MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

Mgr. Miloš PŘINOSIL

Důkazy nerovností prostředky matematické analýzy

Disertační práce

Školitel: Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc. Brno 2011

Obsah

Úvod

Předložená práce metodického zaměření je věnována postupům, kterými lze užitím základních konstrukcí matematické analýzy, jakými jsou derivace a určitý integrál funkce jedné proměnné, dokazovat nerovnosti mezi výrazy závislými zpravidla na několika proměnných z určitého číselného oboru a zapsanými pomocí aritmetických operací a elementárních funkcí. K nim řadíme mnohočleny, funkce racionální, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a rovněž funkce, které jsou superpozicemi vyjmenovaných základních funkcí, tedy výsledky jejich skládání.

O významu takových nerovností (říkejme jim *elementární*) není pochyb, a tak jsou jejich důkazy různé obtížnosti také častým námětem úloh matematických soutěží nebo řešitelských rubrik matematických časopisů. I když jsou zadání takových úloh srozumitelná studentům středních škol, jejich řešení může stát i člověka znalého základních metod při dokazování nerovností mnohdy značné úsilí, které nemusí skončit úspěchem, nedostaví-li se překvapivě spásný nápad. Zmíněné základní postupy jsou podrobně popsány v práci [Her-96], která se dočkala i anglického překladu [Her-00]. Nicméně metodika této příručky je podřízena striktnímu omezení – použitý matematický aparát je důsledně elementární, tj. nezasahuje do oblasti infinitezimálního počtu; u naprosté většiny zařazených příkladů by ostatně užití derivací a integrálů nepřineslo větší užitek.[1]

O metodickém textu [Her-96] jsme se zmínili proto, že naše práce (sestavená v podobném duchu) může být považována za jeho pokračování. Je totiž koncentrátem ukázek elementárních nerovností, které lze úspěšně dokazovat právě prostředky matematické analýzy, když jejich jiné důkazy většinou nejsou známé nebo jsou velice obtížné. Prvním, rozhodujícím úkolem při přípravě našeho textu bylo proto nashromáždit dostatečné množství takových rozmanitých nerovností z dostupné literatury. Splnění tohoto úkolu bylo ztíženo tím, že v materiálech středoškolských matematických soutěží se takové úlohy z výše uvedeného důvodu prakticky nevyskytují, zatímco nerovnosti ze soutěží vysokoškoláků mají většinou neelementární zadání (zapsaná například řadami nebo integrály z obecných funkcí).

V druhé etapě přípravy textu jsme řešení nashromážděných příkladů podrobili metodické analýze, abychom z nich sestavili skupiny příkladů řešených společnou metodou. Některé skupiny se nám podařilo vlastní tvorbou doplnit o nové původní příklady. Teprve vytvořené skupiny rozhodly o tom, jak bude vypadat struktura výsledného textu. Ten je rozdělen do tří výkladových

[1] Stejnou vlastnost musí vykazovat i nerovnosti zařazované do každoroční nejprestižnější celosvětové matematické soutěže středoškoláků zvané *International Mathematical Olympiad.*

kapitol, dále členěných vždy do několika podkapitol. Závěrečným třetím úkolem bylo příklady v jednotlivých podkapitolách uspořádat (podle rostoucí obtížnosti jejich řešení) a úvody kapitol i podkapitol opatřit textem popisujícím jednak potřebné teoretické poznatky, jednak metodiku jejich uplatnění při řešení zařazených příkladů. Každý z nich je doplněn poznámkou pod čarou upřesňujícím jeho původ a náš vlastní případný přínos.

Pro grafickou úpravu jsme zvolili jednoduchý způsob číslování „k.n" podkapitol, vět, příkladů a významných vzorců zvlášť v každé kapitole s uvedením jejího čísla „k". U poznámek pod čarou čísla kapitol neuvádíme. Vzorce v řešeních jednotlivých příkladů, na které je odkaz v textu a mají pouze lokální význam, jsou značeny nenumerickým způsobem pomocí symbolů $*$, $**$, $\sharp$, $\sharp\sharp$, $\diamondsuit$.

Kapitola 1

Monotonie především

Přestože v nerovnostech, které budeme v celé práci dokazovat, budou proměnné většinou vystupovat v počtu větším než 1, aplikace základních poznatků matematické analýzy budou často vyžadovat, abychom zkoumané nerovnosti nejprve vhodně převedli do jazyka funkcí jedné proměnné. Teprve nerovnosti pro takové funkce totiž můžeme odvozovat pomocí vlastnosti, kterou funkce více proměnných postrádají a které říkáme *monotonie.* Jejímu využití je věnována hlavní část této první, celkově nejrozsáhlejší kapitoly práce. Zahrneme do ní i tématicky blízké náměty, jakými jsou aplikace *Rolleovy věty* a metodu *lineárních* či *nelineárních odhadů* pro funkce jedné proměnné. I při nich totiž významně využíváme monotonii těchto funkcí. V tomto úvodním odstavci tento všeobecně známý pojem připomeneme a popíšeme základní pravidlo, podle kterého o jednotlivých druzích monotonie rozhodujeme.

Funkci f jedné proměnné nazýváme *rostoucí, klesající, nerostoucí,* resp. *neklesající* na množině $M \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí po řadě nerovnosti

$$f(x_1) < f(x_2)\,, \quad f(x_1) > f(x_2)\,, \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad \text{resp.} \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$

Uveďme rovnou pravidlo, jak o monotonii funkce *na intervalu* rozhodujeme „podle znaménka“ její první derivace.

Věta 1.1. *Nechť funkce f má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní první derivaci. Platí-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, je funkce f na (a,b) neklesající. Platí-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, je funkce f na (a,b) rostoucí. Je-li navíc funkce f spojitá v bodě a zprava, lze v závěrech obou předchozích implikací psát interval $\langle a,b)$. Analogická rozšíření platí i pro intervaly $(a,b\rangle$, $\langle a,b\rangle$.*

Nahradíme-li v uvedené větě 1.1 relaci „ $\geq$“ relací „ $\leq$“, resp. relaci „ $>$“ relací „ $<$“, dostaneme obdobné pravidlo, které zaručuje, že dotyčná funkce f je nerostoucí, resp. klesající.

V základním kurzu matematické analýzy uplatňujeme větu 1.1 při vyšetřování průběhu funkcí natolik automaticky, že se na ni jako na teoretický výsledek ani neodvoláváme. Nebudeme to dělat ani v našem textu, přesto si na tomto místě připomeneme, na čem je důkaz věty 1.1 založen. Za jejího předpokladu pro libovolné body $x_1, x_2 \in (a,b)$ splňující $x_1 < x_2$ existuje podle

Lagrangeovy věty bod $\xi \in (x_1, x_2)$ takový, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)\,.$$

Obě čísla $f(x_2) - f(x_1)$ a $f'(\xi)$ tedy mají stejná znaménka, odkud plynou obě dokazované implikace. Lagrangeovu větu lze v uvedeném postupu užít i v případech, kdy $x_1 = a$ nebo $x_2 = b$, je-li funkce f v těchto bodech spojitá (zprava, resp. zleva). Proto jsou dokázány i závěry věty 1.1 pro intervaly $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ a $\langle a, b\rangle$. Její variantu o nerostoucích a klesajících funkcích získáme, když v předchozích úvahách zaměníme funkci f za funkci $-f$.

1.1 Nerovnosti s jednou proměnnou

Do této úvodní skupiny jsme zařadili příklady, u kterých je ze zadání celkem hned jasné, jakou funkci jedné proměnné bude vhodné k důkazu potřebného závěru využít. Půjde tedy o příklady nejbližší standardním úlohám na vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné z běžných kurzů diferenciálního počtu. Abychom mohli monotonii funkce zkoumat pomocí derivace, přecházíme v některých příkladech od diskrétní (celočíselné) proměnné n ke spojité (reálné) proměnné x. Díky tomu, že i v těchto případech budou zkoumané nerovnosti zapsány elementárními funkcemi, zmíněný přechod bude vždy bezproblémový.

Příklad 1.2. Dokažte, že pro každé $x > 0$ platí $x^x \geq \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.[1]

Řešení. Pro první derivaci funkce $f(x) = x^x$ platí $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$. Protože funkce $\ln x + 1$ je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí a rovna nule pro $x = \mathrm{e}^{-1}$, vidíme, že funkce f je na intervalu $(0, \mathrm{e}^{-1})$ klesající a na intervalu $(\mathrm{e}^{-1}, \infty)$ rostoucí. Platí tedy

$$f(x) \geq f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

pro každé $x > 0$, přitom rovnost nastane jedině pro $x = \mathrm{e}^{-1}$.

Příklad 1.3. Dokažte, že pro každé $a > 0$ platí nerovnosti[2]

$$a - \frac{a^2}{2} < \ln(1 + a) < a\,.$$

[1] [Hun-07], str. 107
[2] Vlastní námět inspirovaný příkladem 3.16.

Řešení. Uvažme na intervalu $(0, \infty)$ funkci $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Pro její první derivaci platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad \text{pro každé } x \in (0, \infty)\,.$$

Funkce f je tedy na daném intervalu rostoucí a protože $f(0) = 0$, je tak levá nerovnost dokázána. Vezmeme-li nyní funkci $g(x) = x - \ln(1+x)$, pak zřejmě $g(0) = 0$ a

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \text{pro každé } x \in (0, \infty)\,,$$

z čehož vyplývá pravá nerovnost ze zadání.

Poznámka. Dokázané nerovnosti upřesníme v příkladu 3.16 do tvaru

$$a - \frac{a^2}{2+a} < \ln(1+a) < a - \frac{a^2}{2(1+a)} \qquad (a > 0)\,.$$

I když je možné tyto vylepšené nerovnosti dokázat stejnou metodou jako původní nerovnosti z předchozího příkladu, objevit oba krajní výrazy není snadné. V kapitole 3 je odvodíme přirozeným postupem z jedné obecné integrální nerovnosti.

Příklad 1.4. Nechť $x > -1$ je libovolné reálné číslo a a je libovolné kladné reálné číslo. Dokažte klasické tzv. Bernoulliovy nerovnosti: Je-li $0 < a < 1$, pak platí

$$(1+x)^a \le 1 + ax,$$

je-li $a > 1$, pak platí

$$(1+x)^a \ge 1 + ax.$$

Ukažte rovněž, že rovnost v jednom nebo druhém případě nastane pouze pro $x = 0$.[3]

Řešení. Na intervalu $(-1, +\infty)$ uvažme funkci $f(x) = (1+x)^a - ax - 1$. Z vyjádření derivace této funkce $f'(x) = a((1+x)^{a-1} - 1)$ plynou následující implikace:

Je-li $0 < a < 1$, pak je funkce f rostoucí na intervalu $(-1, 0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Pro každé $x > -1$ tedy platí, že $f(x) \le f(0) = 0$ neboli $(1+x)^a \le 1 + ax$, přičemž rovnost nastane jedině pro $x = 0$.

Je-li $a > 1$, pak je funkce f na intervalu $(-1, 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí. Pro každé $x > -1$ tedy platí, že $f(x) \ge f(0) = 0$ neboli $(1+x)^a \ge 1 + ax$, přičemž rovnost nastane jedině pro $x = 0$.

[3] Důkaz podle [Kou-01], str. 145.

Příklad 1.5. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n a libovolné reálné číslo x takové, že $0 < x < 1$, platí[4]

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} > \frac{1-x^n}{n}\sqrt{x}.$$

Řešení. Označíme-li $t = \sqrt{x}$, $0 < t < 1$, můžeme nerovnost zapsat ve tvaru

$$n(1-t^{2n+2}) - (n+1)t(1-t^{2n}) > 0.$$

Nyní proto vezmeme funkci f definovanou na intervalu $(0,1\rangle$ předpisem

$$f(t) = n(1-t^{2n+2}) - (n+1)t(1-t^{2n})$$

a pomocí její derivace dokážeme, že je na intervalu $(0,1\rangle$ klesající. Je-li $0 < t < 1$, pak

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2n(n+1)t^{2n+1} - (n+1)(1-t^{2n}-2nt^{2n}) = \\ &= -(n+1)(2nt^{2n+1} - 2nt^{2n} - t^{2n} + 1) = \\ &= -(n+1)\left(2nt^{2n}(t-1) + (1-t^{2n})\right) = \\ &= -(n+1)(1-t)\left((1-t^{2n}) + (t-t^{2n}) + \ldots + (t^{2n-1}-t^{2n})\right) < 0. \end{aligned}$$

Pro každé $t \in (0,1)$ tedy platí nerovnost $f(t) > f(1) = 0$ a důkaz je tak hotov.

Příklad 1.6. Dokažte, že pro každé $a > 0$ platí[5]

$$\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) > \frac{1}{1+a}\,.$$

Řešení. Vezměme funkci f definovanou na intervalu $(0,\infty)$ předpisem

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x}\,.$$

Potom pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0\,.$$

Funkce f je tedy na intervalu $(0,\infty)$ klesající a protože zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, dostáváme tak pro každé $x > 0$ požadovaný výsledek $f(x) > 0$.

[4] [Kou-01], str. 146
[5] [Lar-90], str. 332

Poznámka. Z výsledku příkladu 3.16 po záměně a za $\frac{1}{a}$ vychází pro každé $a > 0$ přesnější odhad

$$\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) > \frac{1}{\frac{1}{2}+a}\,.$$

Příklad 1.7. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ platí[6]

$$\ln n^2 > \ln(n-1)\cdot\ln(n+1)\,.$$

Řešení. Zapíšeme nerovnost ve tvaru

$$\frac{\ln n}{\ln(n-1)} > \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\,.$$

Vezmeme-li na intervalu $\langle 2,\infty)$ funkci reálné proměnné x zadanou předpisem

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}\,,$$

pak nerovnost, kterou máme dokázat, má tvar $f(n-1) > f(n)$. Stačí tedy ověřit, že funkce f je klesající. To však snadno plyne z hodnot její první derivace, neboť

$$f'(x) = \frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\cdot\ln^2 x} < 0\,.$$

(Nerovnost $x\ln x < (x+1)\ln(x+1)$ je zřejmá.)

Příklad 1.8. Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla větší nebo rovna 2. Dokažte, že alespoň jedno z čísel $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ není větší než $\sqrt[3]{3}$.[7]

Řešení. Na intervalu $\langle 2,\infty)$ vezměme funkci $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Protože

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)\,,$$

je funkce f na intervalu $\langle 2,\mathrm{e}\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle \mathrm{e},\infty)$ klesající. Odtud plynou nerovnosti $f(3) > f(4) > f(5) > \ldots$. A protože $f(3) > f(2)$, je z čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}, \ldots$ největší právě číslo $\sqrt[3]{3}$. Je-li tedy $m \geq n$, pak $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[m]{m} \leq \sqrt[3]{3}$, a je-li $m < n$, pak $\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$. Tím je důkaz hotov.

[6] [Kou-01], str. 151

[7] [Kou-01], str. 149

Příklad 1.9. Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla, přičemž $m > n$. Který ze dvou výrazů $\sqrt[n]{m} + \sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{n} + \sqrt[m]{m}$ je větší?[8]

Řešení. Ukážeme, že číslo $\sqrt[n]{m} + \sqrt[m]{n}$ je větší, že tedy platí

$$\sqrt[n]{m} + \sqrt[m]{n} > \sqrt[n]{n} + \sqrt[m]{m} \quad \text{neboli} \quad \sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{m} > \sqrt[n]{n} - \sqrt[m]{n}\,.$$

K tomu stačí ukázat, že za předpokladu $m > n$ je funkce f daná předpisem

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{m}}$$

rostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$. To však plyne z toho, že pro její derivaci v každém bodě $x \geq 1$ platí

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n} - \frac{x^{\frac{1}{m}-1}}{m} = x^{\frac{1}{m}-1}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}}{n} - \frac{1}{m}\right) \geq x^{\frac{1}{m}-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) > 0\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 1.10. Pro každé přirozené číslo $n > 2$ dokažte nerovnost[9]

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}\,.$$

Řešení. Přejděme ke spojité proměnné x a pro pevné $n > 2$ uvažme funkci $f(x) = \frac{x^n}{1+x^{2(n-1)}}$, pro jejíž první derivaci platí

$$f'(x) = \frac{n \cdot x^{n-1} + n \cdot x^{3(n-1)} - 2(n-1) \cdot x^{3(n-1)}}{(1+x^{2(n-1)})^2} = \frac{n \cdot x^{n-1} + (2-n) \cdot x^{3(n-1)}}{(1+x^{2(n-1)})^2}\,.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ zjišťujeme, že v bodě $x_0 = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{2n-2}}$ má funkce f na intervalu $\langle 0, \infty)$ jediné maximum, neboť $f'(x) > 0$ pro $0 < x < x_0$ a $f'(x) < 0$ pro $x > x_0$. A protože $x_0 > 1$, plyne odtud $f(x_0) > f(1) = \frac{1}{2}$ neboli

$$x_0^n > \frac{1 + x_0^{2(n-1)}}{2}\,,$$

což po dosazení za x_0 přejde v nerovnost

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} > \frac{1 + \frac{n}{n-2}}{2}\,.$$

[8] [Kur-05], str. 82
[9] [Kah-48], str. 323

Postupnými upravami poslední nerovnosti však dostáváme

$$\frac{n}{2(n-1)}\ln\frac{n}{n-2} > \ln\frac{n-1}{n-2}\,,$$

$$\frac{n^n}{(n-2)^n} > \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{2(n-1)}\,,$$

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}$$

a tím je důkaz hotov.

Příklad 1.11. Dokažte, že pro všechna $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ platí

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}\,,$$

přičemž rovnost nastane jedině pro $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.[10]

Řešení. Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ uvažme funkci

$$f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}\,.$$

Ta má v krajních bodech daného intervalu nulovou hodnotu, a protože

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}\,,$$

je funkce f na intervalu $\langle 0, \arccos\frac{2}{\pi}\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle \arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\rangle$ klesající. Funkce f je tedy na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kladná, čímž je důkaz hotov. Dodejme, že dokázané tvrzení je okamžitým důsledkem poznatku o *ryzí konkávnosti* funkce sinus na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Této vlastnosti se budeme věnovat až v kapitole 2 naší práce.

Příklad 1.12. Dokažte, že pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí[11]

$$2\sin x + \operatorname{tg} x > 3x\,.$$

[10] [Kou-01], str. 148
[11] [Kou-01], str. 148

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$. Zřejmě $f(0) = 0$ a pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0\,.$$

To znamená, že funkce f je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, a tedy kladná a důkaz je tak hotov.

Příklad 1.13. Dokažte, že pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí[12]

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\,.$$

Řešení. Důkaz plyne z monotónnosti funkce

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x\,,$$

definované a spojité na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$. Platí totiž $f(0) = 0$ a dále

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \operatorname{tg}^4 x > 0$$

pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tím je důkaz hotov.

Příklad 1.14. Určete trojúhelník ABC, ve kterém platí $a = \alpha$, $b = \beta$, a $c = \gamma$, kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníka a α, β, γ jsou velikosti protějších úhlů vyjádřené v radiánech.[13]

Řešení. Ze sinové věty po dosazení $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ pro hledaný trojúhelník máme

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\beta}{\sin\beta} = \frac{\gamma}{\sin\gamma}\,.$$

Na intervalu $(0, \pi)$ tedy vezměme funkci

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}\,,$$

pro jejíž první derivaci v každém bodě $x \in (0, \pi)$ platí

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} > 0\,,$$

neboť $\sin x - x\cos x \geq \sin x > 0$ pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi)$ a $\sin x - \cos x = \cos x(\operatorname{tg} x - x) > 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odtud plyne, že funkce f je na intervalu $(0, \pi)$ rostoucí a tedy prostá. Rovnost $\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\beta}{\sin\beta}$ proto implikuje rovnost $\alpha = \beta$ a podobně dostaneme i rovnost $\beta = \gamma$. Jedná se tedy o rovnostranný trojúhelník, v němž $a = b = c = \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

[12][Kou-01], str. 148

[13][Ber-04], str. 132

Příklad 1.15. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n a libovolné číslo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnost[14]

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{cotg}^n \alpha \geq 2 + n^2 \cos^2 2\alpha \,.$$

Řešení. Protože $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$, můžeme dokazovanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\left(\operatorname{tg}^{\frac{n}{2}} \alpha - \operatorname{cotg}^{\frac{n}{2}} \alpha\right)^2 \geq (n \cos 2\alpha)^2 \,.$$

Je zřejmé, že platnost nerovnosti zůstane zachována, zaměníme-li α za $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Předpokládejme tedy, že $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Dokážeme, že pro všechna $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4}\rangle$ platí nerovnost

$$\operatorname{cotg}^{\frac{n}{2}} \alpha - \operatorname{tg}^{\frac{n}{2}} \alpha \geq n \cos 2\alpha \geq 0 \,.$$

Vezměme tedy funkci $f(x) = \operatorname{cotg}^{\frac{n}{2}} x - \operatorname{tg}^{\frac{n}{2}} x - n \cos 2x$, pro kterou platí $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. Stačí dokázat, že funkce f je na daném intervalu klesající. Označíme-li $k = \frac{n}{2}$, pro první derivaci funkce f postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{k}{\sin^2 x} \cdot \operatorname{cotg}^{k-1} x - \frac{k}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg}^{k-1} x + 4k \sin 2x = \\ &= -k \Big((1 + \operatorname{cotg}^2 x) \operatorname{cotg}^{k-1} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg}^{k-1} x - 4 \sin 2x \Big) = \\ &= -k \Big((\operatorname{tg}^{k-1} x + \operatorname{cotg}^{k-1} x) + (\operatorname{tg}^{k+1} x + \operatorname{cotg}^{k+1} x) - 4 \sin 2x \Big) \leq \\ &\leq -k(4 - 4 \sin 2x) < 0 \quad \text{pro každé } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(Využili jsme přitom elementární nerovnost $q + q^{-1} \geq 2$ pro kladné hodnoty $q = \operatorname{tg}^{k-1} x$ a $q = \operatorname{tg}^{k+1} x$.) Funkce f je tedy skutečně na $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ klesající a důkaz je hotov.

Příklad 1.16. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n a každé reálné číslo $a > 0$ platí[15]

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} a^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a^k} \geq \frac{n+2}{n} \,.$$

[14] [Kou-01], str. 149
[15] [Kou-01], str. 146

Řešení. Dokazovanou nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$na^{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} a^k + n \geq 0\,,$$

přičemž výraz na levé straně vyjádříme jako funkci jedné proměnné

$$f(x) = nx^{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} x^k + n\,,$$

jejíž derivace je rovna

$$f'(x) = x^n\left(n(n+1) - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{x^k}\right).$$

Protože pro $0 < x < 1$ platí

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{x^k} > 2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1),$$

a podobně pro $x > 1$ platí

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{x^k} < 2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = n(n+1),$$

je funkce f na intervalu $(0,1\rangle$ klesající, neboť $f'(x) < 0$ pro $0 < x < 1$, a na intervalu $\langle 1,\infty)$ rostoucí, neboť $f'(x) > 0$ pro $x > 1$. Proto pro každé $a > 0$ platí nerovnost $f(a) \geq f(1) = 0$.

Příklad 1.17. Dokažte, že pro každý polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ stupně $n \geq 3$, jehož všechny kořeny leží v intervalu $(0,1)$, platí[16]

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-2)a_{n-2} > 0\,.$$

Řešení. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ kořeny uvažovaného polynomu. Jeho rozložením na součin kořenových činitelů a následným zderivováním postupně dostáváme

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\,,$$

$$\begin{aligned} P'(x) &= nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} ia_i x^{i-1} = \\ &= (x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + (x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_n) + \\ &+ \ldots + (x-x_2)\ldots(x-x_n)\,. \end{aligned}$$

[16] [Neg-05], str. 33

Poslední rovnost po dosazení $x = 1$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} n + (n-1)a_{n-1} + S = (1-x_1)\,\ldots\,(1-x_{n-1}) + (1-x_1)\,\ldots\,(1-x_{n-2})(1-x_n) + \\ + \ldots + (1-x_2)\,\ldots\,(1-x_n)\,, \end{aligned} \tag{$*$}$$

kde S je součet, jehož kladnou hodnotu máme dokázat. Nejprve však matematickou indukcí vzhledem k číslu $n \geq 3$ dokažme, že pro libovolná čísla $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ z intervalu $(0, 1)$ platí nerovnost

$$(1-y_1)\,\ldots\,(1-y_{n-1}) > 1 - y_1 - \ldots - y_{n-1}\,.$$

Pro $n = 3$ je daná nerovnost zřejmá:

$$(1-y_1)(1-y_2) = (1-y_1-y_2) + y_1y_2 > 1 - y_1 - y_2\,.$$

Předpokládejme tedy, že tato nerovnost platí pro určité přirozené číslo $n = k$ a dokažme ji pro $n = k+1$. Z předpokládané nerovnosti pro čísla $y_1, \ldots, y_{k-1}$ po vynásobení kladným činitelem $1 - y_k$ obdržíme

$$\begin{aligned} (1-y_1)\,\ldots\,(1-y_{k-1}) &> 1 - y_1 - \ldots - y_{k-1}\,, \\ (1-y_1)\,\ldots\,(1-y_{k-1})(1-y_k) &> (1-y_1-\ldots-y_{k-1})(1-y_k)\,, \end{aligned}$$

přičemž

$$(1-y_1-\ldots-y_{k-1})(1-y_k) = (1-y_1-\ldots-y_{k-1}-y_k) + (y_1+\ldots+y_{k-1})y_k > 1-y_1-\ldots-y_k\,.$$

Tím je důkaz indukcí hotov. Uplatníme-li nyní dokázanou nerovnost ke všem sčítancům na pravé straně rovnosti ($*$) a vezmeme-li v úvahu, že $a_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (Viétův vzorec), dostaneme

$$n - (n-1)(x_1 + \ldots + x_n) + S > n - (n-1)(x_1 + \ldots + x_n)\,,$$

odkud zřejmě plyne $S > 0$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 1.18. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou libovolná kladná reálná čísla, přitom největší z nich je rovno číslu a. Dále nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla, jejichž součet je roven 1, a nechť $q > 1$ je libovolné reálné číslo. Dokažte, že platí[17]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)^q + (q-1)\cdot q^{\frac{q}{1-q}} \cdot a^q \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^q\,.$$

[17] [Kou-01], str. 147

Řešení. Označme $p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$. Zřejmě platí

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^q - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)^q \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k a^{q-1} - p^q = pa^{q-1} - p^q.$$

Na intervalu $\langle 0, a\rangle$, v němž leží číslo p, proto vezměme funkci

$$f(x) = xa^{q-1} - x^q.$$

Z její derivace $f'(x) = a^{q-1} - qx^{q-1}$ vidíme, že největší hodnoty dosahuje funkce f v bodě $\frac{a}{q^{\frac{1}{q-1}}}$. Z toho plyne, že

$$pa^{q-1} - p^q \le f\left(\frac{a}{q^{\frac{1}{q-1}}}\right) = a^q(q-1)q^{\frac{q}{1-q}},$$

čímž je důkaz hotov.

