [And, str. 194]
[8] [And, str. 193]

# Kapitola 8

# Využití rekurentních posloupností

Funkcionální rovnice, v nichž se vyskytují složené funkce, lze v mnoha případech řešit metodami představenými v předchozích dvou kapitolách. Nicméně existují i takové typy rovnic, kdy ani výše uvedené metody nejsou dostačující pro nalezení hledaných funkcí. Tuto situaci jsme představili v příkladu 7.5 v závěru předchozí sedmé kapitoly, kde jsme ze zadané funkcionální rovnice odvodili vhodnou rekurentně zadanou posloupnost, jejíž explicitní vyjádření nám pomohlo najít tvar řešení. Právě tento „přepis“ rovnice do tvaru rekurentně zadané posloupnosti určuje metodu, kterou více představíme v této kapitole.

Typickými funkcionálními rovnicemi, kde lze tuto metodu využít, jsou takové rovnice, v nichž kromě složených funkcí vystupuje pouze jedna nezávislá proměnná. Díky tomu jsme sice značně omezeni při odvozování obecných vlastností hledané funkce s pomocí specifikace nebo dosazování za tuto nezávislou proměnou, ale metoda využití vhodné rekurentně zadané posloupnosti nám poskytuje dostatečně silný prostředek k tomu, abychom byli schopni odvodit všechna tato řešení i bez specifikací a dosazování, jak nyní ukážeme na zařazených příkladech.

**Příklad 8.1.** *Určete všechny funkce* $f\colon \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$ *splňující pro všechna* $x \in \langle 0,\infty)$ *rovnost* [1]

$$f\big(f(x)\big) = 12x - f(x).$$

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce vyhovující zadání. Předpis funkce $f$ budeme hledat pomocí vhodné rekurentně zadané posloupnosti, jejíž explicitní vyjádření povede k nalezení této funkce. Nechť $x_0 \in \langle 0,\infty)$ je libovolný, dále pevně daný bod a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentně rovnostmi

$$b_0 = x_0, \quad b_1 = f(x_0) \ \text{ a } \ b_{n+1} = f\big(b_n\big) \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Protože v definičním oboru i oboru hodnot funkce $f$ leží pouze nezáporná čísla, platí nerovnost $b_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Dále si všimněme, že ze zadané rovnosti

[1] [Ven, str. 111]

po dosazení $x = b_n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, obdržíme

$$b_{n+2} = 12b_n - b_{n+1}. \tag{8.1}$$

Získali jsme tak rekurentní vyjádření posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ a nyní nalezneme její explicitní tvar. Charakteristická rovnice pro lineární rovnici (8.1) má tvar $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$. Posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ má tedy explicitní vyjádření

$$b_n = c_1 3^n + c_2(-4)^n, \tag{8.2}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Sporem ukážeme, že $c_2 = 0$.

Kdyby bylo $c_2 > 0$, pak bychom po vydělení obou stran rovnosti (8.2) hodnotou $3^n$ dostali

$$\frac{b_n}{3^n} = c_1 + c_2 \left(\frac{-4}{3}\right)^n,$$

což s ohledem na limitu $\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ n\in\mathbb{N} \text{ liché}}} \left(\frac{-4}{3}\right)^n = -\infty$ by znamenalo, že od určitého lichého čísla $n_0 \in \mathbb{N}_0$ počínaje bude pro libovolné liché $n \geq n_0$ platit $b_n < 0$, což je spor, neboť $b_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Stejnou úvahou dojdeme ke sporu i v případě $c_2 < 0$, když na místo lichých uvážíme sudá $n \in \mathbb{N}_0$.

Zjistili jsme tedy, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $b_n = c_1 3^n$, přičemž položením $n = 0$ dostaneme

$$x_0 = b_0 = c_1 3^0 = c_1.$$

To znamená, že $b_1 = 3x_0$, avšak $b_1 = f(x_0)$ a přitom $x_0 \in \langle 0, \infty)$ bylo zvoleno libovolně. Rovnost $f(x) = 3x$ tak musí platit pro každé $x \in \langle 0, \infty)$. Snadným dosazením se přesvědčíme, že funkce s takovým předpisem vyhovuje zadání:

$$\begin{aligned} L: &\quad f\big(f(x)\big) = f(3x) = 9x, \\ P: &\quad 12x - f(x) = 12x - 3x = 9x. \end{aligned}$$

Příklad má tedy jediné řešení $f(x) = 3x$.

$\square$

**Příklad 8.2.** *Určete všechny funkce $f\colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ splňující rovnost*

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) + f\big(f(x)\big) = 2x + 5$$

*pro každé $x \in \langle 0, \infty)$.*[2]

[2][And, str. 76]

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která vyhovuje zadání. Budeme ji opět hledat pomocí vhodné rekurentně zadané posloupnosti, jejíž explicitní vyjádření povede k nalezení předpisu funkce $f$. Nechť $x_0 \in \langle 0, \infty)$ je libovolný, dále pevně daný bod a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentně rovnostmi

$$b_0 = x_0, \quad b_1 = f(x_0) \quad \text{a} \quad b_{n+1} = f\big(b_n\big) \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

V definičním oboru i oboru hodnot funkce $f$ leží pouze nezáporná čísla, proto nerovnost $b_n \geq 0$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Všimněme si dále, že z rovnosti ze zadání po dosazení $x = x_0$ dostaneme

$$b_3 + b_2 = 2x_0 + 5. \tag{8.3}$$

Podobně dosazením $x = b_n$, resp. $x = b_{n+1}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ obdržíme

$$b_{n+3} + b_{n+2} = 2b_n + 5, \quad \text{resp.} \quad b_{n+4} + b_{n+3} = 2b_{n+1} + 5.$$

Odečtením první rovnosti od druhé získáme rekurentní vyjádření posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ve tvaru

$$b_{n+4} - b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2b_n.$$

Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^4 - \lambda^2 = 2\lambda - 2$ a její kořeny odvodíme pomocí úprav

$$\begin{aligned}
\lambda^2\left(\lambda^2 - 1\right) &= 2(\lambda - 1),\\
\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) &= 0,\\
(\lambda - 1)\left(\lambda^3 - 1 + \lambda^2 - 1\right) &= 0,\\
(\lambda - 1)\Big((\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) + (\lambda - 1)(\lambda + 1)\Big) &= 0,\\
(\lambda - 1)^2\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tvaru prvního činitele $(\lambda - 1)^2$ plyne, že $\lambda_{1,2} = 1$, tzn. 1 je dvojnásobným kořenem. Zbylé kořeny $\lambda_3$ a $\lambda_4$ získáme z druhého činitele řešením rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$:

$$\lambda_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -1 \pm \mathrm{i} = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Vzhledem k výše odvozeným výsledkům má tedy posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ explicitní vyjádření

$$b_n = c_1 + c_2 n + \left(-\sqrt{2}\right)^n \left(c_3 \cos\frac{n\pi}{4} + c_4 \sin\frac{n\pi}{4}\right), \tag{8.4}$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Sporem ukážeme, že $c_3 = c_4 = 0$.

V případě $c_3 > 0$ získáme po vydělení obou stran (8.4) kladnou hodnotou $\left(\sqrt{2}\right)^n$ rovnost

$$\frac{b_n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \frac{c_1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + \frac{c_2 n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + (-1)^n \left(c_3 \cos\frac{n\pi}{4} + c_4 \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Uvážíme-li $n$ ve tvaru $n = 4 + 8k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, pak zřejmě $(-1)^n = 1$ a $\sin\frac{n\pi}{4} = 0$. Odtud s ohledem na rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_2 n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = 0$ plyne

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ n=4+8k,\, k\in\mathbb{N}_0}} \frac{b_n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ n=4+8k,\, k\in\mathbb{N}_0}} \left(c_3 \cos\frac{n\pi}{4} + c_4 \sin\frac{n\pi}{4}\right) = -c_3.$$

To znamená, že od určitého čísla $k_0 \in \mathbb{N}_0$ počínaje bude pro libovolné $n = 4 + 8k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ splňuje $k \geq k_0$, platit $b_n < 0$, což je spor, neboť $b_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Stejnou úvahou dojdeme ke sporu i v případě $c_3 < 0$, když uvážíme $n$ ve tvaru $n = 8k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

Ukázali jsme, že $c_3 = 0$, a zbývá dokázat, že taktéž $c_4 = 0$. Uvědomme si však, že i zde lze postupovat stejně jako výše: Pro $c_4 > 0$ stačí uvážit $n$ ve tvaru $n = 6 + 8k$ a pro $c_4 < 0$ ve tvaru $n = 2 + 8k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. V obou případech jistě platí $(-1)^n = 1$ a $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$ a po odvození hodnot limit

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ n=6+8k,\, k\in\mathbb{N}_0}} \frac{b_n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = -c_4 \quad (\text{pro } c_4 > 0), \quad \lim_{\substack{n\to\infty,\\ n=2+8k,\, k\in\mathbb{N}_0}} \frac{b_n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = c_4 \quad (\text{pro } c_4 < 0)$$

obdržíme opět spor s podmínkou, že $b_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Zjistili jsme tedy, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $b_n = c_1 + nc_2$, odkud pro $n = 0$ obdržíme $x_0 = b_0 = c_1$. Dosazením právě odvozeného vyjádření $b_n$ do (8.3) pak dostaneme

$$\begin{aligned} b_3 + b_2 &= 2x_0 + 5, \\ c_1 + 3c_2 + c_1 + 2c_2 &= 2c_1 + 5, \\ c_2 &= 1. \end{aligned}$$

To znamená, že $b_1 = x_0 + 1$, avšak $b_1 = f(x_0)$ a přitom $x_0 \in \langle 0, \infty)$ bylo zvoleno libovolně. Rovnost $f(x) = x + 1$ tak musí platit pro každé $x \in \langle 0, \infty)$. Snadným dosazením se přesvědčíme, že funkce s takovým předpisem opravdu splňuje zadání:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) + f\big(f(x)\big) = x + 3 + x + 2 = 2x + 5, \\ P:&\quad 2x + 5. \end{aligned}$$

Příklad má tedy jediné řešení $f(x) = x + 1$.

$\square$

**Příklad 8.3.** *Nechť* $a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *jsou daná čísla a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce splňující pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *rovnost*

$$f\big(f(x)\big) = af(x) + bx.$$

*Dokažte, že funkce* $f$ *má pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *předpis ve tvaru* $f(x) = cx$, *kde* $c \in \mathbb{R}$ *je vhodná konstanta.*[3]

*Řešení.* Nechť $f$ je funkce vyhovující zadání. Z rovnosti $f(x) = f(y)$ plyne

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) &= f\big(f(y)\big), \\ af(x) + bx &= af(y) + by, \\ bx &= by, \end{aligned}$$

odkud s ohledem na předpoklad $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ dostaneme vydělením obou stran nenulovým číslem $b$ rovnost $x = y$. Jak vidíme, je funkce $f$ prostá a vzhledem k její předpokládané spojitosti musí být na $\mathbb{R}$ buď rostoucí, nebo klesající.

Sporem dále ukážeme, že funkce $f$ je (ať už je rostoucí nebo klesající) neomezená. Předpokládejme, že $f$ je na $\mathbb{R}$ rostoucí a shora, resp. zdola omezená. Vzhledem k zadané rovnosti a s ohledem na $a, b > 0$ pak existuje nevlastní limita

$$\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to\infty} (af(x) + bx) = \infty,$$

což je spor s tím, že $f$ je shora omezená, respektive

$$\lim_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to-\infty} (af(x) + bx) = -\infty,$$

což je spor s předpokladem, že $f$ je zdola omezená.

V případě, když je $f$ klesající na $\mathbb{R}$ a shora, resp. zdola omezená, platí pro složenou funkci $f \circ f$, že je zdola, resp. shora omezená. Díky tomu obdržíme s ohledem na zadanou rovnost nevlastní limitu

$$\lim_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to-\infty} (af(x) + bx) = -\infty,$$

což je spor s tím, že $f \circ f$ je zdola omezená, respektive

$$\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to\infty} (af(x) + bx) = \infty,$$

což je spor s předpokladem, že $f \circ f$ je shora omezená.

Celkem jsme tak zjistili, že hledaná funkce $f$ je rostoucí, resp. klesající prostou funkcí neomezenou na celém $\mathbb{R}$. Vzhledem k výše uvedenému existuje k funkci $f$

[3] Matematická soutěž Putnam (2001).

inverzní funkce $f^{-1}$, která je zřejmě také spojitá, prostá a rostoucí, je-li $f$ rostoucí, resp. klesající, je-li $f$ klesající.

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je libovolný, dále pevně daný bod a $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentně rovnostmi

$$c_0 = x_0, \quad c_{n+1} = f\big(c_n\big) \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dosazením $x = c_n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, do rovnosti ze zadání obdržíme

$$c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n. \tag{8.5}$$

Získali jsme tak rekurentní vyjádření posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ a ještě než nalezneme její explicitní tvar, uvědomme si, že díky existenci $f^{-1}$ můžeme členy $c_n$ uvažovat i pro celá záporná $n$, přičemž vztah odvozený v (8.5) pak platí pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Charakteristická rovnice pro lineární rovnici (8.5) má po úpravě tvar $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ a její kořeny jsou díky předpokladu $a, b > 0$ reálná čísla

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}. \tag{8.6}$$

Posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(c_{-n})_{n=0}^{\infty}$ mají tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ explicitní vyjádření

$$c_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \tag{8.7}$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Uvědomme si, že z předpokladu $a, b \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ plyne

$$0 < a = \sqrt{a^2} < \sqrt{a^2 + 4b} < \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$$

odkud pro kořeny $\lambda_1$, $\lambda_2$ vycházejí odhady

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \quad 0 &< \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} < \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1, \\ \lambda_2 : \quad 0 &> \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} > \frac{0 - \frac{3}{2}}{2} > -1. \end{aligned}$$

Kořeny $\lambda_1$, a $\lambda_2$ tedy splňují nerovnosti $1 > \lambda_1 > 0 > \lambda_2 > -1$ a zřejmě také platí $|\lambda_2| < |\lambda_1|$. Nyní vyšetříme oba případy monotonie, které pro hledanou funkci $f$ mohou nastat, přičemž sporem ukážeme, že v obou případech je právě jedna z konstant $C_1$, $C_2$ rovna nule.

Nechť je funkce $f$ rostoucí a $C_2 > 0$. Vydělením obou stran rovnosti (8.7) kladnou hodnotou $(\lambda_1)^n$ dostaneme

$$\frac{c_n}{(\lambda_1)^n} = C_1 + C_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n.$$

S ohledem na předchozí rovnost a limity

$$\lim_{n\to-\infty}(\lambda_1)^n = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{sudé}}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{liché}}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = -\infty,$$

v nichž jsme využili odvozených nerovností $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$ a $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, platí

$$\lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{sudé}}} c_n = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{liché}}} c_n = -\infty.$$

To znamená, že od určitého záporného čísla $n_0 \in \mathbb{Z}$ počínaje bude pro libovolné liché $n \leq n_0$ platit $c_n < c_{n+1}$ a $c_{n+1} > c_{n+2}$. Protože je ale funkce $f$ rostoucí, platí s ohledem na $c_n < c_{n+1}$ nerovnost $f(c_n) < f(c_{n+1})$ neboli $c_{n+1} < c_{n+2}$, což je spor s předchozí uvedenou nerovností.

V případě rostoucí funkce $f$ a $C_2 < 0$ postupujeme stejně. Po vydělení obou stran rovnosti (8.7) kladnou hodnotou $(\lambda_1)^n$ zjistíme s ohledem na limity

$$\lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{sudé}}} C_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = -\infty, \qquad \lim_{\substack{n\to-\infty,\\ n\in\mathbb{Z}\ \text{liché}}} C_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = \infty,$$

že od určitého záporného čísla $n_0 \in \mathbb{Z}$ počínaje bude pro libovolné sudé $n \leq n_0$ platit $c_n < c_{n+1}$ a $c_{n+1} > c_{n+2}$. Funkce $f$ je ale rostoucí, proto s ohledem na $c_n < c_{n+1}$ platí nerovnost $f(c_n) < f(c_{n+1})$ neboli $c_{n+1} < c_{n+2}$, což je opět spor se stejnou nerovností jako výše.

Zjistili jsme tedy, že v případě rostoucí funkce $f$ musí být $C_2 = 0$, a proto pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí rovnost $c_n = C_1\lambda_1^n$, přičemž po položení $n = 0$ dostaneme

$$x_0 = c_0 = C_1\lambda_1^0 = C_1.$$

To znamená, že $c_1 = \lambda_1 x_0$, avšak $c_1 = f(x_0)$ a přitom $x_0 \in \mathbb{R}$ bylo zvoleno libovolně. Rovnost $f(x) = \lambda_1 x$ tak musí platit pro každé $x \in \mathbb{R}$, přičemž konstanta $\lambda_1 \in (0, 1)$ je určena vzorcem (8.6).

V případě, kdy je hledaná funkce $f$ klesající, dojdeme sporem k závěru $C_1 = 0$. Předpokládejme nejdříve, že $C_1 > 0$. Vydělením obou stran rovnosti (8.7) hodnotou $(\lambda_2)^n$, která je zřejmě kladná pro $n$ sudé a záporná pro $n$ liché, obdržíme

$$\frac{c_n}{(\lambda_2)^n} = C_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + C_2.$$

S ohledem na limity

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ n\in\mathbb{N}\ \text{sudé}}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \infty, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty,\\ n\in\mathbb{N}\ \text{liché}}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = -\infty,$$

v nichž jsme využili odvozených nerovností $-1<\lambda_2<0<\lambda_1<1$ a $|\lambda_2|<|\lambda_1|$, platí nerovnost $c_n > 0$ od určitého $n \in \mathbb{N}$ počínaje. Zároveň s ohledem na nerovnosti $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$ plyne z rovnosti (8.7) existence limity

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \lim_{n\to\infty} C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = 0,$$

což s ohledem na spojitost funkce $f$ znamená, že 0 je jejím pevným bodem, tzn. $f(0) = 0$.[4] Funkce $f$ je podle předpokladu klesající, proto s ohledem na $c_n > 0$ platí nerovnost $f(c_n) < f(0) = 0$ neboli $c_{n+1} < 0$, což je spor s tím, že od určitého přirozeného $n$ je vždy $c_n > 0$.

V případě, že je funkce $f$ klesající a $C_1 < 0$, postupujeme stejně s tím rozdílem, že od určitého čísla $n \in \mathbb{N}$ počínaje platí nerovnost $c_n < 0$, odkud stejně jako výše obdržíme s ohledem na fakt, že je $f$ klesající a $f(0) = 0$, spor.

Ukázali jsme tak, že v případě klesající funkce $f$ platí pro každé $n \in \mathbb{Z}$ rovnost $c_n = C_2(\lambda_2)^n$, odkud položením $n = 0$ dostaneme

$$x_0 = c_0 = C_2(\lambda_2)^0 = C_2.$$

To znamená, že $c_1 = \lambda_2 x_0$, avšak $c_1 = f(x_0)$ a přitom $x_0 \in \mathbb{R}$ bylo zvoleno libovolně. Rovnost $f(x) = \lambda_2 x$ tak musí platit pro každé $x \in \mathbb{R}$, přičemž $\lambda_2 \in (-1, 0)$ je konstanta určená vzorcem v (8.6).

Pro obě nalezené funkce $f(x) = cx$, kde $c \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, zbývá provést zkoušku. Dosazením do rovnosti ze zadání dostaneme

$$c^2 x = acx + bx.$$

Taková rovnost pro obě určené konstanty platí, ať je $x \in \mathbb{R}$ jakékoliv, protože čísla $\lambda_1, \lambda_2$ jsou kořeny rovnice $c^2 = ac + b$ s neznámou $c$.

Dokázali jsme tak požadované tvrzení ze zadání příkladu, že pro daná $a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ nalezneme vždy takové reálné $c$, že hledaná funkce $f$ má předpis ve tvaru $f(x) = cx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

**Příklad 8.4.** *Určete všechny takové funkce $f\colon \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, které splňují $f(0) = 0$ a rovnost*

$$f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right)$$

*pro každé reálné $x > 0$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla $x$.*[5]

[4] Využili jsme zde tvrzení uvedené v poznámce v závěru předešlé kapitoly pojednávající o orbitě bodu dané funkce.

[5] [And, str. 71]

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci splňující zadání. Pro každé $x \in (0,2)$ platí rovnosti $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$, odkud pro všechna taková $x$ s ohledem na zadání a předpoklad $f(0) = 0$ dostaneme

$$f(x) = 1 + 5f(0) - 6f(0) = 1.$$

Protože $f(1) = 1$, lze snadno odvodit, že pro každé $x \in \langle 2,4)$ s ohledem na rovnosti $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$ platí

$$f(x) = 1 + 5f(1) - 6f(0) = 6.$$

Matematickou indukcí nyní dokážeme, že $f(x) = a_n$ pro každé $x \in \langle 2^n, 2^{n+1})$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a kde posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je určena rekurentně rovnostmi

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6 \ \text{ a } \ a_n = 1 + 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \ \text{ pro každé } \ n \geq 2. \tag{8.8}$$

Pro $n = 0$ a $n = 1$ jsme již výše odvodili, že $f(x) = a_0 = 1$ pro $x \in \langle 1,2)$ a $f(x) = a_1 = 6$ pro $x \in \langle 2,4)$.

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné, dále pevně dané, a předpokládejme, že uvedená rovnost $f(x) = a_n$, kde $x \in \langle 2^n, 2^{n+1})$, platí pro každé přirozené číslo $n \leq n_0$. Pro $x \in \langle 2^{n_0+1}, 2^{n_0+2})$ platí $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \langle 2^{n_0}, 2^{n_0+1})$ a $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \in \langle 2^{n_0-1}, 2^{n_0})$, odkud s ohledem na předpoklad, že $f(x) = a_n$ pro každé $n \leq n_0$, kde $x \in \langle 2^n, 2^{n+1})$, můžeme psát $f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) = a_{n_0}$ a $f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right) = a_{n_0-1}$. S ohledem na zadání a předchozí výsledky splňuje funkce $f$ pro každé $x \in \langle 2^{n_0+1}, 2^{n_0+2})$ rovnost

$$f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right) = 1 + 5a_{n_0} - 6a_{n_0-1} = a_{n_0+1}.$$

Ukázali jsme tak, že pro každé $x \in \langle 2^n, 2^{n+1})$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, lze předpis funkce $f$ zapsat ve tvaru $f(x) = a_n$, kde $a_n$ jsou čísla určené vztahy (8.8). Abychom se zbavili absolutního členu 1 vystupujícího ve vzorci určujících členy $a_n$ a tím snadno odvodili explicitní vyjádření rekurentně zadané posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, uvažujme novou posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž členy zadáme vztahem $b_n = a_n - \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. S ohledem na zavedení $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ platí $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{11}{2}$ a z rekurentního vzorce (8.8) pro $a_n$ obdržíme rovnost

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \\ b_n + \frac{1}{2} &= 1 + 5\left(b_{n-1} + \frac{1}{2}\right) - 6\left(b_{n-2} + \frac{1}{2}\right), \\ b_n &= 5b_{n-1} - 6b_{n-2}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice právě odvozené lineární rovnice pro členy $b_n$ má tvar $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ má tedy explicitní vyjádření

$$b_n = c_1 3^n + c_2 2^n, \tag{8.9}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty, které snadno určíme z rovností $b_0 = \frac{1}{2}$ a $b_1 = \frac{11}{2}$. Položením $n = 0$, resp. $n = 1$ v (8.9) dostaneme

$$b_0 = \frac{1}{2} = c_1 + c_2, \quad \text{resp.} \quad b_1 = \frac{11}{2} = 3c_1 + 2c_2.$$

Odečtením dvojnásobku první rovnosti od druhé dostaneme $\frac{11}{2} - 1 = 3c_1 - 2c_1$ neboli $c_1 = \frac{9}{2}$. Hodnotu $c_2$ již snadno odvodíme z první rovnosti, podle které $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}$ neboli $c_2 = -4$.

Zjistili jsme tedy, že členy posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ lze pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ vyjádřit ve tvaru

$$b_n = \frac{9}{2} \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \quad \text{neboli} \quad b_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 2^{n+3}\right),$$

odkud s ohledem na rovnost $b_n = a_n - \frac{1}{2}$ plyne

$$a_n = \frac{1}{2} + b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 2^{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}\right).$$

Vzhledem k nalezenému explicitnímu vyjádření posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je dříve odvozený předpis hledané funkce $f$ tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 2), \\ \frac{1}{2}\left(1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}\right) & \text{pro } x \in \langle 2^n, 2^{n+1}), \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ (mohli bychom uvažovat $n \in \mathbb{N}_0$, ale možnost $n = 0$ je v uvedeném předpisu již zahrnuta).

Zkouškou se přesvědčíme, že tato jediná funkce je opravdu řešením. Pro $x \in (0, 2)$ s ohledem na předpoklad $f(0) = 0$ platí

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x) = 1, \\ P:&\quad 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right) = 1 + 5f(0) - 6f(0) = 1, \end{aligned}$$

pro $x \in \langle 2^n, 2^{n+1})$ s ohledem na $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \langle 2^{n-1}, 2^n)$ a $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \in \langle 2^{n-2}, 2^{n-1})$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}\right), \\ P:&\quad 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right) = 1 + 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = \\ &\quad = 1 + \frac{5}{2}\left(1 + 3^{n+1} - 2^{n+2}\right) - 3\left(1 + 3^n - 2^{n+1}\right) = \\ &\quad = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}3^{n+1} - 2^{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}\right). \end{aligned}$$

□

## 8.1 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 8.5.** *Určete všechny spojité funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(2x+1) = f(x)$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*[6]

**Příklad 8.6.** *Nechť funkce $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ splňuje pro každé $x \in (0,\infty)$ rovnost*

$$f\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = x + a,$$

*kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Dokažte, že pro $a \leq 1$ žádná taková funkce $f$ neexistuje a naopak pro $a > 1$ je takových funkcí nekonečně mnoho.*[7]

[6] [And, str. 76]

[7] Běloruská matematická olympiáda (1998).

# Kapitola 9

# D'Alembertova funkcionální rovnice

Významnou funkcionální rovnici lze dohledat v díle francouzského matematika Jeana d'Alemberta. Při studiu mechanického kmitání totiž odvodil vlastnost, kterou známe ve formě funkcionální rovnice

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

pod názvem *d'Alembertova funkcionální rovnice*, jejíž netriviální řešení tvoří funkce kosinus a hyperbolický kosinus.

Vyřešení této rovnice zde provedeme podobným principem jako u Cauchyovy funkcionální rovnice, a to tak, že nejdříve nalezneme všechny vyhovující funkce na množině, která je podobně jako racionální čísla v $\mathbb{R}$ hustá, a poté s využitím limity ukážeme, jak lze odvodit předpis těchto funkcí spojitých na celém $\mathbb{R}$.

Tuto množinu, kterou v řešení využijeme a která je, jak ukážeme, v $\mathbb{R}$ opravdu hustá, definujeme pro libovolné, dále pevně zadané kladné $a \in \mathbb{R}$ následujícím způsobem:

$$S=\left\{\frac{n}{2^m}a \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Nejdříve však dokážeme, že množina všech *dyadických racionálních čísel*, tj.

$$S'=\left\{\frac{n}{2^m} \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z}\right\},$$

je v $\mathbb{R}$ hustá a poté jako důsledek odvodíme požadované tvrzení s množinou $S$ ([Dav, str. 76]).

*Důkaz.* Nechť $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval a $\varepsilon$ označuje jeho délku, tj. $\varepsilon=\beta-\alpha$. Protože platí $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2^m}=0$, existuje takové $m_0 \in \mathbb{N}_0$, které splňuje nerovnost

$\frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon$. Nyní vyšetříme následující tři možnosti, které mohou nastat: $0 \leq \alpha < \beta$, $\alpha < \beta \leq 0$, $\alpha < 0 < \beta$.

Pro $0 \leq \alpha < \beta$ uvažme neomezenou rostoucí posloupnost dyadických racionálních čísel

$$0, \frac{1}{2^{m_0}}, \frac{2}{2^{m_0}}, \frac{3}{2^{m_0}}, \dots, \frac{n}{2^{m_0}}, \dots$$

Uvědomme si, že od určitého $n_0 \in \mathbb{N}$ (uvažme včetně) jsou všechny členy této posloupnosti větší než $\alpha$, tzn. $\frac{n_0-1}{2^{m_0}} \leq \alpha < \frac{n_0}{2^{m_0}}$. Kdyby přitom bylo $\beta \leq \frac{n_0}{2^{m_0}}$, došli bychom ke sporu:

$$\varepsilon = \beta - \alpha \leq \frac{n_0}{2^{m_0}} - \frac{n_0 - 1}{2^{m_0}} = \frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon.$$

Platí tedy $\beta > \frac{n_0}{2^{m_0}}$, což dohromady s předešlým výsledkem znamená, že jsou splněny nerovnosti $\alpha < \frac{n_0}{2^{m_0}} < \beta$. Jak vidíme, nachází se v intervalu $(\alpha, \beta)$ dyadické racionální číslo.

Pro $\alpha < \beta \leq 0$ uvažme neomezenou klesající posloupnost dyadických racionálních čísel

$$0, \frac{-1}{2^{m_0}}, \frac{-2}{2^{m_0}}, \frac{-3}{2^{m_0}}, \dots, \frac{-n}{2^{m_0}}, \dots$$

Od určitého $n_0 \in \mathbb{N}$ (uvažme včetně) jsou všechny členy této posloupnosti menší než $\beta$ neboli $\frac{-n_0}{2^{m_0}} < \beta \leq \frac{1-n_0}{2^{m_0}}$. Kdyby přitom ale platilo, že $\frac{-n_0}{2^{m_0}} \leq \alpha$, došli bychom ke sporu:

$$\varepsilon = \beta - \alpha \leq \frac{1 - n_0}{2^{m_0}} - \frac{-n_0}{2^{m_0}} = \frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon.$$

Platí tedy $\alpha < \frac{-n_0}{2^{m_0}}$, což znamená, že jsou splněny nerovnosti $\alpha < \frac{-n_0}{2^{m_0}} < \beta$. I v tomto případě se v intervalu $(\alpha, \beta)$ nachází dyadické racionální číslo.