Poznámka. Dokázaná nerovnost z předchozího příkladu zajímavým způsobem souvisí s Jensenovou nerovností

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)^q \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^q$$

pro funkci $f(x) = x^q$ konvexní na intervalu $(0, \infty)$.

1.2 Redukce počtu proměnných

Ve druhé sérii uvádíme příklady nerovností o dvou, někdy i více proměnných, které lze převést na nerovnosti pro vhodnou funkci jedné proměnné (a pak obvyklým postupem zkoumat její monotonii). Možné postupy, jak takovou redukci provést, jsou jednak separace proměnných, jednak různé substituce založené buď na homogenitě dané nerovnosti v zastoupených proměnných, nebo na případné vazební podmínce, kterou tyto proměnné podle zadání splňují.

Příklad 1.19. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $b > a \ge \mathrm{e}$, platí[18]

$$a^b > b^a.$$

[18] [Kou-01], str. 151

Řešení. Zapíšeme-li nerovnost v ekvivalentním tvaru se separovanými proměnnými

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \tag{$*$}$$

a uvážíme-li na intervalu $\langle \mathrm{e}, \infty)$ funkci

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}\,,$$

pak z její derivace

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

je patrné, že funkce f je na zmíněném intervalu klesající, neboť $f'(x) < 0$ pro všechna $x > \mathrm{e}$, a nerovnost $(*)$ je tak díky předpokladu $b > a \geq \mathrm{e}$ dokázána.

Příklad 1.20. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla α, β taková, že $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, platí[19]

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Řešení. Nerovnost, kterou máme dokázat, zapíšeme ve tvaru se separovanými proměnnými

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\,,$$

a na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ uvážíme funkci

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Ta je na daném intervalu rostoucí, neboť ze známé nerovnosti $\sin t < t$ (pro každé $t > 0$), o jejíž platnosti se lze přesvědčit pomocí derivace funkce $g(t) = t - \sin(t)$, volbou $t = 2x$ vyplývá

$$f'(x) = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0$$

pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Proto díky předpokladu $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ skutečně platí

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} = f(\beta) > f(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\,.$$

[19] [Kou-01], str. 147

Příklad 1.21. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla u, v a jakékoliv číslo $p \in \langle 0, 1\rangle$ platí[20]

$$|u + v|^p \leq |u|^p + |v|^p \,.$$

Řešení. V některých speciálních případech je nerovnost triviální. Například tvrzení zřejmě platí, pokud $uv = 0$ nebo pokud čísla u, v mají opačná znaménka. Rovněž jak pro $p = 0$, tak pro $p = 1$ je tvrzení pravdivé. Zkoumejme tedy zadanou nerovnost v případě, kdy $u, v > 0$ a $0 < p < 1$, ke kterému lze přejít i v případě, kdy $u, v < 0$. Označme $x = \frac{v}{u}$. Potom pro každé $x > 0$ máme dokázat, že

$$(1 + x)^p \leq 1 + x^p \,.$$

Uvažme funkci $f(x) = 1 + x^p - (1 + x)^p$ spojitou na $\langle 0, \infty)$. Zřejmě $f(0) = 0$ a

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1 + x)^{p-1} = p(x^{p-1} - (1 + x)^{p-1}) > 0$$

pro každé $x > 0$, neboť díky zápornému exponentu $p - 1$ z $x < 1 + x$ plyne $x^{p-1} > (1 + x)^{p-1}$. Funkce f je tedy na $\langle 0, \infty)$ rostoucí a důkaz je hotov.

Příklad 1.22. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d platí[21]

$$\left(\frac{3a}{b + c + d}\right)^3 \geq \left(\frac{4a}{a + b + c + d}\right)^4 .$$

Řešení. S ohledem na homogenitu předpokládejme rovnost $a + b + c + d = 1$. Úlohu tak zřejmě převedeme na důkaz nerovnosti

$$\left(\frac{3x}{1 - x}\right)^3 \geq (4x)^4 \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{x(1 - x)^3} \geq \frac{4^4}{3^3}$$

pro každé $x \in (0, 1)$. S tímto cílem určíme globální minimum funkce $f(x) = \frac{1}{x(1-x)^3}$ na intervalu $(0, 1)$. Protože

$$f'(x) = \frac{-1 + 4x}{x^2(1 - x)^4} \,,$$

má funkce f zápornou derivaci (a je tedy klesající) na intervalu $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, zatímco na intervalu $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ je z podobného důvodu rostoucí. Její globální minimum na $(0, 1)$ je tedy $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4^4}{3^3}$ a důkaz je hotov.

[20] [Lar-90], str. 331

[21] [Thu-07], str. 180, uvedeno bez řešení

Příklad 1.23. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je roven 1, platí[22]

$$ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}\,.$$

Řešení. Předpokládejme, že $a \leq b \leq c$. Pak nutně $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$, a protože $b + c = 1 - a$, odkud zřejmě $4bc \leq (1-a)^2$, pro výraz $V(a,b,c)$ z levé strany nerovnosti platí

$$V(a,b,c) = a(b+c) + bc(1-2a) \leq a(1-a) + \frac{1}{4}(1-a)^2(1-2a) = -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\,.$$

Funkce

$$f(a) = -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}$$

je však na intervalu $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ rostoucí, neboť $f'(a) = \frac{1}{2}\,a(1-3a) \geq 0$ pro všechna $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$, a tedy

$$f(a) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}\,.$$

Tím je důkaz hotov. Rovnost v dokázané nerovnosti nastane jen v případě $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Příklad 1.24. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla taková, že

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 16\,.$$

Najděte minimum a maximum výrazu[23]

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\,.$$

Řešení. Nechť $a_1 \geq b_1 \geq c_1$ je nerostoucí pořadí daných čísel a, b, c splňujících rovnici ze zadání. Výraz P je roven jednomu z výrazů

$$P_1 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{c_1}{a_1} \qquad \text{nebo} \qquad P_2 = \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_1}{b_1} + \frac{a_1}{c_1}\,,$$

přičemž zřejmě platí

$$P_1 - P_2 = \frac{(a_1-b_1)(a_1-c_1)(c_1-b_1)}{a_1 b_1 c_1} \leq 0\,, \qquad \text{tedy} \quad P_1 \leq P_2\,.$$

[22] [Thu-07], str. 96

[23] [Hun-07], str. 114, řešení upraveno

Proto hledanou nejmenší, resp. největší hodnotu P tudíž určíme jako

$$\min P = \min P_1\,, \qquad \text{resp.} \qquad \max P = \max P_2\,.$$

Předpokládejme proto, že platí $a \geq b \geq c$ a hledejme nejprve nejmenší hodnotu výrazu

$$P_1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\,.$$

Označíme-li $x = \frac{a}{b} \geq 1$ a $y = \frac{b}{c} \geq 1$, pak rovnost ze zadání můžeme zapsat ve tvaru

$$x + y + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy = 13\,,$$

což po další substituci $x + y = s$ a $xy = t$ dává rovnici

$$s + t + \frac{s}{t} + \frac{1}{t} = 13\,, \qquad \text{odkud} \qquad s = \frac{13t - t^2 - 1}{t + 1}\,. \tag{$*$}$$

Dříve než začneme hledat minimum výrazu

$$P_1 = x + y + \frac{1}{xy} = s + \frac{1}{t} = \frac{13t - t^2 - 1}{t + 1} + \frac{1}{t}\,, \tag{$**$}$$

zjistíme obor hodnot proměnné t. Z předpokladu $x, y \geq 1$ plyne, že $t = xy \geq 1$ a zároveň $t + 1 - s = (x - 1)(y - 1) \geq 0$, čili $t + 1 \geq s$. Ze vztahu mezi s a t proto dostáváme nerovnost

$$t + 1 \geq \frac{13t - t^2 - 1}{t + 1} \qquad \text{neboli} \qquad 2t^2 - 11t + 2 \geq 0\,,$$

což v oboru $t \geq 1$ znamená, že

$$t \geq t_1 = \frac{11 + \sqrt{105}}{4} \doteq 5{,}31 \qquad \text{a} \qquad t + \frac{1}{t} \geq \frac{11}{2}\,.$$

K určení největší hodnoty t využijeme zřejmou nerovnost $(x + y)^2 \geq 4xy$, z níž po dosazení $s = x + y$ a $t = xy$ s přihlédnutím ke vztahu mezi s a t dostaneme nerovnost

$$(13t - t^2 - 1)^2 \geq 4t(t + 1)^2\,.$$

Po vydělení t^2 můžeme přejít k proměnné $u = t + \frac{1}{t}$ a dostat tak podmínku

$$(13 - u)^2 \geq 4u + 8 \qquad \text{neboli} \qquad (u - 7)(u - 23) \geq 0\,.$$

Protože $t \geq 1$ a podle první rovnosti v ($*$) současně $t < 13$, platí jistě $t + \frac{1}{t} < 23$, takže z nerovnosti $(u - 7)(u - 23) \geq 0$ plyne

$$u = t + \frac{1}{t} \leq 7\,, \qquad \text{odkud} \qquad t \leq t_2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \doteq 6{,}85\,.$$

Dodejme, že hodnota $t = t_2$ je dosažitelná: rutinním výpočtem určíme

$$s = s_2 = \frac{13t_2 - t_2^2 - 1}{t_2 + 1} = 3 + \sqrt{5};$$

s ohledem na rovnosti $s_2^2 = (3+\sqrt{5})^2 = 14+6\sqrt{5} = 4t_2$ mají odpovídající poměry x, y společnou hodnotu

$$x_2 = y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1\,.$$

Shrňme výsledky našich úvah o hodnotách t: platí nerovnosti

$$t_1 \le t \le t_2 \qquad \text{a} \qquad \frac{11}{2} \le t + \frac{1}{t} \le 7\,. \tag{$\sharp$}$$

Za těchto podmínek určíme minimum výrazu P_1, jehož hodnota je podle $(**)$ daná funkcí f s předpisem

$$f(t) = \frac{13t - t^2 - 1}{t+1} + \frac{1}{t}\,.$$

Protože pro každé $t > 0$ platí

$$f'(t) = \frac{(13-2t)(t+1) - (13t - t^2 - 1)}{(t+1)^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 - 2t + 14}{(t+1)^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{15}{(t+1)^2} - \frac{t^2+1}{t^2}\,,$$

vidíme, že pro taková t máme

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 15t^2 < (t^2+1)(t+1)^2 \Leftrightarrow 16 < (t + \frac{1}{t} + 1)^2 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} > 3\,.$$

Díky ($\sharp$) je ovšem poslední nerovnost splněna pro každé $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, tudíž funkce f je na intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ klesající. Tak docházíme k závěru, že pro každé $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ je splněna nerovnost

$$f(t) \ge f(t_2) = s_2 + \frac{1}{t_2} = 3 + \sqrt{5} + \frac{2}{7+3\sqrt{5}} = \frac{13-\sqrt{5}}{2}$$

a díky dosažitelnosti hodnoty $t = t_2$ tak platí

$$\min P = \frac{13-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Největší hodnotu výrazu

$$P_2 = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

snadno určíme, když si povšimneme, že platí

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = P_1 + P_2 + 3\,,$$

takže z rovnosti ze zadání plyne vztah $P_1 + P_2 = 13$, podle kterého

$$\max P = \max P_2 = \max(13 - P_1) = 13 - \min P_1 = 13 - \frac{13-\sqrt{5}}{2} = \frac{13+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Tím je celé řešení hotovo.

Příklad 1.25. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$, jejichž součet je roven jedné, platí[24]

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{1}{n^{n+1}} .$$

Řešení. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k číslu n. Pro $n = 2$ máme

$$a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2) = a_1 a_2 \left((a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2\right) = a_1 a_2 (1 - 2a_1 a_2) = \frac{1}{8} - 2\left(a_1 a_2 - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8},$$

takže nerovnost ze zadání příkladu platí. Vzhledem k tomu, že při druhém indukčním kroku, tedy při přechodu od čísla $n-1$ k číslu n, budeme potřebovat tvrzení o odhadu výrazu

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 ,$$

kde $n-1$ kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ splňuje podmínku $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 1 - a_n$, užijeme indukční předpoklad o platnosti odhadu pro $n-1$ čísel

$$b_1 = \frac{a_1}{1 - a_n}, \quad b_2 = \frac{a_2}{1 - a_n}, \quad \ldots, \quad b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{1 - a_n},$$

jejichž součet je roven 1. Pro tato čísla tedy platí

$$\prod_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 \leq \frac{1}{(n-1)^n},$$

odkud po dosazení a vynásobení kladným číslem $(1 - a_n)^{n+1}$ dostáváme

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \leq \frac{(1 - a_n)^{n+1}}{(n-1)^n} .$$

A protože podle AG-nerovnosti platí

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} = \left(\frac{1 - a_n}{n-1}\right)^{n-1},$$

můžeme druhý indukční krok začít odhadem

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \cdot a_n + \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_n^3 \leq \\
&\leq \frac{(1 - a_n)^{n+1}}{(n-1)^n} \cdot a_n + \left(\frac{1 - a_n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot a_n^3 = \\
&= \frac{1}{(n-1)^n} \cdot (1 - a_n)^{n-1} \cdot a_n \left((1 - a_n)^2 + (n-1)a_n^2\right) .
\end{aligned}$$

[24] [Kur-07], str. 10, řešení upraveno

Zbývá ukázat, že hodnota posledního výrazu nepřevyšuje pravou stranu dokazované nerovnosti, ať je číslo $a_n \in (0,1)$ jakékoliv. K tomu na intervalu $\langle 0,1\rangle$ vezměme funkci

$$f(t) = (1-t)^{n-1}t\left((1-t)^2 + (n-1)t^2\right) = (1-t)^{n-1}(t - 2t^2 + nt^3)$$

a spočítejme její první drivaci:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -(n-1)(1-t)^{n-2}(t-2t^2+nt^3) + (1-t)^{n-1}(1-4t+3nt^2) = \\ &= (1-t)^{n-2}\left(1-(n+4)t + (5n+2)t^2 - (n^2+2n)t^3\right) = \\ &= (1-t)^{n-2}(1-nt)\left(1-4t+(n+2)t^2\right) . \end{aligned}$$

Protože diskriminant kvadratické funkce $(n+2)t^2 - 4t + 1$ je roven $4(2-n) \le 0$, lze usoudit, že funkce f dosahuje na daném intervalu svého maxima v bodě $t = \frac{1}{n}$. Proto po dosazení lze zkoumaný výraz odhadnout shora hodnotou

$$\frac{1}{(n-1)^n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n-1)^n} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^{n+1}}\,,$$

a důkaz indukcí je tak hotov.

1.3 Analýza parciálních funkcí

Následující skupinu tvoří příklady nerovností o více proměnných, které budeme dokazovat tak, že hodnoty všech proměnných – až na jednu z nich – zafixujeme, abychom nerovnost ve zmíněné proměnné mohli dokazovat pomocí monotonie. Derivace takto získané funkce jedné proměnné je vlastně *parciální derivací* původní funkce více proměnných ze zadání příkladu; proto jsme v názvu podkapitoly zvolili méně obvyklý termín *parciální funkce*.[25] Výběr jedné z více možných proměnných pro tuto parciální funkci je v některých příkladech libovolný, častěji však vychází buď z asymetrických rolí různých proměnných (pak vybíráme parciální funkci, kterou lze zkoumat nejsnadněji), nebo – v případě, kdy jsou tyto role díky symetrii rovnocenné – vychází z uspořádání hodnot proměnných podle velikosti.

[25] V samotných řešeních příkladů však přívlastek *parciální* ani u funkcí, ani u jejich derivací používat nebudeme. Budeme totiž mluvit o funkci jedné proměnné, považujíce ostatní (zafixované) proměnné za její parametry.

Příklad 1.26. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí[26]

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{b}.$$

Řešení. Nerovnost zapíšeme ve tvaru

$$\frac{(a+1)^{b+1}}{a^b} \geq \frac{(b+1)^{b+1}}{b^b}$$

a na intervalu $(0, \infty)$ uvážíme při pevném $b > 0$ funkci proměnné x

$$f(x) = \frac{(x+1)^{b+1}}{x^b}.$$

Nerovnost, kterou máme dokázat, má tvar $f(a) \geq f(b)$. Dokážeme tedy, že $f(x) \geq f(b)$ pro všechna kladná x. Na intervalu $(0, \infty)$ vezměme funkci

$$g(x) = \ln f(x) = (b+1)\ln(x+1) - b\ln x.$$

Pro její derivaci platí

$$g'(x) = \frac{b+1}{x+1} - \frac{b}{x} = \frac{x-b}{x(x+1)},$$

odkud plyne, že funkce g, a tedy i f, dosahují svého minima v bodě b, čímž je důkaz hotov.

Příklad 1.27. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c taková, že $b > a > 1$ a $c > 0$, platí[27]

$$\log_a b > \log_{a+c}(b+c).$$

Řešení. Na intervalu $\langle 0, \infty)$ uvažme při daných $b > a > 1$ funkci proměnné x

$$f(x) = \log_{a+x}(b+x).$$

Nerovnost, kterou máme dokázat, má tvar $f(0) > f(c)$. Stačí tedy ověřit, že funkce f je klesající. To však plyne z výpočtu její derivace

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(b+x)}{\ln(a+x)}\right)' = \frac{(a+x)\ln(a+x) - (b+x)\ln(b+x)}{(a+x)(b+x)\ln^2(a+x)} < 0,$$

neboť $0 < a+x < b+x$ a $0 < \ln(a+x) < \ln(b+x)$.

[26] [Kou-01], str. 151
[27] [Kou-01], str. 151

Příklad 1.28. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $a > b > 1$, platí[28]

$$a^{b^a} > b^{a^b}.$$

Řešení. Nejdříve danou nerovnost dvakrát zlogaritmujeme a dále upravíme:

$$\begin{aligned}
\ln a^{b^a} &> \ln b^{a^b}, \\
b^a \ln a &> a^b \ln b, \\
a \ln b + \ln\ln a &> b \ln a + \ln\ln b, \\
\ln \frac{\ln a}{\ln b} &> \ln b \left(b \frac{\ln a}{\ln b} - a \right).
\end{aligned}$$

Nyní pro daná $a > b > 1$ označíme

$$x = \frac{\ln a}{\ln b}, \quad y = \ln b \qquad (\text{tedy} \quad x > 1,\, y > 0)$$

a nerovnost přepíšeme do tvaru

$$\ln x > y(x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy}). \tag{$*$}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, je-li $x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy} \leq 0$. Je-li naopak $x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy} > 0$, pak logaritmováním nerovnosti $x\,\mathrm{e}^y > \mathrm{e}^{xy}$ dostaneme

$$\ln x > (x-1)y.$$

Místo $(*)$ tedy stačí dokázat, že pro každé $x > 1$ a každé $y > 0$ platí

$$x - 1 > x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy}.$$

Při pevném $x > 1$ na intervalu $\langle 0, \infty)$ proto vezmeme funkci proměnné t

$$f(t) = x - 1 - x\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{xt}$$

a spočítáme její derivaci:

$$f'(t) = x\,\mathrm{e}^{xt} - x\,\mathrm{e}^t = x\,\mathrm{e}^t \left(\mathrm{e}^{(x-1)t} - 1 \right) > 0 \quad \text{pro každé } t > 0.$$

Funkce f je tedy kladná pro všechna $t > 0$, neboť $f(0) = 0$, a tedy i $f(y) > 0$, což jsme chtěli ukázat.

[28] [Kou-01], str. 149

Příklad 1.29. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $a > 0$, $b \geq 2$, platí[29]

$$\left(1 + a^b\right)^{\frac{1}{b}} - \left(1 + a^b\right)^{-\frac{1}{b}} < a\,.$$

Řešení. Uvažme pro pevné $a > 0$ funkci proměnné x danou předpisem

$$f(x) = (1 + a^x)^{\frac{1}{x}}\,,$$

která je na intervalu $(0, \infty)$ klesající. Platí totiž

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{\ln(1 + a^x)}{x}\right)' = \frac{a^x \ln a^x - (1 + a^x)\ln(1 + a^x)}{x^2(1 + a^x)} < 0\,,$$

neboť zřejmě $0 < a^x < 1 + a^x$ a $\ln a^x < \ln(1 + a^x)$. Dokazovaná nerovnost tak plyne pro každé $b \geq 2$ z nerovností $0 < f(b) \leq f(2)$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\left(1 + a^b\right)^{\frac{1}{b}} - \left(1 + a^b\right)^{-\frac{1}{b}} &= f(b) - \frac{1}{f(b)} \leq f(2) - \frac{1}{f(2)} = \\ &= \sqrt{1 + a^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot a < a\,.\end{aligned}$$

Příklad 1.30. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[30]

$$(a + b + c)^{a+b+c} a^a b^b c^c < (a + b)^{a+b}(b + c)^{b+c}(c + a)^{c+a}\,.$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost po zlogaritmování zapíšeme jako $f(a) < 0$, kde f je funkce jedné proměnné $x \in (0, \infty)$ definovaná při pevných $b, c > 0$ předpisem

$$\begin{aligned}f(x) =& (x + b + c)\ln(x + b + c) + x\ln x + b\ln b + c\ln c - \\ &- (x + b)\ln(x + b) - (b + c)\ln(b + c) - (c + x)\ln(c + x)\,.\end{aligned}$$

Pro její první derivaci po úpravě platí

$$f'(x) = \ln\frac{(x + b + c)x}{(x + b)(c + x)} = \ln\frac{x^2 + xb + xc}{x^2 + xb + xc + bc} < \ln 1 = 0 \quad \text{pro všechna } x > 0\,,$$

odkud plyne, že funkce f je klesající, a tedy $f(x) < \lim\limits_{t\to 0+} f(t) = 0$ pro každé kladné číslo x, což jsme měli dokázat. (K určení uvedené limity vede jednoduchý poznatek, že $t\ln t \to 0$ pro $t \to 0+$.)

[29][Kou-01], str. 149
[30][And-07], str. 137

Příklad 1.31. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[31]

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\le 1\,.$$

Řešení. Zadanou nerovnost zapišme ve tvaru

$$\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\le\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1} \tag{$*$}$$

a při pevných hodnotách $a, b > 0$ uvažme funkci proměnné x

$$f(x)=\frac{b}{bx+b+1}+\frac{x}{ax+x+1}$$

definovanou na intervalu $(0,\infty)$. Z výpočtu její derivace

$$f'(x)=\frac{-b^2}{(bx+b+1)^2}+\frac{1}{(ax+x+1)^2}=\frac{(1-abx)(abx+2bx+2b+1)}{(bx+b+1)^2(x+ax+1)^2}$$

plyne, že $f'(x)=0$, právě když $x=\frac{1}{ab}$, přičemž na $\left(0,\frac{1}{ab}\right)$ je znaménko derivace kladné a na $\left(\frac{1}{ab},\infty\right)$ záporné. Odtud zřejmě $f(x)\le f\left(\frac{1}{ab}\right)$ pro každé $x>0$, což pro $x=c$ dokazuje nerovnost $(*)$. Rovnost v ní nastane pouze v případech $c=\frac{1}{ab}$ neboli $abc=1$.

Příklad 1.32. Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníku a, b, c platí[32]

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Řešení. Díky cyklické symetrii obou stran můžeme předpokládat, že $c=\min\{a,b,c\}$. Pak jistě $0<c\le\sqrt{ab}$ a $a<b+c\le 2b$. Vezměme při pevných a, b funkci

$$f(x)=2\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{a}\right)-\frac{a}{x}-\frac{x}{b}+\frac{2a}{b}-\frac{b}{a}-3$$

definovanou pro všechna x z intervalu $(0,\sqrt{ab}\rangle$. Z vyjádření její první derivace

$$f'(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{2b}{x^2}+\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=(a-2b)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{ab}\right)$$

je zřejmé, že $f'(x)<0$ pro každé $x\in(0,\sqrt{ab})$ a že tedy funkce f je na intervalu $(0,\sqrt{ab}\rangle$ klesající. Odtud díky tomu, že $c\le\min\{a,b\}\le\sqrt{ab}$ dostáváme nerovnost $f(c)\ge\min\{f(a),f(b)\}$. A protože

$$f(a)=f(b)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}\ge 0\,,$$

je tak důkaz hotov, neboť nerovnost $f(c)\ge 0$ je ekvivalentní s nerovností ze zadání.

[31] [Thu-07], str. 102
[32] [Thu-07], str. 101

Příklad 1.33. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí implikace[33]

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Rightarrow ab + bc + ca \leq abc + 2\,.$$

Řešení. Předpokládejme, že čísla $a \geq b \geq c$ splňují uvedenou podmínku, takže zřejmě $c \leq 1$. Označíme-li $a = x + y$, $b = x - y$, pak s ohledem na rovnosti $ab = x^2 - y^2$, $a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2)$ můžeme podmínku zapsat ve tvaru $x^2(2 + c) + y^2(2 - c) = 4 - c^2$ a dokazovanou nerovnost jako $(x^2 - y^2)(1 - c) \leq 2(1 - xc)$, neboť $2x = a + b$. Dosadíme-li sem $y^2 = 2 + c - \frac{2+c}{2-c}\,x^2$, zjistíme po úpravě, že máme dokázat nerovnost

$$\frac{4x^2 - (4 - c^2)}{2 - c}(1 - c) \leq 2(1 - cx)\,.$$

Z nerovnosti $0 \leq y^2 = 2 + c - \frac{2+c}{2-c}\,x^2$ vyplývá $x^2 \leq 2 - c$, tedy $x \leq \sqrt{2 - c}$ (připomeňme, že $c \leq 1$). Nyní vezměme funkci

$$f(x) = 2(1 - cx) - \frac{4x^2 - (4 - c^2)}{2 - c}(1 - c)\,.$$

Ta je na intervalu $\langle 0, \sqrt{2 - c}\rangle$ klesající, neboť pro každé $x \geq 0$ s ohledem na $0 \leq c \leq 1$ platí

$$f'(x) = -2c - \frac{8x(1 - c)}{2 - c} \leq 0\,,$$

takže $f(x) \geq f(\sqrt{2 - c})$ pro každé $x \in \langle 0, \sqrt{2 - c}\rangle$. Zbývá nám tedy dokázat, že $f(\sqrt{2 - c}) \geq 0$. Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
2(1 - c\sqrt{2 - c}) &\geq \frac{4(2 - c) - (4 - c^2)}{2 - c}(1 - c)\,,\\
2(1 - c\sqrt{2 - c}) &\geq (2 - c)(1 - c)\,,\\
3c &\geq c^2 + 2c\sqrt{2 - c}\\
c(1 - \sqrt{2 - c})^2 &\geq 0\,.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, je-li buď $a = b = c = 1$, nebo $\{a, b, c\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}$.