U poslední možnosti, kde $\alpha < 0 < \beta$, vidíme, že číslo 0, které je dyadickým racionálním číslem, patří do intervalu $(\alpha, \beta)$. Navíc bychom vzhledem k předešlým dokázaným možnostem nalezli dyadická racionální čísla v intervalech $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$.

Dokázali jsme tak, že množina

$$S' = \left\{ \frac{n}{2^m} \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

je hustá v $\mathbb{R}$. $\square$

Jako důsledek právě dokázaného tvrzení dostaneme, že pro kladné $a \in \mathbb{R}$ je množina

$$S = \left\{ \frac{n}{2^m} a \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

hustá v $\mathbb{R}$.[1] Stačí uvážit libovolný interval $(\alpha, \beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\alpha < \beta$. Díky dokázanému tvrzení o množině $S'$ pak existují pro interval tvaru $\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}\right)$ taková

[1] Uvědomme si, že je-li $S$ hustá v $\mathbb{R}$ pro reálné $a > 0$, pak je hustá i pro reálné $a < 0$.

čísla $n \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}_0$, pro která platí nerovnosti

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{n}{2^m} < \frac{\beta}{a}.$$

Odtud již snadno vidíme, že $\alpha < \frac{n}{2^m} a < \beta$.

Ukázali jsme tak, že v každém intervalu $(\alpha, \beta)$ najdeme číslo z množiny $S$, odkud plyne, že $S$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Jak jsme uvedli v úvodním odstavci kapitoly, jsou netriviálními spojitými řešeními d'Alembertovy rovnice funkce kosinus a hyperbolický kosinus, který je definován pro všechna $x \in \mathbb{R}$ vztahem

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Jak funkce kosinus, tak hyperbolický kosinus jsou funkce sudé a platí pro ně podobné vztahy. V řešení d'Alembertovy funkcionální rovnice uvedeném v příkladu 9.1 využijeme dva ze vztahů, které nyní odvodíme ze známých vzorců pro sinus a kosinus součtu (rozdílu), resp. pro hyperbolický sinus a kosinus součtu (rozdílu) platných pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ s využitím goniometrické (hyperbolické) „jedničky":

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1,$$

odkud po přepsání $x$ za $\frac{x}{2}$ plyne

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x + 1}{2} .$$

Další vztah odvodíme z následujících rovností

$$\begin{aligned}
\cos\big((n+1)x\big) &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x,\\
\cos\big((n-1)x\big) &= \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x,
\end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Vyjádřením součinu $\sin(nx)\sin x$ z druhé rovnosti a dosazením do první dostaneme druhý vztah, který v řešení příkladu 9.1 použijeme:

$$\begin{aligned}
\cos\big((n+1)x\big) &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x =\\
&= \cos(nx)\cos x - \Big(\cos\big((n-1)x\big) - \cos(nx)\cos x\Big) =\\
&= 2\cos(nx)\cos x - \cos\big((n-1)x\big).
\end{aligned}$$

Pro hyperbolický kosinus obdržíme

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh^2 x + (\cosh^2 x - 1) = 2\cosh^2 x - 1,$$

odkud po záměně $x$ za $\frac{x}{2}$ plyne

$$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2}\ .$$

Nakonec poslední potřebný vztah odvodíme z rovností

$$\begin{aligned}\cosh\big((n+1)x\big) &= \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x,\\ \cosh\big((n-1)x\big) &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x,\end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Vyjádřením součinu $\sin(nx)\sin x$ z druhé rovnosti a dosazením do první dostaneme podobně jako výše vztah

$$\cosh\big((n+1)x\big) = 2\cosh(nx)\cos x - \cosh\big((n-1)x\big).$$

V řešení d'Alembertovy funkcionální rovnice si můžeme všimnout, že výše odvozené vztahy a důkaz hustoty množiny $S$, které jsme záměrně nezařadili do jejího řešení z důvodu přehlednosti, jsou pro její řešení spolu s matematickou indukcí klíčové.

**Příklad 9.1.** ***(D'Alembertova funkcionální rovnice)*** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje funkci, která splňuje předpoklady zadání. Položením $y = 0$ obdržíme $2f(x) = 2f(x)f(0)$. Odtud pro $f(0) = 0$ plyne $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, což je triviální řešení příkladu.

Předpokládejme dále, že $f(0) \neq 0$. Položením $x = 0$ v předešlé rovnosti dostaneme $2f(0) = 2\big(f(0)\big)^2$, odkud plyne $f(0) = 1$. Nahrazením $x$ za $ky$, kde $k \in \mathbb{N}$, resp. $y$ za $x$ v zadání obdržíme

$$\begin{aligned}f(ky+y) + f(ky-y) &= 2f(ky)f(y),\\ f\big((k+1)y\big) &= 2f(ky)f(y) - f\big((k-1)y\big),\end{aligned} \tag{9.1}$$

respektive $f(2x) + f(0) = 2\big(f(x)\big)^2$. Po úpravě druhé rovnosti s ohledem na $f(0) = 1$ a přepis $t = 2x$ dostaneme

$$\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(t)+1}{2}. \tag{9.2}$$

Dále pro $x = 0$ přejde zadaná rovnost do tvaru

$$\begin{aligned} f(y) + f(-y) &= 2f(0)f(y),\\ f(y) + f(-y) &= 2f(y),\\ f(-y) &= f(y). \end{aligned}$$

Jak vidíme, je hledaná funkce $f$ sudá a splňuje rovnosti (9.1) a (9.2), které odpovídají společným vlastnostem funkcí kosinus a hyperbolický kosinus. Ukážeme, že tyto funkce tvoří jediná netriviální spojitá řešení.

Protože hledaná funkce $f$ je spojitá a splňuje $f(0) = 1 > 0$, existuje jistě takové reálné $\alpha > 0$ splňující $f(x) > 0$ pro každé $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$. Rozlišme dále dva případy, které mohou nastat: $0 < f(\alpha) \le 1$ a $f(\alpha) > 1$.

Uvažme nejdříve, že platí $0 < f(\alpha) \le 1$ a označme symbolem $\beta$ takové reálné číslo, které splňuje nerovnosti $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ a rovnost $f(\alpha) = \cos\beta$ (takové $\beta$ jistě existuje, neboť funkce kosinus je spojitá a platí $0 < f(\alpha) \le 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a $\cos 0 = 1$).

Pomocí „dvojnásobné“ matematické indukce vzhledem k číslům $m, n$ dokážeme, že pro hodnoty $x$ ve tvaru $\frac{n}{2^m}\alpha$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{Z}$, platí

$$f(x) = f\left(\frac{n}{2^m}\alpha\right) = \cos\left(\frac{n}{2^m}\beta\right) = \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right), \tag{9.3}$$

odkud již snadno díky spojitosti funkce $f$ a hustotě množiny

$$S = \left\{\frac{n}{2^m}\alpha \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

v $\mathbb{R}$ dojdeme k avizovanému výsledku.

Pro $n = 1$, $m = 0$ obdržíme v (9.3) rovnost $f(\alpha) = \cos\beta$, která je s ohledem na zavedení čísla $\beta$ splněna. Využitím (9.2) dále zjistíme, že pro $t = \alpha$ platí

$$\left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(\alpha) + 1}{2} = \frac{\cos\beta + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Odtud s ohledem na definici čísel $\alpha$ a $\beta$ zaručující nerovnosti $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ a $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0$ plyne rovnost $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$, která odpovídá (9.3) pro $n = 1$ a $m = 1$.

Předpokládejme nyní, že (9.3) platí pro $n = 1$ a libovolné $m \in \mathbb{N}_0$, dále pevně dané (jak je tomu, jak už víme, pro $m = 0$). Pak z (9.2) pro $t = \frac{\alpha}{2^m}$ získáme

$$\left(f\left(\frac{\alpha}{2^{m+1}}\right)\right)^2 = \frac{f\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) + 1}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2^m}\right) + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\beta}{2^{m+1}}\right),$$

odkud s ohledem na nerovnosti $f\left(\frac{\alpha}{2^{m+1}}\right) > 0$ a $\cos\left(\frac{\beta}{2^{m+1}}\right) > 0$ dostaneme $f\left(\frac{\alpha}{2^{m+1}}\right) =$ $= \cos\left(\frac{\beta}{2^{m+1}}\right)$.

S využitím rovnosti (9.2) jsme ukázali, že (9.3) platí pro $n = 1$ a libovolné $m \in \mathbb{N}_0$. V další části indukce, kde dokážeme, že (9.3) platí pro libovolná přirozená $n$, uplatníme rovnost (9.1), v níž vystupují tři bezprostředně za sebou jdoucí přirozená čísla $k - 1$, $k$ a $k + 1$. Musíme proto v prvním indukčním kroku dokázat, že (9.3) platí alespoň pro $n = 1$ a $n = 2$. Platnost případu $n = 1$ je zřejmá z předchozí části indukce a pro $n = 2$ přejde proměnná $x = \frac{n}{2^m}\alpha$ do tvaru $\frac{1}{2^{m-1}}\alpha$, při kterém rovnost (9.3) platí pro libovolné přirozené $m$, jak jsme ukázali výše.

Předpokládejme nyní, že rovnost (9.3) je splněna pro libovolné $m \in \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{N}$, kde $n$ je dále pevně dané. Využitím (9.1) pro $y = \frac{\alpha}{2^m}$ a $k = n$ získáme

$$f\left(\frac{n+1}{2^m}\alpha\right) = 2f\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) f\left(\frac{n}{2^m}\alpha\right) - f\left(\frac{n-1}{2^m}\alpha\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\beta}{2^m}\right)\cos\left(\frac{n}{2^m}\beta\right) - \cos\left(\frac{n-1}{2^m}\beta\right) = \cos\left(\frac{n+1}{2^m}\beta\right).$$

Dokázali jsme tak, že rovnost $f(x) = \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)$ platí pro libovolné $x$ ve tvaru $\frac{n}{2^m}$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{N}$. Protože je navíc funkce $f$ sudá s vlastností $f(0) = 1$, můžeme množinu proměnných $x$ ve tvaru zlomku $\frac{n}{2^m}$ rozšířit o zlomky téhož tvaru pro libovolná celá $n$.

Jak jsme ukázali na začátku kapitoly před samotným řešením tohoto příkladu, je množina $S = \{\frac{n}{2^m}\alpha \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z}\}$ pro $\alpha > 0$ hustá v $\mathbb{R}$. Pro každé $y \in \mathbb{R}$ proto existuje taková posloupnost zlomků $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ z množiny $S$, že platí $y = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. Odtud s ohledem na spojitost funkcí cos, $f$ a předpis $f$ na množině $S$ vyplývá pro takové $y$ rovnost

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}q_n\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\beta}{\alpha}q_n\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}y\right).$$

Řešením d'Alembertovy funkcionální rovnice, které potvrdíme na závěr zkouškou, jsou tedy funkce ve tvaru $f(x) = \cos(ax)$, kde $x \in \mathbb{R}$ a místo nezáporné hodnoty $\frac{\beta}{\alpha}$ píšeme $a$, kde $a \in \mathbb{R}$. Tento přepis $\left(\frac{\beta}{\alpha} \to a\right)$ je oprávněný, neboť funkce kosinus je sudá a pro $a = 0$ obdržíme druhé triviální řešení $f(x) = \cos 0 = 1$.

Zbývá vyřešit případ, kdy $f(\alpha) > 1$. Označme opět symbolem $\beta$ takové reálné číslo, které splňuje nerovnost $0 < \beta$ a rovnost $f(\alpha) = \cosh\beta$. Dále bychom postupovali stejně jako v předešlém případě, tj. využitím rovností (9.1) a (9.2), „dvojnásobné“ matematické indukce a limitním přechodem k reálným číslům bychom dokázali

$$f(x) = \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tuto část důkazu zde vynecháme.

Spojitým řešením jsou tedy i funkce ve tvaru $f(x) = \cosh(ax)$, kde místo $\frac{\beta}{\alpha}$ píšeme ze stejných důvodů jako výše $a$, přičemž $a \in \mathbb{R}$.

Spojitá řešení d'Alembertovy funkcionální rovnice jsou tedy pouze funkce ve tvaru $f(x) = 0$, $f(x) = \cos ax$ a $f(x) = \cosh ax$, kde $a \in \mathbb{R}$. Dosazením nalezených netriviálních předpisů do zadání s ohledem na známé goniometrické a hyperbolické vztahy tento výsledek potvrdíme:

$$
\begin{aligned}
L:\quad & f(x+y) + f(x-y) = \cos\big(a(x+y)\big) + \cos\big(a(x-y)\big) = \cos ax \cos ay - \\
&\qquad - \sin ax \sin ay + \cos ax \cos ay + \sin ax \sin ay = \\
&\qquad = 2\cos ax \cos ay, \\
P:\quad & 2f(x)f(y) = 2\cos ax \cos ay,
\end{aligned}
$$

pro $\cosh ax$ analogicky

$$
\begin{aligned}
L:\quad & f(x+y) + f(x-y) = \cosh\big(a(x+y)\big) + \cosh\big(a(x-y)\big) = \\
&\qquad = \cosh ax \cosh ay + \sinh ax \sinh ay + \\
&\qquad + \cosh ax \cosh ay - \sinh ax \sinh ay = \\
&\qquad = 2\cosh ax \cosh ay, \\
P:\quad & 2f(x)f(y) = 2\cosh ax \cosh ay,
\end{aligned}
$$

□

## 9.1 Aplikace na další rovnice

Funkcionální rovnice následujícího příkladu ilustruje známý vzorec pro kosinus rozdílu $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Jak ukážeme, bude dvojice funkcí kosinus a sinus vystupujících ve vzorci určovat jediná netriviální řešení, když za triviální řešení považujeme vhodné dvojice konstantních funkcí.

**Příklad 9.2.** *Najděte všechny dvojice spojitých funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňujících rovnost*

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[2]

*Řešení.* Předpokládejme, že $f$ a $g$ jsou dále funkce splňující zadání. Ztotožněním $x = y$ dostaneme

$$c = f(0) = \big(f(x)\big)^2 + \big(g(x)\big)^2, \tag{9.4}$$

[2] [Eng, str. 278]

odkud pro $x = 0$ a po následné úpravě získáme

$$\begin{aligned} c &= c^2 + \big(g(0)\big)^2, \\ c(1-c) &= \big(g(0)\big)^2 \geq 0, \end{aligned} \tag{9.5}$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Poslední nerovnost nastane zřejmě jen v případě, kdy $0 \leq c \leq 1$. Nyní prošetříme všechny případy vzhledem k možným hodnotám $c$.

Pro $c = 0$ je v (9.4) součet druhých mocnin dvou funkcí roven 0 pro každé $x \in \mathbb{R}$, což nastane pouze v případě, když pro všechna tato $x$ je $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$. Tato dvojice funkcí tvoří (triviální) řešení.

Je-li $0 < c < 1$, pak z rovnosti uvedené v (9.5) plyne $g(0) \neq 0$. Položením $y = 0$ v zadání s ohledem na značení $c = f(0)$ zjistíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = cf(x) + g(0)g(x)$, odkud vyjádřením $g(x)$ dostaneme $g(x) = \frac{1-c}{g(0)} f(x)$. Dosazením právě odvozeného tvaru funkce $g$ do (9.4) získáme s ohledem na (9.5) a podmínku $c = f(0) \neq 0$ rovnost

$$\begin{aligned} c &= \big(f(x)\big)^2 + \big(g(x)\big)^2 = \big(f(x)\big)^2 + \left(\frac{1-c}{g(0)} f(x)\right)^2 = \big(f(x)\big)^2 + \frac{(1-c)^2}{\big(g(0)\big)^2}\big(f(x)\big)^2 = \\ &= \big(f(x)\big)^2 \left(1 + \frac{(1-c)^2}{c(1-c)}\right) = \frac{\big(f(x)\big)^2}{c}, \end{aligned}$$

odkud vidíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\big(f(x)\big)^2 = c^2 = \big(f(0)\big)^2$. Ze spojitosti funkce $f$, díky předpokladu $c \neq 0$, plyne, že její předpis je tvaru $f(x) = c$ (případ $f(x) = -c$ by vedl ke sporu $c = f(0) = -f(0)$, odkud $c = 0$), díky čemuž můžeme odvodit předpis funkce $g$ z rovnosti (9.4) ve tvaru

$$\begin{aligned} c &= c^2 + \big(g(x)\big)^2, \\ g(x) &= \pm\sqrt{c - c^2}, \end{aligned}$$

kde připomínáme $0 < c < 1$, takže $c - c^2 > 0$. Snadným dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že i v tomto případě jsme nalezli řešení, a to (vzhledem ke spojitosti funkce $g$) ve tvaru $f(x) = c$ a $g(x) = \sqrt{c - c^2}$, nebo $f(x) = c$ a $g(x) = -\sqrt{c - c^2}$.

Až do konce řešení budeme posuzovat zbylý případ, kdy $c = 1$. Pravá strana zadané rovnosti je vzhledem k proměnným $x$ a $y$ symetrická, proto po jejich vzájemné záměně obdržíme rovnost levých stran $f(x - y) = f(y - x)$. Po položení $y = 0$ pak z rovnosti $f(x) = f(-x)$ plyne, že je funkce $f$ sudá. Nahrazením $y$ svou opačnou hodnotou $-y$, resp. $x$ svou opačnou hodnotou $-x$ v zadané rovnosti s ohledem na fakt, že funkce $f$ je sudá, dostaneme

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(-y),$$

respektive

$$f(-x-y) = f(x+y) = f(x)f(y) + g(-x)g(y).$$

Porovnáním pravých stran posledních dvou získaných rovností obdržíme

$$g(x)g(-y) = g(y)g(-x). \tag{9.6}$$

Je-li $g(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, plyne z (9.4) a spojitosti funkce $f$ rovnost $f(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (kdyby totiž pro každé $x \in \mathbb{R}$ platilo naopak $f(x) = -1$, odporovalo by to důsledku $f(x-y) = f(x)f(y)$ v rovnosti ze zadání). Tato dvojice funkcí zřejmě splňuje zadanou rovnost a je tedy řešením. Předchozí nalezená řešení tak můžeme sjednotit do tvaru dvojic $f(x) = c$ a $g(x) = \sqrt{c-c^2}$, nebo $f(x) = c$ a $g(x) = -\sqrt{c-c^2}$, kde $c \in \mathbb{R}$ splňuje nerovnosti $0 \leq c \leq 1$.

V uvažovaném případě $c = 1$ nyní posoudíme opačnou možnost, kdy existuje takové $x_0 \in \mathbb{R}$, že $g(x_0) \neq 0$. Dosazením $x_0$ za $x$, resp. $-x_0$ za $x$ v (9.4) dostaneme s ohledem na sudost funkce $f$ a $c = f(0) = 1$ rovnosti

$$\begin{aligned}\big(f(x_0)\big)^2 + \big(g(x_0)\big)^2 = 1 &= \big(f(-x_0)\big)^2 + \big(g(-x_0)\big)^2,\\ \big(g(x_0)\big)^2 &= \big(g(-x_0)\big)^2,\\ \frac{g(-x_0)}{g(x_0)} &= \pm 1.\end{aligned}$$

S využitím posledního získaného výsledku dostaneme položením $x = x_0$ v (9.6) rovnost

$$\begin{aligned} g(x_0)g(-y) &= g(y)g(-x_0),\\ g(-y) &= \frac{g(-x_0)}{g(x_0)}g(y),\end{aligned}$$

kde $y \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zjistili jsme tak, že funkce $g$ je buď sudá, nebo lichá podle toho, zda je zlomek v rovnosti roven 1, nebo $-1$.

Je-li $g$ sudá, pak ze zadané rovnosti s ohledem na sudost funkce $f$ plyne

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x)f(-y) + g(x)g(-y) = f(x+y),$$

odkud po nahrazení $y$ za $x$ dostaneme $f(2x) = f(0) = c = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tento případ jsme již výše prošetřili, předpokládejme proto, že $g$ je dále lichá funkce. Nahrazením $-y$ za $y$ v zadané rovnosti s ohledem na předpoklad, že $g$ je lichá a $f$ sudá funkce, dostaneme rovnost

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

ze které po sečtení s rovností ze zadání obdržíme

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Dostali jsme tak rovnost odpovídající d'Alembertově funkcionální rovnici, kterou hledaná funkce $f$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ proto plyne, že její předpis je tvaru $f(x) = \cos ax$ a $f(x) = \cosh ax$, kde $a \in \mathbb{R}$. Ze zadání nyní zjistíme předpis funkce $g$.

Pro první případ, kdy $f(x) = \cos ax$, obdržíme

$$\begin{aligned} \cos(ax - ay) &= \cos ax \cos ay + g(x)g(y), \\ \cos ax \cos ay + \sin ax \sin ay &= \cos ax \cos ay + g(x)g(y), \\ g(x)g(y) &= \sin ax \sin ay. \end{aligned}$$

Pro $x = y = x_0$ (s ohledem na $g(x_0) \neq 0$) je $\big(g(x_0)\big)^2 = \big(\sin ax_0\big)^2$ neboli $\frac{\sin ax_0}{g(x_0)} = \pm 1$. Díky tomu pak pro $y = x_0$ dostaneme $g(x) = (\sin ax)\frac{\sin ax_0}{g(x_0)} = \pm \sin ax_0$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Oba případy můžeme sjednotit a psát předpis funkce $g$ ve tvaru $g(x) = \sin ax$, kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolná (nenulová) konstanta (pro $a = 0$ dostaneme výše odvozené triviální řešení $g(x) = 0$, $f(x) = 1$).

Ze vzorce pro kosinus rozdílu, který jsme připomněli dříve, plyne, že nalezená dvojice funkcí $f(x) = \cos ax$ a $g(x) = \sin ax$ je skutečně řešením příkladu.

Pro druhý případ, kdy $f(x) = \cosh ax$, obdržíme ze zadání rovnost

$$\begin{aligned} \cosh(ax - ay) &= \cosh ax \cosh ay + g(x)g(y), \\ \cosh ax \cosh ay - \sinh ax \sinh ay &= \cosh ax \cosh ay + g(x)g(y), \\ g(x)g(y) &= -\sinh ax \sinh ay. \end{aligned}$$

Dosazením $x_0$ za $x$ i $y$ v posledním výsledku obdržíme s ohledem na předpoklad $g(x_0) \neq 0$ spor $0 < \big(g(x_0)\big)^2 = -\big(\sinh ax_0\big)^2 < 0$, proto funkce $f(x) = \cosh ax$ netvoří s žádnou funkcí $g$ řešení.

Celkem jsme tedy zjistili, že jediná spojitá řešení tvoří dvojice funkcí $f(x) = c$, $g(x) = \sqrt{c - c^2}$, nebo $f(x) = c$, $g(x) = -\sqrt{c - c^2}$, kde $0 \leq c \leq 1$, a dále $f(x) = \cos ax$, $g(x) = \sin ax$, kde $a \in \mathbb{R}$.

□

Dále představíme využití řešení d'Alembertovy rovnice v poměrně náročném příkladu 9.5, v němž odvozujeme předpis hledané funkce zvlášť pro její sudou a lichou část. Ještě předtím ale vyřešíme následující dva (původní autorské) příklady 9.3 a 9.4, na jejichž řešení se poté odvoláme.

**Příklad 9.3.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které jsou liché a pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos \alpha y,$$

*kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je dané číslo.*

*Řešení.* Předpokládejme, že $f$ je dále spojitá lichá funkce splňující zadání.

Je-li $\alpha = 0$, dostaneme rovnost $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)$, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici (používáme pojmenování zavedené v kapitole 4 na straně 73). Protože spojitá funkce $f$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, platí, že její předpis má tvar $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Pro $\alpha \neq 0$ položením $x = t + \frac{\pi}{2\alpha}$, $y = \frac{\pi}{2\alpha}$, resp. $x = \frac{\pi}{2\alpha}$, $y = t + \frac{\pi}{2\alpha}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$ dostaneme (s ohledem na lichost funkce $f$):

$$f\left(t+\frac{\pi}{\alpha}\right) + f(t) = 2f\left(t+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\cos\frac{\pi}{2} \quad (= 0),$$

respektive

$$f\left(t+\frac{\pi}{\alpha}\right) - f(t) = 2f\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\cos\left(\alpha t+\frac{\pi}{2}\right) \quad \left(= -2f\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\sin\alpha t\right).$$

Odečtením právě získané rovnosti od předchozí obdržíme

$$2f(t) = 2f\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\sin\alpha t \quad \text{neboli} \quad f(t) = d\sin\alpha t,$$

kde $d = f\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) \in \mathbb{R}$. Nalezli jsme tak předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = d\sin\alpha\, x$.

Dohromady dostáváme, že všechna řešení zadaného příkladu mohou být buď ve tvaru $f(x) = cx$ (pro $\alpha = 0$), nebo $f(x) = d\sin\alpha x$ (pro $\alpha \neq 0$), kde $c, d \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání se přesvědčíme, že všechny funkce nalezených tvarů jsou opravdu řešeními:

Pro $\alpha = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y)+f(x-y) = c(x+y)+c(x-y) = 2cx,\\ P:&\quad 2f(x)\cos 0y = 2cx. \end{aligned}$$

Pro $\alpha \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y)+f(x-y) = d\sin\big(\alpha(x+y)\big) + d\sin\big(\alpha(x-y)\big) =\\ &\quad = d\big(\sin\alpha x\cos\alpha y + \cos\alpha x\sin\alpha y\big) + d\big(\sin\alpha x\cos\alpha y - \cos\alpha x\sin\alpha y\big) =\\ &\quad = 2d\sin\alpha x\cos\alpha y,\\ P:&\quad 2f(x)\cos\alpha y = 2d\sin\alpha x\cos\alpha y. \end{aligned}$$

□

**Příklad 9.4.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které jsou liché a pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)\cosh\alpha y,$$

*kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je dané číslo.*

*Řešení.* Předpokládejme, že $f$ je dále libovolná spojitá funkce, která je lichá a splňuje zadanou rovnost.

Můžeme si všimnout, že funkce s předpisem $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje zadanou rovnost a je tedy jedním (triviálním) řešením. Hledání dalších funkcí provedeme v závislosti na zadané hodnotě $\alpha$.

Je-li $\alpha = 0$, získáme rovnost $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici (viz str. 73). Spojitá funkce $f$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, a proto má její předpis tvar $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Dosazením do zadání se snadno přesvědčíme, že jsme nalezli jeden tvar řešení pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Pro $\alpha \neq 0$ ukážeme, že nenulovým řešením jsou pouze funkce tvaru $f(x) = d \sinh \alpha x$, kde $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nejprve položením $x = 0$ dostaneme s ohledem na lichost funkce $f$ rovnost

$$f(y) + f(-y) = 2f(0) \cosh \alpha y \quad \text{neboli} \quad 0 = f(0) \cosh \alpha y.$$

Volbou $y = 0$ odtud obdržíme $f(0) = 0$. Protože hledáme nenulové řešení, předpokládejme, že existuje $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s vlastností $f(b) \neq 0$ (existence takové hodnoty $b$ se nakonec potvrdí, když nalezneme nenulovou funkci splňující zadanou rovnost). Vzhledem k podmínkám $\alpha \neq 0$, $b \neq 0$ a $f(b) \neq 0$ existuje nenulová konstanta $d_1 = \frac{f(b)}{\sinh \alpha b}$, pro niž platí $f(b) = d_1 \sinh \alpha b$.

Položením $y = x$ v zadané rovnosti získáme s ohledem na $f(0) = 0$ :

$$f(2x) = 2f(x) \cosh \alpha x. \tag{9.7}$$

Dosazením $b$ za $x$ v (9.7) dostaneme s ohledem na $f(b) = d_1 \sinh \alpha b$ rovnost

$$f(2b) = 2f(b) \cosh \alpha b = 2d_1 \sinh \alpha b \cosh \alpha b = d_1 \sinh 2\alpha b,$$

jejíž zobecněný tvar

$$f\left(\frac{n}{2^m} b\right) = d_1 \sinh\left(\alpha \frac{n}{2^m} b\right) \tag{9.8}$$

nyní dokážeme pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$.

Důkaz provedeme pomocí „dvojnásobné“ indukce vzhledem k $m$ a $n$. Nejdříve dokážeme (9.8) pro $n = m = 1$. Položením $x = \frac{b}{2}$ v (9.7) dostaneme vzhledem k faktu, že $\cosh x \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, rovnost

$$\begin{aligned} d_1 \sinh \alpha b = f(b) &= 2f\left(\frac{b}{2}\right) \cosh \alpha \frac{b}{2}, \\ 2d_1 \sinh \alpha \frac{b}{2} \cosh \alpha \frac{b}{2} &= 2f\left(\frac{b}{2}\right) \cosh \alpha \frac{b}{2}, \\ d_1 \sinh \alpha \frac{b}{2} &= f\left(\frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

Předpokládejme dále, že (9.8) platí pro $n = 1$ a pevně dané $m \in \mathbb{N}$. Nahrazením $x$ za $\frac{b}{2^{m+1}}$ v (9.7) obdržíme

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{2^m}\right) = d_1 \sinh \alpha \frac{b}{2^m} &= 2f\left(\frac{b}{2^{m+1}}\right) \cosh \alpha \frac{b}{2^{m+1}}, \\ 2d_1 \sinh \alpha \frac{b}{2^{m+1}} \cosh \alpha \frac{b}{2^{m+1}} &= 2f\left(\frac{b}{2^{m+1}}\right) \cosh \alpha \frac{b}{2^{m+1}}, \\ d_1 \sinh \alpha \frac{b}{2^{m+1}} &= f\left(\frac{b}{2^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Ukázali jsme tak, že rovnost (9.8) platí pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a $n = 1$.

Nechť nyní rovnost (9.8) platí pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a pro všechna přirozená $n \le n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné, dále pevně dané. Nahrazením $x$ za $n_0 x$ a $y$ za $x$ v zadané rovnosti získáme

$$\begin{aligned} f(n_0 x + x) + f(n_0 x - x) &= 2f(n_0 x) \cosh \alpha x, \\ f((n_0+1)x) &= 2f(n_0 x) \cosh \alpha x - f((n_0-1)x). \end{aligned}$$

Položením $x = \frac{b}{2^m}$ zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n_0+1}{2^m} b\right) &= 2f\left(\frac{n_0}{2^m} b\right) \cosh \alpha \frac{b}{2^m} - f\left(\frac{n_0-1}{2^m} b\right) = \\ &= 2d_1 \sinh \alpha \frac{n_0 b}{2^m} \cosh \alpha \frac{b}{2^m} - d_1 \sinh \alpha \frac{(n_0-1)b}{2^m} = \\ &= d_1 \left(\sinh \alpha \frac{(n_0+1)b}{2^m} + \sinh \alpha \frac{(n_0-1)b}{2^m}\right) - \\ &\quad - d_1 \sinh \alpha \frac{(n_0-1)b}{2^m} = d_1 \sinh \alpha \frac{n_0+1}{2^m} b. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tak, že rovnost (9.8) platí pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$. Z předpokladu, že funkce $f$ je lichá a $f(0) = 0$, lze platnost (9.8) rozšířit na všechna $n \in \mathbb{Z}$. Podle důsledku tvrzení z úvodu této kapitoly je s ohledem na poznámku 1 pod čarou na straně 132 množina všech čísel tvaru $\frac{n}{2^m} b$, kde $b \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}_0$, v $\mathbb{R}$ hustá, a proto pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ existuje taková posloupnost uvažovaných čísel $\left(\frac{n_k}{2^{m_k}} b\right)_{k=1}^{\infty}$, že platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{2^{m_k}} b = x.$$

S ohledem na spojitost funkcí $f$, sinh obdržíme

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{2^{m_k}} b\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{n_k}{2^{m_k}} b\right) = \lim_{k\to\infty} d_1 \sinh \alpha \frac{n_k}{2^{m_k}} b = d_1 \sinh \alpha x.$$

Dosazením do zadání se přesvědčíme o tom, že všechny nalezené funkce tvaru $f(x) = d \sinh \alpha x$, kde $d \in \mathbb{R}$, jsou řešeními:

$$\begin{aligned} L:\quad & f(x+y) + f(x-y) = d \sinh\big(\alpha(x+y)\big) + d \sinh\big(\alpha(x-y)\big) = \\ & = d\big(\sinh \alpha x \cosh \alpha y + \cosh \alpha x \sinh \alpha y\big) + \\ & \quad + d\big(\sinh \alpha x \cosh \alpha y - \cosh \alpha x \sinh \alpha y\big) = 2d \sinh \alpha x \cosh \alpha y, \\ P:\quad & 2f(x) \cosh \alpha y = 2d \sinh \alpha x \cosh \alpha y. \end{aligned}$$

Celkem jsme tedy zjistili, že všechna řešení zadaného příkladu jsou buď ve tvaru $f(x) = cx$ (pro $\alpha = 0$), nebo $f(x) = d \sinh \alpha x$ (pro $\alpha \neq 0$), kde $c, d \in \mathbb{R}$.

□

**Příklad 9.5.** *Určete všechny spojité funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*[3]

*Řešení.* Nechť $f, g$ jsou libovolné funkce, které splňují uvedené zadání. Je-li $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, může být funkce $g$ jakákoliv. Jedním řešením je tedy dvojice funkcí $f(x) = 0$ a $g$ libovolná spojitá. Dále budeme postupovat tak, že funkci $f$ rozdělíme na sudou a lichou část a ukážeme, že každá z nich (nezávisle na druhé) splňuje jistou funkcionální rovnici, kterou poté vyřešíme – nejprve rovnici příslušnou sudé části a pak rovnici pro lichou část.

S ohledem na úvod řešení můžeme předpokládat, že existuje bod $a \in \mathbb{R}$, ve kterém funkce $f$ nabývá nenulové hodnoty. Položením $x = a$ a záměnou $y$ za $-y$ dostaneme s ohledem na $f(a) \neq 0$ rovnost

$$2f(a)g(-y) = f(a-y) + f(a+y) = 2f(a)g(y) \quad \text{neboli} \quad g(-y) = g(y).$$

Vidíme, že funkce $g$ je sudá a po nahrazení $x = a$ a $y = 0$ v zadání také splňuje podmínku

$$2f(a) = 2f(a)g(0) \quad \text{neboli} \quad g(0) = 1.$$

Přechodem k sudé ($f_s$) a liché části ($f_l$) funkce $f$ přepíšeme zadanou rovnost do tvaru

$$f_s(x+y) + f_l(x+y) + f_s(x-y) + f_l(x-y) = 2f_s(x)g(y) + 2f_l(x)g(y).$$

Nahrazením $x$ za $-x$ a $y$ za $-y$ s využitím sudosti funkcí $g$, $f_s$ pak získáme

$$f_s(x+y) - f_l(x+y) + f_s(x-y) - f_l(x-y) = 2f_s(x)g(y) - 2f_l(x)g(y).$$

[3] [Ven, str. 132]

Sečtením, resp. odečtením posledních dvou výsledků dostaneme po úpravě rovnosti pro sudou, resp. lichou část funkce $f$ :

$$f_s(x+y)+f_s(x-y)=2f_s(x)g(y), \tag{9.9}$$

respektive

$$f_l(x+y)+f_l(x-y)=2f_l(x)g(y). \tag{9.10}$$

Po vzájemné výměně $x$ za $y$ v (9.9) s ohledem na sudost $f_s$ obdržíme

$$f_s(x+y)+f_s(x-y)=2f_s(y)g(x).$$

Porovnáním právě získané rovnosti s (9.9) dojdeme k podmínce $f_s(x)g(y) = f_s(y)g(x)$, díky které položením $y=0$ ($g(0)=1$) dostaneme $f_s(x)=cg(x)$, kde $c=f_s(0)\in\mathbb{R}$.

Je-li $c=0$, pak $f_s(x)=0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$.

Je-li $c\neq 0$, pak nahrazením funkce $f_s(x)$ funkcí $cg(x)$ ve (9.9) získáme

$$cg(x+y)+cg(x-y)=2cg(x)g(y) \quad \text{neboli} \quad g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y).$$

Rovnost odpovídá d'Alembertově funkcionální rovnici, kterou funkce $g$ splňuje pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$. Vzhledem ke spojitosti funkce $g$ a podmínce $g(0)=1$ víme, že funkce $g$ má předpis buď ve tvaru $g(x)=\cos\alpha x$, nebo $g(x)=\cosh\alpha x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Odtud dostaneme s ohledem na rovnost $f_s(x)=cg(x)$ předpis funkce $f_s$ :

$$f_s(x)=c\cos\alpha x \quad \text{pro} \quad g(x)=\cos\alpha x, \tag{9.11}$$

$$f_s(x)=c\cosh\alpha x \quad \text{pro} \quad g(x)=\cosh\alpha x, \tag{9.12}$$

$$f_s(x)=c \quad \text{pro} \quad g(x)=1.$$

Nyní zbývá nalézt předpis funkce $f_l$. Předpokládejme, že existuje takový bod $b\in\mathbb{R}$, že platí $f_l(b)\neq 0$ (v opačném případě by nenulová řešení $f=f_s$ byla určena rovnostmi uvedenými v (9.11) a (9.12)). Po vzájemné záměně $x$ za $y$ v (9.10) s ohledem na lichost funkce $f_l$ dostaneme rovnost

$$f_l(x+y)-f_l(x-y)=2f_l(y)g(x), \tag{9.13}$$

po jejímž odečtení od (9.10) získáme po úpravě

$$f_l(x-y)=f_l(x)g(y)-f_l(y)g(x).$$

Položením $y=b$ s ohledem na $f_l(b)\neq 0$ obdržíme

$$f_l(x-b)=f_l(x)g(b)-f_l(b)g(x) \quad \text{neboli} \quad g(x)=\frac{g(b)f_l(x)-f_l(x-b)}{f_l(b)}.$$

V další části řešení ukážeme, že platí $g(x+y)+g(y-x)=2g(x)g(y)$. Dosazením vyjádření funkce $g(x)$ do uvažované rovnosti obdržíme

$$\frac{g(b)f_l(x+y)-f_l(x+y-b)}{f_l(b)}+\frac{g(b)f_l(y-x)-f_l(y-x-b)}{f_l(b)}= \\ =2g(x)\frac{g(b)f_l(y)-f_l(y-b)}{f_l(b)}.$$

Rovnost

$$\frac{g(b)}{f_l(b)}f_l(x+y)+\frac{g(b)}{f_l(b)}f_l(y-x)=2\frac{g(b)}{f_l(b)}g(x)f_l(y) \quad \text{neboli}$$

$$\frac{g(b)}{f_l(b)}f_l(x+y)-\frac{g(b)}{f_l(b)}f_l(x-y)=2\frac{g(b)}{f_l(b)}g(x)f_l(y)$$

zřejmě odpovídá (9.13) pro $g(b)\neq 0$ a platí triviálně pro $g(b)=0$. Stačí proto dokázat zjednodušenou rovnost

$$-f_l(x+y-b)-f_l(y-x-b)=-2g(x)f_l(y-b),$$

která po nahrazení $y$ za novou proměnnou $y+b$ přejde po úpravě do tvaru

$$f_l(x+y)+f_l(y-x)=2g(x)f_l(y) \quad \text{neboli} \quad f_l(x+y)-f_l(x-y)=2g(x)f_l(y).$$

Tato rovnost opět odpovídá (9.13). Dokázali jsme tak skutečně slíbenou rovnost $g(x+y)+g(y-x)=2g(x)g(y)$, která odpovídá d'Alembertově funkcionální rovnici. Jak víme, předpis takové funkce $g$ je buď tvaru $g(x)=\cos\alpha x$, nebo je tvaru $g(x)=\cosh\alpha x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Pro $\alpha=0$ bude $g(x)=1$ pro každé $x\in\mathbb{R}$ a (9.13) přejde do tvaru

$$f_l(x+y)-f_l(x-y)=2f_l(y) \quad \text{neboli} \quad f_l(x+y)+f_l(y-x)=2f_l(y).$$

Tato rovnost odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici (viz str. 73), kterou spojitá funkce $f_l$ splňuje pro každé $x\in\mathbb{R}$. Vzhledem k uvedeným předpokladům má tedy tato funkce $f_l$ předpis tvaru $f_l=\lambda x$, kde $\lambda\in\mathbb{R}$.

V případě funkce $g(x)=\cos\alpha x$, kde $\alpha\neq 0$, splňuje lichá funkce $f_l$ podle (9.10) rovnost

$$f_l(x+y)+f_l(x-y)=2f_l(x)\cos\alpha y,$$

z níž podle výsledku příkladu 9.3 plyne

$$f_l(x)=d\sin\alpha x,$$

kde $d \in \mathbb{R}$.

V případě funkce $g(x) = \cosh \alpha x$, kde $\alpha \neq 0$, splňuje lichá funkce $f_l$ podle (9.10) rovnost

$$f_l(x+y) + f_l(x-y) = 2f_l(x) \cosh \alpha y,$$

z níž podle výsledku příkladu 9.4 plyne

$$f_l(x) = d \sinh \alpha x,$$

kde $d \in \mathbb{R}$.

Shrnutím všech dílčích výsledků zjistíme, že hledané řešení tvořené dvojicí funkcí $f$, $g$ musí být jednoho z tvarů:

a) $f(x) = c \cos \alpha x + d \sin \alpha x$, $g(x) = \cos \alpha x$,

b) $f(x) = c \cosh \alpha x + d \sinh \alpha x$, $g(x) = \cosh \alpha x$,

c) $f(x) = c + dx$, $g(x) = 1$,

d) $f(x) = 0$, $g$ je libovolná spojitá.

Postupným dosazením do zadání ukážeme, že všechny uvedené tvary dvojic funkcí $f$ a $g$ jsou skutečně řešeními pro libovolná $c, d, \alpha \in \mathbb{R}$:

a)

$$\begin{aligned}
L:\ & f(x+y) + f(x-y) = c \cos\big(\alpha(x+y)\big) + d \sin\big(\alpha(x+y)\big) + \\
& + c \cos\big(\alpha(x-y)\big) + d \sin\big(\alpha(x-y)\big) = \\
& = c\Big(\cos \alpha x \cos \alpha y - \sin \alpha x \sin \alpha y\Big) + d\Big(\sin \alpha x \cos \alpha y + \sin \alpha y \cos \alpha x\Big) + \\
& + c\Big(\cos \alpha x \cos \alpha y + \sin \alpha x \sin \alpha y\Big) + d\Big(\sin \alpha x \cos \alpha y - \sin \alpha y \cos \alpha x\Big) = \\
& = 2\big(c \cos \alpha x + d \sin \alpha x\big) \cos \alpha y, \\
P:\ & 2f(x)g(y) = 2\big(c \cos \alpha x + d \sin \alpha x\big) \cos \alpha y.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
L:\ & f(x+y)+f(x-y) = c\cosh\big(\alpha(x+y)\big) + d\sinh\big(\alpha(x+y)\big)+ \\
& + c\cosh\big(\alpha(x-y)\big) + d\sinh\big(\alpha(x-y)\big) = \\
& = c\Big(\cosh\alpha x\cosh\alpha y - \sinh\alpha x\sinh\alpha y\Big)+ \\
& + d\Big(\sinh\alpha x\cosh\alpha y + \sinh\alpha y\cosh\alpha x\Big)+ \\
& + c\Big(\cosh\alpha x\cosh\alpha y + \sinh\alpha x\sinh\alpha y\Big)+ \\
& + d\Big(\sinh\alpha x\cosh\alpha y - \sinh\alpha y\cosh\alpha x\Big)= \\
& = 2\big(c\cosh\alpha x + d\sinh\alpha x\big)\cosh\alpha y, \\
P:\ & 2f(x)g(y) = 2\big(c\cosh\alpha x + d\sinh\alpha x\big)\cosh\alpha y.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
L:\ & f(x+y)+f(x-y) = c+d(x+y)+c+d(x-y) = 2(c+dx), \\
P:\ & 2f(x)g(y) = 2(c+dx).
\end{aligned}$$

d) Pro $f(x) = 0$ a $g$ libovolnou platí rovnost, jak jsme uvedli úvodem celého řešení, triviálně.

□

# Kapitola 10

# Další typy funkcionálních rovnic

Funkcionální rovnice, které představíme v této kapitole, jsme označili přívlastkem „další“ z toho důvodu, že se jejich zadání a řešení na první pohled odlišuje od většiny v této práci dosud uvedených rovnic. Tyto rozdíly, jak naznačují názvy prvních dvou paragrafů této kapitoly, spočívají buď v odlišném zadání definičního oboru hledané funkce, který již nebude mít tvar intervalu v $\mathbb{R}$ jako dříve, ale bude podmnožinou $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Q}$, nebo v požadavku, aby hledaná funkce splňovala kromě zadané rovnosti i podmínku, že její předpis má tvar nějakého mnohočlenu, od čehož se budou odvíjet i příslušné metody řešení takových rovnic.

Navzdory názvu celé disertační práce zde představíme i několik funkcionálních nerovnic, abychom ukázali, že metody v této práci představené pro rovnice lze stejně dobře využít i při řešení funkcionálních nerovnic. Závěr kapitoly nakonec věnujeme, kromě neřešených příkladů, problému vnořených odmocnin, který předložil a poté i sám vyřešil talentovaný indický matematik Srinivasa Ramanujan.

## 10.1 Řešení funkcionálních rovnic na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

V řešení funkcionálních rovnic na množině $\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{Z}$ vlastně hledáme vhodnou posloupnost splňující zadanou rovnost. Pro teorii čísel je jistě významné, že pomocí funkcionálních rovnic lze charakterizovat takové posloupnosti, které reprezentují některé z diskrétních funkcí, jako jsou *počet dělitelů čísla*, *součet dělitelů čísla*, *počet cifer čísla* aj. Proto je výhodné, někdy dokonce nezbytné, porovnávat zadanou rovnost se známými vlastnostmi výše uvedených funkcí přirozených a celých čísel. Ukážeme to na prvním příkladu, kde hledanou funkcí bude nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel.

**Příklad 10.1.** *Dokažte, že existuje jediná funkce $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ podmínky*

1) $f(n, m) = f(m, n)$,
2) $f(n, n) = n$,
3) $(m - n)f(n, m) = mf(n, m - n)$, *je-li* $m > n$.[1]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou z hledaných funkcí. Definujme novou funkci $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$g(n, m) = \frac{nm}{f(n, m)}.$$

Podmínky ze zadání tak přejdou s ohledem na nově zavedenou funkci $g$ do tvaru

1) $g(n, m) = g(m, n)$,
2) $g(n, n) = \frac{n^2}{n} = n$,
3) $(m - n)f(n, m) = mf(n, m - n)$,
$$(m - n)\frac{nm}{g(n, m)} = m\frac{n(m - n)}{g(n, m - n)},$$
$$g(n, m) = g(n, m - n), \quad \textit{je-li } m > n.$$

Uvědomme si, že právě získané podmínky odpovídají Eukleidovu algoritmu pro nalezení největšího společného dělitele $g(n, m)$ dvou daných čísel $n$ a $m$, můžeme proto předpis funkce $g$ zapsat ve tvaru $g(n, m) = \mathrm{nsd}(n, m)$, kde $\mathrm{nsd}(n, m)$ má zmíněný význam. Z definice funkce $g$ pak odvodíme předpis hledané funkce $f$ s využitím základního vztahu $\mathrm{nsd}(n, m) \cdot \mathrm{nsn}(n, m) = n \cdot m$, v němž činitel $\mathrm{nsn}(n, m)$ značí nejmenší společný násobek čísel $n$ a $m$, ve tvaru

$$f(n, m) = \frac{nm}{g(n, m)} = \frac{nm}{\mathrm{nsd}(n, m)} = \mathrm{nsn}(n, m).$$

Podmínky 1) a 2) jsou pro nalezený předpis funkce $f$ splněny triviálně, platnost podmínky 3) nyní pro všechna $m > n$ dokážeme pomocí výše použitého vzorce $\mathrm{nsd}(n, m) \cdot \mathrm{nsn}(n, m) = n \cdot m$ a dále využijeme toho, že za našeho předpokladu $m > n$ platí známý vztah $\mathrm{nsd}(n, m) = \mathrm{nsd}(n, m - n)$:

$$(m-n)f(n, m) = (m-n) \cdot \mathrm{nsn}(n, m) = (m-n)\frac{nm}{\mathrm{nsd}(n, m)} = m\frac{n(m-n)}{\mathrm{nsd}(n, m-n)} =$$
$$= m \cdot \mathrm{nsn}(n, m - n) = mf(n, m - n).$$

[1] [And, str. 135]

Dokázali jsme tak, že funkce $f(n,m) = \operatorname{nsd}(n,m)$, kde $n,m \in \mathbb{N}$, je opravdu jediným řešením.

□

**Příklad 10.2.** *Určete všechny takové funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro které platí, že $m^2+f(n)$ dělí beze zbytku výraz $\big(f(m)\big)^2 + n$ pro všechna $m,n \in \mathbb{N}$.*[2]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci vyhovující zadání. Nahrazením $n$ za $m$ v zadání zjistíme, že $n^2 + f(n)$ dělí $\big(f(n)\big)^2 + n$, díky čemuž získáme nerovnost

$$\begin{aligned}\big(f(n)\big)^2 + n &\geq n^2 + f(n),\\ \big(f(n)\big)^2 - n^2 &\geq f(n) - n,\\ \big(f(n) - n\big)\big(f(n) + n\big) &\geq f(n) - n.\end{aligned}$$

Pokud by bylo $f(n) < n$, obdržíme ze získané nerovnosti po vydělení obou jejich stran zápornou hodnotou $f(n){-}n$ spor $f(n){+}n \leq 0$ (neboť $n, f(n) {\in} \mathbb{N}$). Pro každé přirozené $n$ tedy hledaná funkce $f$ splňuje nerovnost $f(n) \geq n$.

Nechť $p,q \in \mathbb{N}$ označují libovolná, dále pevně daná čísla, a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n_0 > \max\left\{\big(f(p)\big)^2 - 2p^2, \big(f(q)\big)^2 - 2q^2\right\}.$$

Díky takové volbě platí $\big(f(p)\big)^2 - 2p^2 < n_0$, odkud s ohledem na dokázanou nerovnost $f(n) \geq n$ pro všechna přirozená $n$ dostaneme

$$\big(f(p)\big)^2 + n_0 < 2p^2 + 2n_0 \leq 2p^2 + 2f(n_0) = 2\left(p^2 + f(n_0)\right).$$

Podle zadání ale $p^2 + f(n_0)$ dělí beze zbytku $\big(f(p)\big)^2 + n_0$, zároveň však můžeme předchozí výsledek přepsat do tvaru

$$\frac{\big(f(p)\big)^2 + n_0}{p^2 + f(n_0)} < 2,$$

odkud již snadno vidíme, že $\frac{\left(f(p)\right)^2 + n_0}{p^2+f(n_0)} = 1$ neboli $\big(f(p)\big)^2 + n_0 = p^2 + f(n_0)$. Stejnými kroky dojdeme k závěru, že $\big(f(q)\big)^2 + n_0 = q^2 + f(n_0)$. Odečtením této rovnosti od předchozí dostaneme

$$\begin{aligned}\big(f(p)\big)^2 - \big(f(q)\big)^2 &= p^2 - q^2,\\ \big(f(p)\big)^2 - p^2 &= \big(f(q)\big)^2 - q^2.\end{aligned}$$

[2] [And, str. 145]

Protože $p$ a $q$ byla zvolena libovolně, platí odvozená rovnost pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$. Položením $q = 1$ tak snadno odvodíme předpis funkce $f$ pro každé $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \big(f(p)\big)^2 - p^2 &= \big(f(1)\big)^2 - 1, \\ f(p) &= \sqrt{p^2 + a}, \end{aligned}$$

kde $a = \big(f(1)\big)^2 - 1$. Uvědomme si však, že podle zadání platí $f(p) \in \mathbb{N}$ pro každé $p \in \mathbb{N}$, proto je zřejmě $a = 0$ a hledaná funkce je nutně tvaru $f(n) = n$, což je funkce, která jistě splňuje zadání příkladu.

$\square$

**Příklad 10.3.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující rovnost*

$$\big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + \big(f(z)\big)^2 = 2f(x)f(y) + 2f(y)f(z) + 2f(z)f(x)$$

*pro všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$, pro která platí $x + y + z = 0$.*[3]

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou funkci, která vyhovuje zadání. Položením $x = y = z = 0$ obdržíme $3\big(f(0)\big)^2 = 6\big(f(0)\big)^2$ neboli $f(0) = 0$. Po nahrazení $-x$ za $y$ a položení $z = 0$, po kterých je zřejmě splněna rovnost $x + y + z = 0$, zjistíme s ohledem na předešlý výsledek, že platí

$$\begin{aligned} \big(f(x)\big)^2 + \big(f(-x)\big)^2 + \big(f(0)\big)^2 &= 2f(x)f(-x) + 2f(-x)f(0) + 2f(0)f(x), \\ \big(f(x)\big)^2 - 2f(x)f(-x) + \big(f(-x)\big)^2 &= 0, \\ \big(f(x) - f(-x)\big)^2 &= 0, \end{aligned}$$

odkud $f(x) = f(-x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Ukázali jsme tak, že funkce $f$ je sudá. Nahrazením $-x-y$ za $z$ zřejmě platí $x+y+z = 0$ pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ a s ohledem na sudost $f$ zaručující rovnost $f(x + y) = f(-x - y)$ obdržíme

$$\begin{aligned} \big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + \big(f(-x-y)\big)^2 &= 2f(x)f(y) + 2f(y)f(-x-y) + \\ &\quad + 2f(-x-y)f(x), \\ \big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + \big(f(x+y)\big)^2 &= 2f(x)f(y) + 2f(y)f(x+y) + \\ &\quad + 2f(x+y)f(x), \\ \big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + \big(f(x+y)\big)^2 &= 2f(x)f(y) + 2f(x+y)\big(f(x) + f(y)\big), \end{aligned} \tag{10.1}$$

kde $x, y \in \mathbb{Z}$ jsou libovolná. Označme $k = f(1) \in \mathbb{Z}$ a posuďme nyní důsledky, které z možných hodnot $k$ vyplývají pro předpis funkce $f$.

[3] Mezinárodní matematická olympiáda (2012).

V případě $k = f(1) = 0$ dostaneme položením $y = 1$ v (10.1) rovnost

$$\begin{aligned}\big(f(x)\big)^2+\big(f(1)\big)^2+\big(f(x+1)\big)^2&=2f(x)f(1)+2f(x+1)\big(f(x)+f(1)\big),\\ \big(f(x)\big)^2+\big(f(x+1)\big)^2&=2f(x+1)f(x),\\ \big(f(x)\big)^2-2f(x+1)f(x)+\big(f(x+1)\big)^2&=0,\\ \big(f(x)-f(x+1)\big)^2&=0,\end{aligned}$$

odkud plyne $f(x) = f(x + 1)$. Odtud vzhledem k předpokladu $f(1) = 0$ platí pro každé záporné $x \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = \ldots = f(x + (1 - x)) = 0$$

a pro kladné $x \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$f(x) = f(x - 1) = f(x - 2) = \ldots = f(x - (x - 1)) = 0.$$

Zjistili jsme tak, že v případě $f(1) = 0$ má hledaná funkce $f$ předpis tvaru $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{Z}$.

Předpokládejme naopak, že $k \neq 0$. Položením $x = y$ v (10.1) obdržíme rovnost

$$\begin{aligned}\big(f(x)\big)^2+\big(f(x)\big)^2+\big(f(2x)\big)^2&=2\big(f(x)\big)^2+2f(2x)\big(f(x)+f(x)\big),\\ \big(f(2x)\big)^2-4f(2x)f(x)&=0,\\ f(2x)\big(f(2x)-4f(x)\big)&=0,\end{aligned}$$

odkud plyne $f(2x) = 0$ nebo $f(2x) = 4f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Dosazením $x = 1$ tak dostaneme $f(2) = 0$ nebo $f(2) = 4f(1) = 4k$.

Pokud $f(2) = 0$, položme $y = 2$ v (10.1), díky čemuž získáme stejnými kroky jako výše u případu $k = 0$, kde jsme uvažovali $y = 1$, rovnost $f(x) = f(x + 2)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k faktu, že $f(1) = k$ a $f(2) = 0$, dojdeme stejnými úvahami jako výše k závěru, že předpis funkce $f$ je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ sudé},\\ k & \text{pro } x \text{ liché},\end{cases}$$

kde $k$ je nenulová celočíselná konstanta.

V opačném případě, kdy $f(2) = 4k \neq 0$, rozlišíme ještě možnosti, zda $f(4) = 0$, nebo $f(4) \neq 0$.

Je-li $f(4) = 0$, dostaneme stejnými úvahami jako v případě $k = 0$ po nahrazení $y = 4$ v (10.1) rovnost $f(x) = f(x+4)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Abychom nyní zdlouhavě neodvozovali hodnoty funkce $f$ pomocí několika rovností, uvědomme si, že výsledek

$f(x) = f(x+4)$ zaručuje, že funkce $f$ nabývá stejných hodnot pro všechna celá čísla, která dávají stejný zbytek po dělení 4, tj. patří do stejné zbytkové třídy modulo 4. Vzhledem k tomu, že $f(0) = f(4) = 0$, $f(1) = k$, $f(2) = 4k$ a že díky sudosti funkce $f$ platí rovnost $f(3) = f(-1+4) = f(-1) = f(1) = k$, je předpis hledané funkce $f$ tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \text{ tvaru } x = 4n, \\ k & \text{pro } x \text{ liché}, \\ 4k & \text{je-li } x \text{ tvaru } x = 4n+2, \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{Z}$ a $k$ je nenulová celočíselná konstanta.

Zbývá vyšetřit případ, kdy $f(2) = 4k \neq 0$ a zároveň $f(4) \neq 0$. Nerovnost $f(2x) \neq 0$ pro $x=2$ s ohledem na výše odvozený závěr znamená, že pro $x = 2$ musí platit $f(2x) = 4f(x)$ neboli $f(4) = 4f(2) = 16k$. Matematickou indukcí vzhledem k $n$ nyní ukážeme, že $f(n) = kn^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak je tomu pro $n = 1$ a $n = 2$.