Příklad 1.34. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[34]

$$(a + b + c)^4 \geq 16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 11abc(a + b + c)\,.$$

[33] [And-04], str. 82
[34] [Thu-07], str. 97

Řešení. Díky symetrii a homogenitě předpokládejme, že $a \geq b \geq c$ a že $a+b+c=1$. Pak jistě $0 < c < \frac{1}{3}$. Dále označme $s = a+b$, $p = ab$, takže $\frac{2}{3} < s = 1-c < 1$ a $0 < p \leq \frac{s^2}{4}$. Pravou stranu zadané nerovnosti tak můžeme vyjádřit jako funkci proměnné p s parametrem s

$$f(p) = 16p^2 + 16(1-s)^2(s^2-2p) + 11p(1-s)\,,$$

a tedy dokazovat nerovnost $f(p) \leq 1$. Z výpočtu první derivace funkce f

$$f'(p) = 32p + (1-s)(32s-21)$$

je patrné, že $f'(p) > 0$ pro každé $p \in (0, \frac{s^2}{4}\rangle$ a každé $s \in (\frac{2}{3}, 1)$. Funkce f je tedy v proměnné p na intervalu $\langle 0, \frac{s^2}{4}\rangle$ rostoucí, a tudíž $f(p) \leq f\left(\frac{s^2}{4}\right)$. A protože pro uvažovaná $s \in (\frac{2}{3}, 1)$ platí

$$f\left(\frac{s^2}{4}\right) = 9s^4 - \frac{75}{4}\,s^3 + \frac{43}{4}\,s^2 = \frac{1}{4}\,(3s-2)^2(s-1)(4s+1) + 1 \leq 1\,,$$

je tak důkaz hotov. Dodejme, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane pouze v případech, kdy jsou si všechna čísla a, b, c navzájem rovna, neboť v rozebírané situaci vychází podmínka $a = b$ (z rovnosti $p = \frac{s^2}{4}$) a $s = \frac{2}{3}$.

Příklad 1.35. Dokažte nerovnost

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| < \frac{\sqrt{3}\,s^3}{18}\,,$$

kde a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníku s obvodem $2s$ $(= a+b+c)$.[35]

Řešení. Označme (podle trojúhelníkové nerovnosti kladné) hodnoty

$$\frac{a+b-c}{2} = x\,, \quad \frac{b+c-a}{2} = y\,, \quad \frac{c+a-b}{2} = z\,,$$

pro něž platí $x-y = a-c$, $x-z = b-c$ a $y-z = b-a$. Pak s ohledem na symetrii budeme dokazovat nerovnost

$$(y-x)(z-y)(z-x) < \frac{\sqrt{3}\,s^3}{18}\,, \tag{$*$}$$

a to za předpokladu, že platí $0 < x \leq y \leq z$ a $x+y+z = s$. Všimněme si, že pro činitele na levé straně $(*)$ platí odhady

$$y - x < y\,, \quad z - y < s - 2y\,, \quad z - x < s - y\,;$$

jsou totiž ekvivalentní po řadě se zřejmými nerovnostmi

$$x > 0\,, \quad y + z = s - x < s\,, \quad y + z - x = s - 2x < s\,.$$

[35] [Kur-05], str. 14, vlastní řešení

Proto místo $(*)$ dokážeme silnější nerovnost

$$y(s-2y)(s-y) < \frac{\sqrt{3}\,s^3}{18}$$

pro každé $y \in \langle 0, \frac{s}{2} \rangle$. Uvažme tedy kubickou funkci

$$f(y) = y(s-2y)(s-y) = 2y^3 - 3sy^2 + s^2 y\,.$$

Z výpočtu její první derivace

$$f'(y) = 6y^2 - 6ys + s^2 = 6\left(y - \frac{(3-\sqrt{3})s}{6}\right)\left(y - \frac{(3+\sqrt{3})s}{6}\right)$$

plyne, že funkce na daném intervalu dosahuje svého maxima v bodě $y_0 = \frac{(3-\sqrt{3})s}{6} < \frac{s}{2}$, neboť $f'(y) > 0$ pro každé $y \in \langle 0, y_0)$ a $f'(y) < 0$ pro každé $y \in (y_0, \frac{s}{2}\rangle$. Protože

$$f\left(\frac{(3-\sqrt{3})s}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\,s^3}{18}\,,$$

je tak důkaz hotov.

Příklad 1.36. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla splňující nerovnost $12 \geq 21ab + 2bc + 8ca$. Dokažte nerovnost[36]

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{15}{2}\,.$$

Řešení. Označíme-li $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, můžeme úkol přeformulovat takto: Dokažte, že pro kladná reálná čísla x, y, z, která splňují nerovnost $12xyz \geq 2x + 8y + 21z$, platí

$$P(x,y,z) = x + 2y + 3z \geq \frac{15}{2}\,.$$

Z výchozí podmínky plyne $z(12xy - 21) \geq 2x + 8y > 0$, takže $12xy > 21$ čili $x > \frac{7}{4y}$, a současně $z \geq z_0 = \frac{2x+8y}{12xy-21}$. Odtud dostáváme nerovnost

$$P(x,y,z) \geq P(x,y,z_0) = x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7} = f(x)\,.$$

Tato nová funkce f uvažovaná při pevném y na intervalu $I = \left(\frac{7}{4y}, \infty\right)$ má derivaci

$$f'(x) = \frac{16x^2y^2 - 56xy - 32y^2 + 35}{(4xy-7)^2}\,.$$

[36] [Hun-07], str. 113

Na intervalu I má rovnice $f'(x) = 0$ jediný kořen $x = x_0 = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$. V bodě $x = x_0$ mění funkce f' znaménko ze záporného na kladné a tudíž v něm dosahuje svého minima na intervalu I. Z toho vyplývá, že pro každé $x \in I$ platí $f(x) \geq f(x_0)$, a tedy

$$P(x, y, z) \geq f(x) \geq f(x_0) = g(y)\,,$$

kde $g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y}$. Položíme-li první derivaci funkce g, která je tvaru

$$g'(y) = \frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}$$

rovnu nule, dostáváme rovnost $(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28 = 0$, která po substituci $t = \sqrt{32y^2+14}$ přejde do tvaru

$$t^3 - 50t - 112 = 0\,.$$

Tato rovnice má – díky rozkladu levé strany na $(t-8)(t^2+8t+14)$ – jediný kladný kořen $t = 8$, kterému odpovídá $y = y_0 = \frac{5}{4}$, takže $g'(\frac{5}{4}) = 0$. Na intervalu $(0, \infty)$ mění funkce g' v bodě $y = y_0$ znaménko ze záporného na kladné a funkce g tak v něm dosahuje svého minima, jež je rovno $g(y_0) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$. Znamená to, že pro uvažované trojice x, y, z platí

$$P(x, y, z) \geq g(y) \geq g(y_0) = \frac{15}{2}\,,$$

což jsme měli dokázat. Protože pro $y_0 = \frac{5}{4}$ máme $x_0 = 3$ a $z_0 = \frac{2}{3}$, rovnost v dokázané nerovnosti nastane pouze v případě $y = \frac{5}{4}$, $x = 3$, $z = \frac{2}{3}$ neboli $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{5}$, $c = \frac{3}{2}$.

Příklad 1.37. Nechť pro kladná čísla a, b, c platí $ab + bc + ca = 1$. Dokažte nerovnost[37]

$$a + b + c + (6\sqrt{3} - 9)abc \geq 2\,.$$

Řešení. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že $p = ab = \max\{ab, bc, ca\}$, a tudíž $\frac{1}{3} \leq p < 1$. Označme ještě $s = a+b$ a (kvůli stručnosti zápisu) $k = 6\sqrt{3} - 9 > 0$. Potom $s \geq 2\sqrt{p}$ a z podmínky $p + sc = 1$ plyne $c = \frac{1-p}{s}$. Máme tedy dokázat, že platí

$$s + \frac{1-p}{s} + \frac{kp(1-p)}{s} \geq 2 \qquad \text{neboli} \qquad s + \frac{(1-p)(1+kp)}{s} \geq 2\,.$$

Při pevném p ($\frac{1}{3} \leq p < 1$) proto uvážíme funkci f proměnné $s \in \langle 2\sqrt{p}, \infty)$ danou předpisem

$$f(s) = s + \frac{(1-p)(1+kp)}{s}\,.$$

[37] [Thu-07], str. 103, uvedeno bez řešení, zadání upraveno

Z tvaru její derivace

$$f'(s) = 1 - \frac{(1-p)(1+kp)}{s^2}$$

plyne $f'(s_0) = 0$ pro $s_0 = \sqrt{(1-p)(1+kp)}$ a dále $f'(s) < 0$ pro každé $s \in (0, s_0)$ a $f'(s) > 0$ pro každé $s \in (s_0, \infty)$. Funkce f je tedy klesající na $(0, s_0)$ a rostoucí na (s_0, ∞). K potřebnému důkazu nerovnosti $f(s) \geq 2$ pro každé $s \geq 2\sqrt{p}$ proto rozlišíme, které z čísel $2\sqrt{p}$ a s_0 je větší.

Je-li $s_0 > 2\sqrt{p}$, je minimum funkce f na $\langle 2\sqrt{p}, \infty)$ rovno číslu

$$f(s_0) = 2s_0 > 2 \cdot 2\sqrt{p} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} > 2\,.$$

Je-li naopak $s_0 \leq 2\sqrt{p}$, je toto minimum rovno číslu

$$f(2\sqrt{p}) = 2\sqrt{p} + \frac{(1-p)(1+kp)}{2\sqrt{p}}\,.$$

Algebraický důkaz nerovnosti $f(2\sqrt{p}) \geq 2$ (s rovností v jediném případě $p = \frac{1}{3}$) podáme tak, že ji nejprve ekvivalentně (za předpokladu $0 < p < 1$) upravíme:

$$\begin{aligned} 4p + (1-p)(1+kp) &\geq 4\sqrt{p}\,, \\ (1-\sqrt{p})(1+\sqrt{p})(1+kp) &\geq 4\sqrt{p}(1-\sqrt{p})\,, \\ (1+\sqrt{p})(1+kp) &\geq 4\sqrt{p}\,, \\ kp\sqrt{p} + kp - 3\sqrt{p} + 1 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Pro danou hodnotu $k = 6\sqrt{3} - 9$ lze levou stranu rozložit a přepsat tak nerovnost do tvaru

$$\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left[(6\sqrt{3} - 9)\sqrt{p} + 3\right] \geq 0\,.$$

Poslední zřejmě platí dokonce pro každé $p > 0$, přičemž rovnost nastane, právě když $p = \frac{1}{3}$. Důkaz je tak hotov. Dodejme, že rovnost v dokázaném výsledku nastane v jediném případě $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Příklad 1.38. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b, c \geq 1$ vyhovující rovnosti

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$$

platí[38]

$$\frac{8}{ab-1} + \frac{1}{bc-1} + \frac{1}{ca-1} \geq 2\,.$$

[38] [Thu-07], str. 96

Řešení. Označme
$$x = \frac{1}{1+a}\,, \quad y = \frac{1}{1+b}\,, \quad z = \frac{1}{1+c}\,.$$
Pak $0 < x, y, z \le \frac{1}{2}$ a $x + y + z = 1$. A protože
$$ab - 1 = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} - 1 = \frac{1-x-y}{xy} = \frac{z}{xy}\,,$$
můžeme po analogickém vyjádření zbylých dvou jmenovatelů dokazovanou nerovnost zapsat ve tvaru
$$\frac{8xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge 2\,.$$
Dále označme $xy = p$ a $x + y = s$. Pak $\frac{1}{2} \le s = 1 - z < 1$ a $0 < p \le \frac{s^2}{4}$. Levou stranu upravené nerovnosti tak můžeme ještě přepsat do tvaru
$$\frac{8xy}{z} + \frac{z(x^2+y^2)}{xy} = \frac{8p}{1-s} + (1-s) \cdot \frac{(s^2-2p)}{p}\,.$$
Nyní při pevném $s \in \langle \frac{1}{2}, 1)$ uvažme funkci
$$f(p) = \frac{8p}{1-s} + (1-s) \cdot \frac{(s^2-2p)}{p}\,.$$
Z vyjádření její derivace
$$f'(p) = \frac{8}{1-s} - \frac{s^2(1-s)}{p^2}$$
plyne, že f' je funkce rostoucí na $(0, \infty)$ a že $f'(p) = 0$, právě když $p = p_0 = \frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}$. To znamená, že funkce f je klesající na $(0, p_0\rangle$ a rostoucí na $\langle p_0, \infty)$. V naší situaci však platí $0 < p \le \frac{s^2}{4}$, takže rozlišíme dva případy podle toho, které z čísel p_0 a $\frac{s^2}{4}$ je větší. Pomůže nám v tom vyjádření
$$\frac{s^2}{4} - p_0 = \frac{s^2}{4} - \frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})s(s-2+\sqrt{2})}{4}\,.$$

Pokud $s \ge 2 - \sqrt{2}$, pak $p_0 \le \frac{s^2}{4}$, a tedy pro naše $p \in (0, \frac{s^2}{4}\rangle$ máme
$$f(p) \ge f(p_0) = f\left(\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}\right) = (4\sqrt{2}+2)s - 2 \ge (4\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2}) - 2 = 6\sqrt{2} - 6 > 2\,.$$

Jestliže naopak $s < 2 - \sqrt{2}$, pak $\frac{s^2}{4} < p_0$, a odtud pro naše $p \in (0, \frac{s^2}{4}\rangle$ vyplývá
$$f(p) \ge f\left(\frac{s^2}{4}\right) = \frac{2s^2}{1-s} + 2(1-s) = 2 + \frac{(2s-1)\cdot 2s}{1-s} \ge 2\,,$$
neboť platí $\frac{1}{2} \le s < 1$. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána. Rovnost v ní nastane, právě když $x = y = \frac{1}{4}$ a $z = \frac{1}{2}$, tedy v případě $a = b = 3$ a $c = 1$.

Příklad 1.39. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí mezi jejich aritmetickým a geometrickým průměrem klasická tzv. AG-nerovnost[39]

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

Řešení. Zapíšeme-li AG-nerovnost jako nerovnost pro funkci n proměnných

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} - \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

pak stačí dokázat, že $f(a_1, a_2, \ldots a_n) \geq 0$ pro každou n-tici kladných čísel a_i. Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ je nerovnost zřejmá rovnost. Je-li $n \geq 2$, označíme $b = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$ a nejprve dokážeme, že pro každé $a_n > 0$ platí

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \geq f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b).$$

Na intervalu $(0, \infty)$ vezmeme funkci jedné proměnné

$$g(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x)$$

a spočítáme její derivaci:

$$g'(x) = \frac{1}{n} - \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}{n\sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} x)^{n-1}}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{(a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{n-1}{n}}}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Z výsledku je patrné, že funkce g je na intervalu $(0, b\rangle$ klesající a na intervalu $\langle b, \infty)$ rostoucí. Pro každé $x > 0$ tak platí nerovnost $g(x) \geq g(b)$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) &\geq f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b) = \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot b} \geq \\ &\geq \frac{(n-1)b + b}{n} - \sqrt[n]{b^{n-1} \cdot b} = 0\,, \end{aligned}$$

kde jsme využili indukční předpoklad, podle kterého

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \qquad \text{neboli} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq (n-1)b.$$

Tím je AG-nerovnost matematickou indukcí dokázána pro každé n.

[39] [Kou-01], str. 147. Je známa řada různých důkazů této významné nerovnosti; v naší práci uvedeme ještě další její důkazy v kapitole 2 (věta 2.85) i kapitole 3 (příklad 3.9).

Příklad 1.40. Pro kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \geq 2$, uvažme průměry

$$A_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,, \quad Q_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}\,, \quad A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,, \quad Q_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,.$$

Dokažte nerovnost

$$n(Q_n - A_n) \geq (n-1)(Q_{n-1} - A_{n-1})$$

a zjistěte, kdy v ní nastane rovnost.[40]

Řešení. Definujme na intervalu $(0, \infty)$ funkci

$$f(x) = \sqrt{n\left((n-1)Q_{n-1}^2 + x^2\right)} - x - (n-1)A_{n-1}\,.$$

Pro její první derivaci platí

$$f'(x) = \frac{2nx}{2\sqrt{n\left((n-1)Q_{n-1}^2 + x^2\right)}} - 1 = \sqrt{\frac{nx^2}{(n-1)Q_{n-1}^2 + x^2}} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{(n-1)(x^2 - Q_{n-1}^2)}{(n-1)Q_{n-1}^2 + x^2}} - 1\,.$$

Protože znaménko zlomku pod odmocninou je shodné se znaménkem výrazu $x^2 - Q_{n-1}^2$, platí $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (0, Q_{n-1})$ a $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (Q_{n-1}, \infty)$. Funkce f tedy svého minima na daném intervalu dosahuje v bodě $x = Q_{n-1}$, čili

$$f(a_n) \geq f(Q_{n-1})\,,$$

$$\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2} - \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{\frac{n^2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} - \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} - \sum_{i-1}^{n-1} a_i\,,$$

$$n(Q_n - A_n) \geq (n-1)(Q_{n-1} - A_{n-1})\,.$$

Tím je důkaz hotov. Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $a_n = Q_{n-1}$.

Příklad 1.41. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla splňující podmínku

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) < (n + \sqrt{10} - 3)^2\,,$$

kde $n > 2$. Dokažte, že některá čísla x_i, x_j, x_k, kde $1 \leq i < j < k \leq n$ a $i, j, k \in \mathbb{N}$, jsou délkami stran trojúhelníku.[41]

[40] Vlastní výsledek, inspirováno [Kur-05], str. 27.
[41] [Hun-07], str. 112

Řešení. Matematickou indukcí dokažme následující tvrzení, ze kterého vyplývá, že za vyhovující trojici lze vybrat tři největší čísla dané n-tice: Nechť $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, kde $n \geq 3$, jsou reálná čísla splňující nerovnost $x_1 \geq x_2 + x_3$. Pak platí

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq (n + \sqrt{10} - 3)^2 .$$

Pro $n = 3$ máme za předpokladů $x_2 \geq x_3 > 0$, $x_1 \geq x_2 + x_3$ dokázat

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geq 10 ,$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2x_3(x_2 + x_3) + x_3x_1(x_3 + x_1) \geq 7x_1x_2x_3 .$$

Vezměme funkci f proměnné x_1 definovanou na intervalu $\langle x_2 + x_3, \infty)$ předpisem

$$f(x_1) = x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2x_3(x_2 + x_3) + x_3x_1(x_3 + x_1) - 7x_1x_2x_3 .$$

Pro každé $x_1 > x_2 + x_3$ zřejmě platí

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 2x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 7x_2x_3 > 2(x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_2x_3 = \\ &= 3(x_2 - x_3)^2 + 3x_2x_3 > 0 , \end{aligned}$$

a tedy pro každé $x_1 \geq x_2 + x_3$ máme

$$f(x_1) \geq f(x_2 + x_3) = 2(x_2 + x_3)(x_2 - x_3)^2 \geq 0 ,$$

čímž je důkaz tvrzení pro $n = 3$ hotov.

Nyní, za předpokladu platnosti tvrzení pro n proměnných, dokažme nerovnost

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geq (n + \sqrt{10} - 2)^2 ,$$

platí-li $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{n+1} > 0$ a $x_1 \geq x_2 + x_3$. Označíme-li $A = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ a $B = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{-1}$, pak podle indukčního předpokladu máme

$$AB \geq (n + \sqrt{10} - 3)^2 \qquad \text{neboli} \qquad 1 + \sqrt{AB} \geq n + \sqrt{10} - 2 .$$

Protože zřejmě $A > nx_n$ a $B < \frac{1}{nx_n}$, platí $\frac{A}{B} > x_n^2 \geq x_{n+1}^2$, a tedy $\sqrt{\frac{A}{B}} > x_{n+1}$. Uvažme proto funkci f proměnné $x = x_{n+1}$ definovanou na intervalu $\left(0, \sqrt{\frac{A}{B}}\right\rangle$ předpisem

$$f(x) = (x + A)\left(\frac{1}{x} + B\right) = Bx + \frac{A}{x} + 1 + AB ,$$

pro níž zřejmě platí $f'(x) = B - \frac{A}{x^2} < 0$ pro každé $x \in \left(0, \sqrt{\frac{A}{B}}\right\rangle$, takže pro taková x s přihlédnutím k výše uvedené nerovnosti pro součin AB dostáváme

$$f(x) \geq f\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = \left(1 + \sqrt{AB}\right)^2 > (n + \sqrt{10} - 2)^2\,,$$

čímž je dokončen druhý indukční krok a celý důkaz je tak hotov.

Příklad 1.42. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí[42]

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{2}{n}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 .$$

Řešení. Pro $n = 1$ a $n = 2$ je nerovnost zřejmá rovnost. Nechť tedy $n > 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Uvažme $n-1$ funkcí

$$f_k(t) = (n-1)\left(\sum_{s=1}^{k} a_s^2 + (n-k)t^2\right) + n\left(\prod_{s=1}^{k} a_s\right)^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{2(n-k)}{n}} - \left(\sum_{s=1}^{k} a_s + (n-k)t\right)^2 ,$$

kde $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a kde funkce f_k je definovaná na intervalu $\langle a_k, \infty)$.

Ukážeme, že všechny funkce $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ jsou na příslušných intervalech neklesající. Pak už snadno nerovnost ze zadání dokážeme, neboť bude platit

$$\begin{aligned}(n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 &= \\ &= f_{n-1}(a_n) \geq f_{n-1}(a_{n-1}) = f_{n-2}(a_{n-1}) \geq f_{n-2}(a_{n-2}) = \\ &= f_{n-3}(a_{n-2}) \geq \ldots \geq f_2(a_2) = f_1(a_2) \geq f_1(a_1) = 0\,.\end{aligned}$$

Zbývá tedy dokázat, že derivace funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ jsou nezáporné. Protože

$$\begin{aligned}f_k'(t) &= 2(n-k)\left((n-1)t + \left(\prod_{s=1}^{k} a_s\right)^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{n-2k}{n}} - \left(\sum_{s=1}^{k} a_s + (n-k)t\right)\right) = \\ &= 2(n-k)\left((k-1)t - \sum_{s=1}^{k} a_s + \left(\prod_{s=1}^{k} a_s\right)^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{n-2k}{n}}\right) ,\end{aligned}$$

[42] [Kou-01], str. 147

stačí pro každé $t \geq a_k$ ověřit nerovnost

$$(k-1)t - \sum_{s=1}^{k} a_s + \left(\prod_{s=1}^{k} a_s\right)^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{n-2k}{n}} \geq 0\,.$$

Využijeme konečnou indukci pro $n-1$ funkcí

$$g_k(t) = (k-1)t - \sum_{s=1}^{k} a_s + \left(\prod_{s=1}^{k} a_s\right)^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{n-2k}{n}}\,, \qquad t \in \langle a_k, \infty)\,,\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

V případě $k = 1$ pro každé $t \geq a_1$ platí

$$g_1(t) = -a_1 + a_1^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{n-2}{n}} = a_1 \left(\left(\frac{t}{a_1}\right)^{\frac{n-2}{n}} - 1\right) \geq 0\,.$$

Předpokládejme nyní, že pro některé $k = 1, 2, \ldots, n-2$ platí nerovnost $g_k(t) \geq 0$ pro každé $t \geq a_k$. Ukážeme, že platí i $g_{k+1}(t) \geq 0$ pro každé $t \geq a_{k+1}$. Zřejmě

$$g'_{k+1}(t) = k + \left(1 - \frac{2(k+1)}{n}\right) \cdot \left(\frac{\prod\limits_{s=1}^{k+1} a_s}{t^{k+1}}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Je-li $\frac{2(k+1)}{n} \leq 1$, pak nerovnost $g'_{k+1}(t) \geq 0$ je zřejmá pro každé $t > 0$. Ověříme, že i v případě $\frac{2(k+1)}{n} > 1$ je nerovnost $g'_{k+1}(t) \geq 0$ splněna pro každé $t \geq a_{k+1}$. Pro takové t totiž s ohledem na nerovnosti $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{k+1} \leq t$ platí

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{k+1} a_s}{t^{k+1}} \leq 1\,,$$

a tudíž

$$g'_{k+1}(t) \geq k + 1 - \frac{2(k+1)}{n} = (k+1)\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 0\,.$$

Funkce g_{k+1} je tedy na $\langle a_{k+1}, \infty)$ neklesající, a proto pro každé $t \geq a_{k+1}$ platí

$$g_{k+1}(t) \geq g_{k+1}(a_{k+1}) = g_k(a_{k+1}) \geq 0\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Pro geometrický, aritmetický a kvadratický průměr

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad Q = \sqrt[2]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

platí známé nerovnosti $G \leq A \leq Q$. Výsledek předchozího příkladu zapsaný ve tvaru

$$A^2 \leq \frac{1}{n}\, G^2 + \frac{n-1}{n}\, Q^2\,,$$

kde na pravé straně vystupuje konvexní kombinace čísel G^2 a Q^2, upřesňuje, v které části intervalu mezi čísly G^2 a Q^2 se nachází hodnota A^2 (totiž v jeho „poslední n-tině“).

1.4 Opakované užití derivace

Ve všech dosavadních příkladech této kapitoly jsme monotonii zkoumané funkce f jedné proměnné určovali podle znaménka její derivace f'. To však často nelze provést elementárními prostředky. Východiskem může být, jak ukážeme v následujících příkladech, určení znaménka funkce f' šetřením její monotonie, tj. výpočtem druhé derivace f'' a určením jejího znaménka. Takový postup se zjednoduší (a šance úspěchu se zvýší) v případě, kdy se nám podaří vyjádřit derivaci f' ve tvaru součinu dvou funkcí, řekněme $f' = g_1 \cdot g_2$, tak, že určení znaménka funkce g_1 je snadné. Pak je totiž výhodnější dalším postupem zkoumat pouze monotonii funkce g_2, tj. počítat s funkcí g_2' na místo f''. Dodejme ještě, že v některých případech je nutné derivovat více než dvakrát, než přejdeme k funkci, jejíž znaménko dokážeme snadno určit.