Položením $x = 1$, $y = 2$, resp. $x = 1$, $y = 3$ v (10.1) zjistíme, že s ohledem na rovnosti $f(1) = k$, $f(2) = 4k$ a $f(4) = 16k$ platí

$$\begin{aligned} \big(f(1)\big)^2 + \big(f(2)\big)^2 + \big(f(3)\big)^2 &= 2f(1)f(2) + 2f(3)\big(f(1) + f(2)\big), \\ k^2 + 16k^2 + \big(f(3)\big)^2 &= 8k^2 + 10kf(3), \\ \big(f(3)\big)^2 - 10kf(3) + 9k^2 &= 0, \\ \big(f(3) - 9k\big)\big(f(3) - k\big) &= 0, \text{ odkud plyne } f(3) = 9k, \text{ nebo } f(3) = k, \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} \big(f(1)\big)^2 + \big(f(3)\big)^2 + \big(f(4)\big)^2 &= 2f(1)f(3) + 2f(4)\big(f(1) + f(3)\big), \\ k^2 + \big(f(3)\big)^2 + 256k^2 &= 2kf(3) + 32k^2 + 32kf(3), \\ \big(f(3)\big)^2 - 34kf(3) + 225k^2 &= 0, \\ \big(f(3) - 9k\big)\big(f(3) - 25k\big) &= 0, \text{ odkud plyne } f(3)=9k, \text{ nebo } f(3)=25k. \end{aligned}$$

Porovnáním obou výsledků snadno zjistíme, že $f(3) = 9k$. Rovnost $f(n) = kn^2$ tedy platí pro $n \in \{1, 2, 3\}$ a předpokládejme dále, že platí i pro všechna další přirozená čísla až po nějaké $n \geq 3$, dále pevně dané. Položením $x = 1$, $y = n$, resp. $x = 2$, $y = n-1$ v (10.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \big(f(1)\big)^2 + \big(f(n)\big)^2 + \big(f(n+1)\big)^2 &= 2f(1)f(n) + 2f(n+1)\big(f(1) + f(n)\big), \\ k^2 + k^2n^4 + \big(f(n+1)\big)^2 &= 2k^2n^2 + 2kf(n+1) + 2kn^2f(n+1), \end{aligned}$$

$$\big(f(n+1)\big)^2 - 2kf(n+1)\big(n^2+1\big) + k^2(n^2-1)^2 = 0,$$
$$\Big(f(n+1) - k(n+1)^2\Big)\Big(f(n+1) - k(n-1)^2\Big) = 0,$$

odkud plyne $f(n+1) = k(n+1)^2$, nebo $f(n+1) = k(n-1)^2$, respektive

$$\big(f(2)\big)^2+\big(f(n-1)\big)^2+\big(f(n+1)\big)^2=2f(2)f(n-1)+2f(n+1)\big(f(2)+f(n-1)\big),$$
$$16k^2+k^2(n-1)^4+\big(f(n+1)\big)^2=8k^2(n-1)^2+8kf(n+1)+2k(n-1)^2f(n+1),$$

$$\big(f(n+1)\big)^2 - 2kf(n+1)\big(4+(n-1)^2\big) + k^2\big(4-(n-1)^2\big)^2 = 0,$$
$$\Big(f(n+1) - k(n+1)^2\Big)\Big(f(n+1) - k(n-3)^2\Big) = 0,$$

odkud plyne $f(n+1) = k(n+1)^2$, nebo $f(n+1) = k(n-3)^2$. Porovnáním obou předchozích výsledků zjistíme, že $f(n+1) = k(n+1)^2$. Dokázali jsme tak, že $f(n) = kn^2$ pro všechna přirozená $n$ a s ohledem na výše odvozené výsledky, že $f$ je sudá a $f(0)=0$, je předpis hledané funkce $f$ tvaru $f(x) = kx^2$, kde $x \in \mathbb{Z}$ a $k$ je nenulová celočíselná konstanta.

Řešením jsou tedy pouze funkce ve tvaru $f(x) = 0$, $f(x) = kx^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \text{ tvaru } x = 4n, \\ k & \text{pro } x \text{ liché}, \\ 4k & \text{je-li } x \text{ tvaru } x = 4n+2, \end{cases} \qquad \text{a} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ sudé}, \\ k & \text{pro } x \text{ liché}, \end{cases}$$

kde $x \in \mathbb{Z}$ a $k$ je libovolná nenulová celočíselná konstanta. Dosazením do zadání se můžeme přesvědčit, že tyto funkce jsou opravdu řešením. Takovou zkoušku zde provedeme s ohledem na předpoklad $x+y+z=0$, kde uvážíme $x, y \in \mathbb{Z}$ libovolná a $z = -x-y$, pouze pro funkci $f(x) = kx^2$:

$$\begin{aligned} L:\ & \big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + \big(f(z)\big)^2 = k^2x^4 + k^2y^4 + k^2(-x-y)^4 = \\ & = k^2\Big(x^4+y^4+(x^2+2xy+y^2)^2\Big) = k^2\Big(2x^4+2y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2\Big), \\ P:\ & 2f(x)f(y) + 2f(y)f(z) + 2f(z)f(x) = 2k^2x^2y^2 + 2k^2y^2(-x-y)^2 + \\ & + 2k^2x^2(-x-y)^2 = k^2\Big(2x^4+2y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2\Big). \end{aligned}$$

□

**Příklad 10.4.** *Nalezněte alespoň jednu funkci $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, která rovnost*

$$yf\big(xf(y)\big) = f(x)$$

*splňuje pro každá $x, y \in \mathbb{Q}^+$.*[4]

[4] Mezinárodní matematická olympiáda (1990).

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci vyhovující zadání. Položením $x=y=1$ obdržíme $f\big(f(1)\big) = f(1)$, odkud s ohledem na definiční obor $f$, díky čemuž můžeme zadanou rovnost přepsat do tvaru $f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}$, dostaneme

$$f(1) = f\big(f(1)\big) = f\Big(1 \cdot f\big(f(1)\big)\Big) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1.$$

Nahrazením $x = 1$ v zadané rovnosti tak pro každé $y \in \mathbb{Q}^+$ získáme rovnost

$$yf\big(f(y)\big) = f(1) = 1. \tag{10.2}$$

Nahrazením $\frac{1}{f(y)}$ za $x$ v zadání dostaneme vzhledem k odvozenému výsledku $f(1)=1$ rovnost

$$\begin{aligned} yf\left(\frac{1}{f(y)}f(y)\right) &= f\left(\frac{1}{f(y)}\right), \\ y &= f\left(\frac{1}{f(y)}\right), \end{aligned}$$

díky které po dosazení $\frac{1}{f(y)}$ za $y$ v zadání platí pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ rovnost

$$\frac{1}{f(y)}f\left(xf\left(\frac{1}{f(y)}\right)\right) = f(x),$$

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{10.3}$$

Obdržená rovnost odpovídá modifikované Cauchyově funkcionální rovnici, jejíž každé řešení $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ má podle poznámky na straně 45 tvar $f(x) = x^c$, kde $x \in \mathbb{Q}^+$ a $c \in \mathbb{Z}$ je vhodná konstanta. Dosazením do zadání však zjistíme, že žádná taková funkce nemůže být řešením:

$$\begin{aligned} yf\big(xy^c\big) &= x^c, \\ x^c y^{c^2+1} &= x^c, \end{aligned}$$

protože jinak by muselo pro nějaké $c \in \mathbb{Z}$ platit $c^2 + 1 = 0$. Obtížnost konstrukce funkce $f$ vyhovující zadání příkladu je tak podložena tím, že to bude muset být nespojité řešení $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ modifikované Cauchyovy rovnice (10.3). Využijeme k tomu rozklady přirozených čísel na prvočinitele.

Nahrazením $\frac{1}{y}$ za $x$ v rovnosti (10.3) dostaneme $1=f(1)=f\left(\frac{1}{y}\,y\right)=f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)$ neboli $f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}$. Díky tomu pak po záměně $\frac{1}{y}$ za $y$ v (10.3) obdržíme

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

Uvědomme si, že každé kladné racionální číslo $x$ lze zapsat ve tvaru $x = \frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, což s ohledem na platnou rovnost (10.3) znamená, že stačí nalézt vhodný předpis funkce $f$ na množině všech prvočísel. Skutečně, pokud je totiž prvočíselný rozklad přirozeného čísla $n > 1$ tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $k \in \mathbb{N}$, platí opakovaným využitím (10.3) rovnost

$$f(n) = f\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdots f\left(p_k^{\alpha_k}\right) = f\left(p_1\right)^{\alpha_1} \cdots f\left(p_k\right)^{\alpha_k}.$$

Uvážíme-li nyní libovolné kladné racionální číslo $x$ ve tvaru $x = \frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, plyne s ohledem na $f(1) = 1$ a z výsledků odvozených výše rovnost $f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{f(n)}$, přičemž k vyjádření $f(m)$ a $f(n)$ stačí určit pouze hodnoty funkce $f$ pro ta prvočísla, která se vyskytují v rozkladu $m$ a $n$, jak jsme již ukázali.

Vzhledem k předchozímu zdůvodnění zřejmě nyní stačí nalézt vyhovující funkci $f\colon P \to \mathbb{Q}^+$, kde $P$ označuje množinu všech prvočísel.

Uvažme dvě libovolné posloupnosti $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ vzestupně seřazených prvočísel s vlastností, že každé prvočíslo $p \in P$ se vyskytuje pouze v jedné z těchto posloupností, a položme $f(r_n) = q_n$ a $f(q_n) = \frac{1}{r_n}$. Předpokládejme dále, že je funkce $f$ rozšířena i na obory $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ podle výše popsaného a ukažme, že taková funkce je opravdu řešením příkladu.

Takto určená funkce jistě splňuje pro každá $x, y \in P$ rovnost (10.3) a v případě $y = r_m \in (r_n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $y = q_m \in (q_n)_{n=1}^{\infty}$ obdržíme (s ohledem na odvozený výsledek $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$) v (10.2) rovnost

$$yf\big(f(y)\big) = r_m f\big(f(r_m)\big) = r_m f(q_m) = r_m \cdot \frac{1}{r_m} = 1,$$

respektive

$$yf\big(f(y)\big) = q_m f\big(f(q_m)\big) = q_m f\left(\frac{1}{r_m}\right) = q_m \cdot \frac{f(1)}{f(r_m)} = q_m \cdot \frac{1}{q_m} = 1.$$

Odtud díky již ověřené rovnosti (10.3) s libovolnými $x, y \in P$ plyne, že rovnost (10.2) platí pro libovolné $y \in \mathbb{N}$, a tedy (s ohledem na způsob, jakým jsme rozšířili funkci $f$ z $P$ na $\mathbb{N}$ a na $\mathbb{Q}^+$) i pro libovolné $y \in \mathbb{Q}^+$.

Rovnost ze zadání příkladu ale snadno plyne z (10.2) a (10.3), neboť vynásobením obou stran rovnosti (10.2) nenulovou hodnotou $f(x) \in \mathbb{Q}^+$, kde $x \in \mathbb{Q}^+$ je libovolné, dostaneme

$$\begin{aligned} yf(x)f\big(f(y)\big) &= f(x), \\ yf\big(xf(y)\big) &= f(x). \end{aligned}$$

Můžeme tak prohlásit, že jsme sestrojili řešení příkladu.

□

Doposud jsme při řešení funkcionálních rovnic hledali funkce, jejichž funkční hodnoty závisely na velikosti nezávislé proměnné bez ohledu na její zápis kupříkladu v některé číselné soustavě. Nyní zde v závěru této části kapitoly ale představíme takové funkcionální rovnice, v nichž hodnota hledané funkce bude záviset na cifrách, jakými je nezávislá proměnná ve vhodné soustavě zapsána. Základy problematiky číselných soustav považujeme za známé, nebudeme je proto v našem textu uvádět.

**Příklad 10.5.** *Určete všechny takové funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které splňují $f(0) = 0$ a rovnosti*

$$f(2n+1) = f(2n) + 1 = f(n) + 1$$

*pro každé $n \in \mathbb{N}$.*[5]

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci vyhovující všem předpokladům zadání. Uvědomme si, že každé přirozené číslo $n$ má ve dvojkové soustavě jednoznačný zápis

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}_{(2)} = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

kde $a_i \in \{0,1\}$ pro každé $i = 0, 1, \ldots, k$ a $a_k = 1$. Pak číslo $2n+1$ má zápis $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 1}_{(2)}$ a číslo $2n$ má zápis $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 0}_{(2)}$. Takže rovnosti ze zadání příkladu můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} f\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 1}_{(2)}\right) &= f\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 0}_{(2)}\right) + 1 = \\ &= f\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}_{(2)}\right) + 1, \end{aligned}$$

odkud indukcí vzhledem k číslu $k$ s ohledem na předpoklad $f(0) = 0$ snadno plyne, že $f\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}_{(2)}\right) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Funkce $f$ tak každému $n$ přiřazuje ciferný součet čísla $n$ ve dvojkové soustavě (zkouška je zde zřejmá).

Jediným řešením příkladu je tedy funkce, která každému $n \in \mathbb{N}_0$ přiřazuje hodnotu odpovídající počtu jedniček z jeho reprezentace v dvojkové číselné soustavě.

□

**Příklad 10.6.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující rovnosti*

$$f(1) = 1, \ f(2n) = 3f(n) \text{ a } f(2n+1) = 3f(n) + 1$$

*pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*[6]

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Všimněme si, že levé strany posledních dvou rovností ze zadání lze v určitém tvaru vypozorovat v předešlém

[5] [And, str. 149]

[6] Iberoamerická matematická olympiáda (1989).

příkladu, který souvisel s dvojkovou číselnou soustavou. Naopak u pravých stran těchto rovností vystupuje součin funkce s číslem 3, můžeme proto tušit, že jistou roli zde bude hrát reprezentace čísla v trojkové číselné soustavě, i když kvůli dvojkám ve výrazech $2n$ a $2n+1$ využijeme i soustavu dvojkovou. Naše pozorování nyní potvrdíme nalezením předpisu funkce $f$.

Libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$, dále pevně dané, lze zapsat jednoznačně ve tvaru konečného součtu $2^{k_m} + 2^{k_{m-1}} + \cdots + 2^{k_1} + 2^{k_0}$, kde $k_0 < k_1 < \ldots < k_{m-1} < k_m$ jsou vhodná přirozená čísla včetně nuly. Znamená to, že ve dvojkovém vyjádření čísla $n$ vystupují jedničky pouze na pozicích řádů $2^{k_m}$, $2^{k_{m-1}}, \ldots, 2^{k_1}, 2^{k_0}$. Opakovaným využitím zadaných rovností pak dostaneme

$$\begin{aligned}
f(n) &= f\left(2^{k_m} + 2^{k_{m-1}} + \cdots + 2^{k_1} + 2^{k_0}\right) = \\
&= f\left(2^{k_0}\left(2^{k_m-k_0} + 2^{k_{m-1}-k_0} + \cdots + 2^{k_1-k_0} + 1\right)\right) = \ldots = \\
&= 3^{k_0} f\left(2^{k_m-k_0} + 2^{k_{m-1}-k_0} + \cdots + 2^{k_1-k_0} + 1\right) = \\
&= 3^{k_0}\left(3f\left(2^{k_m-k_0-1} + 2^{k_{m-1}-k_0-1} + \cdots + 2^{k_1-k_0-1}\right) + 1\right) = \\
&= 3^{k_0+1} f\left(2^{k_m-k_0-1} + 2^{k_{m-1}-k_0-1} + \cdots + 2^{k_1-k_0-1}\right) + 3^{k_0} = \ldots = \\
&= 3^{k_m} + 3^{k_{m-1}} + \cdots + 3^{k_1} + 3^{k_0}.
\end{aligned}$$

Pravá strana právě obdrženého výsledku odpovídá hodnotě takového čísla, v jehož zápise v trojkové číselné soustavě se vyskytují pouze jedničky, a to na pozicích řádů $3^{k_m}$, $3^{k_{m-1}}, \ldots, 3^{k_1}, 3^{k_0}$.

Zjistili jsme tak, že předpis hledané funkce $f$ přiřazuje každému přirozenému $n$ hodnotu, kterou získáme tak, že číslo $n$ vyjádříme ve dvojkové soustavě a následně toto vyjádření převedeme zpět do desítkové číselné soustavy, jakoby se jednalo o převod z číselné soustavy o základu tři. Zkouška je zřejmá.

□

## 10.2 Funkcionální rovnice v oboru mnohočlenů

V zadání funkcionálních rovnic, které v této části i s řešením představíme, je na hledané vyhovující funkce kladen požadavek, že jejich předpis má tvar nějakého mnohočlenu. To nám umožňuje převést hledání předpisu funkce na výpočet konečné množiny čísel rovných koeficientům příslušného mnohočlenu, které do rovnice dosadíme jako neznámé a pak pro ně odvozujeme ekvivalentní soustavu rovnic (zpravidla porovnáním koeficientů u stejných mocnin nezávislé proměnné). Základy teorie mnohočlenů považujeme za známé, připomeňme jen následující: je-li $f$ nějaký mnohočlen stupně $n \in \mathbb{N}_0$, pak $f \circ f$ je opět mnohočlenem, jehož stupeň je roven $n^2$, nebo označuje-li $g$ mnohočlen stupně $m \in \mathbb{N}$ splňující rovnost $g(a) = 0$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, pak $\frac{g(x)}{x-a}$ je opět mnohočlen, a to stupně $m - 1$.

Jak je zvykem, značíme v následujících příkladech hledané mnohočleny písmeny $p$, $q$, atd. a zápisem $p \in \mathbb{R}[x]$ vyjadřujeme, že $p$ je mnohočlen s reálnými koeficienty, tzn. $p(x) = a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, přičemž $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. V případě $a_n \neq 0$ číslo $n$ zvané *stupeň* $p$ značíme $\operatorname{st} p$.

**Příklad 10.7.** *Určete všechny nekonstantní mnohočleny $p \in \mathbb{R}[x]$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost*[7]

$$p\left(x^3 + 1\right) = p(x+1)^3.$$

*Řešení.* Nechť $p$ označuje libovolný mnohočlen splňující všechny předpoklady zadání. Uvažme dále takový mnohočlen $q \in \mathbb{R}[x]$, který pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje rovnost $q(x) = p(x+1)$, a zapišme ho ve standardním tvaru

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$ a $n \geq 1$ podle zadání. Z rovnosti ze zadání tak plyne $q\left(x^3\right) = q(x)^3$ neboli

$$a_n x^{3n} + a_{n-1}x^{3n-3} + \cdots + a_0 = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\right)^3. \tag{10.4}$$

Připusťme, že existuje index $k$ $(0 \leq k < n)$, pro který platí $k \neq 0$, a ze všech takových $k$ vyberme největší, takže pak máme $a_i = 0$, kdykoliv $k < i < n$. Protože pro takové $k$ platí $3k < 2n+k < 3n$, je koeficient u $x^{2n+k}$ na levé straně (10.4) roven nule, zatímco na pravé straně (10.4) je zřejmě roven $3a_n^2 \cdot a_k$. Proto platí rovnost $0 = 3a_n^2 a_k$. To je ale spor s tím, že $a_n \neq 0$ a podle předpokladu také $a_k \neq 0$. To znamená, že žádné $k \in \mathbb{N}_0$ splňující $a_k \neq 0$ a $k < n$ neexistuje. Platí tedy $q(x) = a_n x^n$, díky čemuž přejde rovnost (10.4) do tvaru

$$a_n x^{3n} = a_n^3 x^{3n},$$

odkud plyne $a_n = 1$, nebo $a_n = -1$.

S ohledem na zavedení mnohočlenu $q$ tak dostaneme předpisy hledaných mnohočlenů $p$ ve tvaru

$$p\,(x+1) = q(x) = \pm x^n \quad \text{neboli} \quad p(x) = \pm(x-1)^n, \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

Snadným dosazením do rovnosti v zadání dospějeme k závěru, že všechny takové mnohočleny $p$ jsou vyhovující.

□

[7] [And, str. 197]

**Příklad 10.8.** *Určete všechny mnohočleny $p \in \mathbb{R}[x]$, které splňují rovnost*

$$p(x)p\left(2x^2+1\right) = p\left(x^2\right)\left(p(2x+1)-4x\right)$$

*pro každé $x \in \mathbb{R}$.*[8]

*Řešení.* Označme $p$ jako mnohočlen splňující všechny předpoklady zadání. Je-li $p$ konstantním mnohočlenem tvaru $p(x) = 0$, bude rovnost ze zadání splněna triviálně. Nalezli jsme tak jedno (triviální) řešení a předpokládejme dále, že $p(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Mnohočlen $p$ můžeme zapsat ve tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}_0 \text{ a } a_n \neq 0,$$

odkud úpravami dostaneme

$$p(2x+1) = a_n(2x+1)^n + a_{n-1}(2x+1)^{n-1} + \cdots + a_0 = 2^n p(x) + r(x), \tag{10.5}$$

kde $r$ je vhodný mnohočlen, jehož stupeň $m$ je zřejmě menší než stupeň mnohočlenu $p$, tj. $m < n$. S ohledem na předchozí vztah přejde rovnost ze zadání do tvaru

$$\begin{aligned} p(x)\left(2^n p\left(x^2\right) + r\left(x^2\right)\right) &= p\left(x^2\right)\left(2^n p(x) + r(x) - 4x\right), \\ p(x) r\left(x^2\right) &= p\left(x^2\right)\left(r(x) - 4x\right). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Je-li $r$ nulový mnohočlen ($r(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak z obdržené rovnosti plyne, že také $p$ je nulovým mnohočlenem, což je spor s tím, že $p(x) \neq 0$ pro nějaké $x$. Tuto možnost tedy můžeme dále vyloučit.

Předpokládejme, že $m \geq 2$. Porovnáním stupňů mnohočlenů vystupujících na levé a pravé straně rovnosti (10.6) s ohledem na fakt, že podle předpokladu $m \geq 2$ platí $\operatorname{st}(r(x) - 4x) = \operatorname{st} r(x)$, dostaneme $n + 2m = 2n + m$ neboli $n = m$, což je spor s nerovností $m < n$, která vyplývá z toho, jakým způsobem jsme zavedli mnohočlen $r$. Platí tedy $m \leq 1$.

Označme dále $k$ jako stupeň mnohočlenu $r(x) - 4x$, který zřejmě splňuje nerovnosti $k \leq 1$ a $k \leq m \leq 1$. Porovnáním stupňů mnohočlenů obou stran rovnosti (10.6) jako v předchozím odstavci dojdeme k závěru $n + 2m = 2n + k$. Uvědomme si však, že pro $k = m$ dojdeme ke sporu $m = n$ jako výše, proto vzhledem k podmínkám $k \leq 1$, $k \leq m \leq 1$ musí platit rovnosti $m = 1$, $k = 0$, odkud z rovnosti $n + 2m = 2n + k$ dostaneme $n = 2$. To ale znamená, že $p$ musí být kvadratickým mnohočlenem a s ohledem na odvozený stupeň $k = \operatorname{st}(r(x) - 4x) = 0$, platí $r(x) = 4x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Rovnost uvedená v (10.5) tak vzhledem k dosaženým výsledkům přejde do tvaru

$$p(2x+1) = 4p(x) + 4x + c. \tag{10.7}$$

[8] [And, str.200]

Abychom si usnadnili práci při hledání konkrétní hodnot koeficientů mnohočlenu $p$, odvodíme nyní ještě jeho další vlastnost. K tomu volbou $x = 1$ v rovnosti ze zadání zjistíme, že platí

$$p(1)p\,(2+1) = p\,(1)\left(p(2+1) - 4\right) \quad \text{neboli} \quad 0 = -4p(1),$$

odkud plyne $p(1) = 0$. Číslo 1 je tedy nulovým bodem $p$, díky čemuž můžeme představu o hledaném předpisu $p$ zpřesnit do tvaru $p(x) = a(x-1)(x-b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Dosazením tohoto tvaru do rovnosti (10.6) s ohledem na vztah $r(x) = 4x + c$ dostaneme

$$\begin{aligned} a(x-1)(x-b)\bigl(4x^2+c\bigr) &= a\bigl(x^2-1\bigr)\bigl(x^2-b\bigr)(4x+c-4x),\\ a(x-1)\bigl(4x^3+cx-4bx^2-cb\bigr) &= a(x-1)(x+1)\bigl(cx^2-cb\bigr),\\ a(x-1)\bigl(4x^3-4bx^2+cx-cb\bigr) &= a(x-1)\bigl(cx^3+cx^2-cbx-cb\bigr), \end{aligned}$$

odkud porovnání členů se stejnou mocninou $x$ vede k $4x^3 = cx^3$ neboli $c = 4$ a také $-4bx^2 = cx^2$, což s ohledem na rovnost $c = 4$ znamená, že $b = -1$. Podobně dosazení do (10.7)) dává

$$\begin{aligned} a(2x)(2x+1-b) &= 4\bigl(a(x-1)(x-b)\bigr) + 4x + c,\\ 4ax^2 + 2ax - 2abx &= 4a\left(x^2 - bx - x + b\right) + 4x + c,\\ 4ax^2 + (2a-2ab)x &= 4ax^2 + (4-4ab-4a)x + c + 4ab, \end{aligned}$$

odkud plyne $(2a-2ab)x = (4-4ab-4a)x$, což s ohledem na předešlý výsledek $b = -1$ znamená, že $2a + 2a = 4 + 4a - 4a$ neboli $a = 1$. Pro mnohočlen $p$ ve tvaru $p(x) = a(x-1)(x-b)$ tedy platí $a = 1$ a $b = -1$.

Získali jsme tak předpis ve tvaru $p(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$, který ještě podrobíme zkoušce dosazením do rovnosti ze zadání:

$$\begin{aligned} L:\ & p(x)p\left(2x^2+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(\left(2x^2+1\right)^2 - 1\right) = \left(x^2-1\right)\left(4x^4+4x^2\right) =\\ & = 4x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = 4x^2\left(x^4-1\right),\\ P:\ & p\left(x^2\right)\left(p(2x+1)-4x\right) = \left(x^4-1\right)\left((2x+1)^2-1-4x\right) = \left(x^4-1\right)\cdot 4x^2. \end{aligned}$$

Příkladu tedy vyhovují pouze mnohočleny tvaru $p(x) = 0$ a $p(x) = x^2 - 1$.

□

**Příklad 10.9.** *Dokažte, že neexistují takové mnohočleny $o, p, q, r \in \mathbb{R}[x]$, které rovnost*

$$1 + xy + x^2y^2 = o(x)q(y) + p(x)r(y)$$

*splňují pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*[9]

[9] Matematická soutěž Putnam (2003).

*Důkaz.* Důkaz neexistence takových mnohočlenů provedeme sporem, předpokládejme proto, že $o, p, q, r \in \mathbb{R}[x]$ označuje mnohočleny splňující rovnost uvedenou v zadání pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Volbou $y=-1$, $y=0$ a $y=1$ postupně dostaneme následující tři rovnosti

$$\begin{aligned} 1-x+x^2 &= o(x)q(-1)+p(x)r(-1), \\ 1 &= o(x)q(0)+p(x)r(0), \\ 1+x+x^2 &= o(x)q(1)+p(x)r(1). \end{aligned}$$

Uvědomme si, že každý ze tří mnohočlenů vystupujících na pravé straně je lineární kombinací $o$ a $p$, což znamená, že všechny tyto tři mnohočleny jsou lineárně závislé. Všimněme si však, že na levých stranách obdržených rovností vystupují mnohočleny $1-x+x^2$, $1$ a $1+x+x^2$, které jsou lineárně nezávislé. Opravdu, z rovnosti $A(1-x+x^2)+B\cdot 1+C(1+x+x^2)=0$ dostaneme

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0, \\ -A+C &= 0, \\ A+C &= 0, \end{aligned}$$

odkud je již snadno vidět, že soustava platí pouze pro $A=B=C=0$.

Obdrželi jsme tak spor: na pravých stranách vypsaných rovností vystupují lineárně závislé mnohočleny, zatímco na levých stranách vystupují lineárně nezávislé. Tímto je požadované tvrzení ze zadání dokázáno.

□

## 10.3 Funkcionální nerovnice

Funkcionální nerovnice sice patří do celé problematiky funkcionálních rovnic spíše na její okraj, nicméně jsou taktéž zařazovány do různých matematických soutěží (viz příklady 10.11, 10.12 a 10.13). Navíc metody a elementární obraty, které jsme v naší disertaci představili pro funkcionální rovnice, lze využít i při řešení funkcionálních nerovnic.

Na následujícím příkladu, který je převzat ze článku [CŠ2] pojednávající o základních metodách řešení těchto nerovnic, si čtenář může všimnout, že u některých z nich vystačíme pouze se specifikací proměnné a základními algebraickými znalostmi.

**Příklad 10.10.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ splňují nerovnost*[10]

$$xf(y)+yf(x) \geq f(x)f(y)+xy.$$

[10] [CŠ2, str. 322]

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci splňující zadání. Volbou $x = y$ získáme po úpravách nerovnost

$$\begin{aligned} xf(x) + xf(x) &\geq f(x)f(x) + xx, \\ 0 &\geq \big(f(x)\big)^2 - 2xf(x) + x^2, \\ 0 &\geq \big(f(x) - x\big)^2, \end{aligned}$$

které zřejmě vyhovuje pouze taková funkce $f$, jejíž předpis je tvaru $f(x) = x$.

Zjistili jsme tedy, že zadaná nerovnost může mít řešení pouze ve tvaru $f(x) = x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením do zadání nyní ověříme, že taková funkce skutečně splňuje zadání: $xy + yx \geq xy + xy$, tato nerovnost ovšem platí triviálně jako rovnost. Funkce $f(x) = x$ je tedy opravdu řešením.

□

**Příklad 10.11.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ nerovnost*[11]

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání. Nejdříve zjistíme, jaké jsou možné hodnoty funkce $f$ v bodech 0 a 1. Uvažme nejdříve dosazení $x = y = z = 0$, po kterém získáme nerovnost

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(0)f(0) \geq \frac{1}{4} \quad \text{neboli} \quad \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

Vidíme, že jedinou přípustnou hodnotou funkce $f$ v bodě 0 je $\frac{1}{2}$. Stejným postupem ukážeme totéž pro hodnotu $f(1)$.

Položíme-li nyní v zadání $y = z = 1$, dostaneme s ohledem na $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - f(x)f(1) \geq \frac{1}{4} \quad \text{neboli} \quad f(x) \geq \frac{1}{2}. \tag{10.8}$$

Naopak dosazením $y = z = 0$ s přihlédnutím k $f(0) = \frac{1}{2}$ obdržíme

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(x)f(0) \geq \frac{1}{4} \quad \text{neboli} \quad f(x) \leq \frac{1}{2}. \tag{10.9}$$

Z nerovnosti (10.8) a (10.9) plyne, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, a tedy je $f(x) = \frac{1}{2}$. Snadným dosazením se přesvědčíme, že nalezená konstantní funkce $f(x) = \frac{1}{2}$ je opravdu řešením:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

□

[11] Vietnamská matematická olympiáda (1991).