Příklad 1.43. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $b > a > 0$, platí[43]

$$b^2 - a^2 > 2ab \ln \frac{b}{a}\,.$$

Řešení. Označíme $x = \frac{b}{a} > 1$ a zapíšeme nerovnost ve tvaru $x^2 - 2x \ln x - 1 > 0$. Naším úkolem je ukázat, že pro každé $x > 1$ platí pro funkci f z levé strany nerovnost

$$f(x) = x^2 - 2x \ln x - 1 > 0\,.$$

O tom, že je funkce f na intervalu $\langle 1, \infty)$ rostoucí, se přesvědčíme výpočtem první a druhé derivace. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - \ln x - 1), && \text{přičemž } f(1) = 0\,, \\ f''(x) &= 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0 && \text{pro každé } x > 1\,, \text{ přičemž } f'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Proto pro všechna $x > 1$ platí $f'(x) > 0$, a tedy i $f(x) > 0$, čímž je důkaz hotov.

[43] [Kou-01], str. 151

Poznámka. Výsledek předchozího příkladu zapsaný ve tvaru

$$\frac{2ab}{a+b} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

je nerovností mezi *harmonickým* a *logaritmickým* průměrem čísel a, b. O podobných nerovnostech pojednáme v podkapitole 3.3.

Příklad 1.44. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí[44]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Řešení. Zapíšeme nerovnost ve tvaru

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}, \quad \text{kde } 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

a na intervalu $(0,\infty)$ vyšetříme monotónnost funkce

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Z vyjádření její derivace

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

vidíme, že znaménko funkce $f'(x)$ závisí pouze na čitateli zlomku. Proto jej označme jako novou funkci

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

a počítejme opět její derivaci

$$g'(x) = \frac{-x}{(1+x)^2} < 0 \quad \text{pro každé } x > 0.$$

Protože $g(0) = 0$, je $g(x) < 0$ pro všechna $x > 0$, a tedy funkce f je na intervalu $(0,\infty)$ klesající. Tím je nerovnost ze zadání dokázána.

[44] Známá nerovnost s důkazem podle [Kou-01], str. 150.

Poznámka. Číslo e se v mnoha učebnicích matematické analýzy definuje jako limita

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Ta existuje, protože posloupnost čísel $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je shora omezená číslem 3 a – jak právě ukazuje předchozí příklad – je rovněž rostoucí. I když lze poslední poznatek dokázat elementárním postupem ([Her-96], str. 97), je zkoumání monotonie funkce f z řešení příkladu poučné.

Příklad 1.45. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ a každé reálné číslo $x > 0$ platí[45]

$$1 + \frac{x}{n} > \sqrt[n]{1+x} > 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} .$$

Řešení. Budeme se zabývat pouze důkazem pravé nerovnosti, neboť nalevo je zapsána známá Bernoulliova nerovnost, kterou jsme dokázali v příkladu 1.4. Vyjdeme z funkce

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 - \frac{x}{n} + \frac{(n-1)x^2}{2n^2} ,$$

jejíž první a druhá derivace mají tvar

$$f'(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}} + \frac{n-1}{n}\,x - 1\right) ,$$

$$f''(x) = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{2n-1}}}\right) .$$

Vidíme, že pro každé $x > 0$ platí $f''(x) > f''(0) = 0$ a odtud i $f'(x) > f'(0) = 0$, takže nakonec i $f(x) > f(0) = 0$. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Dokázaná nerovnost plyne ihned z Maclaurinova vzorce

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}(1+\xi)^{a-3}x^3$$

pro $a = \frac{1}{n}$ (kde ξ je vhodné číslo, $0 < \xi < x$), neboť

$$\binom{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{n}, \qquad \binom{\frac{1}{n}}{2} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!} = -\frac{n-1}{2n^2} ,$$

$$\binom{\frac{1}{n}}{3} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{3!} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} > 0 ,$$

což spolu s nerovností $(1+\xi)^{\frac{1}{n}-3}x^3 > 0$ dává požadovaný výsledek.

[45] [Kou-01], str. 146

Příklad 1.46. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n a každé reálné číslo $a \geq 1$ platí[46]

$$n(a-1)\left(a^{2n+1}+1\right) \geq a\left(a^{2n}-1\right),$$

přičemž rovnost nastane pouze pro $a = 1$.

Řešení. Uvažme na intervalu $\langle 1, \infty)$ funkci

$$f(x) = n(x-1)\left(x^{2n+1}+1\right) - x\left(x^{2n}-1\right).$$

Dokážeme, že funkce f je na daném intervalu rostoucí. Pro její první derivaci postupně dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= n\left(x^{2n+1}+1+(2nx+x-2n-1)\right)x^{2n} - \left(x^{2n}-1+2nx^{2n}\right) = \\ &= 2nx^{2n+1} + 2n^2x^{2n+1} + n + 1 - 2n^2x^{2n} - 3nx^{2n} - x^{2n} = \\ &= 2nx^{2n+1}(1+n) + n + 1 - x^{2n}(n+1)(2n+1) = \\ &= (n+1)\left(2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1\right). \end{aligned}$$

Zřejmě platí $f'(1) = 0$ a dále

$$\begin{aligned} f''(x) &= (n+1)\big((2n+1)2nx^{2n} - (2n+1)2nx^{2n-1}\big) = \\ &= (n+1)(2n+1)2nx^{2n-1}(x-1) > 0 \end{aligned}$$

pro každé $x > 1$. Funkce f' je tedy na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí, takže je tam kladná, neboť $f'(1) = 0$. Proto je funkce f na intervalu $\langle 1, \infty)$ rostoucí, a tudíž pro každé $a > 1$ platí ostrá nerovnost $f(a) > f(1) = 0$. Tím je tvrzení příkladu dokázáno.

Příklad 1.47. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součin je roven 1, platí[47]

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(t) = a^t + b^t + c^t$ definovanou na intervalu $\langle 0, \infty)$. Z výpočtu jejích derivací

$$f'(t) = a^t \ln a + b^t \ln b + c^t \ln c, \qquad f''(t) = a^t \ln^2 a + b^t \ln^2 b + c^t \ln^2 c$$

plyne, že $f''(t) \geq 0$, takže funkce f' je na daném intervalu neklesající, a tedy $f'(t) \geq f'(0)$ pro každé $t \geq 0$. A protože $f'(0) = \ln abc = 0$, je neklesající rovněž i funkce f a důkaz nerovnosti $f(2) \leq f(3)$ je tak hotov.

[46] [Kou-01], str. 146
[47] [And-07], str. 134

Příklad 1.48. Nechť $|x| \le \pi$, $x \ne 0$. Ukažte, že platí[48]

$$1-\frac{|x|}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|x|}{\pi}\right).$$

Řešení. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je stejně jako funkce $|x|$ sudá, stačí proto dokázat platnost zadaných nerovností pouze pro $x \in (0,\pi\rangle$. Na tomto intervalu tedy uvažme funkci $f(x) = \sin x - x + \frac{x^2}{\pi}$. Zřejmě

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}, \quad f''(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}, \quad f'''(x) = -\cos x .$$

Protože $f'''(x) < 0$ pro každé $0 < x < \frac{\pi}{2}$ a $f'''(x) > 0$ pro každé $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, je funkce $f''(x)$ klesající na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$. Dále z hodnot $f''(0) > 0$, $f''(\frac{\pi}{2}) < 0$ a $f''(\pi) > 0$ plyne existence bodů $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ takových, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, x_1) \cup (x_2, \pi)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (x_1, x_2)$. Funkce $f'(x)$ je tedy rostoucí na každém z intervalů $(0, x_1\rangle$, $\langle x_2, \pi\rangle$ a klesající na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$. A protože $f'(0) = f'(\pi) = 0$, existuje bod $y \in (x_1, x_2)$ takový, že $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, y)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (y, \pi)$. Takže funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(0, y\rangle$ a klesající na intervalu $\langle y, \pi\rangle$, což společně s rovnostmi $f(0) = 0 = f(\pi)$ znamená, že $f(x) \ge 0$ pro každé $x \in (0, \pi\rangle$. Levá nerovnost ze zadání je tak dokázana.

K důkazu pravé nerovnosti ze zadání opět postačí ověřit, že $g(x) \le 0$ pro $x \in (0, \pi\rangle$, kde $g(x) = \sin x - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{2}$. Platí

$$g'(x) = \cos x - \frac{\pi}{2} + x, \qquad g''(x) = -\sin x + 1 .$$

Zřejmě $g''(x) > 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$. Z toho plyne, že funkce $g'(x)$ je rostoucí na intervalu $(0, \pi\rangle$. A protože $g'(0) < 0$ a $g'(\pi) > 0$, musí existovat bod $z \in (0, \pi)$ takový, že $g'(x) < 0$ pro $x \in (0, z)$ a $g'(x) > 0$ pro $x \in (z, \pi)$. Funkce $g(x)$ je tedy klesající na intervalu $(0, z\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle z, \pi\rangle$. Z rovností $g(0) = 0 = g(\pi)$ tak dostáváme, že $g(x) \le 0$ pro každé $x \in (0, \pi\rangle$. Tím je důkaz hotov.

Příklad 1.49. Dokažte, že pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnosti[49]

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$

[48] [Ber-04], str. 128

[49] Samostatné zpracování námětu z [Kou-01], str. 148.

Řešení. Pro funkci $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ platí při každém $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\,, \qquad f''(x) = x - \sin x\,, \qquad f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0\,,$$

přitom poslední nerovnost je ostrá, je-li $x \in (0, \frac{\pi}{2} \rangle$, takže f'' je na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rostoucí. Spolu s rovností $f''(0) = 0$ to znamená, že f'' je kladná na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, a tedy f' je na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rostoucí. To s ohledem na $f'(0) = 0$ znamená, že f' je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ kladná, a tedy f je na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rostoucí. A protože $f(0) = 0$, je f na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ kladná a důkaz první nerovnosti je hotov.

Pro funkci $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ a každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí

$$g'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} = -f(x) < 0$$

pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, jak jsme pro funkci f určili v první části řešení. Odtud plyne, že g je na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ klesající, a tedy záporná na $(0, \frac{\pi}{2} \rangle$, neboť $g(0) = 0$.

Pro funkci $h(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0\,.$$

(Využili jsme přitom známou nerovnost $\operatorname{tg} x > x$, platnou pro všechna x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, neboť pro taková x zřejmě $(\operatorname{tg} x - x)' = \operatorname{tg}^2 x > 0$ a $\operatorname{tg} 0 - 0 = 0$.) Funkce h je tedy na $\langle 0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, a tudíž kladná na $(0, \frac{\pi}{2})$, neboť $h(0) = 0$.

Poznámka. První dvě nerovnosti z předchozího příkladu plynou přímo z Maclaurinových vzorců

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cos\xi \cdot \frac{x^5}{5!}\,, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos\eta \cdot \frac{x^6}{6!}\,,$$

kde ξ, η jsou vhodná čísla z intervalu $(0, x)$, neboť $\cos\xi > 0$, $\cos\eta > 0$ pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Příklad 1.50. Dokažte, že pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí[50]

$$\frac{\sin x}{x} > \sqrt[3]{\cos x} \qquad \text{a} \qquad \sin x \cdot \operatorname{tg} x > x^2\,.$$

[50] [Kou-01], str. 148

Řešení. Zapišme první nerovnost pro uvedená x v ekvivalentním tvaru

$$\sin^3 x > x^3 \cos x$$

a označme $y = \frac{x^2}{2}$. Pak s ohledem na výsledky příkladu 1.49 pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\begin{aligned}\sin^3 x > \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 &= x^3 \left(1 - \frac{y}{3}\right)^3 = \\ &= x^3 \left(1 - y + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{27}\right) > x^3 \left(1 - y + \frac{y^2}{6}\right) = \\ &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) > x^3 \cos x\,,\end{aligned}$$

neboť z $0 < x < \frac{\pi}{2}$ plyne $0 < y < \frac{\pi^2}{8} < 2$, a tudíž $\frac{y^3}{27} < \frac{y^2}{6}$.

K důkazu druhé nerovnosti ze zadání využijeme rovněž výsledků předchozího příkladu. Podle nich pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnosti s kladnými stranami

$$\sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg} x > x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right).$$

Po jejich vynásobení dostáváme

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x > \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x^2\left(1 + \frac{x^2}{18}(3 - x^2)\right) > x^2\,,$$

neboť pro taková x je zřejmě $x^2 < 3$. Důkaz obou nerovností je tak hotov.

Příklad 1.51. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c taková, že $a \geq b \geq c$, platí[51]

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{a}{\sqrt{a+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+a}} + \frac{c}{\sqrt{c+b}}\,.$$

Řešení. Zapíšeme nerovnost ve tvaru

$$\frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} + \frac{c-a}{\sqrt{c+a}} \geq 0\,,$$

a na intervalu $\langle b, \infty)$ vezmeme funkci

$$f(x) = \frac{x-b}{\sqrt{x+b}} + \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} + \frac{c-x}{\sqrt{c+x}}\,.$$

[51] [Kou-01], str. 154

Naší úlohou je dokázat nerovnost $f(a) \geq 0$. Protože $a \geq b$ a zřejmě $f(b) = 0$, stačí dokázat platnost nerovnosti $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \geq b$. Platí

$$f'(x) = \frac{x+3b}{2(x+b)\sqrt{x+b}} - \frac{x+3c}{2(x+c)\sqrt{x+c}}\,.$$

Při pevném $x \geq b$ na intervalu $\langle 0, b\rangle$ uvažme proto funkci

$$g(t) = \frac{x+3t}{2(x+t)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

pro niž zřejmě platí

$$f'(x) = g(b) - g(c)\,.$$

Máme-li tedy dokázat nerovnost $f'(x) \geq 0$, vzhledem k $c \leq b$ stačí ověřit, že funkce g je neklesající, neboli že $g'(t) \geq 0$ pro každé $t \in \langle 0, b\rangle$. Pro každé takové t platí

$$g'(t) = \frac{6(x+t)^{\frac{3}{2}} - 3(x+3t)(x+t)^{\frac{1}{2}}}{4(x+t)^3} = \frac{3(x-t)}{4(x+t)^{\frac{5}{2}}} \geq 0\,,$$

neboť $x \geq b \geq t$. Tím je nerovnost ze zadání dokázána.

Příklad 1.52. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí[52]

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)\,.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \geq b \geq c$. Pro pevná $b \geq c$ uvažme na intervalu $\langle b, \infty)$ funkci proměnné x, danou předpisem

$$f(x) = x^3 + b^3 + c^3 + 3xbc - xb(x+b) - bc(b+c) - cx(c+x)\,,$$

pro jejíž první derivaci platí

$$f'(x) = 3x^2 + 3bc - 2xb - b^2 - 2xc - c^2\,.$$

Protože $f''(x) = 6x - 2b - 2c \geq 0$ pro každé $x \geq b$, je funkce f' na $\langle b, \infty)$ neklesající. Spolu s tím, že $f'(b) = c(b-c) \geq 0$, to znamená, že $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \geq b$, a tedy i funkce f je na intervalu $\langle b, \infty)$ neklesající. Odtud díky předpokladu $a \geq b$ plyne $f(a) \geq f(b) = c(b-c)^2 \geq 0$ a důkaz je tak hotov.

[52] [Hun-07], str. 110

Příklad 1.53. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí[53]

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)\,.$$

Řešení. Zadaná nerovnost je cyklicky-symetrická, nechť tedy $a = \max\{a, b, c\}$. Při pevných hodnotách b, c uvážíme na intervalu $\langle \max\{b, c\}, \infty)$ funkci f proměnné x tvaru

$$f(x) = 2x^3 + 3xbc - 3x^2b - 3xc^2 + 2(b^3 + c^3) - 3b^2c\,.$$

Z výpočtu jejích derivací

$$f'(x) = 6x^2 + 3bc - 6xb - 3c^2\,, \qquad f''(x) = 12x - 6b = 6(2x - b)$$

plyne, že $f''(x) > 0$ pro každé $x > \max\{b, c\}$, a proto f' je na intervalu $\langle \max\{b, c\}, \infty)$ rostoucí. A protože

$$f'(b) = 6b^2 + 3bc - 6b^2 - 3c^2 = 3c(b - c)\,, \qquad f'(c) = 6c^2 + 3bc - 6bc - 3c^2 = 3c(c - b)\,,$$

vidíme, že $f'(\max\{b, c\}) \geq 0$, ať je $\max\{b, c\} = b$ nebo $\max\{b, c\} = c$. Proto je f' na $(\max\{b, c\}, \infty)$ kladná, tedy funkce f je na intervalu $\langle \max\{b, c\}, \infty)$, ve které leží číslo a, rostoucí. Proto bude nerovnost $f(a) \geq 0$ dokázána, když ukážeme, že platí

$$f(\max\{b, c\}) \geq 0\,. \tag{$*$}$$

Avšak

$$\begin{aligned} f(b) &= 2b^3 + 3b^2c - 3b^3 - 3bc^2 + 2(b^3 + c^3) - 3b^2c = \\ &= b^3 - 3bc^2 + 2c^3 = (b - c)^2(b + 2c) \geq 0\,, \\ f(c) &= 2c^3 + 3bc^2 - 3bc^2 - 3c^3 + 2(b^3 + c^3) - 3b^2c = \\ &= c^3 - 3b^2c + 2b^3 = (c - b)^2(c + 2b) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost $(*)$, a tedy i původní nerovnost ze zadání úlohy, dokázána. Rovnost v ní nastane jedině v případech $a = b = c$.

Příklad 1.54. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c taková, že $a \geq b \geq c > 0$, platí[54]

$$a^c \cdot b^a \cdot c^b \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a\,.$$

[53] [Thu-07], str. 103, uvedeno bez řešení
[54] [Kou-01], str. 151

Řešení. Je-li $a = b$ nebo $b = c$, pak je nerovnost zřejmá rovnost. Zbývá posoudit případ $a > b > c$. Označíme $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, tedy $x > y > 1$. Nerovnost, kterou máme dokázat, tak můžeme zapsat ve tvaru

$$(xc)^c \cdot (yc)^{xc} \cdot c^{yc} \geq (xc)^{yc} \cdot (yc)^c \cdot c^{xc}$$

a dále postupně upravit:

$$\begin{aligned}(x \cdot y^x)^c \cdot c^{(x+y+1)c} &\geq (x^y \cdot y)^c \cdot c^{(x+y+1)c}\,,\\ x \cdot y^x &\geq x^y \cdot y\,,\\ x^{\frac{1}{x-1}} &\leq y^{\frac{1}{y-1}}\,,\\ \frac{\ln x}{x-1} &\leq \frac{\ln y}{y-1}\,.\end{aligned}$$

S ohledem na $x > y > 1$ nyní stačí ukázat, že funkce

$$f(t) = \frac{\ln t}{t-1}\,,$$

je na intervalu $\langle 1, \infty)$ klesající. Pro její derivaci v každém bodě $t > 1$ platí

$$f'(t) = \frac{t - 1 - t\ln t}{t(t-1)^2}\,.$$

Nahradíme-li čitatele zlomku pomocnou funkcí $g(t) = t - 1 - t\ln t$ a spočítáme-li její derivaci, dostaneme

$$g'(t) = -\ln t < 0 \quad \text{pro každé } t > 1\,.$$

Protože $g(1) = 0$, je $g(t) < 0$, a tedy i $f'(t) < 0$, pro všechna $t > 1$, a tím je důkaz hotov.

Příklad 1.55. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[55]

$$(a+b+c)^{(a+b+c)^2} a^{a^2} b^{b^2} c^{c^2} > (a+b)^{(a+b)^2} (b+c)^{(b+c)^2} (c+a)^{(c+a)^2}\,.$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost po zlogaritmování zapíšeme jako $f(a) > 0$, kde f je funkce jedné proměnné $x \in (0, \infty)$ definovaná při pevných $b, c > 0$ předpisem

$$\begin{aligned}f(x) =& (x+b+c)^2 \ln(x+b+c) + x^2 \ln x + b^2 \ln b + c^2 \ln c -\\ &- (x+b)^2 \ln(x+b) - (b+c)^2 \ln(b+c) - (c+x)^2 \ln(c+x)\end{aligned}$$

Pro její první derivaci po úpravě platí

$$f'(x) = 2 \ln \frac{(x+b+c)^{x+b+c} x^x}{(x+b)^{x+b} (c+x)^{c+x}}\,.$$

[55] [And-07], str. 137

Ukážeme, že funkce f je rostoucí a že tedy $f(x) > \lim_{t\to 0+} f(t) = 0$ pro každé $x > 0$, odkud již plyne dokazovaný výsledek. Nerovnost $f'(x) > 0$ je ekvivalentní nerovnosti

$$(x+b+c)^{x+b+c}x^x > (x+b)^{x+b}(c+x)^{c+x}\,, \tag{$*$}$$

kterou zbývá dokázat pro libovolná kladná čísla x, b, c. Zlogaritmujme ji a pak uvažme při pevných kladných hodnotách x, b funkci g jedné proměnné $z \in (0,\infty)$ danou takto:

$$g(z) = (x+b+z)\ln(x+b+z) + x\ln x - (x+b)\ln(x+b) - (z+x)\ln(z+x)\,.$$

Pro její první derivaci zřejmě platí

$$g'(z) = \ln\frac{x+b+z}{z+x} > \ln 1 = 0 \quad \text{pro všechna } z > 0\,,$$

takže $g(z) > \lim_{t\to 0+} g(t) = 0$ pro každé $z > 0$. Odtud již dostáváme požadovanou nerovnost $(*)$ a celý důkaz je tak hotov.

Příklad 1.56. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a > 0$ a $b \geq 2$ platí[56]

$$b^a + b^{\frac{1}{a}} \leq b^{a+\frac{1}{a}}\,.$$

Řešení. S ohledem na symetrii nerovnosti v číslech $a, \frac{1}{a}$ stačí dokázat danou nerovnost pouze v případě, kdy $a \geq 1$. Při označení $t = \ln a \geq 0$ zřejmě platí

$$b^{a+\frac{1}{a}} - b^a - b^{\frac{1}{a}} = b^{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} - b^{\mathrm{e}^t} - b^{\mathrm{e}^{-t}} = b^{\mathrm{e}^{-t}}\left(b^{\mathrm{e}^t} - b^{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} - 1\right)\,.$$

Vezměme tedy funkci proměnné t definovanou na intervalu $\langle 0,\infty)$ předpisem

$$f(t) = b^{\mathrm{e}^t} - b^{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} - 1\,.$$

Je patrné, že $f(0) = b - 2 \geq 0$. Proto stačí pro všechna $t \geq 0$ dokázat nerovnost

$$f'(t) = \ln b\left(\mathrm{e}^t\, b^{\mathrm{e}^t} - (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})b^{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}\right) \geq 0\,.$$

Protože $f'(0) = (b-2)\ln b \geq 0$, bude důkaz hotov, ukážeme-li, že funkce f' je na intervalu $\langle 0,\infty)$ neklesající. Vypočteme proto druhou derivaci funkce f:

$$\begin{aligned}\frac{f''(t)}{\ln b} &= \mathrm{e}^t\, b^{\mathrm{e}^t} + \mathrm{e}^{2t}\ln b\cdot b^{\mathrm{e}^t} - (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})b^{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} - (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2\ln b\cdot b^{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = \\ &= b^{\mathrm{e}^t}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}\ln b - \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} + (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2\ln b}{b^{\mathrm{e}^{-t}}}\right)\,.\end{aligned}$$

[56] [Kou-01], str. 150

Uvážíme-li platnost nerovnosti

$$b^{\mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}\ln b} \geq 1 + \mathrm{e}^{-t}\ln b\,,$$

která plyne volbou $u = \mathrm{e}^{-t}\ln b$ ve známé nerovnosti $\mathrm{e}^u \geq 1 + u$, jež je splněna pro každé $u \geq 0$, můžeme s její pomocí důkaz dokončit takto:

$$\begin{aligned}\frac{f''(t)}{\ln b} &\geq b^{\mathrm{e}^t} \cdot \frac{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}\ln b)(1 + \mathrm{e}^{-t}\ln b) - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2\ln b}{1 + \mathrm{e}^{-t}\ln b} = \\ &= \frac{b^{\mathrm{e}^t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}\ln b}\left(\ln^2 b \cdot \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - \ln b \cdot \mathrm{e}^{-2t} - \ln b\right) = \\ &= \frac{b^{\mathrm{e}^t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}\ln b}\left(\left(\ln b \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^2 + \ln b\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)\right) \geq 0\,.\end{aligned}$$

Funkce f' je tedy na intervalu $\langle 0, \infty)$ neklesající a nerovnost ze zadání je tak dokázána.

Příklad 1.57. Dokažte, že pro všechna celá čísla $n \geq 1$ platí

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n \leq (n+3)^n\,.$$

Zjistěte rovněž, pro která taková n nastane rovnost.[57]

Řešení. Dosazením prvních hodnot $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dostaneme po řadě platné vztahy

$$3 \leq 4\,, \quad 25 \leq 25\,, \quad 216 \leq 216\,, \quad 2258 \leq 2401\,, \quad 28975 \leq 32768\,,$$

přičemž pro $n = 2$ a $n = 3$ nastává rovnost. Dále dokážeme, že pro všechna ostatní čísla $n \geq 6$ platí

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n < (n+3)^n\,.$$

Tuto nerovnost nejdříve upravíme

$$\left(\frac{3}{n+3}\right)^n + \left(\frac{4}{n+3}\right)^n + \ldots + \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n < 1\,,$$

$$\left(1 - \frac{n}{n+3}\right)^n + \left(1 - \frac{n-1}{n+3}\right)^n + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n < 1$$

a pro větší přehlednost zapíšeme s opačným pořadím sčítanců

$$\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^n + \ldots + \left(1 - \frac{n}{n+3}\right)^n < 1\,.$$

[57] [Lar-90], str. 333, zadání i řešení upraveno

K důkazu poslední nerovnosti stačí ukázat, že platí

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{pro každé } k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{$*$}$$

Potom totiž sečtením takových odhadů dostaneme kýženou nerovnost

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n + \left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n + \ldots + \left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n <$$
$$< \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1\,.$$

Z Bernoulliovy nerovnosti z příkladu 1.4 pro zkoumaná k, n máme

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^k \geq 1 - \frac{k}{n+3}\,,$$

odkud dostáváme

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{kn} = \left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n\right]^k,$$

takže k důkazu $(*)$ zbývá dokázat, že platí

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n \leq \frac{1}{2} \quad \text{pro každé } n \geq 6\,. \tag{$**$}$$

Vezměme proto funkci f na intervalu $(0, \infty)$ danou předpisem

$$f(x) = \left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x,$$

jejíž první derivace má vyjádření

$$f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x \cdot \left[\ln\frac{x+2}{x+3} + \frac{x}{(x+2)(x+3)}\right].$$

Je patrné, že první činitel je pro každé $x > 0$ kladný. Není však zřejmé, jaké znaménko má druhý činitel. Uvažme proto ještě funkci

$$g(x) = \ln\frac{x+2}{x+3} + \frac{x}{(x+2)(x+3)}\,.$$

Protože $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ a

$$g'(x) = \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{6-x^2}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{5x+12}{(x+3)^2(x+2)^2} > 0$$

pro každé $x > 0$, musí být na tomto intervalu funkce g, a tedy i funkce f', záporná. Funkce f je tedy na $(0, \infty)$ klesající a protože $f(6) \doteq 0{,}493 < \frac{1}{2}$, je tak důkaz $(**)$ hotov. Připomeňme, že rovnost v dokázané nerovnosti ze zadání příkladu nastane právě pro hodnoty $n = 2$ a $n = 3$.