**Příklad 10.12.** *Dokažte, že pro každou funkci* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *nerovnosti*

$$f(x+19) \le f(x) + 19, \qquad f(x+94) \ge f(x) + 94,$$

*platí rovnost* $f(x+1) = f(x) + 1$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$.[12]

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce splňující zadání. Položíme-li v zadaných nerovnostech $x = y + 19(n-1)$, resp. $x = y + 94(m-1)$ pro nějaká $n, m \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$, obdržíme

$$\begin{aligned} f(y+19n) &= f\Big((y+19(n-1))+19\Big) \le f\Big((y+19(n-2))+19\Big) + 19 \le \dots \le \\ &\le f\Big((y+19(n-n))+19\Big) + 19(n-1) = f(y+19) + 19(n-1) \le f(y) + 19n, \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} f(y+94m) &= f\Big((y+94(m-1))+94\Big) \ge f\Big((y+94(m-2))+94\Big) + 94 \ge \dots \ge \\ &\ge f\Big((y+94(m-m))+94\Big) + 94(m-1) = f(y+94) + 94(m-1) \ge f(y) + 94m. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tak, že pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+19n) \le f(x) + 19n, \qquad f(x+94m) \ge f(x) + 94m. \tag{10.10}$$

Uvažme dále nahrazení $x - 19n$ za $x$ v první nerovnosti, resp. $x - 94m$ za $x$ v druhé nerovnosti, dostaneme tak

$$\begin{aligned} f\big((x-19n)+19n\big) &\le f(x-19n) + 19n, \\ f(x) &\le f(x-19n) + 19n, \\ f(x) - 19n &\le f(x-19n), \end{aligned} \tag{10.11}$$

respektive

$$\begin{aligned} f\big((x-94m)+94m\big) &\ge f(x-94m) + 94m, \\ f(x) &\ge f(x-94m) + 94m, \\ f(x) - 94m &\ge f(x-94m). \end{aligned} \tag{10.12}$$

Nyní využijeme faktu, že $1 = 5\cdot 19 - 94 = 18\cdot 94 - 89\cdot 19$. Položme $n = 5$ a $x = y - 94$ v první nerovnosti uvedené v (10.10), čímž s ohledem na (10.12) získáme

$$\begin{aligned} f(y+1) &= f\big((y-94) + 19\cdot 5\big) \overset{(10.10)}{\le} f(y-94) + 19\cdot 5 \overset{(10.12)}{\le} \\ &\overset{(10.12)}{\le} f(y) - 94 + 19\cdot 5 = f(y) + 1. \end{aligned}$$

[12] Rakousko-polská matematická soutěž (1994).

Odtud vidíme, že po přeznačení platí $f(x+1) \leq f(x)+1$. Položme $m = 18$ a $x = y - 89{\cdot}19$ v druhé nerovnosti uvedené v (10.10), čímž s ohledem na (10.11) získáme

$$f(y+1) = f\big((y-89{\cdot}19)+94{\cdot}18\big) \overset{(10.10)}{\geq} f(y-89{\cdot}19)+94{\cdot}18 \overset{(10.11)}{\geq}$$
$$\overset{(10.11)}{\geq} f(y) - 89{\cdot}19 + 94{\cdot}18 = f(y)+1.$$

Odtud plyne, že po přeznačení je $f(x+1) \geq f(x)+1$. Dohromady tak pro každé $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$f(x+1) \leq f(x)+1 \leq f(x+1),$$

což znamená, že $f(x+1) = f(x)+1$ a tvrzení je dokázáno.

$\square$

**Příklad 10.13.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ nerovnost*[13]

$$f(xy) \leq xf(y).$$

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci vyhovující zadání. Položením $y = 0$ dostaneme nerovnost

$$f(0) \leq xf(0),$$
$$f(0)(1-x) \leq 0,$$

která má být splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto zřejmě platí $f(0) = 0$. Pro libovolná kladná $x, y$ plyne ze zadání nerovnost

$$xf(y) = xf\left(\frac{y}{x}x\right) \leq x{\cdot}\frac{y}{x}f(x) = yf(x) \quad \text{neboli} \quad xf(y) \leq yf(x).$$

Po vzájemné záměně $x$ za $y$ obdržíme $yf(x) \leq xf(y)$, což s ohledem na předešlý výsledek znamená, že pro všechna $x, y > 0$ platí rovnost $yf(x) = xf(y)$. Volbou $y = 1$ odtud získáme předpis funkce $f$ pro kladná $x$ ve tvaru $f(x) = ax$, kde $a = f(1) \in \mathbb{R}$. Podobnou úvahou nyní zjistíme předpis funkce $f$ pro záporná $x$.

Pro libovolná kladná $x, y$ obdržíme s ohledem na zadání nerovnost

$$xf(-y) = xf\left(\frac{y}{x}{\cdot}(-x)\right) \leq x{\cdot}\frac{y}{x}{\cdot}f(-x) = yf(-x) \quad \text{neboli} \quad xf(-y) \leq yf(-x).$$

Po vzájemné záměně $x$ za $y$ dostaneme $yf(-x) \leq xf(-y)$, což vzhledem k předešlému výsledku znamená, že pro všechna $x, y > 0$ platí rovnost $yf(-x) = xf(-y)$.

[13] Maďarská matematická olympiáda (2008).

Odtud volbou $x = -z$ a $y = 1$, kde $z$ je libovolné záporné číslo, obdržíme předpis funkce $f$ ve tvaru $f(z) = -f(-1)z$ neboli $f(z) = bz$ pro každé $z < 0$, kde $b = -f(-1)$.

Nalezli jsme tak předpis funkce $f$ jak pro kladná, tak pro záporná reálná čísla (díky rovnosti $f(0)=0$ je možné oba předpisy uvážit i pro $x=0$). Uvědomme si však, že pro konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ vystupujících v takovém předpisu platí s ohledem na zadání následující nerovnost

$$a = f(1) = f\big((-1)(-1)\big) \leq -f(-1) = b \quad \text{neboli} \quad a \leq b.$$

Řešením jsou tedy funkce tvaru

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{pro } x \geq 0, \\ bx & \text{pro } x \leq 0, \end{cases}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty splňující $a \leq b$. Dosazením se lze přesvědčit, že takové funkce opravdu splňují zadání. Stačí jen rozlišit případy, jaká znaménka mají čísla $x, y$ dosazovaná do nerovnosti $f(xy) \leq xf(y)$.

$\square$

## 10.4 Problém vnořených odmocnin

V této části kapitoly ukážeme, že pomocí jisté funkcionální rovnice lze vyřešit problém, který představil velmi talentovaný indický matematik Srinivasa Ramanujan (1887–1920) ve článku uveřejněném v *Journal of the Indian Mathematical Society* v roce 1911 ([Sma, str. 33]). Později jej i sám (jako jediný) vyřešil. Ramanujan se ve zmíněném příspěvku zabýval vnořenými odmocninami a položil otázku, jakému číslu je roven nekonečný výraz

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}}\,.$$

Odvodil (jinými prostředky než jaké použijeme my), že výraz s vnořenými odmocninami má hodnotu rovnu třem. Ukázat, že tomu opravdu tak je, lze formálně velice jednoduše postupným odmocňováním:

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} = \dots,$$

my však provedeme důkaz v obecnější podobě bez využití znalosti, že je výraz roven třem. Abychom tak mohli učinit, odvodíme nejdříve dostatečnou podmínku konvergence, kdy má nekonečný výraz

$$\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + b_3\sqrt{\ldots}}}}$$

s kladnými parametry $a_n, b_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, konečnou hodnotu. Jak ukážeme, stačí, aby posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ nebyla příliš „rychle rostoucí“. Dodejme ještě, že (konečnou či nekonečnou) hodnotou zapsaného nekonečného výrazu rozumíme limitu rostoucí posloupnosti hodnot výrazů

$$\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}},\ \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3}}},\ \ldots$$

Předpokládejme, že posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nejvýše stejně tak „rychle rostoucí“ jako geometrická posloupnost (s kladnými členy), tzn. existuje takové $k \in \mathbb{R}^+$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(a_{n+1} + b_{n+1}) \le k^n(a_1 + b_1).$$ [14]

Díky tomu jsme již schopni odvodit horní odhad výše uvedeného nekonečného výrazu:[15]

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_1{+}b_1\sqrt{a_2{+}b_2\sqrt{a_3{+}b_3\sqrt{\ldots}}}} &\le \sqrt{(a_1{+}b_1)\sqrt{(a_2{+}b_2)\sqrt{(a_3{+}b_3)\sqrt{\ldots}}}} \le \\
&\le \sqrt{(a_1{+}b_1)\sqrt{k(a_1{+}b_1)\sqrt{k^2(a_1{+}b_1)\sqrt{\ldots}}}} = \\
&= (a_1 + b_1)^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n} \cdot k^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots} = \\
&= (a_1 + b_1) \cdot k^{\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}} = (a_1 + b_1) \cdot k^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \\
&= k(a_1 + b_1).
\end{aligned}$$

[14] Uvědomme si, že i pro mnohem „rychleji rostoucí“ posloupnosti, než jsou geometrické, má námi zkoumaný nekonečný výraz konečnou hodnotu. Srovnávání s geometrickou posloupností je však pro naše potřeby dostačující.

[15] V úpravách jsme využili známého vzorce pro součet geometrické řady, z něhož plyne $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Součet řady $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, která je zřejmě konvergentní (stačí použít jedno ze základních kritérií konvergence), získáme ze stejného vzorce po přeskládání jejích členů:

$$s{=}\frac{1}{2}{+}\frac{1{+}1}{4}{+}\frac{1{+}2}{8}{+}\cdots = \left(\frac{1}{2}{+}\frac{1}{4}{+}\frac{1}{8}{+}\ldots\right){+}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}{+}\frac{2}{4}{+}\frac{3}{8}{+}\ldots\right){=}1{+}\frac{1}{2}s \ \text{ neboli } s = 2.$$

Jak vidíme, bez ohledu na velikost kladného kvocientu $k$ má nekonečný výraz s vnořenými odmocninami vždy konečnou hodnotu. Tím jsme odvodili dostatečnou podmínku konvergence kladenou na čísla $a_n$, $b_n$, jak jsme slíbili výše.

Nyní můžeme zcela oprávněně definovat funkci $f\colon \langle 1, \infty) \to \mathbb{R}$ následujícím předpisem

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{\dots}}}}\,, \tag{10.13}$$

neboť pro $x \geq 1$ je splněna námi odvozená dostatečná podmínka konvergence. Stačí, když v ní položíme $k = 2$, a okamžitě tak získáme pro každé $n \in \mathbb{N}$ platné nerovnosti:

$$\bigl(1 + (x+n)\bigr) \leq 2^n(1+x).$$

Jak si můžeme všimnout, je funkce $f$ nezáporná a vzhledem k výše uvedenému hornímu odhadu splňuje nerovnost $f(x) \leq 2(x+1)$ pro každé $x \geq 1$. Po jejím umocnění dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} \bigl(f(x)\bigr)^2 &= 1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{\dots}}}, \\ \bigl(f(x)\bigr)^2 &= 1 + xf(x+1) \quad \text{pro každé } x \geq 1. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Nalezneme-li nyní patřičné nezáporné řešení funkcionální rovnice (10.14), pak snadno zjistíme (nejen) hodnotu funkce $f$ z (10.13) pro $x = 2$, čímž vyřešíme Ramanujanův problém.

Před samotným vyřešením rovnice (10.14) ještě zpřesníme dolní odhad nezáporných hodnot funkce $f$. Jak se čtenář bude moci dále přesvědčit, je tato informace (spolu s horním odhadem) v řešení rovnice (10.14) klíčová.

Vzhledem k předpisu funkce $f$ platí pro každé $x \geq 1$ nerovnost

$$f(x) \geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots}}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = x^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x \geq \frac{x+1}{2},$$

odkud s ohledem na horní odhad hodnot funkce $f$ pro $x \geq 1$ dostáváme

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1). \tag{10.15}$$

Nyní již máme vše potřebné ke zformulování a vyřešení následujícího příkladu, díky němuž snadno odpovíme na Ramanujanův problém.

**Příklad 10.14.** *Najděte funkci* $f\colon \langle 1,\infty) \to \mathbb{R}$, *která pro každé* $x \in \langle 1,\infty)$ *splňuje rovnost* (10.14) *a nerovnosti* (10.15), *které ještě zopakujeme:*

$$\big(f(x)\big)^2 = 1 + xf(x+1), \tag{10.14}$$
$$\frac{x+1}{2} \le f(x) \le 2(x+1). \tag{10.15}$$

*Řešení.* Odhadem $\frac{1}{2} < 1 < 2$ prvního sčítance v pravé straně (10.14), resp. dosazením $x$ za $x+1$ v nerovnostech (10.15) obdržíme

$$\frac{1}{2} + xf(x+1) < \big(f(x)\big)^2 < 2 + xf(x+1),$$

respektive

$$\frac{x+2}{2} \le f(x+1) \le 2(x+2).$$

Dosazením dolní a horní hranice z posledních nerovností za $f(x+1)$ v předešlých nerovnostech dostaneme

$$\frac{1}{2} + x\frac{x+2}{2} \le \frac{1}{2} + xf(x+1) < \big(f(x)\big)^2 < 2 + xf(x+1) \le 2 + 2x(x+2)$$

neboli

$$\begin{aligned}\frac{1+x(x+2)}{2} &< \big(f(x)\big)^2 < 2\big(1+x(x+2)\big),\\ \frac{(x+1)^2}{2} &< \big(f(x)\big)^2 < 2(x+1)^2.\end{aligned}$$

Odmocněním všech stran, které jsou zřejmě kladné, získáme s ohledem na $x \ge 1$ a $f(x) \ge 1$ z předešlé nerovnosti

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} < f(x) < \sqrt{2}(x+1). \tag{10.16}$$

Nyní celý postup opakujeme s tím rozdílem, že místo (10.15) uvážíme nerovnosti (10.16) a tomu přizpůsobíme i úpravu pravé strany rovnosti (10.14). Takto získáme výsledky ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + xf(x+1) < \big(f(x)\big)^2 < \sqrt{2} + xf(x+1),$$

respektive

$$\frac{x+2}{\sqrt{2}} \le f(x+1) \le \sqrt{2}(x+2),$$

odkud (dosazením levé a pravé strany z poslední složené nerovnosti za $f(x+1)$ v příslušných stranách předešlé složené nerovnosti) dojdeme k závěru

$$\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} < \big(f(x)\big)^2 < \sqrt{2}(x+1)^2.$$

Odmocněním všech stran, které jsou zřejmě kladné, dostaneme

$$\frac{x+1}{2^{\frac{1}{4}}} < f(x) < 2^{\frac{1}{4}}(x+1).$$

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále a po $k$ krocích bychom zřejmě získali nerovnosti

$$\frac{x+1}{2^{\frac{1}{2k}}} < f(x) < 2^{\frac{1}{2k}}(x+1).$$

Pro $k \to \infty$ tak předešlý výsledek vede k neostrým nerovnostem

$$x+1 \leq f(x) \leq x+1,$$

odkud $f(x) = x+1$ pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$. Nalezli jsme tak předpis funkce $f$, který ještě ověříme dosazením do rovnosti (10.14) v zadání:

$$\begin{aligned} L:&\ \big(f(x)\big)^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1, \\ P:&\ 1 + xf(x+1) = 1 + x(x+1+1) = x^2+2x+1. \end{aligned}$$

Nakonec nerovnosti uvedené v (10.15) pro nalezenou funkci $f(x) = x+1$ zřejmě také platí pro každé $x \geq 1$.

$\square$

Nalezli jsme předpis funkce $f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{\ldots}}}}$ ve tvaru $f(x) = x+1$, díky čemuž již snadno vyčíslíme nekonečný výraz s vnořenými odmocninami pro jakékoliv $x \in \langle 1, \infty)$. Ramanujanův problém lze nyní vyřešit snadným dopočítáním funkční hodnoty funkce $f$ v bodě $x = 1$ :

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\ldots}}}} = f(2) = 2 + 1 = 3.$$

## 10.5 Příklady s řešením uvedeným v závěru práce

**Příklad 10.15.** *Zjistěte, zda existuje taková rostoucí funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která splňuje $f(2) = 3$ a rovnost*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

*pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.*[16]

**Příklad 10.16.** *Nechť $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je taková funkce, že rozdíl $f(m) - f(n)$ je dělitelný číslem $f(m-n)$ pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že pro všechna tato $m$, $n$ splňující navíc nerovnost $f(m) \leq f(n)$ je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$.*[17]

**Příklad 10.17.** *Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, které pro každé $x \in \mathbb{Q}^+$ splňují obě následující podmínky:*[18]

1) $f(x+1) = f(x) + 1$,

2) $f(x^2) = (f(x))^2$.

**Příklad 10.18.** *Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$, pro kterou platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$ je splněna implikace*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) = f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

*Dokažte, že $f(x) = 1$ pro všechna racionální $x \geq 1$.*[19]

[16] [And, str. 144]
[17] Mezinárodní matematická olympiáda (2011).
[18] Ukrajinská matematická olympiáda (1997).
[19] [Ven, str. 114]

# Kapitola 11

# Řešení příkladů

V této části práce čtenář nalezne řešení všech příkladů, které jsme v předešlých kapitolách uváděli pouze se zadáním a odkazem na zdroj. Pro lepší orientaci jsou zde tyto příklady seřazeny podle kapitol a taktéž stejně očíslovány. Podle čísel kapitol číslujeme i vztahy v řešeních.

## 11.1 Kapitola 2

**Příklad 2.11.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí. Položíme-li $x = y = 0$, pak ze zadané funkcionální rovnice dostaneme

$$f(0) - 2f(0) + f(0) - 2f(0) = -2, \text{ odkud } f(0) = 1.$$

První záměna $y = x$ (místo $y$ píšeme $x$), s ohledem na fakt, že platí $f(0) = 1$, vede na rovnost

$$\begin{aligned} f(2x) - 2f(0) + f(x) - 2f(x) &= x - 2, \\ f(2x) &= f(x) + x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dosazením hodnoty 0 za $x$ v původní funkcionální rovnici dostaneme

$$\begin{aligned} f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) &= y - 2, \\ 2f(-y) &= 3 - y - f(y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dostali jsme tak tři nutné podmínky $f(0) = 1$, (2.1), (2.2), které nyní využijeme, budeme-li v zadané rovnici psát $2x$ místo $y$, obdržíme

$$\begin{aligned} f(3x) - 2f(-x) + f(x) - 2f(2x) &= 2x - 2, \\ f(3x) - (3 - x - f(x)) + f(x) - 2(f(x) + x) &= 2x - 2, \\ f(3x) &= 3x + 1. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že hledaná funkce musí mít tvar $f(t) = t + 1$ $(t = 3x)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že funkce $f$ s uvedeným předpisem opravdu vyhovuje zadání a je tedy (jediným) hledaným řešením:

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y) = x+y+1-2(x-y+1)+x+1-2(y+1) = y-2.$$

□

**Příklad 2.12.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y.$$

*Řešení.* Je zřejmé, že zadání vyhovuje funkce $f(x) = x$. Ukážeme, že je to jediné řešení. Nechť tedy $f$ je libovolná funkce splňující zadání. Položíme-li v rovnici $x = y = 0$, zjistíme, že

$$f(0) + 2f(0) + f(0) + 2f(0) = 0, \text{ odkud } f(0) = 0.$$

Nyní už předpis hledané funkce $f$ obdržíme, když v rovnici položíme $y = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) + 2f(x) + f(x) + 2f(0) &= 4x, \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Přesvědčili jsme se, že funkce $f(x) = x$ je opravdu jediným řešením.

□

**Příklad 2.13.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x)f(x + y) = f^2(y)f^2(x - y)\mathrm{e}^{y+4}$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nejdříve si všimněme, že je-li $f(0) = 0$, pak po dosazení $y = 0$ do zadání získáme rovnost

$$f(x)f(x + 0) = f^2(0)f^2(x - 0)\mathrm{e}^{0+4} = 0,$$

tj. $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že taková konstantní funkce $f(x) = 0$ je řešením zadané funkcionální rovnice. Nyní ukážeme, že žádná jiná spojitá funkce vyhovující zadání nikde nenabývá hodnoty 0.

Uvažme proto nyní libovolnou spojitou funkci $f$ splňující zadání, pro kterou platí rovnost $f(x)=0$ v nějakém bodě $x\neq 0$, což podle předchozího znamená, že $f(0)\neq 0$. Označme $x_0$ nejmenší číslo v absolutní hodnotě s vlastností $f(x_0)=0$ (díky spojitosti funkce $f$ máme zaručenu nerovnost $|x_0|>0$). Dosazením $y=\frac{x_0}{2}$ a $x=x_0$ do zadané rovnosti, která má platit pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$, dojdeme ke sporu, hodnoty levé (L) a pravé (P) strany budou odlišné:

$$\begin{aligned}
L:&\quad f(x_0)f\left(x_0+\frac{x_0}{2}\right)=0,\\
P:&\quad f^2\left(\frac{x_0}{2}\right)f^2\left(x_0-\frac{x_0}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}+4}=f^4\left(\frac{x_0}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}+4}>0.
\end{aligned}$$

Našli jsme tedy jednu vyhovující funkci (všude rovnou nule) a víme, že pro každé jiné řešení $f$, které teď budeme hledat, musí platit $f(x)\neq 0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Pak po dosazení $y=0$ dostaneme ze zadané rovnosti:

$$\begin{aligned}
f(x)f(x)&=f^2(0)f^2(x)\mathrm{e}^4,\\
1&=f(0)^2\mathrm{e}^4,\\
f(0)&=\pm\mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}$$

Proveďme nyní v rovnosti ze zadání postupně tři dosazení (kvůli přehlednosti ve znaménkách $+,-$ zatím nebudeme dosazovat za $f(0)$). Po prvním dosazení $x=0$ získáme

$$\begin{aligned}
f(0)f(y)&=f^2(y)f^2(-y)\mathrm{e}^{y+4},\\
f(0)&=f(y)f^2(-y)\mathrm{e}^{y+4}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Po druhém dosazení $x=-y$ dostaneme

$$f(-y)f(0)=f^2(y)f^2(-2y)\mathrm{e}^{y+4}. \qquad (2.4)$$

Nakonec po třetím dosazení $y=x$ získáme rovnost

$$\begin{aligned}
f(x)f(2x)&=f^2(x)f^2(0)\mathrm{e}^{x+4},\\
f(2x)&=f(x)f^2(0)\mathrm{e}^{x+4},
\end{aligned}$$

což nám po záměně $x$ za $-y$ dává vyjádření $f(-2y)=f(-y)f^2(0)\mathrm{e}^{-y+4}$, které nyní dosadíme do pravé strany (2.4) a upravíme:

$$\begin{aligned}
f(-y)f(0)&=f^2(y)\big(f(-y)f^2(0)\mathrm{e}^{-y+4}\big)^2\mathrm{e}^{y+4},\\
f(-y)f(0)&=f^2(y)f^2(-y)f^4(0)\mathrm{e}^{-2y+8}\mathrm{e}^{y+4},\\
1&=f^2(y)f(-y)f^3(0)\mathrm{e}^{-y+12}.
\end{aligned}$$

Vyjádříme-li nyní z poslední rovnosti $f(-y) = f^{-2}(y)f^{-3}(0)\mathrm{e}^{y-12}$ a dosadíme-li to do rovnosti (2.3), získáme s ohledem na fakt, že platí $f(0) = \pm\mathrm{e}^{-2}$, předpis hledané funkce:

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(y)\big(f^{-2}(y)f^{-3}(0)\mathrm{e}^{y-12}\big)^2\mathrm{e}^{y+4},\\
f(0) &= f(y)f^{-4}(y)f^{-6}(0)\mathrm{e}^{2y-24}\mathrm{e}^{y+4},\\
1 &= f^{-3}(y)f^{-7}(0)\mathrm{e}^{3y-20},\\
1 &= \pm f^{-3}(y)\mathrm{e}^{14}\mathrm{e}^{3y-20},\\
f^3(y) &= \pm\mathrm{e}^{3y-6},\\
f(y) &= \pm\mathrm{e}^{y-2}.
\end{aligned}$$

Dosazením se snadno přesvědčíme, že obě funkce tvaru $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$ a $f(x) = -\mathrm{e}^{x-2}$ jsou opravdu řešeními zadané funkcionální rovnice. Pro ověření zřejmě stačí dosadit $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$ (u druhé funkce se znaménko $-$ při zkoušce ztrácí):

$$\begin{aligned}
L:&\ \ f(x)f(x+y) = \mathrm{e}^{x-2}\mathrm{e}^{x+y-2} = \mathrm{e}^{2x+y-4},\\
P:&\ \ f^2(y)f^2(x-y)\mathrm{e}^{y+4} = \mathrm{e}^{2(y-2)}\mathrm{e}^{2(x-y-2)}\mathrm{e}^{y+4} = \mathrm{e}^{2x+y-4}.
\end{aligned}$$

Zadání příkladu tedy vyhovují právě tři funkce $f(x)=0$, $f(x)=\mathrm{e}^{x-2}$ a $f(x)=-\mathrm{e}^{x-2}$. $\square$

**Příklad 2.14.** *Nechť $\alpha$ je dané reálné číslo. Určete všechny takové funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, které pro všechna $x \in (0,\infty)$ splňují rovnost*

$$\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce splňující zadání příkladu. Nahradíme-li v zadané rovnosti hodnotu $x$ za hodnotu $\frac{1}{x}$, získáme tím pro libovolné $x \in (0,\infty)$ druhou rovnost

$$\alpha\left(\frac{1}{x}\right)^2 f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x+1}.$$

Vyjádřením $f\left(\frac{1}{x}\right)$ z druhé rovnosti dostaneme

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \alpha\left(\frac{1}{x}\right)^2 f(x)$$

a po dosazení $f\left(\frac{1}{x}\right)$ do první rovnosti úpravami vyjádříme $f(x)$ :

$$\begin{aligned}
\alpha x^2\left(\frac{1}{x+1}-\alpha\left(\frac{1}{x}\right)^2 f\left(x\right)\right)+f(x) &= \frac{x}{1+x},\\
\frac{\alpha x^2}{x+1}-\frac{\alpha^2x^2}{x^2}f(x)+f(x) &= \frac{x}{1+x},\\
(1-\alpha^2)f(x) &= \frac{x}{1+x}-\frac{\alpha x^2}{x+1}, \qquad (2.5)\\
f(x) &= \frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)},\ \text{je-li}\ \alpha^2\neq 1.
\end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že pokud $\alpha \neq \pm 1$, hledaný předpis funkce $f$musí být tvaru $f(x)=\frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)}$. V případě $\alpha = 1$ nebo $\alpha=-1$ přejde (2.5) do rovnosti

$$0=\frac{x\pm x^2}{1+x},$$

která zřejmě neplatí pro všechna $x\in(0,\infty)$, a tedy zadaný příklad nemá řešení. Dosaďme nyní nalezený předpis funkce $f$ do levé strany rovnosti ze zadání (za předpokladu, že $\alpha\neq\pm1$):

$$\begin{aligned}
&\alpha x^2\left(\frac{\frac{1}{x}-\alpha\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x})(1-\alpha^2)}\right)+\frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)}=\\
&=\frac{\alpha x-\alpha^2}{(\frac{x+1}{x})(1-\alpha^2)}+\frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)}=\frac{\alpha x^2-\alpha^2x}{(x+1)(1-\alpha^2)}+\frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)}=\\
&=\frac{x-\alpha^2x}{(x+1)(1-\alpha^2)}=\frac{x(1-\alpha^2)}{(x+1)(1-\alpha^2)}=\frac{x}{x+1}.
\end{aligned}$$

Jak vidíme, nalezená funkce $f(x)=\frac{x-\alpha x^2}{(1+x)(1-\alpha^2)}$ vyhovuje zadané funkcionální rovnici pro každé $\alpha\neq\pm1$. Zopakujme, že pro $\alpha\neq\pm1$ řešení neexistuje.

$\square$

**Příklad 2.15.** *Určete všechny takové funkce $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, které splňují rovnost*

$$f(z)+zf(1-z)=1+z$$

*pro každé $z\in\mathbb{C}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce splňující zadanou rovnost. Záměnou $1-z$ za $z$ dostaneme

$$f(1-z)+(1-z)f(z)=2-z\quad\text{neboli}\quad f(1-z)=2-z-f(z)+zf(z).$$

Dosazením předchozí pravé strany do rovnosti ze zadání za $f(1-z)$ obdržíme

$$\begin{aligned} f(z) + z(2 - z - f(z) + zf(z)) &= 1 + z,\\ f(z) - zf(z) + z^2 f(z) &= 1 - z + z^2,\\ f(z)(z^2 - z + 1) &= z^2 - z + 1. \end{aligned}$$

Všimněme si, že v případě $z^2 - z + 1 \neq 0$ odtud vychází $f(z) = 1$. Rovnost $z^2 - z + 1 = 0$ ovšem nastane pouze pro dvě hodnoty $z_1$, $z_2$ určené rovnostmi

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Zjistili jsme tak, že $f(z) = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. Po označení $f(z_2) = c$, kde $c$ je neznámé komplexní číslo, a s využitím Viètova vztahu $z_1 + z_2 = 1$ ($z_2 = 1 - z_1$) získáme hodnotu $f(z_1)$ dosazením $z = z_1$ v zadané rovnosti:

$$\begin{aligned} f(z_1) + z_1 f(1 - z_1) &= 1 + z_1,\\ f(z_1) + z_1 f(z_2) &= 1 + z_1,\\ f(z_1) &= 1 + z_1 - z_1 f(z_2) = \frac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - c) + 2}{2}. \end{aligned}$$

Spojením dílčích výsledků dostáváme předpis funkce $f$:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \neq \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\\ c & \text{pro } z = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\\ \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-c)+2}{2} & \text{pro } z = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

kde $c \in \mathbb{C}$ je konstanta. Dosazením do zadání ověříme, zda nalezený tvar funkcí opravdu splňuje zadání pro pevné, avšak libovolně zvolené $c \in \mathbb{C}$. (Všimněme si, že pro $c = 1$ obdržíme konstantní řešení $f(x) = 1$.)