Poznámka. Trikové úpravy a celková pracnost předchozího převzatého postupu nás přiměly k porovnání dokázaného odhadu s odhadem, který pro zkoumaný součet poskytne jedna obecná integrální nerovnost (Hermitova-Hadamardova). Budeme se jí věnovat v podkapitole 3.2, kde v příkladu 3.20 podáme „jednořádkový“ důkaz nerovnosti

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n < \frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

pro každé $n \geq 2$. Ukažme, že tento odhad je pro každé $n \geq 4$ přesnější než odhad z předchozího příkladu 1.57, že tedy pro taková n platí nerovnost

$$\frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{n+1} < (n+3)^n\,. \tag{$*$}$$

Pro $n = 4$ jde o nerovnost $2301{,}06\ldots < 2401$, v případě $n \geq 5$ ukážeme, že dokonce platí

$$\left(n+\frac{5}{2}\right)^{n+1} < (n+1)(n+3)^n \qquad \text{neboli} \qquad n+\frac{5}{2} < \sqrt[n+1]{(n+1)(n+3)^n}\,.$$

Na pravé straně poslední nerovnosti stojí geometrický průměr $n+1$ čísel (jednoho čísla $(n+1)$ a n stejných čísel rovných $(n+3)$). Jejich harmonický průměr je roven

$$\frac{n+1}{\frac{1}{n+1} + n\cdot\frac{1}{n+3}} = \frac{(n+1)^2(n+3)}{n^2+2n+3}\,.$$

Díky známé nerovnosti mezi harmonickým a geometrickým průměrem tak bude náš úkol splněn, když ověříme nerovnost

$$n+\frac{5}{2} < \frac{(n+1)^2(n+3)}{n^2+2n+3}\,.$$

To je však snadné: platí totiž

$$\frac{(n+1)^2(n+3)}{n^2+2n+3} - \left(n+\frac{5}{2}\right) = \frac{n^2-2n-9}{2(n^2+2n+3)}$$

a poslední zlomek je zřejmě kladný pro každé $n \geq 5$.

1.5 Uplatnění Bolzanovy a Rolleovy věty

V dostupné literatuře jsme našli i několik nerovností, při jejichž důkazech se kromě obvyklých úvah o monotonii funkcí uplatňují takové základní výsledky matematické analýzy, jakými jsou Bolzanova věta a Rolleova věta. Připomeňme, že podle první z nich má rovnice $f(x) = 0$ aspoň jedno řešení $x_0 \in (a,b)$, je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí-li $f(a)\cdot f(b) < 0$. Podle

Rolleovy věty má rovnice $f'(x) = 0$ aspoň jedno řešení $x_0 \in (a, b)$, má-li funkce f derivaci všude na (a, b), je-li spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) = f(b)$. Obě klasické věty zde pochopitelně nebudeme dokazovat, ostatně i další ze základních výsledků, Lagrangeovu větu o střední hodnotě (jež je snadným důsledem Rolleovy věty) jsme užili při odvození věty 1.1 bez důkazu.

Všech pět zařazených ukázek souvisí s otázkou, které se někdy říká *lokalizace reálných kořenů* algebraických rovnic. Za pozornost stojí zejména výsledek příkladu 1.60 o tzv. *Newtonových* a *Maclaurinových* nerovnostech.

Příklad 1.58. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c, splňující podmínky

$$a \le b \le c, \quad a + b + c = 6, \quad ab + bc + ca = 9$$

platí nerovnosti[58]

$$0 \le a \le 1 \le b \le 3 \le c \le 4\,.$$

Řešení. Označme $p = abc$ a uvažme funkci

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - 6x^2 + 9x - p\,.$$

Zřejmě $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$, takže první derivace funkce f je rovna nule v bodech $x = 1$ a $x = 3$. Navíc vidíme, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 3, \infty)$, takže na každém z nich má rovnice $f(x) = 0$ nejvýše jeden kořen. Proto prostřední z kořenů $a \le b \le c$ musí ležet v intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Nerovnosti $1 \le b \le 3$ jsou tak dokázány. Protože funkce f je na $\langle 1, 3\rangle$ klesající, platí v případě $1 < b < 3$ nerovnosti $f(1) > 0$ a $f(3) < 0$, takže součin $f(1)(3)$ je záporný, zatímco v případech $b = 1$ nebo $b = 3$ je tento součin roven nule. V každém případě tedy platí $f(1)f(3) \le 0$.

Dále si všimněme, že platí rovnosti $f(1) = f(4) = 4-p$ a $f(0) = f(3) = -p$, takže z nerovnosti $f(1)f(3) = -p(4 - p) \le 0$ máme $0 \le p \le 4$. Je-li $p = 0$, pak z rovností $f(0) = f(3) = 0$ s ohledem na výše zmíněné intervaly monotónnosti funkce f máme $a = 0$, $b = c = 3$. Je-li $p = 4$, pak se obdobně vysvětlí, proč $a = b = 1$, $c = 4$. Dokazované nerovnosti pro čísla a, c tak v případech $p = 0$ a $p = 4$ budou splněny. V ostatních případech, kdy $0 < p < 4$, platí

$$f(0)f(1) < 0\,, \quad f(1)f(3) < 0\,, \quad f(3)f(4) < 0\,,$$

odkud již podle Bolzanovy věty vyplývá, že $a \in (0, 1), b \in (1, 3), c \in (3, 4)$. Celý důkaz je tak hotov.

[58] [Hun-07], str. 109

Příklad 1.59. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d platí[59]

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}\,.$$

Řešení. Uvažme funkci

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D\,,$$

kde pro koeficienty A, B, C, D platí

$$A = a+b+c+d\,, \quad B = ab+ac+ad+bc+bd+cd\,, \quad C = abc+abd+acd+bcd\,, \quad D = abcd\,.$$

Rovnice $f(x) = 0$ má 4 kladné reálné kořeny a, b, c, d. Odtud podle Rolleovy věty plyne, že rovnice $f'(x) = 0$ má 3 kladné reálné kořeny. Rovnice $f'(x) = 0$ má totiž kořen mezi každými dvěma sousedními kořeny rovnice $f(x) = 0$; je-li např. číslo a jejím kořenem násobnosti $k \geq 2$, je i kořenem rovnice $f'(x) = 0$, a to násobnosti $k-1$. Označíme-li tedy (kladné) kořeny rovnice

$$f'(x) = 4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0$$

písmeny m, n, p, bude mít mnohočlen f' rozklad

$$f'(x) = 4(x-m)(x-n)(x-p) = 4x^3 - 4(m+n+p)x^2 + 4(mn+np+pm)x - 4mnp\,,$$

čili pro koeficienty B a C bude platit

$$B = 2(mn+np+pm), \qquad C = 4mnp.$$

Dokazovanou nerovnost nyní snadno dostaneme z AG-nerovnosti, podle které

$$\sqrt{\frac{B}{6}} = \sqrt{\frac{mn+np+pm}{3}} \geq \sqrt[3]{mnp} = \sqrt[3]{\frac{C}{4}}\,.$$

Poznámka. Dokázaný výsledek je jednou z Maclaurinových nerovností, které uvedeme v příkladu 1.60. V jeho označení se jedná o nerovnost

$$\sqrt[2]{E_2(a,b,c,d)} \geq \sqrt[3]{E_3(a,b,c,d)}\,.$$

V řešení příkladu 1.60 získáme Maclaurinovy nerovnosti nepřímo jako důsledek Newtonových nerovností. Proto jsme zařadili příklad 1.59 s přímým důkazem jedné z nich.

[59][Hun-07], str. 108

Příklad 1.60. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou reálné proměnné a $e_1, e_2, \dots, e_n$ jejich elementární symetrické polynomy, tedy polynomy definované rovnostmi

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

čili

$$\begin{aligned} e_0(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 1, \\ e_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ e_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Dokažte, že při označení

$$E_k(x) = E_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{e_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\binom{n}{k}} \quad (0 \le k \le n)$$

platí[60]

a) *Newtonovy nerovnosti*

$$E_{k-1}(x) \cdot E_{k+1}(x) \le E_k^2(x) \quad (1 \le k \le n-1) \tag{$*$}$$

pro všechna reálná $x_1, x_2, \dots, x_n$,

b) *Maclaurinovy nerovnosti*

$$\sqrt[n]{E_n(x)} \le \sqrt[n-1]{E_{n-1}(x)} \le \dots \le \sqrt{E_2(x)} \le E_1(x) \tag{$**$}$$

pro všechna kladná reálná $x_1, x_2, \dots, x_n$. (Krajními výrazy v $(**)$ jsou geometrický a aritmetický průměr čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$.)

Řešení.

a) Předně si uvědomme, jakým způsobem elementární symetrické polynomy proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ souvisí s koeficienty toho polynomu P stupně n, jehož kořeny jsou právě čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ a který má koeficient u x^n rovný 1. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_n) = \\ &= t^n - e_1(x)t^{n-1} + \dots + (-1)^k e_k(x) t^{n-k} + \dots + (-1)^n e_n(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E_k(x_1, x_2, \dots, x_n) t^{n-k}, \end{aligned}$$

[60] Převzato z [Ste-04], str. 178–184, řešení části b) upraveno.

kde pro přehlednost $e_k(x) = e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nyní si všimněme, jak vypadá derivace polynomu P:

$$P'(t) = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-k}{n}\,E_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^{n-k-1} =$$
$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\,E_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^{n-k-1}\,,$$

neboť

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{n} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n-1}{k}.$$

Leží-li čísla x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak polynom P má n reálných kořenů v intervalu $\langle a, b\rangle$ a z Rolleovy věty vyplývá, že derivace P' musí mít všech $n-1$ reálných kořenů rovněž v intervalu $\langle a, b\rangle$. Označíme-li tyto kořeny $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, pak zřejmě

$$P'(t) = n(t-y_1)(t-y_2)\,\ldots\,(t-y_{n-1}) =$$
$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\,E_k(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})t^{n-k-1}\,.$$

Pokud nyní porovnáme koeficienty z obou vyjádření derivace polynomu P, dostáváme důležité rovnosti

$$E_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E_k(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \quad (0 \le k \le n-1)\,, \tag{$\sharp$}$$

podle nichž můžeme jakýkoliv vztah mezi $n-1$ hodnotami $E_0(y), E_1(y), \ldots, E_{n-1}(y)$ platný pro libovolná $y \in [a, b]^{n-1}$ automaticky rozšířit na analogický vztah mezi $n-1$ hodnotami $E_0(x), E_1(x), \ldots, E_{n-1}(x)$ platný opět pro všechna $x \in [a, b]^n$. Newtonovy nerovnosti ověříme tak, že indukcí vzhledem k číslu $n \ge 2$ dokážeme hypotézu H_n tvořenou nerovnostmi

$$E_{j-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)E_{j+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le E_j^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ a každé $1 \le j \le n-1$. V případě $n = 2$ jde o jedinou nerovnost

$$E_0(x_1, x_2)E_2(x_1, x_2) \le E_1^2(x_1, x_2) \qquad \text{neboli} \qquad x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2,$$

což je zřejmá nerovnost, neboť $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$. Ve druhém indukčním kroku předpokládejme, že platí hypotéza H_{n-1} pro některé $n \ge 3$ a dokážeme hypotézu H_n. Tu tvoří $n-2$ nerovností tvaru

$$E_{k-1}(x)E_{k+1}(x) \le E_k^2(x) \quad (1 \le k \le n-2) \tag{$\sharp\sharp$}$$

a ještě nerovnost, která jako jediná obsahuje výraz $E_n(x)$:

$$E_{n-2}(x)E_n(x) \le E_{n-1}^2(x)\,. \tag{$\Diamond$}$$

Díky převodním vztahům (♯) lze všechny nerovnosti (♯♯) přepsat jako analogické nerovnosti

$$E_{k-1}(y)E_{k+1}(y) \le E_k^2(y) \quad (1 \le k \le n-2)\,,$$

které platí pro libovolné $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ díky hypotéze H_{n-1}. K ověření hypotézy H_n tedy zbývá dokázat nerovnost (♢). Ta je splněna triviálně, platí-li $x_1x_2\dots x_n = 0$, neboť pak $E_n(x)$, a tedy i levá strana (♢), se rovná nule. V opačném případě, kdy $x_1x_2\dots x_n \ne 0$, využijeme zřejmé rovnosti

$$E_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2\dots x_n \cdot E_{n-k}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$$

pro $k = n-2$, $k = n-1$ a $k = n$, díky kterým můžeme nerovnost (♢) vydělenou kladným číslem $(x_1x_2\dots x_n)^2$ zapsat jako

$$E_2\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) E_0\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \le E_1^2\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right).$$

To je ovšem nerovnost ze skupiny (♯♯) pro $k = 1$, kterou jsme již ověřili. Indukční důkaz Newtonových nerovností je tak hotov.

b) Předpokládejme, že reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná. Pak jsou kladné i všechny hodnoty $E_k(x)$, takže je možné definovat čísla

$$l_k = \ln E_k(x) \quad (0 \le k \le n)\,,$$

ve kterých můžeme již dokázané Newtonovy nerovnosti zapsat jako

$$l_{k-1} + l_{k+1} \le 2l_k \quad (1 \le k \le n-1)\,, \tag{$*$}$$

zatímco Maclaurinovy nerovnosti, které nyní dokážeme, jsou tvaru

$$\frac{l_{k+1}}{k+1} \le \frac{l_k}{k} \quad (1 \le k \le n-1)\,. \tag{$**$}$$

Užijeme indukci vzhledem k číslu k. Nerovnost $(**)$ pro hodnotu $k = 1$ plyne okamžitě z nerovnosti $(*)$ pro $k = 1$, která je tvaru $l_0 + l_2 \le 2l_1$, kam můžeme snadno dosadit $l_0 = \ln E_0(x) = \ln 1 = 0$, takže skutečně platí $\frac{1}{2}\,l_2 \le l_1$. Předpokládejme nyní, že pro některé k, $2 \le k < n-1$, platí $\frac{1}{k}\,l_k \le \frac{1}{k-1}\,l_{k-1}$. Pak podle $(*)$ odhadneme shora l_{k+1} pomocí l_k, l_{k-1} a dostaneme tak

$$\begin{aligned}\frac{l_{k+1}}{k+1} \le \frac{2l_k - l_{k-1}}{k+1} &= \frac{(k+1)+(k-1)}{k+1} \cdot \frac{l_k}{k} - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{l_{k-1}}{k-1} = \\ &= \frac{l_k}{k} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \left(\frac{l_k}{k} - \frac{l_{k-1}}{k-1}\right) \le \frac{l_k}{k}\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že nerovnost $\frac{1}{k+1}\,l_{k+1} \le \frac{1}{k}\,l_k$ platí a důkaz indukcí je hotov.

Poznámka. Uvedený postup při důkazu Maclaurinových nerovností má názornou geometrickou interpretaci, neboť Newtonovy nerovnosti $(*)$ vyjadřují, že po částech lineární funkce, jejíž graf je lomená čára s vrcholy $[k, l_k]$, je na intervalu $[0, n]$ *konkávní.* Dokazované nerovnosti $(**)$ jsou pak porovnáním směrnic dvou „tětiv“ takového grafu. Výkladu této problematiky se však budeme věnovat až v kapitole 2 naší práce.

Příklad 1.61. Nechť p, q, r jsou reálná čísla a kubická rovnice

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

má tři různé reálné kořeny. Dokažte, že platí $p^2 > 3q$ a zároveň[61]

$$|2p^3 - 9pq + 27r| < 2(p^2 - 3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Řešení. Nejprve označme

$$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r\,.$$

Jsou-li $x_1 < x_2 < x_3$ kořeny $P(x)$, musí mít rovnice $P'(x) = 0$ podle Rolleovy věty řešení na každém z intervalů (x_1, x_2) a (x_2, x_3), takže kvadratický trojčlen $P'(x)$ má dva kořeny a jeho diskriminant je proto kladný. Tedy

$$P'(x) = 3x^2 + 2px + q = 3\left(x + \frac{p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right)\left(x + \frac{p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right),$$

kde pro diskriminant polynomu $P'(x)$ platí $4p^2 - 12q > 0$, odkud zřejmě plyne první z dokazovaných nerovností $p^2 > 3q$. Pro znaménka hodnot $P(x)$ tak platí

$$P(x) < 0 \quad \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3) \qquad \text{a} \qquad P(x) > 0 \quad \text{pro } x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)\,.$$

Jak jsme uvedli, menší z kořenů rovnice $P'(x) = 0$ leží v intervalu (x_1, x_2), čili

$$P\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right) > 0\,.$$

Po dosazení postupně dostáváme

$$\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right)^3 + p\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right)^2 + q\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right) + r > 0$$

$$-\left(p^3 + 3p^2\sqrt{p^2 - 3q} + 3p(p^2 - 3q) + (p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q}\right) +$$
$$+ 3p(p^2 + 2p\sqrt{p^2 - 3q} + p^2 - 3q) - 9q(p + \sqrt{p^2 - 3q}) + 27r > 0\,,$$

[61] Vlastní formulace i odvození výsledku.

odkud po úpravě

$$2p^3 - 9pq + 27r + 2p^2\sqrt{p^2-3q} - 6q\sqrt{p^2-3q} > 0\,,$$

$$2p^3 - 9pq + 27r > -2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Podobně pro větší z kořenů rovnice $P'(x) = 0$ ležící v intervalu (x_2, x_3) platí

$$\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}\right)^3 + p\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}\right)^2 + q\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}\right) + r < 0\,,$$

$$-\,p^3 + 3p^2\sqrt{p^2-3q} - 3p(p^2-3q) + (p^2-3q)\sqrt{p^2-3q} +$$

$$+\,3p(p^2 - 2p\sqrt{p^2-3q} + p^2 - 3q) + 9q(-p + \sqrt{p^2-3q}) + 27r < 0\,,$$

odkud po úpravě

$$2p^3 - 9pq + 27r - 2p^2\sqrt{p^2-3q} + 6q\sqrt{p^2-3q} < 0\,,$$

$$2p^3 - 9pq + 27r < 2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Důkaz je tak hotov, neboť oba předchozí výsledky můžeme zapsat jednou nerovností ve tvaru

$$|2p^3 - 9pq + 27r| < 2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Poznámka. Doplňme ještě, jaké vztahy splňují koeficienty kubické rovnice

$$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s třemi reálnými kořeny, které však nejsou navzájem různé.

Nejprve ukažme, že pokud rovnice $P(x) = 0$ má jednoduchý kořen x_1 a dvojnásobný kořen x_2, platí

$$p^2 - 3q > 0 \qquad \text{a} \qquad 2p^3 - 9pq + 27r = \pm 2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,,$$

kde znaménko + odpovídá případu $x_1 < x_2$, znaménko − případu $x_1 > x_2$.

Polynom $P'(x)$ má dva různé kořeny (a tedy kladný diskriminant) proto, že jeden z nich je podle Rolleovy věty vnitřním bodem intervalu mezi čísly x_1, x_2 a druhý je samo číslo x_2, neboť to je násobný kořen $P(x)$. V případě $x_1 < x_2$ je tedy $P\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}\right) = 0$, odkud po dosazení a úpravách dostaneme rovnost

$$2p^3 - 9pq + 27r = 2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Podobně pro případ $x_1 > x_2$ musí platit $P\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-3q}}{3}\right) = 0$, odkud po dosazení a úpravách dostaneme rovnost

$$2p^3 - 9pq + 27r = -2(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Má-li rovnice $P(x) = 0$ trojnásobný kořen x_1, je číslo x_1 dvojnásobným kořenem trojčlenu $P'(x)$, takže jeho diskriminant je roven nule, čili $p^2 = 3q$. Protože $x_1 = \frac{-p}{3}$, platí $P\left(\frac{-p}{3}\right) = 0$, odkud dostáváme druhou rovnost

$$2p^3 - 9pq + 27r = 0\,.$$

Příklad 1.62. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 1$, platí[62]

$$a^3 + b^3 + c^3 + 8\sqrt{\frac{abc}{3}} \le 1\,.$$

Řešení. Před uvedením vlastního důkazu si pro zajímavost povšimněme, jak je dokazovaná nerovnost přesná: rovnost v ní nastane nejen v případě $a = b = c = \frac{1}{3}$, ale také v případě, kdy jedno z čísel a, b, c se rovná 1 a ostatní dvě 0.

Označíme $u = ab + bc + ca \ge 0$ a $v = abc \ge 0$. Z teorie symetrických mnohočlenů je známé vyjádření

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc\,,$$

takže v našem případě platí

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3u + 3v\,.$$

Nerovnost ze zadání můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$3\sqrt{3}v + 8\sqrt{v} - 3\sqrt{3}u \le 0\,.$$

Jde o kvadratickou nerovnici vzhledem k $\sqrt{v}$, která je zřejmě splněna, je-li $\sqrt{v} = 0$ (připomínáme, že $u \ge 0$). Stačí tedy dokázat, že hodnota $\sqrt{v}$ nepřevyšuje nezáporný kořen příslušné kvadratické rovnice, že tedy platí

$$\sqrt{v} \le \frac{-4 + \sqrt{16 + 27u}}{3\sqrt{3}}\,.$$

Po vynásobení číslem $3\sqrt{3}$ a ekvivalentním umocněním této nerovnosti mezi nezápornými výrazy dojdeme k nerovnosti

$$27v \le 32 + 27u - 8\sqrt{16 + 27u}\,. \tag{$*$}$$

K jejímu důkazu nejdříve metodou z příkladu 1.61 odvodíme pomocnou nerovnost

$$27v \le 9u + (2 - 6u)\sqrt{1 - 3u} - 2\,. \tag{$**$}$$

Protože mnohočlen

$$P(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - t^2 + ut - v$$

[62] [Kou-01], str. 154, řešení upraveno

má tři reálné (nikoliv nutně různé) kořeny, je jeho hodnota v menším z obou kořenů jeho derivace P' nezáporná. Platí $P'(t) = 3t^2 - 2t + u$, takže menší kořen P' je roven $\frac{1-\sqrt{1-3u}}{3}$, a proto $P\left(\frac{1-\sqrt{1-3u}}{3}\right) \geq 0$, což po výpočtu hodnoty P dává přímo pomocnou nerovnost $(**)$.

K ověření $(*)$ nyní stačí dokázat, že platí

$$9u + (2-6u)\sqrt{1-3u} - 2 \leq 32 + 27u - 8\sqrt{16+27u}$$

neboli

$$17 + 9u - (1-3u)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{16+27u} \geq 0$$

pro každé $u \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle$, neboť podle známé nerovnosti platí

$$u = ab + bc + ac \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Uvažme tedy na intervalu $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ funkci

$$h(x) = 17 + 9x - (1-3x)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{16+27x}\,.$$

Platí $h(0) = h(\frac{1}{3}) = 0$ a

$$h'(x) = 9\left(1 - \frac{6}{\sqrt{16+27x}} + \frac{\sqrt{1-3x}}{2}\right), \qquad h''(x) = 27\left(\frac{27}{(16+27x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4\sqrt{1-3x}}\right).$$

Funkce h'' je na $\langle 0, \frac{1}{3})$ zřejmě klesající a protože $h''(0) > 0$ a $h''(x) \to -\infty$ pro $x \to \frac{1}{3}$, tak funkce h' na $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ nejdříve roste a potom klesá. Dále platí, že $h'(0) = 0$ a $h'(\frac{1}{3}) < 0$, a proto funkce h na $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ nejprve roste a potom klesá. A protože je v krajních bodech intervalu $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ rovna nule, je na celém intervalu nezáporná. Tím je důkaz hotov.

1.6 Lineární odhady

Řadu zejména symetrických nerovností lze dokázat sečtením několika analogických nerovností téhož typu, které jsou snáze ověřitelné než výchozí nerovnost. Obtížnější je zpravidla tento druh dílčích nerovností, z nichž potřebný výsledek vyplyne, objevit. Takový hledačský přístup lze úspěšně uplatnit i při dokazování nerovností elementárními prostředky. Tak například nerovnost

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

pro libovolná $a, b > 0$ snadno zdůvodníme sečtením dvou nerovností

$$\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} \qquad \text{a} \qquad \frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}\,,$$

jejichž platnost je zřejmá. V naší práci se ovšem omezíme na ukázky takového přístupu spojeného s užitím matematické analýzy.

Nerovnosti uvedené v této podkapitole budeme vždy dokazovat tak, že pro vhodnou funkci f sečteme několik nerovností typu

$$f(x) \geq ax + b\,, \qquad \text{případně} \qquad f(x) \leq ax + b\,,$$

a to pro vybrané hodnoty x z některého intervalu I. Otázku volby koeficientů a, b v takovém *lineárním odhadu* funkce f na I budeme řešit na základě toho, že pro jistou „kritickou“ hodnotu x_0 uvnitř I bude situací úlohy vynucena rovnost $f(x_0) = ax_0 + b$. Pak lze očekávat, že hledaný lineární odhad bude tvaru

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,, \tag{1.1}$$

případně

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{1.2}$$

Poznamenejme, že lineární funkce na pravé straně (1.1) a (1.2) je pro danou funkci f vlastně její Taylorův mnohočlen stupně 1 se středem v bodě x_0. Budeme ho stručně nazývat *lineární aproximací* funkce f v bodě x_0.

Nerovnosti (1.1) a (1.2) mají názorný geometrický význam – graf funkce f na intervalu I leží nad, resp. pod svou tečnou s bodem dotyku $[x_0, f(x_0)]$. Jak je dobře známo, tuto podmínku splňují funkce, které jsou *konvexní*, resp. *konkávní*. Těmi se budeme zabývat až v další kapitole, kde však namísto sčítání nerovností (1.1), resp. (1.2) dáme přednost přímému uplatnění Jensenovy nerovnosti. Ta má např. pro konvexní funkce tvar

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

a lze ji získat sečtením nerovností (1.1) pro $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, když za bod x_0 zvolíme

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,.$$

Podobným způsobem můžeme odvodit i Jensenovu nerovnost pro obecnou *konvexní* kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

V této kapitole uvedeme příklady, ve kterých potřebné nerovnosti (1.1) a (1.2) budeme dokazovat bez užití konvexnosti a konkávnosti. Namísto toho budeme pro rozdíl obou stran dotyčné nerovnosti hledat vhodný algebraický rozklad založený na tom, že zmíněný rozdíl je funkce, pro níž je x_0 násobným nulovým bodem. Zdůrazněme, že nerovnost (1.1), resp. (1.2) pro *pevně zvolené* x_0 může platit v proměnné x i na intervalu I, na kterém funkce f není konvexní (viz poznámku za řešením příkladu 1.63).