Pro každé $z \neq \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ platí $1 - z \neq \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, takže dostaneme

$$\begin{aligned} L:&\quad f(z) + zf(1 - z) = 1 + z \cdot 1 = 1 + z,\\ P:&\quad 1 + z. \end{aligned}$$

Pro $z = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ získáme

$$\begin{aligned} L:&\quad f(z) + zf(1 - z) = c + \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) =\\ &= c + \frac{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})}{2} \frac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - c) + 2}{2} = c + \frac{4 - 4c + 2(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})}{4} =\\ &= 1 + \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\\ P:&\quad 1 + z = 1 + \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Pro $z = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} L:\quad & f(z) + zf(1-z) = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-c)+2}{2} + \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = \\ & = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-c)+2}{2} + \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})c}{2} = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \\ P:\quad & 1 + z = 1 + \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Každá funkce (a žádná jiná), která má předpis výše odvozeného tvaru, tedy splňuje zadání.

□

## 11.2 Kapitola 3

**Příklad 3.9.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je daná konstanta.*

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci, která splňuje zadání.

Je-li $\lambda = 0$, přejde rovnost ze zadání do tvaru odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

kterou má $f$ splňovat pro všechna reálná $x$ a $y$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ proto plyne, že její předpis je tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Takto určená funkce $f$ zřejmě splňuje zadání za předpokladu $\lambda = 0$.

Je-li $\lambda \neq 0$, definujme novou spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = \lambda f(x) + 1.$$

Dosazením vyjádření $f$ pomocí $g$, tj. $f(x) = \frac{g(x)-1}{\lambda}$, do zadané rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{g(x+y)-1}{\lambda} &= \frac{g(x)-1}{\lambda} + \frac{g(y)-1}{\lambda} + \lambda\left(\frac{g(x)-1}{\lambda}\right)\left(\frac{g(y)-1}{\lambda}\right), \\ g(x+y) - 1 &= g(x) - 1 + g(y) - 1 + g(x)g(y) - g(x) - g(y) + 1, \\ g(x+y) &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Poslední rovnost odpovídá modifikované Cauchyově funkcionální rovnici, kterou funkce $g$ splňuje pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. Za předpokládané spojitosti funkce $g$ proto

podle výsledku z kapitoly 3 platí, že její předpis má tvar buď $g(x) = 0$ nebo $g(x)=a^x$, kde $a \in (0,\infty)$. Hledanou funkci $f$ již snadno odvodíme jejím vyjádřením z definice $g$: pro $g(x) = 0$ tak dostaneme $f(x) = -\frac{1}{\lambda}$ a pro $g(x) = a^x$ obdržíme $f(x) = \frac{a^x-1}{\lambda}$. Dosazením do zadání se ještě přesvědčíme, že jsme i v tomto případě ($\lambda \neq 0$) skutečně nalezli řešení:
Pro $f(x) = -\frac{1}{\lambda}$ platí

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) = -\frac{1}{\lambda}, \\ P:&\quad f(x)+f(y)+\lambda f(x)f(y) = -\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

pro $f(x) = \frac{a^x-1}{\lambda}$ je splněno

$$\begin{aligned} L:&\quad f(x+y) = \frac{a^{x+y}-1}{\lambda}, \\ P:&\quad f(x)+f(y)+\lambda f(x)f(y) = \frac{a^x-1}{\lambda}+\frac{a^y-1}{\lambda}+\lambda\left(\frac{a^x-1}{\lambda}\right)\left(\frac{a^y-1}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{a^x-1}{\lambda}+\frac{a^y-1}{\lambda}+\frac{a^{x+y}-1}{\lambda}-\frac{a^x-1}{\lambda}-\frac{a^y-1}{\lambda} = \frac{a^{x+y}-1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Pro přehlednost proveďme ještě shrnutí dosažených výsledků. Pro $\lambda = 0$ je řešením $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$, a pro $\lambda \neq 0$ jsou řešením funkce $f(x) = -\frac{1}{\lambda}$ a $f(x) = \frac{a^x-1}{\lambda}$, kde $a \in (0,\infty)$.

$\square$

**Příklad 3.10.** *Určete všechny spojité funkce* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$*, které rovnost*

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

*splňují pro každá* $x, y \in (0,\infty)$.

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci vyhovující zadání. Nejdříve si všimněme, že díky tvaru pravé strany zadané rovnosti neexistuje takové $x_0 \in (0,\infty)$, pro které je splněno $f(x_0) = 0$ (jinak bychom se při položení $x = y = x_0$ dopustili dělení nulou). Díky tomu můžeme definovat funkci $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

pro každé $x \in (0,\infty)$. S ohledem na vyjádření $f$ pomocí nově definované spojité funkce $g$, tj. $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, přejde zadaná rovnost do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x+y)} &= \frac{\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(y)}}{\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{g(y)}} \left( = \frac{\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(y)}}{\frac{g(x)+g(y)}{g(x)g(y)}} = \frac{1}{g(x)+g(y)} \right), \\ g(x+y) &= g(x)+g(y). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou funkce $g$ splňuje pro všechna $x, y \in (0, \infty)$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ plyne i spojitost funkce $g$, z jejíhož předpisu navíc vidíme, že $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in (0, \infty)$. Proto, jak víme z Věty 3.2, je její předpis tvaru $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takže hledaná funkce $f$ musí být tvaru

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{cx} \text{ pro každé } x \in (0, \infty).$$

Dosazením takové funkce $f$ do zadání se přesvědčíme, že jsme skutečně našli řešení:

$$\begin{aligned} L: \quad & f(x+y) = \frac{1}{c(x+y)}, \\ P: \quad & \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} = \frac{\frac{1}{cx}\frac{1}{cy}}{\frac{1}{cx}+\frac{1}{cy}} = \frac{\frac{1}{cx}\frac{1}{cy}}{\frac{cx+cy}{cxcy}} = \frac{1}{c(x+y)}. \end{aligned}$$

□

**Příklad 3.11.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci, která splňuje zadání. Pokud rovnost ze zadání přepíšeme do tvaru $f(x+y) = f(x) + x^2y + y^2x + f(y)$, můžeme si všimnout, že tento přepis nápadně připomíná vzorec třetí mocniny součtu. Při bližším zkoumání lze „uhodnout“, že funkce tvaru $f(x) = \frac{x^3}{3}$ takovou rovnost splňuje a je tedy jedním z řešení.

Další případná řešení najdeme pomocí spojité funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}.$$

Funkci $f$ tak můžeme vyjádřit ve tvaru $f(x) = g(x) + \frac{x^3}{3}$, díky čemuž přejde zadaná rovnost do tvaru

$$\begin{aligned} g(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} &= g(x) + \frac{x^3}{3} + g(y) + \frac{y^3}{3} + xy(x+y), \\ 3g(x+y) &= 3g(x) + 3g(y) + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x+y)^3, \\ g(x+y) &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Získali jsme rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou funkce $g$ splňuje pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$. Vzhledem ke spojitosti, která je zaručena definicí funkce $g$ pomocí spojité funkce $f$, proto plyne, že její předpis je tvaru $g(x)=cx$, kde $c \in \mathbb{R}$ libovolné. Dosazením odvozeného výsledku zpět do definice $g$ tak nakonec zjistíme, že všechny hledané funkce jsou pro každé $x \in \mathbb{R}$ tvaru $f(x) = cx + \frac{x^3}{3}$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Dosazením do zadání zjistíme, že nalezené funkce jsou skutečně řešeními:

$$\begin{aligned} L: &\quad f(x+y) = c(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} = cx + \frac{x^3}{3} + cy + \frac{y^3}{3} + x^2y + xy^2, \\ P: &\quad f(x) + f(y) + xy(x+y) = cx + \frac{x^3}{3} + cy + \frac{y^3}{3} + x^2y + xy^2. \end{aligned}$$

□

**Příklad 3.12.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci, která splňuje zadání. Dosazením $x = y = 0$ zjistíme, že $f(0) = 0$. Uvažujme funkci $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro nenulová $x, y$ tak přejde rovnost ze zadání do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{f(xy)}{xy} &= \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x}, \\ g(xy) &= g(x) + g(y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Položením $x = y$ zjistíme, že platí $g\big(x^2\big) = 2g(x)$ neboli $g(x) = \frac{1}{2}g\big(x^2\big)$. Díky tomu dostaneme

$$g(-x) = \frac{1}{2}g\big((-x)^2\big) = \frac{1}{2}g\big(x^2\big) = g(x).$$

Jak vidíme, je funkce $g$ sudá a splňuje rovnost (3.1) odpovídající modifikované Cauchyově funkcionální rovnici pro všechna reálná nenulová $x$, $y$. Vzhledem ke spojitosti funkce $g$ na $(0, \infty)$ a její sudosti tak dostáváme, že její předpis je tvaru $g(x) = c \ln |x|$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Pro každé $x \neq 0$ tak platí $f(x) = x \cdot g(x) = cx \ln |x|$.

Shrnutím našich úvah je zjištění, že hledaná funkce $f$ musí mít předpis

$$f(x) = \begin{cases} cx \ln |x| & \text{pro každé } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Přesvědčíme se, že taková funkce $f$ (zřejmě spojitá v každém bodě $x \neq 0$) je spojitá i v bodě $x = 0$. Užijeme k tomu l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} cx\ln x = c\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} c\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = c\lim_{x\to 0^+}(-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} cx\ln(-x) = c\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} c\lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = c\lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Zbývá ověřit, že nalezená funkce $f$ splňuje rovnost ze zadání příkladu pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$. V případě, kdy $x = 0$ nebo $y = 0$, jsou obě strany rovnosti zřejmě rovny nule. V opačném případě, kdy $x \neq 0$ a $y \neq 0$ (a tedy i $xy \neq 0$) je zkouška dosazením rovněž snadná:

$$\begin{aligned} L:&\quad f(xy) = cxy\ln|xy|,\\ P:&\quad xf(y) + yf(x) = x\big(cy\ln|y|\big) + y\big(cx\ln|x|\big) = cxy\ln|xy|. \end{aligned}$$

$\square$

**Příklad 3.13.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující podmínky:*

1) *$f(xy) = f(x)f(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$,*

2) *pro nějaké $z_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x + z_1) = f(x) + f(z_1)$.*

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce vyhovující zadání. Dosazením $x = y = 0$ do rovnosti 1) dostaneme $f(0) = f(0)f(0)$, odkud vidíme, že buď $f(0) = 1$, nebo $f(0) = 0$.

Je-li $f(0) = 1$, pak dosazením $y = 0$ v rovnosti 1) zjistíme, že platí $f(0) = f(x)f(0)$ neboli $f(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Taková konstantní funkce však zřejmě nesplňuje podmínku 2). Situace $f(0) = 1$ tedy nemůže nastat, a proto musí platit $f(0) = 0$. Využijeme to až za chvíli.

Jiným dosazením $x = y = 1$ do 1) obdržíme rovnost $f(1) = f(1)f(1)$, která je splněna pouze pro $f(1) = 0$ nebo $f(1) = 1$.

Je-li $f(1) = 0$, pak dosazením $y = 1$ v 1) dostaneme $f(x) = f(x)f(1) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením nalezené funkce $f(x) = 0$ do rovností uvedených v 1) a 2) se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje zadání příkladu.

V případě $f(1) = 1$ uvažme dvě libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $b \neq 0$. Ukážeme, že platí $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Užitím čísla $z_1$ z podmínky 2) v úpravě

$$a + b = \left(\frac{a}{b}z_1 + z_1\right)\frac{b}{z_1}$$

a podle obou vlastností 1), 2) dostaneme

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f\left(\left(\frac{a}{b}z_1 + z_1\right)\frac{b}{z_1}\right) \overset{1)}{=} f\left(\frac{a}{b}z_1 + z_1\right) f\left(\frac{b}{z_1}\right) \overset{2)}{=} \\ &\overset{2)}{=} \left(f\left(\frac{a}{b}z_1\right) + f(z_1)\right) f\left(\frac{b}{z_1}\right) = f\left(\frac{a}{b}z_1\right) f\left(\frac{b}{z_1}\right) + f(z_1) f\left(\frac{b}{z_1}\right) \overset{1)}{=} \\ &\overset{1)}{=} f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnost odpovídající Cauchyově funkcionální rovnici, kterou hledaná funkce $f$ splňuje pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, kde $b \neq 0$. Poslední je však splněno i pro $b = 0$, neboť tehdy přejde Cauchyova rovnice v rovnost

$$f(a+0) = f(a) + f(0),$$

která je pro naši funkci splněna díky dříve odvozené rovnosti $f(0) = 0$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$ proto plyne (ve zkoumaném případě, kdy $f(1) = 1$), že její předpis je tvaru $f(x) = x$. Snadným dosazením do obou podmínek 1) a 2) ověříme, že jsme opravdu nalezli řešení (rovnost v 2) je dokonce splněna pro každé $z_1$). Celkem tedy existují dvě funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = x$, které splňují zadání.

□

**Příklad 3.14.** *Za předpokladu, že $n \geq 2$ je dané celé číslo, určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňující pro každá $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ následující podmínky:*

1) $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$,

2) $\overline{f(n)}f(x) = f(n)\overline{f(x)}$.

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci, která splňuje zadání. Položením $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ v podmínce 1) dostaneme rovnost $f(0) = f(0)^n$, odkud plyne, že $f(0) = 0$ nebo $f(0)^{n-1} = 1$ (připomeňme, že $f(x) \in \mathbb{C}$, nelze proto z rovnosti $f(0)^{n-1} = 1$ ani v případě sudého $n$ usoudit, že $f(0) = 1$).

V případě $f(0) = 0$ získáme položením $x_1 = 0$ v podmínce 1) rovnost $f(x_2 + \cdots + x_n) = 0$ pro všechna $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že předpis funkce $f$ má tvar $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením se můžeme přesvědčit, že tato funkce splňuje obě podmínky a je tedy řešením.

Pro případ $f(0)^{n-1} = 1$ (zřejmě $f(0) \neq 0$ ) definujme spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(0)} \tag{3.2}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. S ohledem na podmínku 1) pro funkci $g$ platí

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \frac{f(x+y+0+\cdots+0)}{f(0)} = \frac{f(x)f(y)f(0)^{n-2}}{f(0)} = \frac{f(x)f(y)f(0)^{n-1}}{f(0)^2} = \\ &= \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(y)}{f(0)} = g(x)g(y). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnost $g(x+y) = g(x)g(y)$, která odpovídá modifikované Cauchyově funkcionální rovnici a funkce $g$ ji splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Ze spojitosti funkce $g$ proto plyne, že její předpis je tvaru $g(x) = \mathrm{e}^{bx}$, kde $b \in \mathbb{C}$. Dosazením do (3.2) nakonec obdržíme předpis funkce $f$:

$$f(x) = f(0)g(x) = a\mathrm{e}^{bx},$$

kde $f(0) = a$ a pro $a, b \in \mathbb{C}$ platí, že $a^{n-1} = 1$.

Označíme-li $b = \alpha + \mathrm{i}\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), pak po dosazení funkce $f$ do obou podmínek snadno zjistíme, kdy tato funkce opravdu splňuje zadání:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = a\mathrm{e}^{b(x_1+x_2+\cdots+x_n)} = a\mathrm{e}^{bx_1}\mathrm{e}^{bx_2}\ldots\mathrm{e}^{bx_n}, \\ P_1: &\quad f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n) = aa^{n-1}\mathrm{e}^{bx_1}\mathrm{e}^{bx_2}\ldots\mathrm{e}^{bx_n} = a\mathrm{e}^{bx_1}\mathrm{e}^{bx_2}\ldots\mathrm{e}^{bx_n}. \end{aligned}$$

Rovnost $L_1 = P_1$ tedy platí bez dalšího omezení na čísla $a, b$.

$$\begin{aligned} L_2, P_2: \qquad \overline{f(n)}f(x) &= f(n)\overline{f(x)}, \\ \overline{a\mathrm{e}^{bn}}a\mathrm{e}^{bx} &= a\mathrm{e}^{bn}\overline{a\mathrm{e}^{bx}}, \\ \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)n}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)n}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}, \\ \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)n+(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)n+(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}, \end{aligned}$$

což je splněno, právě když pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$ (jež může záviset na čísle $x \in \mathbb{R}$) platí

$$(\alpha - \mathrm{i}\beta)n + (\alpha + \mathrm{i}\beta)x = (\alpha + \mathrm{i}\beta)n + (\alpha - \mathrm{i}\beta)x + 2k\pi\mathrm{i}$$
$$\text{neboli} \quad 2\mathrm{i}\beta n = 2\mathrm{i}\beta x - 2k\pi\mathrm{i}.$$

Zvolíme-li nejprve $x = 0$, vidíme, že pro vhodné $k_0 \in \mathbb{Z}$ platí

$$2\mathrm{i}\beta n = -2k_0\pi\mathrm{i} \quad \text{neboli} \quad \beta = -\frac{k_0\pi}{n},$$

takže pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $k_x \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$-2k_0\pi\mathrm{i} = -\frac{2k_0\pi\mathrm{i}}{n}x - 2k_x\pi\mathrm{i}.$$

Odtud dostáváme rovnost $k_x = k_0 \left(1 - \frac{x}{n}\right)$, ve které je ovšem součin celočíselný pro každé $x \in \mathbb{R}$ jedině v případě $k_0 = 0$, tedy $\beta = 0$. Rovnost $L_2 = P_2$ tak platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, právě když $b \in \mathbb{R}$.

Ukázali jsme tak, že řešením je konstantní funkce $f(x) = 0$ a všechny funkce tvaru $f(x) = a\mathrm{e}^{bx}$, kde $b \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{C}$ je takové, že $a^{n-1} = 1$.

□

## 11.3 Kapitola 4

**Příklad 4.6.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost*

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci, která splňuje zadání. Dosazením $x = y = 0$ zjistíme, že $0 = \big(f(0)\big)^2$, odkud $f(0) = 0$. Ponecháme-li v zadané rovnici $y$ libovolné a položíme-li $x = 0$, obdržíme rovnost

$$f(y) - f(-y) = f(0)f(y) \quad \text{neboli} \quad f(y) = f(-y),$$

ze které plyne, že funkce $f$ je sudá. Po substituci $x = u$ a $y = u - v$, resp. $x = u$ a $y = v - u$ pro libovolná $u, v \in \mathbb{R}$ získáme

$$\begin{aligned} f(u+u-v) - f\big(u-(u-v)\big) &= f(u)f(u-v), \\ f(2u-v) - f(v) &= f(u)f(u-v), \end{aligned} \tag{4.1}$$

respektive

$$\begin{aligned} f(u+v-u) - f\big(u-(v-u)\big) &= f(u)f(v-u), \\ f(v) - f(2u-v) &= f(u)f(v-u). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sečtením (4.1) a (4.2) pak dostaneme $0 = f(u)f(v-u) + f(u)f(u-v)$, což po úpravě s ohledem na sudost funkce $f$ znamená, že

$$0 = f(u)\Big(f(v-u) + f\big(-(v-u)\big)\Big) \quad \text{neboli} \quad 0 = 2f(u)f(v-u).$$

Vzhledem k tomu, že $v$ a $u$ jsou libovolná reálná čísla, je zřejmé, že musí platit $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Snadným dosazením lze vidět, že tato funkce (jako jediná) splňuje zadání.

□

**Příklad 4.7.** *Určete všechny takové spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$, které splňují rovnost*

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná funkce splňující zadání. Položením $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme $f(0) = f(0)+f(0)$ neboli $f(0) = 0$. S ohledem na tento fakt po dosazení $x = 0$ získáme rovnost $f(y^2) = f(-y^2)$, ze které je zřejmé, že je funkce $f$ sudá. Můžeme se proto omezit na hledání funkce $f$ pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$ a nalezenou funkci pak symetricky rozšířit.

Uvažme substituce $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$ pro všechna $x, y \in \langle 0, \infty)$, kde $x \geq y$. Zřejmě je $a \geq 0$ a $b \geq 0$ a pro výraz $x^2 + y^2$ platí

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Po dosazení do vztahu ze zadání tak obdržíme rovnost

$$f(\sqrt{a^2 + b^2}) = f(a) + f(b), \tag{4.3}$$

pro kterou ukážeme, že platí pro všechna $a, b \in \langle 0, \infty)$. Jinak řečeno, ukážeme, že pro libovolná $a, b \in \langle 0, \infty)$ vždy najdeme vhodná $x, y \in \langle 0, \infty)$ splňující obě podmínky $x^2 - y^2 = a \geq 0$ a $2xy = b \geq 0$.

S ohledem na zavedení čísel $a, b$ a z něj plynoucí rovnost $\sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2$ platí

$$\begin{aligned}
a &= x^2 - y^2, & b &= 2xy \\
a + x^2 + y^2 &= 2x^2, & \frac{b}{2x} &= y \quad \text{pro } x \neq 0 \\
a + \sqrt{a^2 + b^2} &= 2x^2, & \frac{b}{2\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}} &= y \\
\frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} &= x, & \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} &= y.
\end{aligned}$$

I když jsme k výpočtu $y$ potřebovali předpoklad $x \neq 0$, ten je podle vzorce pro $x$ splněn vždy s výjimkou případu $a = b = 0$, kdy je ovšem zřejmě $x = y = 0$. Rovnost (4.3) tedy platí pro libovolná $a \geq 0$, $b \geq 0$. Zaveďme nyní novou spojitou funkci $g\colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ definovanou vztahem $g(x) = f(\sqrt{x})$ pro všechna $x \in \langle 0, \infty)$. Nahrazením funkce $f$ za novou funkci $g$ v rovnosti (4.3) dostaneme

$$g(a^2 + b^2) = g(a^2) + g(b^2).$$

Odtud volbou $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$ obdržíme rovnost $g(u + v) = g(u) + g(v)$, která odpovídá Cauchyově funkcionální rovnici a naše funkce $g$ ji splňuje pro libovolné hodnoty $u, v \in \langle 0, \infty)$. Za předpokládané spojitosti funkce $f$, a tedy i funkce $g$, proto z Věty 3.2 plyne, že její předpis je tvaru $g(x) = cx$, kde $c \geq 0$. Hledaná funkce $f$ má tedy na intervalu $\langle 0, \infty)$ tvar $f(x) = f(\sqrt{x^2}) = g(x^2) = cx^2$. S ohledem na dokázanou sudost funkce $f$ platí předpis $f(x) = cx^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a zastoupená konstanta $c$ je v něm nezáporná podle zadaného oboru hodnot funkce $f$. Snadným dosazením ověříme, že taková funkce $f$ je skutečně řešením pro každé $c \geq 0$ :

$$\begin{aligned} L: &\quad f(x^2+y^2) = c(x^2+y^2)^2 = c(x^4+2x^2y^2+y^4), \\ P: &\quad f(x^2-y^2)+f(2xy) = c(x^2-y^2)^2+4cx^2y^2 = c(x^4+2x^2y^2+y^4). \end{aligned}$$

□

**Příklad 4.8.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnost*

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(xy+1) - f(x)f(y) - 4.$$

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci splňující zadání. Položením $x = y = 0$, resp. $x = 1, y = 0$ dostaneme

$$0 = 2f(1) - f^2(0) - 4, \tag{4.4}$$

respektive

$$0 = 2f(1) - f(0)f(1) - 4.$$

Odečtením druhé rovnosti od první získáme

$$f(0)f(1) - f^2(0) = 0 \quad \text{neboli} \quad f(0)(f(1) - f(0)) = 0.$$

Vidíme, že buď platí $f(1) = f(0)$ nebo $f(0) = 0$. V prvním případě, kdy $f(0) = f(1)$, obdržíme z rovnosti (4.4)

$$2f(0) - f^2(0) - 4 = 0, \quad \text{odkud} \quad \big(f(0) - 1\big)^2 = -3,$$

což zřejmě neplatí pro žádné $f(0) \in \mathbb{R}$. Platí tedy druhá možnost $f(0) = 0$ a z (4.4) tak plyne rovnost $f(1) = 2$.

Nyní ukážeme, že funkce $f$ je sudá. Dosazením $y = 1$, resp. $x = 1$ do rovnosti v zadání obdržíme

$$f(x+1) - f(x-1) = 2f(x+1) - 2f(x) - 4,$$

respektive

$$f(y+1) - f(1-y) = 2f(y+1) - 2f(y) - 4.$$

Přepsáním $y$ za $x$ a následném odečtení předešlých rovností zjistíme, že platí $f(x-1) = f(1-x)$. Zavedením substituce $s = 1-x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ pak snadno vidíme, že poslední získaná rovnost přejde do tvaru $f(-s) = f(s)$, kde $s \in \mathbb{R}$ je libovolné, takže $f$ je skutečně sudá funkce.

S ohledem na sudost funkce $f$ získáme z rovnosti ze zadání po záměně $y$ za opačnou hodnotu $-y$ rovnost

$$f(x-y) - f(x+y) = 2f(xy-1) - f(x)f(y) - 4.$$

Jejím odečtením od rovnosti v zadání dostaneme

$$\begin{aligned} 2f(x+y) - 2f(x-y) &= 2f(xy+1) - 2f(xy-1), \\ f(x+y) - f(x-y) &= f(xy+1) - f(xy-1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Uvažujme nyní libovolnou dvojici reálných čísel $x$ a $y$, pro něž platí $x \geq y \geq 0$. Zaměníme-li v (4.5) obě hodnoty $x$, $y$ za $\sqrt{xy}$, dostaneme rovnost

$$f(2\sqrt{xy}) - f(0) = f(xy+1) - f(xy-1) \quad \text{neboli} \quad f(2\sqrt{xy}) = f(xy+1) - f(xy-1).$$

Dosazením levé strany získané rovnosti do (4.5) obdržíme

$$f(x+y) - f(x-y) = f(2\sqrt{xy}),$$

odkud po nahrazení $x$ za novou proměnnou $x^2$ a $y$ za $y^2$, kde opět $x \geq y \geq 0$ jsou libovolná čísla, zjistíme, že platí

$$f(x^2+y^2) - f(x^2-y^2) = f(2xy).$$

Získaná rovnost odpovídá funkcionální rovnici uvedené ve vyřešeném příkladu 4.7. Spojitá funkce $f$ jej splňuje pro každá $x \geq y \geq 0$ a její předpis je proto tvaru $f(x) = cx^2$, kde $c \in \mathbb{R}$. S ohledem na fakt, že $f(1) = 2$, dostaneme $c = f(1) = 2$, odkud plyne $f(x) = 2x^2$ pro každé $x \geq 0$, a tedy i pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť, jak už víme, funkce $f$ je sudá. Dosazením do zadání se přesvědčíme, že jsme našli (jediné) řešení:

$$\begin{aligned} L:&\ f(x+y) - f(x-y) = 2(x+y)^2 - 2(x-y)^2 = 8xy, \\ P:&\ 2f(xy+1) - f(x)f(y) - 4 = 4(xy+1)^2 - 4x^2y^2 - 4 = 8xy. \end{aligned}$$

□

## 11.4 Kapitola 5

**Příklad 5.8.** *Určete všechny dvojice funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x) - f(y) = (x-y)\big(g(x) + g(y)\big)$$

*pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ a $g$ označuje dvojici funkcí, která splňuje zadání. Rovnost

$$\big(f(x)-f(y)\big)+\big(f(y)-f(z)\big)+\big(f(z)-f(x)\big)=0$$

je zřejmě splněna pro každé $x,y,z\in\mathbb{R}$. Po dosazení pravé strany zadané rovnosti za každý z vystupujících rozdílů dostaneme

$$(x-y)\big(g(x)+g(y)\big)+(y-z)\big(g(y)+g(z)\big)+(z-x)\big(g(z)+g(x)\big)=0.$$

Volba $y=1$ a $z=0$ nám odtud umožní najít předpis funkce $g$:

$$\begin{aligned}(x-1)\big(g(x)+g(1)\big)+\big(g(1)+g(0)\big)+(-x)\big(g(0)+g(x)\big)&=0,\\ xg(1)-g(x)+g(0)-xg(0)&=0,\\ x\big(g(1)-g(0)\big)+g(0)&=g(x),\\ g(x)&=ax+b,\end{aligned}$$

kde $a=g(1)-g(0), b=g(0)\in\mathbb{R}$ jsou dvě prozatím neurčené konstanty. Dosazením nalezeného předpisu funkce $g$ do rovnosti ze zadání získáme

$$f(x)-f(y)=(x-y)\big(ax+b+ay+b\big),$$

odkud pro $y=0$ zjistíme předpis funkce $f$:

$$\begin{aligned}f(x)-f(0)&=x\big(ax+b+b\big),\\ f(x)&=ax^2+2bx+c,\end{aligned}$$

kde $c=f(0)\in\mathbb{R}$. Všechna řešení příkladu tedy tvoří dvojice funkcí $f(x)=$ $=ax^2+2bx+c$ a $g(x)=ax+b$, kde $a$, $b$ a $c$ jsou reálné konstanty. Zkouškou se ještě přesvědčíme, že to platí pro libovolné hodnoty $a,b,c$:

$$\begin{aligned}L:&\quad f(x)-f(y)=ax^2+2bx+c-ay^2-2by-c=ax^2-ay^2+2bx-2by,\\ P:&\quad (x-y)\big(g(x)+g(y)\big)=(x-y)\big(ax+b+ay+b\big)=ax^2-ay^2+2bx-2by.\end{aligned}$$

□

**Příklad 5.9.** *Určete všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y)$$

*pro libovolná $x,y\in\mathbb{R}$.*

*Řešení 1.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou funkci, která splňuje zadání. Nahrazením $z$ za $y$ dostaneme

$$xf(x) - zf(z) = (x - z)f(x + z).$$

Vzhledem k zadání ale také platí

$$xf(x) - zf(z) = xf(x) - yf(y) + yf(y) - zf(z) = (x - y)f(x + y) + (y - z)f(y + z).$$

Porovnáním pravých stran právě získaných rovností obdržíme

$$(x - z)f(x + z) = (x - y)f(x + y) + (y - z)f(y + z). \tag{5.1}$$

Po provedení substituce $x = \frac{u+1}{2}$, $y = \frac{1-u}{2}$ a $z = \frac{u-1}{2}$, kde $u \in \mathbb{R}$ je libovolné, přejde rovnost (5.1) po úpravě do tvaru

$$\begin{aligned} f(u) &= uf(1) + (1 - u)f(0), \\ f(u) &= \big(f(1) - f(0)\big)u + f(0), \\ f(u) &= cu + d, \end{aligned}$$

kde $c = f(1) - f(0), d = f(0) \in \mathbb{R}$. Odvodili jsme tedy předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = cx + d$ a snadným dosazením do zadání se přesvědčíme, že takové funkce jsou řešením pro libovolné hodnoty $c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L: &\quad xf(x) - yf(y) = x(cx + d) - y(cy + d) = cx^2 - cy^2 + dx - dy, \\ P: &\quad (x - y)f(x + y) = (x - y)\big(c(x + y) + d\big) = cx^2 - cy^2 + dx - dy. \end{aligned}$$

□

*Řešení 2.* Nechť $f$ označuje funkci splňující zadání. Nahrazením $-x$ za $y$ pro každé $x \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} xf(x) + xf(-x) &= 2xf(0), \\ f(x) + f(-x) &= 2f(0). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Po provedení substituce $x = a + b$ a $y = a - b$, kde $a \neq b$ jsou libovolná čísla z $\mathbb{R}$, přejde zadaná rovnost s ohledem na (5.2) do tvaru

$$\begin{aligned} (a + b)f(a + b) - (a - b)f(a - b) &= 2bf(2a), \\ (a + b)f(a + b) + (b - a)\Big(2f(0) - f(b - a)\Big) &= 2bf(2a), \\ (a + b)f(a + b) - (b - a)f(b - a) + 2bf(0) - 2af(0) &= 2bf(2a), \\ 2af(2b) + 2bf(0) - 2af(0) &= 2bf(2a), \\ af(2b) - af(0) &= bf(2a) - bf(0), \end{aligned}$$

odkud v případě nenulových čísel $a$ a $b$ obdržíme

$$\frac{f(2b) - f(0)}{b} = \frac{f(2a) - f(0)}{a}.$$

Položením $a = 1$ přejde pravá strana v konstantu a díky tomu můžeme předchozí rovnost přepsat do tvaru

$$\frac{f(2b) - f(0)}{b} = \frac{f(2) - f(0)}{1} = k,$$

odkud po vynásobení $b$ získáme

$$f(2b) - f(0) = kb, \quad \text{neboli} \quad f(b') = \frac{k}{2}b' + f(0) \quad \text{pro} \quad b' = 2b.$$

Zdůrazněme, že poslední vzorec jsme odvodili pro každé $b' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Jeho platnost pro $b' = 0$ je zřejmá, pro $b' = 2$ pak plyne z definice konstanty $k$. Nalezli jsme tedy předpis funkce $f$ ve tvaru $f(x) = cx + d$, kde $c = \frac{k}{2}$ a $d = f(0)$ jsou vhodné konstanty. Po dosazení se stejně jako v *Řešení 1* přesvědčíme, že konstanty $c, d$ mohou být zvoleny libovolně.