Příklad 1.63. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle -1, 3\rangle$, jejichž součet je roven číslu 4, platí[63]

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \le 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 16\,. \tag{$*$}$$

Řešení. Všimneme si, že pro vyhovující čtveřici $a = b = c = d = 1$ nastane v obou částech $(*)$ rovnost. Zkusíme proto pro funkce

$$f(x) = x^3 - x^2\,, \qquad g(x) = x^3 - 5x^2 + 4$$

uplatnit v okolí bodu 1 lineární odhady

$$f(x) \ge f(1) + f'(1)(x-1) \qquad \text{a} \qquad g(x) \le g(1) + g'(1)(x-1)\,,$$

které po dosazení $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $g(1) = 0$, $g'(1) = -7$ přejdou do tvaru

$$f(x) \ge x - 1 \qquad \text{a} \qquad g(x) \le -7(x-1)\,. \tag{$**$}$$

Stačí nám ukázat, že obě nerovnosti $(**)$ platí pro každé $x \in \langle -1, 3\rangle$, neboť pak po jejich sečtení pro $x \in \{a, b, c, d\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) + f(d) &\ge a + b + c + d - 4 = 0\,,\\ g(a) + g(b) + g(c) + g(d) &\le -7(a + b + c + d - 4) = 0\,, \end{aligned}$$

což jsou dokazované nerovnosti $(*)$. K důkazu $(**)$ sestavíme rozklady

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) &= x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)\,,\\ g(x) + 7(x-1) &= x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3)\,. \end{aligned}$$

z nichž je platnost obou nerovností pro každé $x \in \langle -1, 3\rangle$ zřejmá. Tím je řešení celé úlohy ukončeno.

Poznámka. Kdybychom chtěli zaručit nerovnosti $(**)$ konvexností funkce f a konkávností funkce g v okolí bodu 1, podle jejich druhých derivací bychom dostali

$$\begin{aligned} f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow 6x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}\,,\\ g''(x) \le 0 \Leftrightarrow 6x - 10 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{3}\,, \end{aligned}$$

takže nerovnosti $(*)$ by tak byly dokázány pouze v případě $a, b, c, d \in \langle \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\rangle$.

[63] Vlastní výsledek, inspirováno [Thu-07], str. 104.

Příklad 1.64. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, c platí[64]

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\geq\frac{3}{5}\,.$$

Řešení. Protože je zadaná nerovnost v proměnných a, b, c homogenní, můžeme předpokládat, že $a+b+c=3$ a dokazovat nerovnost

$$\frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2}+\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}+\frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2}\geq\frac{3}{5}\,.$$

V ní pro $a=b=c=1$ nastane rovnost, pokusíme se proto pro funkci

$$f(x)=\frac{(3-2x)^2}{(3-x)^2+x^2}$$

uplatnit na intervalu $(0,3)$, kde díky podmínce $a+b+c=3$ všechna tři čísla a, b, c leží, lineární odhad $f(x)\geq f(1)+f'(1)(x-1)$. Derivováním a následným dosazením $x=1$ dostaneme

$$f(x)\geq\frac{1}{5}-\frac{18}{25}(x-1)\,,$$

neboť $f'(x)=\frac{18(2x-3)}{((3-x)^2+x^2)^2}$. Nyní stačí ukázat, že získaná nerovnost platí pro každé $x\in(0,3)$. Zřejmě však pro taková x platí

$$f(x)-\frac{1}{5}+\frac{18}{25}(x-1)=\frac{(3-2x)^2}{(3-x)^2+x^2}-\frac{23-18x}{25}=\frac{18}{25}\cdot\frac{(2x+1)(x-1)^2}{(3-x)^2+x^2}\geq 0\,,$$

čímž je důkaz u konce. Po sečtení všech tří lineárních odhadů pro $x\in\{a,b,c\}$ totiž díky předpokladu $a+b+c=3$ dostaneme

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq 3\cdot\frac{1}{5}-\frac{18}{25}(a+b+c-3)=\frac{3}{5}\,,$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 1.65. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c, d, jejichž součet je roven 4, platí[65]

$$\frac{a}{5+3a^2}+\frac{b}{5+3b^2}+\frac{c}{5+3c^2}+\frac{d}{5+3d^2}\leq\frac{1}{2}\,.$$

[64] [Mil-06], str. 27
[65] [Thu-07], str. 105

Řešení. Je patrné, že rovnost nastane pro vyhovující čtveřici $a = b = c = d = 1$, neboť $f(1) = \frac{1}{8}$ pro funkci
$$f(x) = \frac{x}{5 + 3x^2},$$
kterou s ohledem na zadání úlohy uvážíme na intervalu $\langle 0, 4\rangle$. Protože $f'(x) = \frac{5-3x^2}{(5+3x^2)^2}$, máme $f'(1) = \frac{1}{32}$, takže lineární odhad funkce f v okolí bodu $x = 1$ má tvar
$$\frac{x}{5 + 3x^2} \le \frac{1}{8} + \frac{1}{32}(x - 1) = \frac{x + 3}{32}.$$
Algebraickými úpravami s ohledem na $5 + 3x^2 > 0$ dostáváme
$$32x \le (x + 3)(3x^2 + 5) \qquad \text{neboli} \qquad 0 \le (x - 1)^2(x + 5),$$
což je pro všechna uvažovaná $x \in \langle 0, 4\rangle$ zřejmá nerovnost. Sečtením odvozeného lineárního odhadu pro všechna čísla $x = a, b, c, d$ tak dostaneme díky podmínce $a+b+c+d = 1$ dokazovanou nerovnost.

Příklad 1.66. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d platí[66]
$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \le 8.$$

Řešení. Zadaná nerovnost je v proměnných a, b, c homogenní, proto můžeme předpokládat, že platí $a + b + c = 1$ a dokazovat nerovnost
$$f(a) + f(b) + f(c) \le 8,$$
kde
$$f(x) = \frac{(x + 1)^2}{2x^2 + (1 - x)^2}.$$
Protože $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$, rovnost v dokazované nerovnosti nastane pro $a = b = c = \frac{1}{3}$, takže v okolí bodu $x = \frac{1}{3}$ zkusíme uplatnit lineární odhad
$$f(x) \le \frac{8}{3} + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right),$$
z něhož po dosazení $x = a, b, c$ a sečtení dostaneme potřebnou nerovnost. Protože
$$f'(x) = \frac{4(x + 1)(1 - 2x)}{(3x^2 - 2x + 1)^2},$$

[66] [Thu-07], str. 104

po dosazení $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$ a $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 4$ dostáváme odhad

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2 + (1-x)^2} \leq \frac{4}{3} + 4x\,,$$

který zbývá dokázat pro každé $x \in (0,1)$. Ekvivalentními úpravami ho však lze převést do tvaru

$$\frac{-(4x+1)(3x-1)^2}{3(2x^2 + (1-x)^2)} \leq 0\,,$$

odkud je jeho platnost pro zmíněná x zřejmá.

Příklad 1.67. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[67]

$$\sqrt{1 + \frac{16a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{16b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{16c}{a+b}} \geq 9\,.$$

Řešení. S ohledem na homogenitu předpokládejme, že $a + b + c = 1$. Tehdy získá dokazovaná nerovnost tvar

$$\sqrt{1 + \frac{16a}{1-a}} + \sqrt{1 + \frac{16b}{1-b}} + \sqrt{1 + \frac{16c}{1-c}} \geq 9\,.$$

a nastane v ní rovnost pro vyhovující trojici $a = b = c = \frac{1}{3}$. Proto na intervalu $(0,1)$, kam všechna tři čísla a, b, c patří, k funkci

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{16x}{1-x}}$$

s hodnotou $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ uplatníme lineární odhad v okolí kritického bodu $x = \frac{1}{3}$ ve tvaru

$$f(x) \geq 3 + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\,.$$

Protože

$$f'(x) = \frac{8}{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{15x+1}}\,, \quad \text{a tedy} \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = 6\,,$$

dostáváme po dosazení hodnoty $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ odhad, o jehož platnosti pro každé $x \in (0,1)$ se přesvědčíme ekvivalentními úpravami:

$$\sqrt{1 + \frac{16x}{1-x}} \geq 3 + 6\left(x - \frac{1}{3}\right) \ (>1)\,,$$
$$1 + 15x \geq (1-x)(1+6x)^2\,,$$
$$4x(3x-1)^2 \geq 0\,.$$

Tím je uvedený odhad pro každé $x \in (0,1)$ dokázán. Po dosazení $x = a, b, c$ a sečtení dostaneme nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

[67] [Thu-07], str. 171

Příklad 1.68. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[68]

$$\frac{2a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}+\frac{2b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{2c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}\geq\frac{2}{3}(a+b+c)\,.$$

Řešení. Na intervalu $(0,\infty)$ uvažme funkci $f(x)=\frac{2x^2}{\sqrt{4x^2+x+4}}$ a sestavme její lineární odhad v okolí kritického bodu $x=1$. Protože

$$f'(x)=\frac{8x^3+3x^2+16x}{(4x^2+x+4)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad f(1)=\frac{2}{3}\,,\quad f'(1)=1\,,$$

jedná se o nerovnost

$$\frac{2x^2}{\sqrt{4x^2+x+4}}\geq\frac{2}{3}+\left(x-\frac{1}{3}\right)=x-\frac{1}{3}\,.$$

Její platnost je zřejmá pro všechna $x\leq\frac{1}{3}$. Je-li $x\geq\frac{1}{3}$, pak po vynásobení třemi, umocnění nerovnosti a převedení členů na levou stranu dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{36x^4}{4x^2+x+4}-(3x-1)^2=\frac{(x-1)^2(15x-4)}{4x^2+x+4}\geq 0\,,$$

jejíž platnost je zřejmá, neboť $x\geq\frac{1}{3}>\frac{4}{15}$.

Položíme-li v dokázaném odhadu $x=\frac{u}{v}$, kde u, v jsou libovolná kladná čísla, dostaneme

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{2\left(\frac{u}{v}\right)^2}{\sqrt{4\left(\frac{u}{v}\right)^2+\frac{u}{v}+4}}=\frac{2u^2}{v\sqrt{4u^2+uv+4v^2}}\geq\frac{u}{v}-\frac{1}{3}\,,$$

odkud po vynásobení číslem v dostaneme

$$\frac{2u^2}{\sqrt{4u^2+uv+4v^2}}\geq u-\frac{v}{3}\,.$$

Sečteme-li tyto odhady pro tři dvojice (u,v) rovné (a,b), (b,c) a (c,a), dostaneme nerovnost ze zadání příkladu, neboť

$$\left(a-\frac{b}{3}\right)+\left(b-\frac{c}{3}\right)+\left(c-\frac{a}{3}\right)=\frac{2}{3}\,(a+b+c)\,.$$

[68] [Thu-07], str. 168

Příklad 1.69. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x, y, z \geq -1$, jejichž součet je roven 1, platí[69]

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}\,.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že čísla x, y, z leží v intervalu $\langle -\frac{3}{4}, \infty)$. Snadno ověříme, že rovnost v dokazované nerovnosti nastane pro trojici $x = y = z = \frac{1}{3}$. Dále na uvažovaném intervalu vezměme funkci $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$. Protože $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, máme $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{18}{25}$ a můžeme tedy horní lineární odhad funkce f v okolí bodu $t = \frac{1}{3}$ zapsat ve tvaru

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{3}{10} + \frac{18}{25}\left(t - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{50} + \frac{18}{25}\,t\,.$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$-\frac{(4t+3)(3t-1)^2}{50(t^2+1)} \leq 0\,,$$

což je pro všechna uvažovaná t zřejmá nerovnost. Sečtením odvozeného lineárního odhadu pro všechna čísla $t = x, y, z$ tak dostaneme díky podmínce $x + z + z = 1$ dokazovanou nerovnost.

Předpokládejme nyní, že jedno z čísel, např. x, leží v intervalu $\langle -1, -\frac{3}{4}\rangle$. Pak z nerovností $1 + \frac{3}{4} \leq 1 - x \leq 2$ a rovnosti $y + z = 1 - x$, v jejichž důsledku $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} \leq 1$, pro součet druhého a třetího zlomku z levé strany nerovnosti platí

$$\frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{y + yz^2 + z + zy^2}{1 + z^2 + y^2 + y^2z^2} = \frac{(1-x) + yz(1-x)}{(1-x)^2 + (1-yz)^2} \leq \frac{2 + 1\cdot 2}{(1+\frac{3}{4})^2} = \frac{64}{49}\,.$$

A protože funkce $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$ je na intervalu $\langle -1, -\frac{3}{4}\rangle$ rostoucí, neboť $h'(t) = \frac{(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}$, máme pro první zlomek odhad

$$\frac{x}{1+x^2} = h(x) \leq h\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{12}{25}\,.$$

Pro součet všech tří zlomků tedy platí

$$\left(\frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}\right) + \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{64}{49} - \frac{12}{25} < \frac{9}{10}$$

a tím je celý důkaz hotov.

[69][Thu-07], str. 298

Příklad 1.70. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$, jejichž součet je roven jedné, platí[70]

$$\frac{1}{\sqrt{na_1^2 - a_1 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{na_2^2 - a_2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{na_n^2 - a_n + 1}} \leq n - 1 + \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}\,.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{nx^2-x+1}} - \sqrt{\frac{x}{n}}$ na intervalu $(0,1)$, v němž všechna uvažovaná čísla a_i leží. Protože pro každé $x \in (0,1)$ platí $nx^2 - x + 1 > 1 - x > 0$, je funkce f na intervalu $(0,1)$ skutečně definována a její lineární odhad shora v okolí bodu $x = \frac{1}{n}$ má tvar

$$\frac{1}{\sqrt{nx^2 - x + 1}} - \sqrt{\frac{x}{n}} \leq 1 - x\,,$$

neboť

$$f'(x) = -\frac{2nx - 1}{2(nx^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{x}}\,, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad f'\left(\frac{1}{n}\right) = -1\,,$$

takže

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f'\left(\frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(x - \frac{1}{n}\right) = 1 - x\,.$$

Sestavený odhad nyní dokážeme pro každé $x \in (0,1)$ algebraickými úpravami:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{nx^2 - x + 1}} \geq x - \sqrt{\frac{x}{n}}\,,$$

$$\frac{\sqrt{nx^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{nx^2 - x + 1}} \geq \frac{x\sqrt{n} - \sqrt{x}}{\sqrt{n}}\,,$$

$$\frac{x(nx - 1)}{\sqrt{nx^2 - x + 1}(\sqrt{nx^2 - x + 1} + 1)} \geq \frac{x(nx - 1)}{\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + 1)}\,.$$

Odtud je již patrné, že odhad platí jak pro všechna $x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, kdy jde o důsledek nerovnosti $\sqrt{nx^2 - x + 1} < \sqrt{nx}$ (o jejíž platnosti se přesvědčíme úpravou na tvar $(1 - x)(nx - 1) > 0$), tak pro všechna $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, kdy jde o důsledek opačné nerovnosti $\sqrt{nx^2 - x + 1} > \sqrt{nx}$. Důkaz odhadu pro každé $x \in (0,1)$ je tak hotov. Sečtením pro hodnoty $x = a_i$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (1 - a_i) = n - \sum_{i=1}^{n} a_i = n - 1\,,$$

což je po zřejmé úpravě nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

[70] [Thu-07], str. 172

Příklad 1.71. Pro nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označme

$$p = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

a předpokládejme, že je splněna jedna ze dvou podmínek

(i) $p \geq 1$,

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p < 1$ a $\min\limits_{1\leq i\leq n}(a_i) \geq p - \frac{3p^2-1}{2p}$.

Dokažte nerovnost[71]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^2} \geq \frac{n}{1+p^2}\,.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $\langle 0, \infty)$ a pokusme se ji zdola odhadnout její lineární aproximací v bodě $x_0 = p$:

$$\frac{1}{1+x^2} \geq f(p) + f'(p)(x - x_0) = \frac{1}{1+p^2} - \frac{2p(x-p)}{(p^2+1)^2}\,. \tag{$*$}$$

Abychom zjistili, pro která nezáporná x takový odhad platí, sestavíme rozdíl levé a pravé strany a pak ho rozložíme:

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+p^2} + \frac{2p(x-p)}{(p^2+1)^2} = \frac{(x-p)^2(2px+p^2-1)}{(p^2+1)^2(1+x^2)}\,.$$

Vidíme, že vyhovují ta $x \in \langle 0, \infty)$, pro která

$$0 \leq 2px + p^2 - 1 \qquad \text{neboli} \qquad x \geq \frac{1-p^2}{2p} = p - \frac{3p^2-1}{2p}\,.$$

Za podmínky (i) ze zadání úlohy je poslední výraz nekladný, takže nerovnost splňuje každé $x \geq 0$. Za podmínky (ii) je získaný výraz sice kladný, avšak menší než p (průměr čísel a_i), takže podmínka (ii) je splnitelná a zaručuje platnost odhadu $(*)$ pro všechna čísla $x = a_i$, $1 \leq i \leq n$. Sečteme-li pro ně zapsané odhady $(*)$, dostaneme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^2} \geq \frac{n}{1+p^2} - \frac{2p\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - np\right)}{p^2+1} = \frac{n}{1+p^2}\,,$$

kterou jsme měli dokázat.

[71]Vlastní výsledek, inspirováno [Thu-07], str. 170.

Poznámka. Kdybychom chtěli nerovnost ($*$) pro čísla $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ zaručit konvexností funkce f, z vyjádření

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

bychom dostali, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ musí splňovat podmínku

$$\min_{1\le i\le n}(a_i) \ge \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \tag{$**$}$$

z níž sice plyne $p \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$, jak je v obou podmínkách (i) a (ii), avšak pro taková kladná p platí

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ge p - \frac{3p^2-1}{2p}\,,$$

jak se lze snadno přesvědčit úpravou do tvaru $(p\sqrt{3}-1)(p+\sqrt{3}) \ge 0$. Proto jsou obě podmínky (i) a (ii) ze zadání úlohy slabší než podmínka ($**$). Na druhou stranu, v knize [Thu-07] je v příkladu 5.31 indukcí podle n dokázáno, že podmínku (i) lze oslabit na $p \ge \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

Příklad 1.72. Nechť nejvýše jedno z nezáporných reálných čísel a, b, c je rovno nule. Dokažte nerovnost[72]

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1+\frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1+\frac{48c}{a+b}} \ge 15\,.$$

Ukažte rovněž, že rovnost pro taková a, b, c nastane, právě když jde buď o tři stejná čísla, nebo o dvě stejná čísla a nulu.

Řešení. Nerovnost je v proměnných a, b, c homogenní, takže můžeme předpokládat, že platí

$$a+b+c = 1\,, \quad \text{kde } a, b, c \in \langle 0, 1)\,. \tag{$*$}$$

Pak např. první sčítanec lze upravit do tvaru

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}} = \sqrt{1+\frac{48a}{1-a}} = \sqrt{\frac{47a+1}{1-a}}\,,$$

takže dokazovanou nerovnost lze zapsat jako

$$f(a) + f(b) + f(c) \ge 15\,, \tag{$**$}$$

kde f je funkce na intervalu $\langle 0, 1)$ definovaná předpisem $f(x) = \sqrt{\frac{47x+1}{1-x}}$. Všimněme si hodnot

$$f(0) = 1\,, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \quad \text{a} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 7\,,$$

[72] [Kur-07], str. 24, vlastní řešení

které znamenají, že $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ jsou příklady trojic splňujících $(*)$, pro něž ve vztahu $(**)$ nastane rovnost. Budeme proto uvažovat o lineárních odhadech funkce f v okolích bodů $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$, tj. o nerovnostech

$$f(x) \geq 5 + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \quad \text{a} \quad f(x) \geq 7 + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right). \tag{$\sharp$}$$

Z vyjádření derivace

$$f'(x) = \frac{24}{\sqrt{(1-x)^3(47x+1)}}$$

určíme hodnoty $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{54}{5}$ a $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{96}{7}$. Po dosazení do $(\sharp)$ a úpravě dostaneme odhady

$$\sqrt{\frac{47x+1}{1-x}} \geq \frac{54x+7}{5} \quad \text{a} \quad \sqrt{\frac{47x+1}{1-x}} \geq \frac{96x+1}{7}. \tag{$\sharp\sharp$}$$

Zjistíme nyní, pro která $x \in \langle 0, 1)$ každý z těchto odhadů platí. Využijeme k tomu algebraické rozklady

$$\frac{47x+1}{1-x} - \left(\frac{54x+7}{5}\right)^2 = \frac{12(3x-1)^2(27x-2)}{25(1-x)},$$

$$\frac{47x+1}{1-x} - \left(\frac{96x+1}{7}\right)^2 = \frac{48(2x-1)^2(48x+1)}{49(1-x)}.$$

Vidíme, že první odhad v $(\sharp\sharp)$ platí pro každé $x \in \langle \frac{2}{27}, 1)$ s rovností pro $x = \frac{2}{27}$ a $x = \frac{1}{3}$, zatímco druhý odhad v $(\sharp\sharp)$ platí pro každé $x \in \langle 0, 1)$ s rovností pouze pro $x = \frac{1}{2}$. S ohledem na tato zjištění rozlišíme při důkazu $(**)$ dva případy:

$$\text{(i)}\ \min\{a, b, c\} \geq \frac{2}{27}, \qquad \text{(ii)}\ \min\{a, b, c\} < \frac{2}{27}.$$

Před jejich rozborem ještě odvodíme jeden lineární odhad, který budeme potřebovat v případě (ii). Je tvaru

$$\sqrt{\frac{47x+1}{1-x}} \geq \frac{81x+5}{5} \tag{$\Diamond$}$$

a platí pro každé $x \in \langle 0, \frac{2}{27}\rangle$. Protože lineární funkci z pravé strany jsme sestavili tak, aby se rovnala levé straně pro krajní hodnoty $x = 0$ a $x = \frac{2}{27}$, stačilo by k důkazu $(\Diamond)$ ověřit, že levá strana $(\Diamond)$ je na intervalu $\langle 0, \frac{2}{27}\rangle$ konkávní. Místo toho dáme opět přednost přímému algebraickému důkazu plynoucímu z rozkladu

$$\frac{47x+1}{1-x} - \left(\frac{81x+5}{5}\right)^2 = \frac{3x(2-27x)(65-81x)}{25(1-x)},$$

neboť poslední zlomek je zřejmě kladný pro každé $x \in (0, \frac{2}{27})$.

(i) Protože čísla a, b, c leží v intervalu $\langle \frac{2}{27}, 1)$, platí levý odhad z ($\sharp\sharp$) jak pro $x = a$, tak pro $x = b$ i $x = c$. Sečtením těchto tří nerovností s přihlédnutím k podmínce ($*$) dostaneme

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{54(a+b+c)+21}{5} = \frac{75}{5} = 15\,,$$

což dokazuje nerovnost ($**$). V ní přitom nastane rovnost, právě když $a, b, c \in \{\frac{2}{27}, \frac{1}{3}\}$, což ovšem za podmínky ($*$) znamená $a = b = c = \frac{1}{3}$.

(ii) S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že např. $a < \frac{2}{27}$. Nyní využijeme pravý odhad z ($\sharp\sharp$) pro $x = b$ a $x = c$ (připomeňme, že platí pro každé $x \in \langle 0, 1)$), spolu s odhadem ($\Diamond$) pro $x = a$. Sečtením těchto tří nerovností s přihlédnutím k podmínce ($*$) dostaneme

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{81a+5}{5} + \frac{96(b+c)+2}{7} = 15 + \frac{87}{35}\,a \geq 15\,.$$

Nerovnost ($**$) je tak dokázána; rovnost v ní nastane, právě když $a = 0$ a zároveň $b = c = \frac{1}{2}$ (až na možné permutace).

Tím je řešení celé úlohy hotovo včetně diskuse o rovnosti, jejíž přenos z normovaného případu ($*$) na obecnou situaci je triviální.

Příklad 1.73. Hypotézu, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí[73]

$$\frac{a_1^n}{p(a_1)} + \frac{a_2^n}{p(a_2)} + \ldots + \frac{a_n^n}{p(a_n)} \geq \frac{n}{2^n}\,,$$

kde $p(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$, dokažte pro $n = 2, 3, 4, 5$ a 6.

Řešení. Označme $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a odhadněme zdola např. první sčítanec zkoumaného součtu, a to užitím AG-nerovnosti pro $n - 1$ čísel $a_1 + a_i$, kde $i = 2, 3, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^n}{p(a_1)} = \frac{a_1^{n-1}}{2} \cdot \frac{1}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)} \geq \\ \geq \frac{a_1^{n-1}}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{(n-1)a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}\right)^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{2} \cdot \left(\frac{a_1}{(n-2)a_1 + s}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Podobně odhadneme i další sčítance a získané nerovnosti sečteme. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^n}{p(a_i)} \geq \frac{(n-1)^{n-1}}{2} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\,, \qquad \text{kde} \qquad f(x) = \left(\frac{x}{(n-2)x + s}\right)^{n-1}.$$

[73] Vlastní výsledek, inspirováno [Thu-07], str. 172.

Pokud bychom ukázali, že funkce f pro každé $x \in (0, s)$ splňuje odhad

$$f(x) \geq f\left(\frac{s}{n}\right) + f'\left(\frac{s}{n}\right)\left(x - \frac{s}{n}\right),$$

dostali bychom odtud s ohledem na definici čísla s nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq nf\left(\frac{s}{n}\right) = n\left(\frac{s}{(n-2)s + ns}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^{n-1} \cdot (n-1)^{n-1}}$$

a důkaz nerovnosti ze zadání by tak byl hotov. K takovému postupu však nelze využít Jensenovu nerovnost, protože funkce f je konvexní pouze na intervalu $\langle 0, \frac{s}{2}\rangle$, jak plyne z vyjádření derivací

$$f'(x) = \frac{s(n-1)}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{(n-2)x + s}\right)^n = \frac{s(n-1)x^{n-2}}{((n-2)x + s)^n},$$

$$f''(x) = \frac{s(n-2)(n-1)(s-2x)x^{n-3}}{((n-2)x + s)^{n+1}}.$$

Ověříme proto hypotézu, že pro každé $x \in (0, s)$ platí

$$D(x, n) = f(x) - f\left(\frac{s}{n}\right) - f'\left(\frac{s}{n}\right)\left(x - \frac{s}{n}\right) =$$

$$= \frac{2^n(n-1)^n s x^{n-1} - (n-1)\left(n^2x - (n-2)s\right)((n-2)x + s)^{n-1}}{2^n(n-1)^n s\,((n-2)x + s)^{n-1}} \geq 0$$

přímo algebraicky pro hodnoty $n = 2, 3, 4, 5$ a 6. Po dosazení a úpravách dostáváme

$$D(x, 2) = 0,$$

$$D(x, 3) = \frac{(3x - s)^2(s - x)}{32s(x + s)^2},$$

$$D(x, 4) = \frac{(4x - s)^2(s^2 + 6sx - 4x^2)}{216s(2x + s)^3},$$

$$D(x, 5) = \frac{(5x - s)^2(3s^3 + 41s^2x + 197sx^2 - 81x^3)}{8192s(3x + s)^4},$$

$$D(x, 6) = \frac{(6x - s)^2(s^4 + 23s^3x + 220s^2x^2 + 1012sx^3 - 256x^4)}{50000s(4x + s)^5}.$$

Protože všechny polynomy stupně $n - 2$ v čitatelích jednotlivých zlomků jsou nezáporné pro všechna $x \in \langle 0, s\rangle$, jak plyne z porovnání koeficientů u nejvyšších dvou mocnin x a z nezápornosti ostatních koeficientů, je důkaz hypotézy pro tato n hotov.

1.7 Nelineární odhady

Zatímco v předchozí podkapitole jsme zařazené příklady řešili technikou lineárních odhadů, v této závěrečné části kapitoly 1 budeme k důkazům nerovností využívat pomocné funkce, které nejsou lineární. K vhodné funkci f určené dokazovanou nerovností zvolíme ještě některou nelineární funkci g tak, aby na potřebném intervalu I platila nerovnost

$$f(x) \geq g(x)\,, \quad \text{případně} \quad f(x) \leq g(x)\,,$$

a aby po sečtení několika těchto nerovností pro vybrané hodnoty $x \in I$ vyšla nerovnost, ze které ta dokazovaná již snadno vyplyne. Volba funkce g bude většinou ovlivněna tím, že proměnné z dokazované nerovnosti – označme je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – budou podle zadání příkladu splňovat jistou vazební podmínku, jako jsou kupříkladu rovnosti

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \qquad \text{či} \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = 1\,.$$

V těchto případech budeme volit funkci g ve tvaru

$$g(x) = px^2 + q\,, \qquad \text{resp.} \qquad g(x) = p \ln|x| + q\,,$$

neboť po sečtení odhadů pro $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ bude součet

$$g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)$$

ve výsledné nerovnosti záviset pouze na koeficientech p a q, nikoliv na konkrétních hodnotách $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Stejně jako v uvedených dvou situacích, i jindy budeme patřičnou funkci g hledat ve tvaru závislém na dvou parametrech. Zda se najdou jejich hodnoty, aby příslušný odhad $f(x) \geq g(x)$ či $f(x) \leq g(x)$ platil všude na potřebném intervalu I, je zásadní otázka, která rozhoduje o zdaru či nezdaru celého postupu. Popišme obecně, jak procedura určení zmíněných parametrů nelineární funkce g probíhá.

Nerovnost ze zadání příkladu je obvykle v zastoupených proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ symetrická a je patrné, že v ní nastane rovnost pro určitou přípustnou n-tici $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. V důsledku toho lze očekávat, že v bodě x_0 rovném této společné hodnotě proměnných x_i nastane rovnost i ve hledaném odhadu $f(x) \geq g(x)$ či $f(x) \leq g(x)$, kterým chceme zadanou nerovnost dokázat. Rovnost $f(x_0) = g(x_0)$ ovšem znamená, že funkce $f - g$ musí mít v kritickém bodě x_0 lokální extrém, aby dotyčný odhad platil všude v intervalu I přípustných hodnot proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (bod x_0 bývá vnitřním bodem I). Protože daná funkce f i hledaná funkce g budou diferencovatelné, dostáváme úvahou o kritickém bodě x_0 dvojici podmínek

$$f(x_0) = g(x_0) \qquad \text{a} \qquad f'(x_0) = g'(x_0)\,,$$

kterou lze využít k výpočtu obou neznámých parametrů funkce g.[74] Pak ovšem přijde na řadu otázka, v jakém okolí bodu x_0 kýžený odhad $f(x) \geq g(x)$ či $f(x) \leq g(x)$ skutečně platí. Budeme ji

[74] V řešeních příkladů budeme funkci g rovnou zapisovat ve tvaru, kterým zabezpečíme splnění podmínky $f(x_0) = g(x_0)$. Takový zápis bude obsahovat pouze jeden parametr, jehož hodnotu posléze určíme z podmínky $f'(x_0) = g'(x_0)$.

vždy řešit buď vhodným algebraickým rozkladem funkce $f-g$ s činitelem $x-x_0$ nebo vyšetřením znamének hodnot její derivace (zejména v případě logaritmické funkce g). Tímto způsobem nalezneme interval I_0 s vnitřním bodem x_0, na kterém sestavený nelineární odhad zaručeně platí. Je-li interval I_0 užší než interval I ze zadání příkladu, je nutné pro případ, kdy některá z hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ v intervalu I_0 neleží, hledat v další části řešení odlišné zdůvodnění zadané nerovnosti.

Příklad 1.74. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d, která vyhovují rovnici $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, platí[75]

a) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}+\dfrac{1}{1-d} \geq 8\,,$

b) $\dfrac{a^4}{1-a}+\dfrac{b^4}{1-b}+\dfrac{c^4}{1-c}+\dfrac{d^4}{1-d} \geq \dfrac{1}{2}\,.$

Řešení.

a) Všimněme si, že pro vyhovující čtveřici $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ nastává v dokazované nerovnosti rovnost. Zkusíme tedy najít pro funkci $f(x)=\frac{1}{1-x}$ s hodnotou $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ konstantu $k \in \mathbb{R}$ tak, aby pro každé $x \in (0,1)$ platilo

$$f(x) \geq 2+k\left(x^2-\frac{1}{4}\right).$$

Pak totiž sečtením takových nerovností pro $x \in \{a,b,c,d\}$ dostaneme požadovaný výsledek. Možnou konstantu k určíme z nutné podmínky, aby pro $x=\frac{1}{2}$ nastala rovnost nejen v hledaném odhadu, ale také mezi derivacemi obou stran, čili

$$\frac{1}{(1-x)^2}=2kx\,.$$

Po dosazení kritické hodnoty $x=\frac{1}{2}$ vyjde $k=4$, takže hledaný odhad dostáváme ve tvaru

$$\frac{1}{1-x} \geq 2+4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=4x^2+1\,.$$

Jeho platnost snadno ověříme algebraickým rozkladem, neboť

$$\frac{1}{1-x}-4x^2-1=\frac{x(2x-1)^2}{1-x} \geq 0$$

pro každé $x \in (0,1)$, a důkaz je tak hotov.

[75] [Kur-05], str. 17–18, řešení doplněno

b) Rovnost v dokazované nerovnosti nastane v případě $a = b = c = d = \frac{1}{2}$. Pro funkci $f(x) = \frac{x^4}{1-x}$ s hodnotou $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ budeme tedy hledat konstantu $k \in \mathbb{R}$ tak, aby pro každé $x \in (0,1)$ platilo

$$f(x) \geq \frac{1}{8} + k\left(x^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Požadujeme, aby se pro $x = \frac{1}{2}$ rovnaly derivace obou stran, tedy

$$\frac{x^3(4-3x)}{(1-x)^2} = 2kx\,.$$

Po dosazení $x = \frac{1}{2}$ vyjde $k = \frac{5}{4}$, takže dostáváme kvadratický odhad

$$\frac{x^4}{1-x} \geq \frac{1}{8} + \frac{5}{4}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{20x^2-3}{16}\,.$$

Ten zdůvodníme algebraickým rozkladem. Zřejmě totiž

$$\frac{x^4}{1-x} - \frac{20x^2-3}{16} = \frac{(2x-1)^2(4x^2+9x+3)}{16(1-x)} \geq 0$$

pro každé $x \in (0,1)$. Sečtením odhadů pro $x \in \{a,b,c,d\}$ pak dostaneme dokazovanou nerovnost.

Příklad 1.75. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d, pro něž $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$, platí[76]

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 8(a+b+c+d) \geq 24\,.$$

Řešení. Pro vyhovující čtveřici $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ nastane v dokazované nerovnosti rovnost. Proto pro funkci $f(x) = \frac{1}{x} + 8x$ s hodnotou $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ zkusíme uplatnit dolní odhad nelineární funkcí, jež s ohledem na podmínku ze zadání bude mít tvar

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(x^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Z rovností derivací obou stran v bodě $x = \frac{1}{2}$ dostáváme hodnotu konstanty $p = 4$, a tedy dolní odhad funkce f bude mít tvar

$$\frac{1}{x} + 8x \geq 6 + 4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 4x^2 + 5\,.$$

Takovou nerovnost však můžeme pro kladná x algebraicky upravit do tvaru

$$(1-x)(1-2x)^2 \geq 0\,,$$

odkud je zřejmá její platnost na intervalu $(0,1)$, ve kterém díky podmínce $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ musí všechna čtyři kladná čísla a, b, c, d ležet. Sečteme-li jim odpovídající dokázané odhady, dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

[76] [Thu-07], str. 170

Příklad 1.76. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c taková, že $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, platí[77]

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Řešení. Všimněme si, že pro vyhovující trojici $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nastane v dokazované nerovnosti rovnost. Pokusme se proto funkci $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ na intervalu $(0,1)$, do něhož čísla a, b, c patří, zdola nelineárně odhadnout, a to s rovností v kritickém bodě $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, v němž $f(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Potřebujeme tedy, aby pro některé $k \in \mathbb{R}$ a každé $x \in (0,1)$ platilo

$$f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + k\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Z rovnosti prvních derivací obou stran nerovnosti

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 2kx$$

dostáváme po dosazení $x = x_0$ hodnotu $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, takže hledaný odhad má tvar

$$\frac{x}{1-x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,x^2\,.$$

Ten již dokážeme algebraicky, neboť

$$\frac{x}{1-x^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,x^2 = \frac{\sqrt{3}x(3x+2\sqrt{3})(3x-\sqrt{3})^2}{18(1-x^2)} \geq 0$$

pro každé $x \in (0,1)$. Tím je důkaz hotov, neboť po sečtení všech tří odhadů pro $x \in \{a, b, c\}$ dostáváme požadovanou nerovnost.

Příklad 1.77. Dokažte, že pro nezáporná reálná čísla a, b, c, d, pro něž $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, platí[78]

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}\,.$$

[77] [Kur-05], str. 20, vlastní řešení
[78] [Thu-07], str. 174

Řešení. Z nerovnosti $a^2 + b^2 \leq 1$ plyne $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{1}{2}$. Podobně dostaneme i další omezení $bc, cd, da \leq \frac{1}{2}$. Protože rovnost v dokazované nerovnosti nastane pro vyhovující čtveřici čísel $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, kdy všechny součiny ab, bc, cd, da jsou $\frac{1}{4}$, zkusíme na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, kde tyto součiny leží, využít kvadratický odhad funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ s hodnotou $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$ v kritickém bodě $\frac{1}{4}$, a to ve tvaru

$$f(x) \leq \frac{4}{3} + p\left(x^2 - \frac{1}{16}\right),$$

který pro každé $p \in \mathbb{R}$ zaručuje rovnost pro $x = \frac{1}{4}$. Konstantu p určíme z podmínky, aby se v kritickém bodě rovnaly i první derivace obou stran. Protože $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, z rovnosti $f'(x) = 2px$ pro $x = \frac{1}{4}$ snadno zjistíme, že $p = \frac{32}{9}$. Sestrojený horní odhad funkce f je tedy tvaru

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{4}{3} + \frac{32}{9}\left(x^2 - \frac{1}{16}\right)$$

a jeho platnost pro každé $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ ověříme postupnými ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} 9 &\leq 12(1-x) + 2(1-x)(16x^2 - 1), \\ 12x - 3 &\leq 2(1-x)(4x-1)(4x+1), \\ (4x-1)(8x^2 - 6x + 1) &\leq 0, \\ (4x-1)^2(2x-1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Sečteme-li nyní dokázaný odhad pro čtyři hodnoty $x = ab, bc, cd, da$, dostaneme

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3} + \frac{32}{9}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 - \frac{1}{4}\right),$$

takže s celým důkazem budeme hotovi, ukážeme-li, že platí

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 \leq \frac{1}{4} \qquad \text{neboli} \qquad (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \leq \frac{1}{4}.$$

Poslední nerovnost je však zřejmým důsledkem podmínky $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ze zadání úlohy, neboť jde o nerovnost $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$ pro $u = a^2 + c^2$, $v = b^2 + d^2$.

Příklad 1.78. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[79]

$$a \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a+b}} + b \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{b+c}} + c \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{c+a}} \geq \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}.$$

[79] [Thu-07], str. 169, zadání i řešení podstatně upraveno

Řešení. Všimněme si, že dokazovaná nerovnost je součtem tří analogických nerovností s libovolným parametrem p, z nichž první má tvar

$$a \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a+b}} \geq (p+1)\sqrt[3]{a^2} - p\sqrt[3]{b^2}\,.$$

Platnost takové nerovnosti zdůvodníme, když po substituci $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, dosazení $a = bx^3$ a vydělení číslem $\sqrt[3]{b^2}$ dokážeme vzniklou ekvivalentní nerovnost

$$x^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^3+1}} \geq (p+1)x^2 - p \tag{$*$}$$

pro každé $x > 0$. Kritický bod tohoto nelineárního odhadu je $x = 1$, proto číslo p určíme tak, aby se v něm rovnaly i derivace obou stran $(*)$. Pro funkci

$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^3+1}}$$

platí

$$f'(x) = \frac{x^2(2x^3+3)}{1+x^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{1+x^3}}\,, \qquad \text{a tedy} \qquad f'(1) = \frac{5}{2}\,,$$

takže z rovnosti $\frac{5}{2} = 2(p+1)$ dostáváme hodnotu $p = \frac{1}{4}$. Máme tedy pro každé $x \in (0,1)$ dokázat nelineární odhad ve tvaru

$$x^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^3+1}} \geq \frac{5x^2-1}{4}\,.$$

Pro všechna $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle$ je to triviální (levá strana je kladná, pravá nekladná). V případě $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$ nejprve umocníme nerovnost na třetí

$$\frac{2x^9}{x^3+1} \geq \left(\frac{5x^2-1}{4}\right)^3$$

a dále postupně upravíme:

$$\begin{aligned} 128x^9 - (x^3+1)(5x^2-1)^3 &\geq 0\,,\\ 3x^9 + 75x^7 - 125x^6 - 15x^5 + 75x^4 + x^3 - 15x^2 + 1 &\geq 0\,,\\ (x-1)^2(3x^7 + 6x^6 + 84x^5 + 37x^4 - 25x^3 - 12x^2 + 2x + 1) &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Dokážeme, že polynom Q rovný poslednímu činiteli splňuje pro každé $x > \frac{1}{\sqrt{5}}$ nerovnost

$$Q(x) = 3x^7 + 6x^6 + 84x^5 + 37x^4 - 25x^3 - 12x^2 + 2x + 1 > 0.$$

Protože $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{2}{5}$, stačí ověřit čtyři nerovnosti

$$Q\left(\frac{2}{5}\right) > 0\,, \quad Q'\left(\frac{2}{5}\right) > 0\,, \quad Q''\left(\frac{2}{5}\right) > 0 \quad \text{a} \quad Q'''\left(\frac{2}{5}\right) > 0\,,$$

neboť zřejmě $Q^{(4)}(x) > 0$ pro každé $x > 0$, v důsledku čehož je postupně každá z funkcí Q''', Q'', Q', Q na intervalu $\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ rostoucí. Numerická prověrka těchto nerovností na počítači je rutinní. Vychází

$$Q\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{9129}{78125}, \quad Q'\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{16854}{15625}, \quad Q''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{313932}{3125} \quad \text{a} \quad Q'''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{134226}{125}.$$

Tím je celé řešení ukončeno. K jeho závěru pro zajímavost dodejme, že kdybychom místo zlomku $\frac{2}{5}$ vybrali menší zlomek $\frac{1}{3}$, popsaný postup by selhal, neboť $Q'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{843}{243} < 0$.

Příklad 1.79. Dokažte, že pro kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součin je roven jedné, platí[80]

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{2}{1+a_1} + \frac{2}{1+a_2} + \ldots + \frac{2}{1+a_n}.$$

Řešení. K odhadu využijeme vlastnosti funkce logaritmus. Z podmínky $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ totiž plyne $\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n = 0$, takže stačí najít takové číslo k, pro něž platí

$$x - \frac{2}{1+x} \geq k \ln x \qquad \text{pro každé } x > 0,$$

a pak tyto nerovnosti pro n hodnot $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sečíst. Uvažme proto na intervalu $(0, \infty)$ funkci

$$f(x) = x - \frac{2}{1+x} - k \ln x$$

s reálným parametrem k. Zřejmě $f(1) = 0$, a dále

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{k}{x} = 0 \qquad \text{pro } x = 1, \quad \text{je-li } k = \frac{3}{2}.$$

Pro nalezené k vychází

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{2}{1+x} - \frac{3}{2}\ln x, \\ f'(x) &= 1 + \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2x} = \frac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{2x(x+1)^2}, \end{aligned}$$

odkud vidíme, že funkce f je na intervalu $(0,1)$ klesající a na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí. To znamená, že pro všechna $x > 0$ je $f(x) \geq f(1) = 0$ a důkaz je tak hotov.

[80] [Hun-07], str. 146, vlastní řešení

Příklad 1.80. Dokažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující podmínku $abc = 8$ platí[81]

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \geq 1\,.$$

Řešení. Dokazovaná nerovnost (prozatím formálně) plyne sečtením odhadů

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3} + p(\ln 2 - \ln x) \qquad (*)$$

pro $x = a, b, c$, neboť $\ln(abc) = \ln 8 = 3\ln 2$. Konstantu p určíme tak, aby se v bodě $x = 2$ rovnala nule nejen hodnota funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} - p(\ln 2 - \ln x)\,,$$

ale také hodnota její derivace

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{p}{x}\,.$$

Vyjde $p = \frac{2}{3}$, pro které pak

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{2}{3x} = \frac{2x^4 - 4x^3 - x + 2}{3x(x^2 - x + 1)^2} = \frac{(x - 2)(2x^3 - 1)}{3x(x^2 - x + 1)^2}\,.$$

Vidíme, že $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (1, 2)$ a $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (2, \infty)$, takže funkce f je na uvedených intervalech klesající, resp. rostoucí. Potřebná nerovnost $f(x) \geq f(2) = 0$ (ekvivalentní s odhadem $(*)$) je tak dokázána pro každé $x \in \langle 1, \infty)$. Zbývá tedy ověřit tvrzení příkladu v případě, kdy je aspoň jedno z čísel a, b, c menší než 1. To je však snadné, neboť z $x \in (0, 1)$ plyne $\frac{3}{4} \leq x^2 - x + 1 < 1$, tudíž

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} > 1\,,$$

a proto dokazovaná nerovnost platí ostře díky tomu, že jeden ze tří sčítaných zlomků je větší než 1 (a zbylé dva jsou zřejmě kladné). Rovnost v dokázané nerovnosti nastane pro jedinou vyhovující trojici $a = b = c = 2$.

Příklad 1.81. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součin je roven jedné, platí[82]

$$\frac{1}{3a^2 + (a - 1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b - 1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c - 1)^2} \geq 1\,.$$

[81] [Thu-07], str. 103, uvedeno bez řešení
[82] [Hun-07], str. 135

Řešení. Podstatou důkazu je nalezení takového čísla k, pro něž platí

$$\frac{1}{3x^2+(x-1)^2} \geq \frac{1}{3} + k\ln x \qquad \text{pro každé } x>0\,,$$

neboť pak s ohledem na rovnost $\ln a + \ln b + \ln c = 0$ stačí uvedené nerovnosti sečíst pro hodnoty $x \in \{a,b,c\}$. Pro funkci f s parametrem k určenou na $(0,\infty)$ předpisem

$$f(x) = \frac{1}{3x^2+(x-1)^2} - k\ln x - \frac{1}{3}$$

zřejmě platí $f(1)=0$ a z vyjádření její derivace

$$f'(x) = \frac{-8x+2}{(3x^2+(x-1)^2)^2} - \frac{k}{x}$$

dostáváme z rovnosti $f'(1)=0$ hodnotu $k=-\frac{2}{3}$. Pro ni

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3x^2+(x-1)^2} + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}\,,\\ f'(x) &= \frac{-8x+2}{(3x^2+(x-1)^2)^2} + \frac{2}{3x} = \frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(3x^2+(x-1)^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Jak se ukáže v závěru řešení, nerovnost vypsanou v jeho úvodu budeme potřebovat nikoliv pro každé $x>0$, ale pouze pro $x \geq \frac{1}{2}$. Pro taková x podle znaménka hodnoty $f'(x)$ vidíme, že funkce f je klesající na $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ a rostoucí na $\langle 1,\infty)$, takže $f(x) \geq f(1) = 0$ pro všechna $\left\langle \frac{1}{2},\infty\right)$. Leží-li proto v tomto intervalu všechna tři čísla a,b,c ze zadání příkladu, plyne dokazovaná nerovnost sečtením tří odhadů, jak jsme vysvětlili v úvodu řešení. V případě, že je některé z čísel a,b,c menší než $\frac{1}{2}$, např. a, pak dokazovaná nerovnost plyne ze skutečnosti, že tehdy pro samotný první zlomek z její levé strany platí

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2} > 1\,, \qquad \text{neboť} \qquad 3a^2+(a-1)^2-1 = 2a(2a-1) < 0\,.$$

Příklad 1.82. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součin je roven jedné, platí[83]

$$\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,.$$

[83] [Thu-07], str. 170, řešení upraveno

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\,x$ definovanou na intervalu $(0, \infty)$ a pokusme se ji odhadnout shora funkcí tvaru $g(x) = k \ln x$ v okolí kritického bodu $x_0 = 1$. Zřejmě $f(1) = g(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\,, \qquad g'(x) = \frac{k}{x}\,,$$

dostáváme z rovnice $f'(1) = g'(1)$ hodnotu konstanty $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro všechna kladná x tedy stačí dokázat nerovnost

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\,x \le -\frac{\sqrt{2}\ln x}{2}\,,$$

neboť z ní po dosazení n hodnot $x = a_i$ a sečtení dostaneme – díky tomu, že součin $a_1 a_2 \ldots a_n$ je podle zadání roven 1 – dokazovanou nerovnost. To vzhledem k logaritmu na pravé straně zřejmě nepůjde algebraickým rozkladem, avšak uvážíme-li na intervalu $(0, \infty)$ funkci h rovnou rozdílu levé a pravé strany, tedy

$$h(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\,x + \frac{\sqrt{2}\ln x}{2}\,,$$

pak z vyjádření její derivace

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x^2 - (2x-1)\sqrt{x^2+1}\right)}{2x\sqrt{x^2+1}}$$

především vidíme, že $h'(x) > 0$ pro každé $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, zatímco pro každé $x \ge \frac{1}{2}$ je znaménko hodnoty $h'(x)$ shodné se znaménkem hodnoty výrazu

$$\left(\sqrt{2}x^2\right)^2 - \left((2x-1)\sqrt{x^2+1}\right)^2,$$

rovného mnohočlenu

$$-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = (1-x)(2x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\,.$$

Protože pro $x \ge \frac{1}{2}$ splňuje poslední činitel odhad

$$2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} + (2x-1) \ge \frac{x}{2} \ge \frac{1}{4}\,,$$

platí pro každé $x \ge \frac{1}{2}$ rovnost $\operatorname{sgn} h'(x) = \operatorname{sgn}(1-x)$. Dohromady to znamená, že $h'(x) > 0$ pro každé $x \in (0,1)$ a $h'(x) < 0$ pro každé $x \in (1, \infty)$, tudíž funkce h má globální maximum na $(0, \infty)$ v bodě $x = 1$. Protože $h(1) = 0$, je důkaz hotov.

Příklad 1.83. Nechť reálná čísla x, y, z vyhovují rovnici

$$\frac{x}{x^2+2}+\frac{y}{y^2+2}+\frac{z}{z^2+2}=1\,.$$

Dokažte nerovnost $x+y+z \geq 3$.[84]

Řešení. Čísla x, y, z jsou všechna kladná, neboť kdyby např. bylo x záporné či nula, měli bychom

$$\frac{y}{y^2+2}+\frac{z}{z^2+2}\geq 1\,, \qquad \text{odkud} \qquad \max\left\{\frac{y}{y^2+2},\frac{z}{z^2+2}\right\}\geq\frac{1}{2}\,.$$

Nerovnost $\frac{t}{t^2+2}\geq\frac{1}{2}$, ekvivalentní s $t^2-2t+2=(t-1)^2+1\leq 0$, však neplatí pro žádné reálné t. Dodejme, že největší hodnota výrazu $\frac{t}{t^2+2}$ nastane pro $t=\sqrt{2}$ a má hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{4}$, což je číslo větší než $\frac{1}{3}$, a tak zadaná rovnice má nekonečně mnoho řešení různých od trojice $x=y=z=1$, pro niž je každý zlomek v levé straně rovnice roven $\frac{1}{3}$.

Ukážeme, že existuje $p\in\mathbb{R}$, při kterém nelineární odhad

$$t\geq 1+p\left(\frac{t}{t^2+2}-\frac{1}{3}\right) \tag{$*$}$$

platí pro každé $t>0$. Sečteme-li $(*)$ pro složky $t=x,y,z$ libovolného řešení zadané rovnice, dostaneme

$$x+y+z\geq 3+p\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{y}{y^2+2}+\frac{z}{z^2+2}-1\right)=3$$

a důkaz tvrzení úlohy bude hotov.

Z rovnosti $1=\frac{p(2-t^2)}{(t^2+2)^2}$ derivací obou stran nerovnosti $(*)$ v kritickém bodě $t=1$ získáme hodnotu $p=9$. Odtud pak po dosazení do $(*)$ dostáváme nerovnost

$$t-1\geq 9\left(\frac{t}{t^2+2}-\frac{1}{3}\right)\,,$$

kterou lze ekvivalentně upravit do tvaru

$$(t-1)^2(t+4)\geq 0\,.$$

Poslední platí pro každé $t>0$ a důkaz je tak hotov.

[84] Vlastní námět.

Příklad 1.84. Pro kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označme $p = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Dokažte:[85]

a) Je-li $p < 1$ a $a_i \le \frac{1}{p}$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \le \frac{n}{1+p}\,.$$

b) Je-li $p > 1$ a $a_i \ge \frac{1}{p}$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \ge \frac{n}{1+p}\,.$$

Řešení. Kvůli analogii s následujícími dvěma příklady podáme nyní společnou část jejich řešení s obecným parametrem $r > 0$, který má v tomto případě hodnotu $r = 1$ (a v dalších dvou příkladech hodnoty $r = \frac{1}{2}$, resp. $r = 2$).