□

**Příklad 5.10.** *Určete všechny spojité funkce $f, g, h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in (0,\infty)$ rovnost*

$$f(x + y) + g(xy) = h(x) + h(y).$$

*Řešení.* Nechť $f, g$ a $h$ označují libovolné spojité funkce, které společně splňují zadání. Položením $y = 1$ snadno získáme vyjádření funkce $g$ ve tvaru $g(x) = h(x) + h(1) - f(x + 1)$. Dosazením do zadání za funkci $g$ pak dostaneme

$$f(x + y) + h(xy) + h(1) - f(xy + 1) = h(x) + h(y), \tag{5.3}$$

což bude výhodné zapsat i ve tvaru

$$h(x) - h(xy) = f(x + y) + h(1) - f(xy + 1) - h(y). \tag{5.4}$$

Přepsáním $x$ za $z$ v předešlé rovnosti získáme

$$h(z) - h(yz) = f(z + y) + h(1) - f(yz + 1) - h(y). \tag{5.5}$$

Nakonec nahraďme v rovnosti (5.3) $x$ za $xy$ a $y$ za $z$, resp. $y$ za $yz$:

$$f(xy + z) + h(xyz) + h(1) - f(xyz + 1) = h(xy) + h(z),$$

respektive

$$f(x+yz)+h(xyz)+h(1)-f(xyz+1)=h(x)+h(yz).$$

Z rozdílu právě získaných rovností obdržíme

$$f(xy+z)-f(x+yz)=h(z)-h(yz)-(h(x)-h(xy)),$$

odkud s ohledem na (5.4) a (5.5) dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} f(xy+z)-f(x+yz)=f(z+y)+h(1)-f(yz+1)-h(y)-\\ -\big(f(x+y)+h(1)-f(xy+1)-h(y)\big)\end{aligned}$$

neboli

$$f(xy+z)+f(x+y)-f(xy+1)=f(x+yz)+f(y+z)-f(yz+1).$$

Vzhledem k předpokládané spojitosti funkce $f$ můžeme uvážit jednostranné limity obou stran poslední rovnosti pro $z\to 0^+$, které se musejí rovnat, tedy

$$f(xy)+f(x+y)-f(xy+1)=f(x)+f(y)-f(1).$$

Definujme funkci $F\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ předpisem $F(x)=f(x)-f(1)$ pro každé $x\in(0,\infty)$. Dosazením této funkce do získané rovnosti zjistíme, že platí

$$F(xy)+F(x+y)=F(x)+F(y)+F(xy+1).$$

Všimněme si, že funkce $F$ splňuje předpoklady příkladu 5.7 pro všechna $x\in(0,\infty)$. Její předpis je proto tvaru $F(x)=\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x+\gamma$, kde $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ vyhovují rovnosti $\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma=0$ (viz poznámka následující za řešením příkladu 5.7). Odtud již snadno odvodíme předpis funkce $f$ :

$$f(x)=F(x)+f(1)=\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x+\gamma+f(1).$$

Dosazením nalezené funkce $f$ do (5.3) získáme po úpravě

$$\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2-x^2y^2-1)+\beta(x+y-xy-1)=h(x)+h(y)-h(xy)-h(1).$$

Definujme funkci $H\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ předpisem

$$H(x)=h(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x-\gamma-h(1)$$

pro každé $x\in(0,\infty)$. Pro takto zvolenou funkci $H$ dostaneme ze vztahu, který jsme odvodili pro funkci $h$, po úpravě rovnost

$$H(xy)=H(x)+H(y),$$

která odpovídá modifikované Cauchyově funkcionální rovnici a funkce $H$ ji splňuje pro všechna $x \in (0, \infty)$. Vzhledem ke spojitosti funkce $h$, a tedy i $H$, má funkce $H$ předpis tvaru $H(x) = c \ln x$, kde $c \in \mathbb{R}$. Odtud již snadno odvodíme předpis funkce $h$ :

$$h(x) = H(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + h(1) = c \ln x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + h(1).$$

Z vyjádření funkce $g(x) = h(x) + h(1) - f(x+1)$ (viz první odstavec řešení) s ohledem na podmínku $\frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma = 0$ obdržíme

$$\begin{aligned} g(x) &= c \ln x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + h(1) + h(1) - \frac{\alpha}{2}(x+1)^2 - \beta(x+1) - \gamma - f(1) = \\ &= c \ln x - \alpha x + \gamma + 2h(1) - f(1). \end{aligned}$$

Shrnutím dosažených výsledků dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + a, \\ h(x) &= c \ln x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + b, \\ g(x) &= c \ln x - \alpha x + \gamma + 2b - a, \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, a, b \in \mathbb{R}$ jsou taková, že platí $\frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma = 0$.

Dosazením do zadání se přesvědčíme, že všechny takové funkce jsou řešením příkladu (tudíž na konstanty $a$, $b$ nejsou kladena žádná omezení):

$$\begin{aligned} L: \ & f(x+y) + g(xy) = \frac{\alpha}{2}(x+y)^2 + \beta(x+y) + \gamma + a + c \ln xy - \alpha xy + \gamma + 2b - a = \\ &= \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \beta(x+y) + c \ln xy + 2\gamma + 2b, \\ P: \ & h(x) + h(y) = c \ln x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma + b + c \ln y + \frac{\alpha}{2}y^2 + \beta y + \gamma + b = \\ &= \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \beta(x+y) + c \ln xy + 2\gamma + 2b. \end{aligned}$$

□

## 11.5 Kapitola 6

**Příklad 6.7.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.*

*Řešení.* Označme $D = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, zaveďme funkci $g(x) = \frac{1}{1-x}$ $(x \in D)$, která je zřejmě prostá, a vypočtěme funkci k ní inverzní $g^{-1}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-g^{-1}(x)}, \\ x(1-g^{-1}(x)) &= 1, \\ g^{-1}(x) &= \frac{x-1}{x}. \end{aligned}$$

Vidíme, že definiční obor funkce $g^{-1}$ (tedy obor funkce $g$) je opět množina $D$. Jsou tedy obě funkce $g$ a $g^{-1}$ zobrazení $D \to D$. Nyní ještě určíme předpis pro složenou funkci $g\big(g(x)\big)$:

$$g\big(g(x)\big) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = g^{-1}(x).$$

Vzhledem k výše uvedenému můžeme zadanou funkcionální rovnici přepsat do tvaru (všude dále je $x \in D$ libovolné)

$$f(x) + f\left(g(x)\right) = x. \tag{6.1}$$

Po nahrazení $g(x)$ za $x$ v (6.1) dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} f(g(x)) + f\left(g(g(x))\right) &= g(x), \\ f(g(x)) + f\left(g^{-1}(x)\right)\big) &= g(x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Po nahrazení $g^{-1}(x)$ za $x$ v (6.1) dostaneme

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(x)) + f\left(g(g^{-1}(x))\right) &= g^{-1}(x), \\ f(g^{-1}(x)) + f(x) &= g^{-1}(x). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Po odečtení rovnice (6.3) od (6.2) získáme novou rovnici

$$f(g(x)) - f(x) = g(x) - g^{-1}(x).$$

Odečteme-li poslední rovnici od rovnice (6.1), získáme vztah, ze kterého již snadno najdeme předpis pro hledanou funkci $f$:

$$\begin{aligned} 2f(x) &= x - g(x) + g^{-1}(x), \\ 2f(x) &= x - \frac{1}{1-x} + \frac{x-1}{x}, \\ 2f(x) &= \frac{x^2(1-x) - x + (x-1)(1-x)}{x(1-x)}, \\ f(x) &= \frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Odvozený předpis má smysl pro každé $x \in D$. Před dosazením do levé strany funkcionální rovnice si nalezený předpis funkce z důvodu přehlednosti nejdříve upravíme (vycházíme ze vztahů (6.4)) pro $f(x)$ a pro $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{1-x} + 1 - \frac{1}{x}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} + 1 - (1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1 + \frac{1}{x} + x\right).$$

Nyní se už snadno přesvědčíme, že nalezená funkce je vskutku (jediným) řešením.

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{1-x} + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{1}{x} + x\right) = \frac{1}{2}(2x) = x.$$

$\square$

**Příklad 6.8.** *Určete všechny dvojice funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují následující podmínky:*

1) *funkce $g$ je prostá,*

2) $f\big(g(x) + y\big) = g\big(x + f(y)\big)$ *pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ a $g$ jsou libovolné funkce, které společně splňují zadání. Po dosazení $x = 0$, resp. $y = 0$ v podmínce 2) při označení $a = f(0)$ a $b = g(0)$ dostaneme

$$\begin{aligned} f\big(g(0) + y\big) &= g\big(0 + f(y)\big), \\ f\big(b + y\big) &= g\big(f(y)\big), \end{aligned} \tag{6.5}$$

respektive

$$\begin{aligned} f\big(g(x) + 0\big) &= g\big(x + f(0)\big), \\ f\big(g(x)\big) &= g\big(x + a\big). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Položením $y = g(0) = b$ v podmínce 2) s ohledem na rovnosti (6.5) a (6.6) obdržíme

$$g\big(x + f(b)\big) \overset{2)}{=} f\big(g(x) + b\big) \overset{(6.5)}{=} g\Big(f\big(g(x)\big)\Big) \overset{(6.6)}{=} g\big(g(x + a)\big),$$

odkud vzhledem k tomu, že funkce $g$ je podle podmínky 1) prostá, získáme

$$x + f(b) = g(x + a), \text{ neboli } g(x) = x - a + f(b).$$

Poslední rovnost určuje hodnotu funkce $g$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť jsme jen provedli záměnu $x + a$ za $x$. Protože $g(0) = b$, dosazením $x = 0$ do nalezeného předpisu dostaneme

$$b = -a + f(b) \quad \text{neboli} \quad a + b = f(b).$$

Funkce $g$ má tedy tvar $g(x) = x - a + f(b) = x + b$ a předpis funkce $f$ odvodíme z rovnosti (6.6) :

$$f\big(g(x)\big) = g(x + a) \quad \text{neboli} \quad f(x + b) = x + a + b,$$

odkud (po záměně $x + b$ za $x$) $f(x) = x + a$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro nalezené funkce $g(x) = x+b$ i $f(x) = x+a$ je podmínka 1) jistě splněna a podmínku 2) ověříme dosazením:

$$\begin{aligned} L:&\quad f\big(g(x) + y\big) = f\big(x + b + y\big) = x + y + a + b,\\ P:&\quad g\big(x + f(y)\big) = g\big(x + y + a\big) = x + y + a + b. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tak, že jedině funkce tvaru $f(x) = x + a$ a $g(x) = x + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty, splňují zadání.

□

**Příklad 6.9.** *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost*

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x + y) = f(xy)$$

*pro každá $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ dále označuje libovolnou funkci splňující všechny předpoklady zadání. Nahrazením této funkce opačnou funkcí $-f$ v zadané rovnosti zjistíme, že dostaneme rovnost ekvivalentní s původní:

$$\begin{aligned} -f\Big(\big(-f(x)\big)\big(-f(y)\big)\Big) - f(x + y) &= -f(xy),\\ f\big(f(x)f(y)\big) + f(x + y) &= f(xy), \end{aligned}$$

což znamená, že také $-f$ je řešením. Tento poznatek v závěru řešení využijeme tím způsobem, že u všech nalezených funkcí splňujících rovnost ze zadání otočíme znaménka a tak získáme další řešení. Díky tomu můžeme také dále předpokládat, že $f(0) \le 0$ (případy těch řešení, ve kterých je $f(0) > 0$, získáme právě výše zmíněným otočením znamének).

Nyní rozebereme oba případy, které mohou nastat pro hodnotu $f(0)$ s ohledem na naše vymezení $f(0) \le 0$.

1) Pro $f(0)=0$ dostaneme položením $y=0$ v rovnosti ze zadání výsledek

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(0)\big)+f(x)&=f(0),\\ f(x)&=0, \end{aligned}$$

který platí pro každé $x\in\mathbb{R}$. Právě odvozený předpis funkce $f$ splňuje zadanou rovnost triviálně, a proto je funkce $f(x)=0$ jediným řešením případu 1).

2) V případě, kdy platí nerovnost $f(0)<0$, nejdříve ukážeme, že funkce $f$ nabývá nulové hodnoty pouze v bodě 1, tj. $f(1)=0$ a $f(x)\neq 0$ pro $x\neq 1$, a že splňuje rovnost $f(0)=-1$. Nakonec dokážeme, že je tato funkce prostá, a s využitím všech dosažených výsledků odvodíme její předpis.

Uvažme $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$, jako libovolné, dále ale pevně dané, a položme $y=\frac{x}{x-1}$. Pro součet $x+y$ tak dostaneme $x+y=x+\frac{x}{x-1}=\frac{x^2-x+x}{x-1}=x\frac{x}{x-1}=xy$ a rovnost ze zadání pro takto zvolená $x,y$, pro která je $f(x+y)=f(xy)$, přejde po úpravě do tvaru

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=0. \tag{6.7}$$

Kdybychom připustili, že pro dané $x\neq 1$ platí $f(x)=0$, dostali bychom z (6.7) rovnost $f(0)=0$, tedy spor. Nějaké $x\in\mathbb{R}$ s vlastností $f(x)=0$ ovšem existuje (a je to tedy nutně $x=1$), neboť volbou $x=0$ v rovnosti (6.7) obdržíme

$$f\left(f(0)^2\right)=0.$$

Z rovnosti $f(0)^2=1$ a předpokladu $f(0)<0$ plyne $f(0)=-1$, jak jsme slíbili dokázat. V druhé (delší) části rozboru případu 2) dokážeme, že funkce $f$ je prostá.

Položením $y=1$ v rovnosti ze zadání s ohledem na předešlé výsledky zjistíme, že pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(1)\big)+f(x+1)&=f(x),\\ f(0)+f(x+1)&=f(x),\\ f(x+1)&=f(x)+1. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že matematickou indukcí, kterou zde neuvádíme z důvodu její jednoduchosti, lze z posledního odvozeného vztahu snadno dokázat pro každé $x\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{Z}$ rovnost

$$f(x+n)=f(x)+n. \tag{6.8}$$

Nyní můžeme přejít ke slíbenému důkazu, že hledaná funkce $f$ je prostá. Provedeme ho sporem, připustíme tudíž, že $f(a)=f(b)$ pro nějaká navzájem různá čísla

$a, b \in \mathbb{R}$, dále pevně daná. S ohledem na předpoklad $f(a) = f(b)$ plyne pro každé $n \in \mathbb{Z}$ z (6.8) rovnost

$$f(a+n+1) = f(a) + n + 1 = f(b) + n + 1 = f(b+n) + 1. \tag{6.9}$$

Prozkoumejme nyní, zda je možné nalézt, a popřípadě za jakých podmínek, taková $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, že platí

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 &= a + n + 1, \\ x_0 y_0 &= b + n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Jinými slovy se budeme snažit ukázat, kdy je tato soustava pro neznámé $x_0, y_0$ řešitelná. Vyjádřením neznámé $y_0$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme kvadratickou rovnici (pro neznámou $x_0$):

$$x_0(a+n+1-x_0) = b+n \quad \text{neboli} \quad x_0^2 - (a+n+1)x_0 + b + n = 0,$$

která je řešitelná právě tehdy, když je její diskriminant nezáporný, tzn.

$$(a+n+1)^2 - 4(b+n) \geq 0.$$

Poslední nerovnost je však triviálně splněna vždy, když platí $b + n \leq 0$. Tedy pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ najdeme vždy taková $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ splňující obě podmínky (6.10), pokud celé číslo $n$ zvolíme tak, aby platila nerovnost $b + n \leq 0$.

Předpokládejme tedy dále, že $n$ splňuje nerovnost $b + n \leq 0$ pro dané číslo $b$ (takové celé číslo $n$ zřejmě vždy existuje) a že čísla $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ jsou zvolena tak, že platí obě podmínky uvedené v (6.10).

Volbou $x = x_0$ a $y = y_0$ v rovnosti ze zadání s ohledem na (6.10) dostaneme

$$\begin{aligned} f\bigl(f(x_0)f(y_0)\bigr) + f(x_0 + y_0) &= f(x_0 y_0), \\ f\bigl(f(x_0)f(y_0)\bigr) + f(a+n+1) &= f(b+n), \end{aligned}$$

odkud dále využitím výsledků (6.9) a (6.8) získáme rovnost

$$\begin{aligned} f\bigl(f(x_0)f(y_0)\bigr) + 1 &= 0, \\ f\bigl(f(x_0)f(y_0) + 1\bigr) &= 0, \end{aligned}$$

což s ohledem na fakt, že $f(x) = 0$ pouze pro $x = 1$, znamená, že $f(x_0)f(y_0) = 0$. Je-li $f(x_0) = 0$, pak je $x_0 = 1$ a rovnosti uvedené v (6.10) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} y_0 &= a + n, \\ y_0 &= b + n, \end{aligned}$$

odkud plyne $a = b$, což je spor s předpokladem $a \neq b$. Podobně dostaneme spor v případě, kdy $f(y_0) = 0$. Dokázali jsme tak, že hledaná funkce $f$ je ve zkoumaném případě 2) prostá. Nyní již máme vše potřebné k tomu, abychom mohli přejít k samotnému odvození předpisu hledané funkce.

Nahrazením $-x$ za $y$ v rovnosti ze zadání s ohledem na výsledek (6.8) a fakt, že je funkce $f$ prostá a platí $f(0) = -1$, obdržíme

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(-x)\big) + f(0) &= f(-x^2), \\ f\big(f(x)f(-x)\big) &= f(-x^2) + 1, \\ f\big(f(x)f(-x)\big) &= f(-x^2 + 1), \\ f(x)f(-x) &= -x^2 + 1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Po jiném nahrazení $1 - x$ za $y$ v rovnosti ze zadání dostaneme vzhledem k výše odvozeným výsledkům, že je funkce $f$ prostá a platí $f(1) = 0$, rovnost

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(1-x)\big) + f(1) &= f\big(x(1-x)\big), \\ f\big(f(x)f(1-x)\big) &= f(x - x^2), \\ f(x)f(1-x) &= x - x^2, \end{aligned}$$

odkud využitím rovnosti (6.11) a (6.8), podle níž je $f(1-x) = 1 + f(-x)$, nakonec získáme

$$\begin{aligned} f(x)\big(1 + f(-x)\big) &= x - x^2, \\ f(x) - x^2 + 1 &= x - x^2, \\ f(x) &= x - 1. \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak předpis hledané funkce $f$ pro případ, kdy $f(0) < 0$. Protože funkce $-f$ také splňuje zadání, jak jsme ukázali v úvodu řešení, je řešením taktéž funkce s předpisem ve tvaru $f(x) = 1 - x$.

Dosazením do rovnosti v zadání, které provedeme pouze pro $f(x) = x - 1$, se ještě přesvědčíme, že jsme opravdu nalezli řešení:

$$\begin{aligned} L: \quad & f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f\big((x-1)(y-1)\big) + x + y - 1 = \\ & = (x-1)(y-1) - 1 + x + y - 1 = xy - 1, \\ P: \quad & f(xy) = xy - 1. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že hledanými řešeními jsou pouze tři funkce $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ a $f(x) = 1 - x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

□

## 11.6 Kapitola 7

**Příklad 7.6.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující rovnost*

$$f\bigl(f(x)\bigr) = x^3 + \frac{3}{4}x$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že existují taková tři navzájem různá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, že platí $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.*

*Řešení.* Označme jako $f$ funkci vystupující v zadání a dále definujme novou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem z pravé strany zadané rovnosti

$$g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Díky tomu přejde rovnost ze zadání do tvaru

$$f\bigl(f(x)\bigr) = g(x) \tag{7.1}$$

a platí $f\bigl(g(x)\bigr) = f\Bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = g\bigl(f(x)\bigr)$. Označme jako $x_0 \in \mathbb{R}$ nějaký pevný bod funkce $g$, tzn. $g(x_0) = x_0$. Pak vzhledem k výše odvozené rovnosti platí

$$f(x_0) = f\bigl(g(x_0)\bigr) = g\bigl(f(x_0)\bigr),$$

což znamená, že i $f(x_0)$ je pevným bodem $g$.

Vzhledem k definici $g$ platí, že je tato funkce prostá (pro $x_1 < x_2$ je vždy $x_1^3 + \frac{3}{4}x_1 < x_2^3 + \frac{3}{4}x_2$, neboť $x_1^3 < x_2^3$ i $\frac{3}{4}x_1 < \frac{3}{4}x_2$) a s ohledem na rovnost (7.1) je tedy prostá i funkce $f$. Skutečně, platí-li totiž $f(a) = f(b)$ pro $a \neq b$, pak s ohledem na předchozí poznatek je $g(a) \neq g(b)$, díky čemuž s využitím (7.1) dostaneme spor:

$$g(a) = f\bigl(f(a)\bigr) = f\bigl(f(b)\bigr) = g(b).$$

Nalezněme nyní všechny pevné body, které funkce $g$ má, tedy vyřešme v oboru $\mathbb{R}$ rovnici $g(x) - x = 0$. Dosazením předpisu $g$ do této rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{3}{4}x - x &= 0, \\ x^3 - \frac{1}{4}x &= 0, \\ x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Jak vidíme, jedinými pevnými body funkce $g$ jsou body $-\frac{1}{2}$, 0 a $\frac{1}{2}$. Podle zjištění, že je funkce $f$ prostá a pevné body funkce $g$ zobrazuje opět na pevné body funkce $g$, musí platit, že je $f$ na množině $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ bijekcí, tj. pro každé $x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ existuje jiné $y \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ tak, že $f(x) = y$. Díky tomu pak platí rovnost

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Tím jsme dokázali, že pro funkci $f$ opravdu existují 3 různá čísla $a$, $b$ a $c$, a to $-\frac{1}{2}$, 0 a $\frac{1}{2}$, pro která platí $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

□

**Příklad 7.7.** *Dokažte, že alespoň jeden pevný bod mají všechny (i nespojité) rostoucí funkce* $f\colon \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$.

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci vyhovující všem předpokladům zadání. Důkaz existence pevného bodu této funkce provedeme sporem, proto dále předpokládejme, že $f$ nemá žádný pevný bod na $\langle 0,1\rangle$ a označme

$$A = \{x \in \langle 0,1\rangle \mid f(x) > x\}, \ \alpha = \sup A \leq 1.$$

Zdůrazněme, že $A \neq \emptyset$, neboť z $f(0) \neq 0$ plyne $f(0) > 0$, tj. $0 \in A$. Uvažme dále libovolnou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z $A$, která konverguje k $\alpha$. Vzhledem k tomu, že $x_n \in A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí s ohledem na zavedení hodnoty $\alpha$ nerovnost $\alpha \geq x_n$ pro každé přirozené $n$. Díky tomu s ohledem na předpoklad, že $f$ je rostoucí funkce, dostaneme $f(\alpha) \geq f(x_n) > x_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, odkud plyne nerovnost

$$f(\alpha) \geq \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Protože však předpokládáme, že funkce $f$ nemá žádný pevný bod, je splněna nerovnost $f(\alpha) > \alpha$. Odtud s ohledem na předpoklad, že $f$ je rostoucí, platí pro body $\alpha, f(\alpha) \in \langle 0,1\rangle$ nerovnost $f\big(f(\alpha)\big) > f(\alpha)$, což znamená, že $f(\alpha) \in A$. To však odporuje tomu, že $f(\alpha) > \alpha = \sup A$. Důkaz sporem je tak hotov.

□

**Poznámka.** Záměnou předpokladu, že funkce $f$ je rostoucí, za předpoklad o její spojitosti, plyne závěr příkladu 7.7 z *Bolzanovy věty* o mezihodnotách spojité funkce (řešení lze nalézt v [Šat2, str. 31]).

**Příklad 7.8.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je taková spojitá funkce, že pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *existuje takové* $n \in \mathbb{N}$, *že* $n$*-tá iterace* $f$ *v bodě* $x$ *je rovna jedné, tj.* $f^{(n)}(x) = 1$. *Dokažte, že funkce* $f$ *má pevný bod.*

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou funkci, která splňuje všechny předpoklady zadání. Sporem ukážeme, že pevným bodem každé takové funkce je vždy číslo 1. Předpokládejme tedy, že $f(1) \neq 1$. Pokud by nyní existovalo takové reálné $x_0 \neq 1$ splňující $f(x_0) = x_0$, pak by zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platila rovnost $f^{(n)}(x_0) = x_0$ $(\neq 1)$, což je ale spor s předpokladem zadání. Proto za podmínky $f(1) \neq 1$ nemá funkce $f$ žádný pevný bod. Každé $x \in \mathbb{R}$ je tedy řešením jedné z nerovnic $f(x) > x$, nebo $f(x) < x$. Nyní vyšetříme všechny případy, kdy jsou množiny řešení těchto nerovnic neprázdné, či naopak jedna z nich je prázdná (a druhá je rovna $\mathbb{R}$).

1. V případě, že existují takové body $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$, splňující nerovnosti $f(a) > a$ a $f(b) < b$, resp. $f(a) < a$ a $f(b) > b$, platí pro spojitou funkci $g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ definovanou pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ předpisem

$$g(x) = f(x) - x$$

nerovnosti

$$g(a) = f(a) - a > 0, \quad g(b) = f(b) - b < 0,$$

respektive

$$g(a) = f(a) - a < 0, \quad g(b) = f(b) - b > 0.$$

Jak vidíme, v obou variantách nabývá funkce $g$ v krajních bodech $a$ a $b$ hodnot s opačným znaménkem. Podle Bolzanovy věty o mezihodnotách spojité funkce máme zaručeno, že existuje takové $c \in \langle a, b\rangle$, že platí $g(c) = 0$, odkud s ohledem na definici $g$ plyne $f(c) = c$. Bod $c$ je tedy pevným bodem funkce $f$, což je ale spor, protože, jak jsme výše ukázali, za podmínky $f(1) \neq 1$ nemá funkce $f$ žádné pevné body.

2. Je-li $f(x) > x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, uvažujme následující posloupnost: $2, f(2), f^{(2)}(2), \ldots$, která je jistě rostoucí. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(2) > 1$, což je ale spor s předpokladem, že pro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ (tedy i pro $x = 2$) existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že platí $f^{(n)}(x) = 1$.

3. V případě, kdy $f(x) < x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, uvažujme posloupnost $0, f(0), f^{(2)}(0), \ldots$, která je zřejmě klesající. Odtud pak plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněna nerovnost $f^{(n)}(0) < 1$, což je opět spor s předpokladem uvedeným v zadání.

Ve všech možných případech, které mohou za podmínky $f(1) \neq 1$ nastat, jsme obdrželi spor, proto platí $f(1) = 1$, a tedy 1 je pevným bodem funkce $f$.

□

## 11.7 Kapitola 8

**Příklad 8.5.** *Určete všechny spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnost*

$$f(2x+1) = f(x)$$

*pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

*Řešení.* Nechť $f$ označuje libovolnou spojitou funkci, která splňuje zadání. Pomocí vhodné rekurentně zadané posloupnosti ukážeme, že řešeními jsou pouze konstantní funkce (ty samozřejmě vyhovují). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je libovolný, dále pevně daný bod a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentně rovností

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Úpravou vzorce určující $n$-tý člen posloupnosti dostaneme

$$x_{n+1} + 1 = \frac{x_n + 1}{2} = \frac{1}{2}(x_n + 1), \tag{8.1}$$

odkud vidíme, že $(x_n + 1)_{n=0}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, takže platí

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = 0 \quad \text{neboli} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Vyjádřením $x_n$ z (8.1) obdržíme $x_n = 2x_{n+1} + 1$, odkud položením $x = x_{n+1}$ v zadané rovnosti získáme

$$f(x_n) = f(2x_{n+1} + 1) = f(x_{n+1})$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Odtud indukcí vzhledem k číslu $n$ plyne $f(x_n) = f(x_0)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, odkud s ohledem na spojitost funkce $f$ nakonec dostaneme

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(-1).$$

Protože bylo $x_0 \in \mathbb{R}$ na začátku zvoleno libovolně, je předpis hledané funkce $f$ tvaru $f(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Řešením příkladu je každá konstantní funkce.

□

**Příklad 8.6.** *Nechť funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ splňuje pro každé $x \in (0,\infty)$ rovnost*

$$f\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = x + a,$$

*kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Dokažte, že pro žádné $a \leq 1$ taková funkce $f$ neexistuje a naopak pro každé $a > 1$ je takových funkcí nekonečně mnoho.*

*Řešení.* Nechť $f$ je libovolná z hledaných funkcí. Je-li $f(x) = f(y)$ pro nějaká $x, y \in (0, \infty)$, dostaneme ze zadání rovnost

$$\begin{aligned} f\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right) &= f\left(f(y)+\frac{1}{f(y)}\right), \\ x+a &= y+a, \\ x &= y, \end{aligned}$$

odkud plyne, že funkce $f$ je prostá. Uvažme funkci $g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ definovanou předpisem

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

pro každé $x \in (0, \infty)$.

Předpokládejme nejdříve, že $a \leq 1$, a sporem ukažme, že žádná vyhovující funkce $f$ tehdy neexistuje.

Vzhledem k limitě

$$\lim_{x\to\infty} f\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to\infty} (x+a) = \infty$$

existuje takové $x_0 \in (0, \infty)$, že $f(x_0) > 1$. Položením $y = f(x_0) - a$ zjistíme, že s ohledem na předpoklad $a \leq 1$ a předpis funkce $g$ platí $y > 0$ a

$$\begin{aligned} f\left(f(y)+\frac{1}{f(y)}\right) &= y+a, \\ f\left(g(y)\right) &= f(x_0), \end{aligned}$$

odkud s ohledem na fakt, že je funkce $f$ prostá, obdržíme $x_0 = g(y)$. Uvědomme si, že pro každé $x \in (0, \infty)$ je nerovnost $f(x) > 0$ vynucena zadaným oborem hodnot, díky čemuž platí

$$\begin{aligned} \frac{\left(f(x)-1\right)^2}{f(x)} &\geq 0, \\ \frac{\left(f(x)\right)^2 - 2f(x) + 1}{f(x)} &\geq 0, \\ f(x) + \frac{1}{f(x)} &\geq 2, \\ g(x) &\geq 2, \end{aligned}$$

což vzhledem k předchozímu výsledku znamená, že pro každé $x_0 \in (0, \infty)$ splňující podmínku $f(x_0) > 1$ platí (položením $y = f(x_0) - a$) nerovnost $x_0 = g(y) \geq 2$.

Proto opačná nerovnost $f(x) < 1$ nastává pro všechna $x \in (0,2)$ (s případnou výjimkou jednoho bodu, ve kterém je funkční hodnota funkce $f$ rovna jedné). Uvažme tedy takové $x_1 \in (0,2)$, které splňuje $f(x_1) < 1$, a položme $z = \frac{1}{f(x_1)} - a$. Vzhledem k předpokládaným nerovnostem $f(x_1) < 1$ a $a \leq 1$ zřejmě platí $z > 0$, odkud s využitím zadané rovnosti pro $x = z$ a předpisu funkce $g$ plyne

$$f\left(f(z) + \frac{1}{f(z)}\right) = z + a,$$
$$f\,(g(z)) = \frac{1}{f(x_1)} - a + a = \frac{1}{f(x_1)}. \tag{8.2}$$

Pravá strana získané rovnosti je s ohledem na podmínku $f(x_1) < 1$ větší jak jedna, proto při označení $t = g(z)$ platí $f(t) > 1$, odkud vzhledem k faktu, že nerovnost $f(x) > 1$ je splněna pouze pro $x \geq 2$, plyne $t \geq 2$. Na druhou stranu dostaneme při zavedeném značení $t = g(z) = f(z) + \frac{1}{f(z)}$ s ohledem na zadání a (8.2) rovnost

$$t+a = f\left(f(t) + \frac{1}{f(t)}\right) = f\left(f\big(g(z)\big) + \frac{1}{f\big(g(z)\big)}\right) = f\left(\frac{1}{f(x_1)} + f(x_1)\right) = x_1 + a,$$

odkud je $t = x_1$, což je ale spor s tím, že $t \geq 2$ a přitom $x_1 \in (0,2)$. Ukázali jsme tak, že v případě, kdy $a \leq 1$, opravdu neexistuje žádná funkce $f$ vyhovující zadání příkladu.

V druhé části řešení ukážeme, že pro každé $a > 1$ vyhovuje zadání příkladu nekonečně mnoho funkcí $f$ s oborem hodnot $\langle 1, \infty)$. Na tomto intervalu budeme pracovat s funkcí $\varphi$ danou předpisem

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{x},$$

protože rovnost ze zadání lze zapsat ve tvaru $f\Big(\varphi\big(f(x)\big)\Big) = x + a$. Funkce $\varphi$ je na $\langle 1, \infty)$ spojitá, rostoucí (neboť $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ pro každé $x > 1$) a má limitu $\infty$ pro $x \to \infty$. S ohledem na $\varphi(1) = 2$ tak dostáváme, že $\varphi\colon\ \langle 1, \infty) \to \langle 2, \infty)$ je spojitá rostoucí bijekce.

Podle daného $a > 1$ definujme číselné posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ rovnostmi $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a rekurentními vztahy

$$x_n = \varphi(y_{n-1}) \ \text{ a } \ y_n = x_{n-1} + a \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

Vysvětleme, proč obě obě posloupnosti jsou rostoucí a mají limitu $\infty$. Skutečně, nerovnosti $x_n < x_{n+1}$ a $y_n < y_{n+1}$ ověříme indukcí vzhledem k číslu $n$.

Pro $n = 0$ jde o platné nerovnosti $0 < 2$, resp. $1 < a$. Platí-li $x_{n-1} < x_n$ a $y_{n-1} < y_n$ pro některé $n \geq 1$, pak $\varphi(y_{n-1}) < \varphi(y_n)$ neboli $x_n < x_{n+1}$ a zároveň $x_{n-1} + a < x_n + a$ neboli $y_n < y_{n+1}$. Důkaz indukcí je tak hotov.

Dále z nerovností $x_{n+1} = \varphi(y_n) > y_n = x_{n-1} + a$ pak plyne, že obě uvažované rostoucí posloupnosti opravdu konvergují k $\infty$.

Význam sestrojených posloupností pro naši konstrukci bude ten, že definiční obor a obor hodnot hledané funkce $f$ rozdělíme na intervaly

$$\begin{aligned}(0,\infty) &= (x_0, x_1\rangle \cup (x_1, x_2\rangle \cup (x_2, x_3\rangle \cup \dots\\ (1,\infty) &= (y_0, y_1\rangle \cup (y_1, y_2\rangle \cup (y_2, y_3\rangle \cup \dots\end{aligned}$$

a funkci $f$ dostaneme „slepením“ dílčích funkcí $f_n\colon \langle x_n, x_{n+1}\rangle \to \langle y_n, y_{n+1}\rangle$, které sestrojíme rekurentně tak, aby výsledná funkce $f$ splňovala rovnost ze zadání příkladu. Využijeme přitom poznatku, že podle zavedení obou posloupností určuje funkce $\varphi$ rostoucí spojitou bijekci $\langle y_{n-1}, y_n\rangle \to \langle x_n, x_{n+1}\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Přejděme tedy ke konstrukci posloupnosti $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ funkcí, z nichž každá je spojitou rostoucí bijekcí $f_n$: $\langle x_n, x_{n+1}\rangle \to \langle y_n, y_{n+1}\rangle$. První z nich, funkci $f_0$: $\langle 0, 2\rangle \to \langle 1, a\rangle$ zvolíme libovolně. Máme-li pro některé $n \geq 1$ již určenou spojitou rostoucí bijekci $f_{n-1}\colon \langle x_{n-1}, x_n\rangle \to \langle y_{n-1}, y_n\rangle$, definujeme funkci $f_n$ předpisem

$$f_n(x) = f_{n-1}^{-1}\left(\varphi^{-1}(x)\right) + a \ \text{ pro každé } \ x \in \langle x_n, x_{n+1}\rangle\,. \tag{8.3}$$

Ukažme předně, že takový předpis je korektní. Pro každé $x \in \langle x_n, x_{n+1}\rangle$ je totiž $\varphi^{-1}(x) \in \langle y_{n-1}, y_n\rangle$ (viz konec předchozího odstavce), takže hodnota $f_{n-1}^{-1}(\varphi^{-1}(x))$ je skutečně definována. Předpis (8.3) tak opravdu zadává funkci $f_n$ na intervalu $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$ a tato funkce je na něm spojitá a rostoucí, neboť takové jsou obě funkce $\varphi^{-1}$ a $f_{n-1}^{-1}$. Protože navíc pro hodnoty funkce $f_n$ v krajních bodech definičního oboru platí

$$\begin{aligned}f_n(x_n) &= f_{n-1}^{-1}\left(\varphi^{-1}(x_n)\right) + a = f_{n-1}^{-1}(y_{n-1}) = x_{n-1} + a = y_n,\\ f_n(x_{n+1}) &= f_{n-1}^{-1}\left(\varphi^{-1}(x_{n+1})\right) + a = f_{n-1}^{-1}(y_n) = x_n + a = y_{n+1},\end{aligned}$$

je funkce $f_n$ skutečně spojitá rostoucí bijekce $\langle x_n, x_{n+1}\rangle \to \langle y_n, y_{n+1}\rangle$, jak bylo zapotřebí. Tím je konstrukce posloupností funkcí $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ hotova.

Jak jsme dříve slíbili, definujeme nyní funkci $f\colon (0,\infty) \to (1,\infty)$ předpisem

$$f(x) = f_{n-1}(x) \ \text{ pro každé } \ x \in (x_{n-1}, x_n\rangle \ \text{ a každé } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

(I tato funkce je rostoucí a spojitá na celém svém definičním oboru.)

Rovnost $f\Bigl(\varphi\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = x + a$ ze zadání příkladu ověříme takto: pro každé $x \in (x_{n-1}, x_n\rangle$ máme $f(x) = f_{n-1}(x) \in (y_{n-1}, y_n\rangle$, a tedy $\varphi\bigl(f(x)\bigr) \in (x_n, x_{n+1}\rangle$, takže podle předpisu (8.3) platí

$$f\Bigl(\varphi\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = f_n\Bigl(\varphi\bigl(f_{n-1}(x)\bigr)\Bigr) = f_{n-1}^{-1}\Bigl(\varphi^{-1}\bigl(\varphi\bigl(f_{n-1}(x)\bigr)\bigr)\Bigr) + a = x + a.$$

Tím je rozbor případu $a > 1$ hotov. Dokázali jsme, že tehdy zadání příkladu vyhovuje nekonečně mnoho funkcí $f$, přičemž na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ to může být libovolná spojitá rostoucí funkce splňující podmínky $f(0) = 1$ a $f(2) = a$.

□

## 11.8 Kapitola 10

**Příklad 10.15.** *Zjistěte, zda existuje taková rostoucí funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která splňuje $f(2) = 3$ a rovnost*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

*pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.*

*Řešení.* Sporem ukážeme, že funkce, která by vyhovovala zadání, neexistuje. Nechť $f$ označuje funkci splňující zadání. Položme $f(3) = k$, kde $k \in \mathbb{N}$. S ohledem na zadané rovnosti a předpoklad, že $f$ je rostoucí, pak dostaneme

$$3^3 = \left(f(2)\right)^3 = f(2)f(2)f(2) = f\left(2^3\right) < f\left(3^2\right) = f(3)f(3) = k^2$$

neboli $27 < k^2$, což vzhledem k podmínce $k \in \mathbb{N}$ znamená, že $5 < k$. Z nerovnosti $2^5 = 32 > 27 = 3^3$ naopak plyne

$$3^5 = \left(f(2)\right)^5 = f\left(2^5\right) > f\left(3^3\right) = f(3)f(3)f(3) = k^3,$$

což znamená, že $7 > k$, neboť $7^3 > 3^5$.

Porovnáním obou odvozených nerovností pro $k$ zjistíme, že musí platit rovnost $f(3) = k = 6$. S ohledem na předpoklad $f(2) = 3$ tak ze zadání pro čísla $6\,561 = 3^8$ a $8\,192 = 2^{13}$ dostaneme rovnosti

$$f(6\,561) = f\left(3^8\right) = \left(f(3)\right)^8 = k^8 = 6^8,$$
$$f(8\,192) = f\left(2^{13}\right) = \left(f(2)\right)^{13} = k^{13} = 3^{13},$$

jejichž pravé strany splňují nerovnost $6^8 > 3^{13}$ (platnost této nerovnosti se stane zřejmější po její úpravě do tvaru $3^8 \cdot 2^8 < 3^{13}$ neboli $256 = 2^8 > 3^5 = 243$). Obdrželi jsem tak spor s tím, že funkce $f$ je rostoucí, a tudíž splňuje nerovnost $f(6\,561) < f(8\,192)$.

Dokázali jsme tedy, že žádná funkce splňující zadání neexistuje.

□

**Příklad 10.16.** *Nechť $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je taková funkce, že rozdíl $f(m) - f(n)$ je dělitelný číslem $f(m - n)$ pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že pro všechna tato $m$, $n$ splňující navíc nerovnost $f(m) \leq f(n)$ je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$.*

*Řešení.* Nechť $f$ označuje funkci vyhovující předpokladům zadání. Položením $n = 0$ zjistíme, že pro všechna $m \in \mathbb{Z}$ je $f(m) - f(0)$ dělitelné $f(m)$, odkud plyne $f(m) \mid f(0)$ ($f(0)$ je dělitelné $f(m)$). Pro $m = 0$ pak ze zadání plyne, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je $f(0) - f(n)$ dělitelné $f(-n)$, odkud vzhledem k předešlému výsledku platí $f(-n) \mid f(n)$ ($f(n)$ je dělitelné $f(-n)$). Z podmínky $f(-n) \mid f(n)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, však záměnou $n$ za $-n$ plyne, že také $f(n) \mid f(-n)$, což s ohledem na fakt, že obě čísla $f(n), f(-n)$ jsou přirozená, znamená, že pro každé celé $n$ je splněna rovnost $f(n) = f(-n)$.

Nechť $m_0$, $n_0$ označují libovolná, ale dále pevně daná celá čísla. Předpoklad ze zadání můžeme po dosazení $n = n_0$, $m = m_0$, resp. $m = n_0$, $n = n_0 - m_0$ a $m = m_0$, $n = m_0 - n_0$ s ohledem na předešlý výsledek přepsat do tvaru

$$f(m_0 - n_0) \mid f(m_0) - f(n_0),$$

respektive

$$f(m_0) \mid f(n_0) - f(m_0 - n_0) \text{ a } f(n_0) \mid f(m_0) - f(m_0 - n_0).$$

Uspořádejme čísla $f(n_0), f(m_0)$ a $f(m_0 - n_0)$ vzestupně podle velikosti a označme tuto trojici $[c, b, a]$, tzn. $0 < c \leq b \leq a$. Předchozí vztahy vyjadřující dělitelnosti tak můžeme vzhledem k faktu, že samotná dělitelnost není nijak narušena, zaměníme-li v rozdílu dvou čísel jejich pořadí, zapsat následujícím způsobem:

$$a \mid b - c, \; b \mid c - a, \text{ a } c \mid a - b.$$

Všimněme si, že z předpokladu $0 < c \leq b \leq a$ plyne $0 \leq b - c < a$, což vzhledem k $a \mid b - c$ znamená, že $b = c$. Díky tomu můžeme $b \mid c - a$ zapsat jako $b \mid b - a$, odkud plyne $b \mid a$. Protože celá čísla $m_0, n_0$ byla na začátku zvolena libovolně, jsou předešlé úvahy a odvozené výsledky platné obecně.

Připomeňme, že máme dokázat, že pro všechna celá $m$, $n$ splňující nerovnost $f(m) \leq f(n)$ je $f(m) \mid f(n)$. Nyní díky dosaženým výsledkům můžeme prozkoumat všechny případy, jak je číslo $f(m - n)$ velké ve srovnání s čísly $f(m) \leq f(n)$:

1. $f(m - n) \leq f(m) \leq f(n)$. V předchozím odstavci je tehdy $a = f(n)$, $b = f(m)$ a odvozená vlastnost $b \mid a$ tak znamená, že $f(m) \mid f(n)$.

2. $f(m) \leq f(m - n) \leq f(n)$. Tehdy je $a = f(n)$, $b = f(m - n)$, $c = f(m)$ a výše odvozená rovnost $b = c$ a vlastnost $b \mid a$ tak znamenají, že $f(m) \mid f(n)$.

3. $f(m) \leq f(n) \leq f(m - n)$. Tehdy je $b = f(n)$, $c = f(m)$ a výše odvozená rovnost $b = c$ tak zaručuje, že $f(m) \mid f(n)$ (jde o dvě stejná čísla).

Požadované tvrzení je tímto dokázáno.

$\square$

**Příklad 10.17.** *Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, které pro každé $x \in \mathbb{Q}^+$ splňují obě následující podmínky:*

1) $f(x+1) = f(x) + 1$,

2) $f\left(x^2\right) = (f(x))^2$.

*Řešení.* Ukážeme, že jedinou vyhovující funkcí je $f(x) = x$. Nechť $f$ označuje libovolnou funkci, která splňuje zadání. Z podmínky 1) plyne

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f((x+1)+1) = f(x+1)+1 = f(x)+2,\\ f(x+3) &= f(x+2)+1 = f(x)+3,\\ &\vdots\\ f(x+n) &= f(x)+n, \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Uvažme s ohledem na právě získanou rovnost (10.1) a podmínku 2) dvě různá vyjádření druhé mocniny hodnoty $f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ jsou libovolná:

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = f\left(\frac{p}{q}+q\right)^2 \stackrel{(10.1)}{=} \left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q\right)^2 = f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2,$$

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 \stackrel{2)}{=} f\left(\frac{(p+q^2)^2}{q^2}\right) = f\left(\frac{p^2+2pq^2+q^4}{q^2}\right) = f\left(\frac{p^2}{q^2}+2p+q^2\right) \stackrel{2),(10.1)}{=}$$

$$\stackrel{2),(10.1)}{=} f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2p + q^2.$$

Porovnáním pravých stran obdržíme

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 &= f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2p + q^2,\\ 2qf\left(\frac{p}{q}\right) &= 2p,\\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Protože $\frac{p}{q}$ je vyjádřením libovolného čísla z $\mathbb{Q}^+$, dokázali jsme tak, že pro každé $x \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x) = x$. Snadným dosazením vidíme, že tato funkce jistě splňuje obě podmínky 1) a 2).

□

**Příklad 10.18.** *Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \{0,1\}$, pro kterou platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$ je splněna implikace*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) = f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

*Dokažte, že $f(x) = 1$ pro všechna racionální $x \geq 1$.*

*Řešení.* Indukcí nejprve ukážeme, že $f(n) = 1$ pro libovolné přirozené $n$. Díky podmínce $f(1) = 1$ stačí předpokládat, že pro některé $n$ platí $f(n) = 1$, a dokázat rovnost $f(n+1) = 1$. Z implikace ze zadání dostaneme, že $1 = f(1) = f(n) = f\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Připustíme-li rovnost $f(n+1) = 0 = f(0)$, pak užitím zadané implikace zjistíme, že $0 = f(0) = f(n+1) = f\left(\frac{n+1}{2}\right)$, což odporuje tomu, že $f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 1$. Musí tedy platit $f(n+1) = 1$.

Po provedeném důkazu rovnosti $f(n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ nyní dokážeme rovnost $f(x) = 1$ pro každé racionální $x > 1$ sporem. Předpokládejme naopak, že pro nějaké racionální číslo $\frac{p}{q} > 1$ $(p, q \in \mathbb{N})$ platí $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, takže, jak už víme, $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$. Zaveďme novou funkci

$$g(x) = 1 - f\left(\left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right)x + \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right),$$

kde $x \in \mathbb{Q}$ a $\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor$ značí dolní celou část čísla $\frac{p}{q}$. Všimněme si, že $g(x) \in \{0, 1\}$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Ukážeme, že i tato nová funkce $g\colon \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ má všechny vlastnosti ze zadání příkladu jako funkce $f$. Výpočtem funkčních hodnot v bodech 0 a 1 vzhledem k faktu, že $\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$g(0) = 1 - f\left(\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right) = 1 - 1 = 0 = f(0),$$

$$g(1) = 1 - f\left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right) = 1 - f\left(\frac{p}{q}\right) = 1 - 0 = f(1).$$

Označme $X = \left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right)x + \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor$ a $Y = \left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right)y + \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$. Pak z rovnosti $g(x) = g(y)$ postupně odvodíme:

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 1 - f(X) = 1 - f(Y) \Rightarrow f(X) = f(Y) \Rightarrow f(X) = f\left(\frac{X+Y}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - f(X) = 1 - f\left(\frac{X+Y}{2}\right) \Rightarrow g(x) = g(y) = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Funkce $g$ tedy splňuje všechny uvedené předpoklady jako funkce $f$, a proto platí $g(n) = 1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. S ohledem na fakt, že $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$ (viz výše) máme $\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor > 0$ a $\left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right)q \in \mathbb{N}$. Pro hodnotu funkce $g$ v bodě $q$ tudíž platí rovnost

$$g(q) = 1 - f\left(\left(\frac{p}{q} - \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right)q + \left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor\right) = 1 - 1 = 0,$$

což je spor, neboť $q$ je přirozené číslo, a tak musí platit $g(q) = 1$.

Důkaz rovnosti $f(x) = 1$ pro každé racionální $x > 1$ je hotov.

$\square$

# Závěr

Funkcionální rovnice a metody jejich řešení představují matematickou disciplínu bohatou na zdroje ať už ve formě monotématicky zaměřených publikací nebo článků v různých periodikách. Nicméně rozsáhlejšímu výkladu metod demonstrovaných na řešených příkladech není (zejména v české literatuře) věnována dostatečná pozornost. Zájemci o tuto problematiku jsou pak odkázáni na sbírání střípků z různých zdrojů, aby si pak sami utvořili představu o arzenálu možných postupů při řešení funkcionálních rovnic. Mým cílem v této práci bylo vytvořit ucelený systematický výklad elementárních metod řešení funkcionálních rovnic formou utříbeného příkladového materiálu. Věřím, že se mi tento cíl podařilo splnit a doufám, že práce najde své uplatnění a zájemci o tuto problematiku ji ocení.

V průběhu tvorby disertační práce jsem se jednak zaobíral systematickým prohledáváním zdrojů, které mi školitel doporučil, jednak analýzou použitých metod a postupů v řešeních a jejich následnou klasifikací. Ve většině případů jsem sice čerpal z anglických publikací a článků, ale některé české publikaci mi byly také velmi nápomocné. Zadání i řešení mnoha takto získaných příkladů bylo poté potřeba upřesnit, doplnit, a někdy i více přepracovat, když jsem v řešeních objevil chyby. Rád bych zde vyzdvihl i přesah práce, kdy je užitek funkcionálních rovnic demonstrován například na kvaziaritmetickém průměru nebo problému vnořených odmocnin. K tomu navíc ještě příklad 7.4 zasahuje do hluboké problematiky iterací funkcí, která je již vysoce nad rámec práce, o čemž se čtenář může přesvědčit v poznámce za tímto příkladem následující.

Během svého Ph.D. studia jsem se naučil postupy při řešení funkcionálních rovnic, se kterými se z důvodu absence této problematiky ve vysokoškolských osnovách často ani studenti odborné matematiky nesetkávají. Věřím, že práci ocení například studenti připravující se na některou z matematických soutěží, nebo učitelé pracující s nadanými žáky. Taktéž si dokážu představit, že práce může sloužit jako základní studijní materiál pro budoucí fakultní kurz určený (nejen) budoucím středoškolským učitelům matematiky.

# Seznam literatury


### 1) Monografie o funkcionálních rovnicích

[A-D] Aczél J., Dhombres J.: *Functional equations in several variables.* Cambridge University Press. First published 1989. pp. 462. ISBN 978-0-521-35276-5.

[Kucz] Kuczma M.: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* Birkhäuser. Basilej 2008. pp. 595. ISBN 978-3-7643-8748-8.

[S-K] Sahoo P., Kannappan P.: *Introduction to Functional Equations.* CRC Press, 2011. pp. 440. ISBN 978-1-4398-4111-2.

### 2) Metody řešení funkcionálních rovnic

[And] Andreescu T., Boreico I., Mushkarov O., Nikolov N.: *Topics in Functional Equations.* XYZ Press. Plano 2012. pp. 505. ISBN-13: 978-0979926990.

[CŠ1] Calábek P., Švrček J.: *Abeceda řešení funkcionálních rovnic.* Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách, roč. 22/2013, s. 321–329. Prometheus. Praha 2013.

[CŠ2] Calábek P., Švrček J.: *O řešení funkcionálních nerovnic.* Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách, roč. 23/2014, s. 321–328. Prometheus. Praha 2014.

[Chv1] Chvalina J., Chvalinová L.: *O množinách řešení jistých funkcionálních rovnic s iteracemi a mocninami.* In *Matematika a didaktika matematiky.* 1. vyd. Brno: MU Brno, 2000. s. 45–51. Sborník prací PdF MU Brno, svazek 152.

[Chv2] Chvalina J., Chvalinová L.: *Řešení jistých funkcionálních rovnic permutacemi množiny všech reálných čísel.* In *Matematika a didaktika matematiky.* 1. vyd. Brno: MU Brno, 2003. s. 13–17. Sborník prací PdF MU Brno, svazek 171.

[Isa] Isaacs R.: *Iterates of fractional order.* Canadian Journal of Mathematics, Vol. 2, No. 4 (1950), pp. 409–416.

[Luk] Lukáček V.: *Funkcionálne rovnice nad reálnými číslami.* Sborník příspěvků, s. 48–52. Hostětín 2013.

[RSS] Rice R. E., Schweizer B., Sklar A.: *When is* $f\big(f(z)\big) = az^2 + bz + c$*?* The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 4 (Apr., 1980), pp. 252–263.

[Sma] Small Ch. G.: *Functional Equations and How to Solve Them.* Springer. 2007. pp. 130. ISBN-13: 978-0-387-34539-0.

[Ven] Venkatachala B. J.: *Functional Equations A Problem Solving Approach.* First edition. Prism Books Pvt Ltd. Bangalore 2002. ISBN-13: 978-8172862657.

### 3) Polytematické sbírky úloh

[A-G] Andreescu T., Gelca R.: *Putnam and Beyond.* Springer. 2007. Part 3.4. pp. 798. ISBN-13: 978-0-387-25765-5.

[Eng] Engel A.: *Problem-Solving Strategies.* Springer. 1998. Chapter 11: Functional Equations, pp. 271–288. ISBN 0-387-98219-1.

### 4) Popularizační publikace

[Dav] Davidov L.: *Funkcionální rovnice.* Mladá fronta. Edice Škola mladých matematiků, svazek 55. Praha 1984. 95 s.

[Neu] Neuman F.: *Funkcionální rovnice.* Matematický seminář SNTL. Praha 1986. 104 s.

[Smí] Smítal J.: *O funkciách a funkcionálných rovniciach.* Vydavatelství Alfa. Bratislava 1984. 143 s.

### 5) Ostatní zdroje

[B-Ch] Beránek J., Chvalina J.: *O iteračních odmocninách kvadratické funkce.* In *Matematika a didaktika matematiky.* 1. vyd. Brno: Pedagogická fakulta UJEP v Brně, 1990. s. 7–19. Sborník prací pedagogické fakulty UJEP v Brně, svazek 104.

[Bin] Binterová H.: *Charles Babbage a teorie iterací*. Disertační práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity. Brno 2006. 106 s.

[Cau] Cauchy A. B. L.: *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. De l'imprimerie royale. Paris 1821. pp. 612.

[IMO1] Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N.: *The IMO Compendium* [online]. [cit. 26. 8. 2017]. `http://www.imomath.com/`.

[IMO2] *International Mathematical Olympiad* [online]. [cit. 26. 8. 2017]. `http://www.imo-official.org`.

[IMO3] *India IMO Training Camp 2003* [online]. [cit. 1. 4. 2018]. `https://artofproblemsolving.com`.

[MKS] *Matematický korespondenční seminář* [online]. Sbírka úloh Johna Scholese, [cit. 26. 8. 2017]. `https://mks.mff.cuni.cz/kalva/`.

[Šat1] Šatný P.: *Funkcionální rovnice z MMO 2015*. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 91/2016, č. 4, s. 1–6. JČMF 2016.

[Šat2] Šatný P.: *Základní věty matematické analýzy a jejich aplikace*. Diplomová práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity. Brno 2011. 61 s.

[Zdr] Zdráhal T.: *Zobecněné elementární funkce*. Disertační práce. Pedagogická fakulta J. E. Purkyně. Ústí nad Labem 2006. 98 s. ISBN 80-7044-806-7.