Nerovnost z části a) formálně dostaneme, když dosadíme za x postupně čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ do nelineárního odhadu

$$\frac{1}{(1+x)^r} \le \frac{1}{(1+p)^r} + c \cdot \ln\frac{x}{p} \tag{$*$}$$

s libovolnou konstantou $c \in \mathbb{R}$ a výsledky dosazení sečteme. Zjistíme proto, v jakém okolí kritického bodu $x = p$ nerovnost $(*)$ zaručeně platí. Konstantu c přitom určíme z rovnosti derivací obou stran $(*)$ v bodě $x = p$, která je tvaru

$$\frac{-r}{(1+p)^{r+1}} = \frac{c}{p}, \qquad \text{odkud} \qquad c = \frac{-rp}{(1+p)^{r+1}}\,.$$

Hledáme tedy okolí bodu $x = p$, ve kterém je funkce

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^r} - \frac{1}{(1+p)^r} + \frac{rp}{(1+p)^{r+1}} \cdot \ln\frac{x}{p}$$

nekladná, když – jak víme – $f(p) = f'(p) = 0$. Stačí tedy, aby v levém (resp. pravém) okolí bodu p platilo $f'(x) \ge 0$ (resp. $f'(x) \le 0$). Protože

$$f'(x) = \frac{-r}{(1+x)^{r+1}} + \frac{rp}{x(1+p)^{r+1}} = \frac{r}{x} \cdot \frac{p(x+1)^{r+1} - x(p+1)^{r+1}}{(p+1)^{r+1}(x+1)^{r+1}}\,,$$

a hodnoty r, p, x jsou kladné, vidíme, že některé okolí bodu p má požadovanou vlastnost, když v každém jeho bodě funkce

$$g(x) = p(x+1)^{r+1} - x(p+1)^{r+1}$$

splňuje podmínku $(x-p) \cdot g(x) \le 0$. Analogicky lze postupovat i v části b) příkladu a zjistit, že příslušná nerovnost bude platit, budou-li všechna čísla a_i ležet v takovém okolí bodu p, ve kterém stejná funkce g bude splňovat pro každé x podmínku $(x-p) \cdot g(x) \ge 0$.

[85] Vlastní námět.

Posoudit odvozené podmínky na okolí bodu p v případě $r = 1$ je snadné, neboť tehdy

$$g(x) = p(x+1)^2 - x(p+1)^2 = px^2 - (p^2+1)x + p = p(x-p)\left(x - \frac{1}{p}\right),$$

takže pro kladná p, x platí

$$(x-p)g(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{p} \quad \text{a} \quad (x-p)g(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{p}\,;$$

přitom nalezené intervaly $(0, \frac{1}{p}\rangle$ a $\langle \frac{1}{p}, \infty)$ jsou ovšem okolími bodu p, jenom když $p < 1$, resp. $p > 1$. Řešení příkladu je hotovo.

Poznámka. Z implikací

$$p < 1 \Rightarrow (0, 1\rangle \subset \left(0, \frac{1}{p}\right\rangle, \quad p > 1 \Rightarrow \langle 1, \infty) \subset \left\langle \frac{1}{p}, \infty\right)$$

plyne, že nerovnosti z obou částí příkladu jsou dokázány za slabších předpokladů na proměnné $a_1, a_2, \ldots, a_n$, než jsou předpoklady, které k důkazům těchto nerovností potřebujeme při jednoduchém uplatnění Jensenových nerovností (viz příklad 2.52 pro hodnotu $r = 1$).

Příklad 1.85. Pro kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označme $p = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ a definujme mez m_p (závislou na parametru p) vzorcem

$$m_p = \frac{3p + 1 + (p+1)\sqrt{4p+1}}{2p^2}.$$

Dokažte:[86]

a) Je-li $p < 2$ a $a_i \le m_p$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \le \frac{n}{\sqrt{1+p}}.$$

b) Je-li $p > 2$ a $a_i \ge m_p$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \ge \frac{n}{\sqrt{1+p}}.$$

[86]Vlastní námět.

Řešení. Z obecného postupu popsaného v řešení příkladu 1.84 pro hodnotu parametru $r = \frac{1}{2}$ plyne, že nerovnost z části a) bude platit, budou-li všechna čísla a_i ležet v takovém okolí bodu p, v němž pro každé x bude platit $(x-p)g(x) \le 0$, kde

$$g(x) = p(x+1)^{\frac{3}{2}} - x(p+1)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Všimněme si, že pro kladná p, x platí

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} g(x) &= \operatorname{sgn}\Big(p(x+1)^{\frac{3}{2}} - x(p+1)^{\frac{3}{2}}\Big) = \operatorname{sgn}\big(p^2(x+1)^3 - x^2(p+1)^3\big) = \\ &= \operatorname{sgn}\big((x-p)(p^2x^2 - (3p+1)x - p)\big)\,.\end{aligned}$$

Proto některé okolí bodu p bude mít požadovanou vlastnost, když v každém jeho bodě x bude mít kvadratická funkce

$$h(x) = p^2x^2 - (3p+1)x - p$$

nekladnou hodnotu. Protože uvažujeme pouze kladná p a

$$h(p) = p^4 - 3p^2 - 2p = p(p-2)(p+1)^2\,,$$

dostáváme především podmínku $p < 2$. Jelikož kvadratická rovnice $h(x) = 0$ má v případě $0 < p < 2$ kořeny

$$x_1 = \frac{3p+1-(p+1)\sqrt{4p+1}}{2p^2} < 0 \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{3p+1+(p+1)\sqrt{4p+1}}{2p^2} > 2\,,$$

(nerovnosti plynou z toho, že $x_1x_2 = \frac{-1}{p} < 0$ a $h(2) = (p-2)(4p+1) < 0$), nerovnost $h(x) \le 0$ platí, právě když $x \in \langle x_1, x_2\rangle$. Protože uvažujeme pouze kladná x, hledané okolí bodu p je interval $(0, x_2\rangle$. Tím je tvrzení části a) s mezí $m_p = x_2$ dokázáno.

Při důkazu části b) lze postupovat zcela analogicky. Dodejme k tomu, že některé okolí bodu p bude mít požadovanou vlastnost, když v každém jeho bodě bude mít stejná kvadratická funkce h nezápornou hodnotu. Odtud dostaneme předně podmínku $p > 2$, za níž pro kořeny x_1, x_2 rovnice $h(x) = 0$ platí $x_1 < 0$ a $0 < x_2 < 2$, takže hledané okolí bodu p bude interval $\langle x_2, \infty)$.

Poznámka. Z vyjádření určené meze m_p ve tvaru

$$m_p = \frac{3}{2p} + \frac{1}{2p^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right)\sqrt{\frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}}$$

plyne že m_p je v proměnné $p \in (0, \infty)$ klesající funkce s vlastnostmi

$$m_p \to +\infty\,(p \to 0+), \quad m_2 = 2, \quad m_p \to +0\,(p \to +\infty)\,.$$

Proto jsou nerovnosti z obou částí příkladu dokázány za slabších předpokladů na proměnné $a_1, a_2, \ldots, a_n$, než jsou předpoklady, které k důkazům těchto nerovností potřebujeme při jednoduchém uplatnění Jensenových nerovností (viz příklad 2.52 pro hodnotu $r = \frac{1}{2}$).

Příklad 1.86. Pro kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ označme $p = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ a definujme mez m_p (závislou na parametru p) vzorcem

$$m_p = \frac{(p+1)\sqrt{p^2+4p} - (p^2+3p)}{2p}\,.$$

Dokažte:[87]

a) Je-li $p < \frac{1}{2}$ a $a_i \le m_p$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \le \frac{n}{(1+p)^2}\,.$$

b) Je-li $p > \frac{1}{2}$ a $a_i \ge m_p$ $(1 \le i \le n)$, pak

$$\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \ge \frac{n}{(1+p)^2}\,.$$

Řešení. Z obecného postupu popsaného v řešení příkladu 1.84 pro hodnotu parametru $r = 2$ plyne, že nerovnost z části a) bude platit, budou-li všechna čísla a_i ležet v takovém okolí bodu p, v němž pro každé x bude platit $(x-p)g(x) \le 0$, kde

$$g(x) = p(x+1)^3 - x(p+1)^3 = (x-p)(px^2 + (p^2+3p)x - 1)\,.$$

Vidíme, že některé okolí bodu p bude mít požadovanou vlastnost, když v každém jeho bodě x bude kvadratická funkce

$$h(x) = px^2 + (p^2+3p)x - 1$$

splňovat nerovnost $h(x) \le 0$. Protože uvažujeme pouze kladná p a

$$h(p) = 2p^3 + 3p^2 - 1 = (2p-1)(p+1)^2\,,$$

dostáváme podmínku $p < \frac{1}{2}$. Jelikož kvadratická rovnice $h(x) = 0$ má v případě $0 < p < \frac{1}{2}$ kořeny

$$x_1 = \frac{-(p^2+3p) - (p+1)\sqrt{p^2+4p}}{2p} < 0 \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-(p^2+3p) + (p+1)\sqrt{p^2+4p}}{2p} > \frac{1}{2}$$

(první nerovnost je zřejmá, druhá plyne z toho, že $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(2p^2 + 7p - 4) < 0$), je funkce h nekladná, právě když $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Protože však uvažujeme pouze kladná x, hledané okolí bodu p je interval $(0, x_2\rangle$. Tím je nerovnost z části a) s mezí $m_p = x_2$ dokázána.

Při důkazu nerovnosti z části b) lze postupovat obdobně. Některé okolí bodu p bude mít požadovanou vlastnost, když v každém jeho bodě bude stejná kvadratická funkce h nezáporná. Odtud dostaneme předně podmínku $p > \frac{1}{2}$, kdy pro kořeny x_1, x_2 rovnice $h(x) = 0$ platí $x_1 > 0$ a $0 < x_2 < \frac{1}{2}$, takže hledané okolí bodu p bude interval $\langle x_2, \infty)$.

[87] Vlastní námět.

Poznámka. Zapíšeme-li určenou mez m_p ve tvaru

$$m_p = \frac{2}{(p+1)\sqrt{p^2+4p} + (p^2+3p)}\,,$$

vidíme, že m_p je v proměnné $p \in (0, \infty)$ klesající funkce s vlastnostmi

$$m_p \to +\infty\,(p \to 0+), \quad m_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad m_p \to +0\,(p \to +\infty)\,.$$

Nerovnosti z obou částí příkladu jsou tedy dokázány za slabších předpokladů na proměnné $a_1, a_2, \dots, a_n$, než potřebujeme při uplatnění Jensenových nerovností (viz příklad 2.52 pro hodnotu $r = 2$).

Kapitola 2

Konvexnost a konkávnost

V druhé části práce ukážeme, jak lze při důkazech nerovností využívat dobře známé vlastnosti funkcí, kterým říkáme *konvexnost* a *konkávnost*. V úvodním odstavci pouze připomeneme význam těchto termínů a popíšeme jednoduchá kritéria, podle kterých o konvexnosti či konkávnosti rozhodujeme. Významné vlastnosti takových funkcí pak budeme uvádět na začátku podkapitol, věnovaným jednotlivým technikám dokazování nerovností.

Podle obvyklé definice funkci f jedné proměnné nazýváme *konvexní* na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ a každou dvojici čísel $\lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0, 1\rangle$ s vlastností $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\,. \tag{2.1}$$

Nastane-li přitom v (2.1) rovnost pouze v případech, kdy $x_1 = x_2$ nebo $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 1\}$, nazýváme funkci f *ryze konvexní* na intervalu I. Definici *konkávní*, resp. *ryze konkávní* funkce f dostaneme, když nerovnost (2.1) zaměníme nerovností

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\,. \tag{2.2}$$

I když v řešeních našich příkladů budeme využívat právě algebraickou podobu podmínek (2.1) a (2.2), připomeňme i jejich geometrický obsah, který je velice názorný.[1] Tak podmínka (2.1) znamená, že v rovině grafu funkce f je spojnice bodů $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ úsečka, která celá leží „nad“ grafem funkce f (případně s ním má společné i některé vnitřní body, což je ovšem v případě ryzí konvexnosti vyloučeno). Sestrojíme-li proto ještě druhou a třetí úsečku, které spojují krajní body první úsečky s bodem $[x, f(x)]$, kde x je libovolný bod mezi x_1 a x_2, dostaneme úvahou o směrnicích těchto úseček okamžitě následující výsledek: Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,. \tag{2.3}$$

[1] Souvislost je založena na poznatku z analytické geometrie v rovině o tom, že úsečka s krajními body $A[x_1, y_1]$ a $B[x_2, y_2]$ je tvořena právě body $M[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$, kde $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$.

Přitom nerovnost v pravé straně implikace je vždy ostrá, právě když je funkce f na intervalu I ryze konvexní. Zaměníme-li relaci „ $\leq$“ v pravé straně (2.3) relací „ $\geq$“, dostaneme analogickou charakteristiku konkávních funkcí.

V našich příkladech budeme výlučně pracovat s funkcemi jedné proměnné, které mají v každém vnitřním bodě svého definičního oboru vlastní druhou derivaci. Uveďme proto všeobecně známé pravidlo, jak o konvexnosti či konkávnosti rozhodujeme „podle znaménka“ druhé derivace.

Věta 2.1. *Nechť funkce f má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci. Platí-li $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f na (a, b) konvexní. Platí-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f na (a, b) ryze konvexní. Je-li navíc funkce f spojitá v bodě a zprava, lze v závěrech obou předchozích implikací psát interval $\langle a, b)$. Analogické rozšíření platí i pro intervaly $(a, b\rangle$ a $\langle a, b\rangle$.*

Nahradíme-li v uvedené větě 2.1 relaci „ $\geq$“ relací „ $\leq$“, resp. relaci „ $>$“ relací „ $<$“, dostaneme obdobné pravidlo, které zaručuje konkávnost, resp. ryzí konkávnost dotyčné funkce f.[2]

Na závěr úvodního odstavce větu 2.1 dokážeme. Za jejího předpokladu pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$ existují podle Lagrangeovy věty body $\xi \in (x_1, x_2)$ a $\eta \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\eta)\,.$$

Je-li funkce f'' na (a, b) nezáporná, je podle věty 1.1 funkce f' na $\langle \xi, \eta\rangle$ neklesající, takže $f'(\xi) \leq f'(\eta)$; implikace (2.3) tedy platí a funkce f je na (a, b) konvexní (a podobně je ryze konvexní, je-li funkce f'' na (a, b) kladná, a tedy funkce f' je tam rostoucí). Lagrangeovu větu v uvedeném postupu lze užít i v případech, kdy $x_1 = a$ nebo $x_3 = b$, je-li funkce f v těchto bodech spojitá (zprava, resp. zleva). Proto jsou dokázány i závěry věty pro intervaly $\langle a, b), (a, b\rangle$ a $\langle a, b\rangle$. Variantu pro konkávní funkce lze získat záměnou, o které píšeme v poznámce pod čarou na této stránce.

2.1 Extrémy v krajních bodech

Obvyklý postup při hledání nejmenší a největší hodnoty diferencovatelné funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ spočívá v tom, že nejprve hledáme její lokální extrémy ve vnitřních bodech intervalu, které musí být řešením rovnice $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$. Poté ještě musíme nalezené lokálně-extrémní hodnoty funkce f porovnat s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$, neboť se může stát, že daná funkce f má globální maximum nebo minimum v některých z krajních bodů a, b. Tento jev nastává nejen u monotónních funkcí (u kterých jsou extrémní obě hodnoty $f(a)$ a $f(b)$), nýbrž také u funkcí konvexních a konkávních, jak zdůvodníme ve větě 2.2. Poté na příkladech

[2] Záměnou funkce f za funkci $-f$ můžeme vždy od konkávní funkce přejít k funkci konvexní a zabývat se tak pouze vlastnostmi konvexních funkcí. Z didaktického hlediska by však takové přechody v řešených příkladech mohly působit rušivě. Budeme proto, jak naznačuje i název kapitoly, pracovat s oběma druhy funkcí, a tedy i uvádět souběžně poznatky o obou druzích.

ukážeme, že zmíněný jednoduchý poznatek je základem důkazů překvapivě mnoha rozmanitých nerovností.[3]

Věta 2.2. *Je-li funkce f konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí*

$$\max\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\} = \max\{f(a), f(b)\},$$

přitom ryze konvexní funkce f nemá své maximum v žádném bodě $x \in (a, b)$.

Je-li funkce f konkávní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí

$$\min\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\} = \min\{f(a), f(b)\},$$

přitom ryze konkávní funkce f nemá své minimum v žádném bodě $x \in (a, b)$.

Důkaz. Stačí ověřit platnost věty pro konvexní funkci f. Označíme-li $M = \max\{f(a), f(b)\}$ a vyjádříme-li libovolný bod $x \in (a, b)$ ve tvaru $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, kde $\lambda \in (0, 1)$, z konvexity funkce f dostaneme

$$f(x) = f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \le \lambda M + (1 - \lambda)M = M .$$

Tím je důkaz hotov (v případě ryze konvexní funkce je první ze dvou zapsaných nerovností ostrá, takže v dotyčném bodě x nemá funkce f maximum). □

Ukázky aplikací věty 2.2 rozdělíme do tří skupin podle toho, zda funkce f, ke které se rozhodneme větu 2.2 uplatnit, bude lineární, kvadratická či jiná konvexní nebo konkávní funkce. Pro lineární funkci $f(x) = px + q$, která je zároveň konvexní i konkávní, je závěr věty 2.2

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : \quad \min\{f(a), f(b)\} \le f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$$

natolik zřejmý, že ho v důkazech budeme používat bez komentáře.

Příklad 2.3. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[4]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k \le n - 1 .$$

Řešení. Levá strana nerovnosti je lineární funkce vzhledem ke každé z proměnných a_i, proto nabývá největší hodnoty v jednom z krajních bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Na n-rozměrné krychli $\langle 0, 1\rangle^n$ tak tato funkce n proměnných nabývá své největší hodnoty v bodě $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, jehož každá ze souřadnic a_i je 0 nebo 1. Nechť tedy m proměnných z $a_1, a_2, \dots, a_n$ je rovno 1 a zbylých $n - m$ proměnných je rovno 0. Je-li $m = n$, pak je levá strana dané nerovnosti rovna $n - 1$. A je-li $m < n$, pak je levá strana nerovnosti rovna m, což rovněž nepřevyšuje číslo $n - 1$.

[3] Některé z nich jsme zařadili do článku [Pri-10], v předložené práci však uvádíme odkazy na původní zdroje.

[4] [Kou-01], str. 155

Příklad 2.4. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[5]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - a_{k+1}) \leq \frac{n}{2},$$

kde $a_{n+1} = a_1$.

Řešení. Levá strana nerovnosti je lineární funkce vzhledem ke každé z proměnných a_i, proto nabývá největší hodnoty v jednom z krajních bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Stejně jako v příkladu 2.3 tedy stačí otestovat hodnotu levé strany v bodech $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde $a_k \in \{0, 1\}$ pro každé k. Nechť tedy m udává počet indexů k, pro něž $(a_k, a_{k+1}) = (1, 0)$, a nechť l udává počet indexů k, pro něž $(a_k, a_{k+1}) = (1, 1)$. Počet všech nulových proměnných je tedy roven $n - m - l$. Jak je patrné, levá strana nerovnosti je rovna m. Stačí dokázat, že $m \leq \frac{n}{2}$. To je však zřejmé, neboť $n - m - l \geq m$, a proto $2m \leq n$, čili $m \leq \frac{n}{2}$.

Příklad 2.5. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, A, b, B, c, C splňující rovnosti

$$a + A = b + B = c + C = s$$

platí[6]

$$a \cdot B + b \cdot C + c \cdot A \leq s^2.$$

Řešení. Levou stranu dokazované nerovnosti (označme ji např. L) můžeme upravit následujícím způsobem:

$$L = a \cdot B + b \cdot C + c \cdot A = a(s - b) + b(s - c) + c(s - a) = (a + b + c) \cdot s - (ab + bc + ca).$$

Vidíme, že upravený výraz L je lineární funkcí vzhledem ke každé z proměnných a, b, c, kde $a, b, c \in \langle 0, s\rangle$, a tudíž své největší hodnoty nutně nabývá v krajních bodech tohoto intervalu. Vzhledem k symetrii stačí určit hodnotu výrazu L pouze pro trojice $(0, 0, 0)$,$(s, 0, 0)$, $(s, s, 0)$, (s, s, s). Snadno určíme

$$L(0, 0, 0) = 0, \quad L(s, 0, 0) = s^2, \quad L(s, s, 0) = s^2, \quad L(s, s, s) = 0,$$

čímž je důkaz hotov.

Příklad 2.6. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ jsou reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Určete nejmenší hodnotu výrazu[7]

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{2004}x_{2005} + x_{2005}x_1.$$

[5] [Kou-01], str. 155
[6] [Neg-05], str. 34, vlastní řešení
[7] [Hun-07], str. 77

Řešení. Označme $P = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2004}x_{2005} + x_{2005}x_1$. Výraz $P(x_1)$ je lineární funkcí jedné proměnné, a tudíž svého minima dosahuje, právě když $x_1 \in \{-1, +1\}$. Stejně tak pro všechny ostatní proměnné x_k bude výraz $P(x_k)$ dosahovat svého minima v jednom z bodů -1, 1. Dokážeme, že v případě $x_k = \pm 1$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, 2005$ platí

$$P \geq 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + \ldots + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2003\,.$$

Protože číslo 2005 je liché, musí zřejmě existovat alespoň jeden index k ($1 \leq k \leq 2005$), pro který platí $x_kx_{k+1} \geq 0$ neboli $x_kx_{k+1} = 1$, odkud již dostáváme vypsanou nerovnost, neboť P je součtem 2005 součinů, z nichž aspoň jeden je $+1$, zatímco ostatní jsou nejméně -1. Hodnota $P = -2003$ se dostane, je-li $x_i = (-1)^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2005$, kdy $x_kx_{k+1} = 1$ jedině pro $k = 2005$.

Příklad 2.7. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[8]

$$1 \leq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 9\,.$$

Řešení. Protože zadaný výraz

$$V = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

je lineární funkcí vzhledem ke každé z proměnných a, b, c, kde $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$, jeho nejmenší i největší hodnota na množině všech trojic $(a, b, c) \in \langle 0, 1\rangle^3$ musí být rovna jednomu z osmi čísel

$$V(0,0,0),\ V(0,0,1),\ V(0,1,0),\ V(0,1,1),\ V(1,0,0),\ V(1,0,1),\ V(1,1,0),\ V(1,1,1).$$

S ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze hodnoty $V(0,0,0) = 3$, $V(0,0,1) = 1$, $V(0,1,1) = 4$ a $V(1,1,1) = 9$. Tím je důkaz obou nerovností hotov.

Příklad 2.8. Dokažte, že pro libovolnou trojici navzájem různých reálných čísel x, y, z platí[9]

$$\left|\frac{x}{y - z}\right| + \left|\frac{y}{z - x}\right| + \left|\frac{z}{x - y}\right| \geq 2\,.$$

Řešení. Díky symetrii můžeme předpokládat, že $x > y > z$, a tedy dokazovat nerovnost

$$\frac{|x|}{y - z} + \frac{|y|}{x - z} + \frac{|z|}{x - y} \geq 2\,.$$

[8] [cze-06], úloha 55–B–II–4
[9] [Thu-07], str. 117, uvedeno bez řešení

Protože při změně trojice (x, y, z) na trojici $(x+t, y+t, z+t)$ se jmenovatelé posledních tří zlomků nemění, máme vlastně ukázat, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{|x+t|}{y-z} + \frac{|y+t|}{x-z} + \frac{|z+t|}{x-y} \geq 2 \,. \tag{$*$}$$

Levá strana nerovnosti je v proměnné t po částech lineární funkce s limitou $+\infty$ pro $t \to \pm\infty$, proto nakonec stačí dokázat $(*)$ pouze v bodech zlomu $t \in \{-x, -y, -z\}$, tedy nerovnosti

$$\frac{x-y}{x-z} + \frac{x-z}{x-y} \geq 2 \,, \quad \frac{x-y}{y-z} + \frac{y-z}{x-y} \geq 2 \,, \quad \frac{x-z}{y-z} + \frac{y-z}{x-z} \geq 2 \,.$$

Všechny tři jsou však typu $u + \frac{1}{u} \geq 2$ s kladnou hodnotou u, což je známá nerovnost plynoucí ze zřejmého vztahu $(u-1)^2 \geq 0$ po roznásobení a vydělení číslem u. Důkaz je tak hotov.

Příklad 2.9. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ taková, že $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, platí[10]

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k a_k \right| \leq \frac{n^2}{4} \,.$$

Řešení. Úvodem poznamenejme, že z Cauchyovy nerovnosti plyne odhad

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k a_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq n \cdot \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} \,,$$

který je sice horší než zadaná nerovnost, neboť $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{2}{6}}$, ale zato platí i bez předpokladu, že $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.

Dosadíme-li do výrazu v absolutní hodnotě za a_n hodnotu $-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$, dostaneme funkci $n-1$ proměnných

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = |a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} - n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})| \,,$$

kterou budeme uvažovat na množině

$$X = \{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \,|\, -1 \leq a_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ -1 \leq a_1 + \ldots + a_{n-1} \leq 1\} \,.$$

Máme dokázat, že na této množině platí nerovnost

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \leq \frac{n^2}{4} \,.$$

[10] [Kou-01], str. 156

Funkce f je absolutní hodnotou lineární funkce vzhledem ke každé z $n-1$ proměnných a_k $(k=1,2,\dots,n-1)$, a proto svého maxima na jakémkoliv uzavřeném intervalu nabývá v jednom z jeho krajních bodů. Nyní uvažme f jako funkci jedné proměnné a_k, kterou změníme tak, aby se hodnota funkce $f(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ nezmenšila a aby se bod $(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ stal hraničním bodem množiny X, čili aby platila jedna z rovností $a_k=-1$, $a_k=1$, $a_1+a_2+\dots+a_{n-1}=-1$ nebo $a_1+a_2+\dots+a_{n-1}=1$. Tímto způsobem změníme postupně všechny proměnné od a_1 do a_{n-1}. Dostaneme nakonec takový bod $(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$, že z $2n$ nerovností

$$-1\le a_i\le 1\,,\qquad i=1,2,\dots,n-1\,,$$

$$-1\le a_1+a_2+\dots+a_{n-1}\le 1$$

jich $n-1$ přejde v rovnost. Pak součet $a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$ je roven buď -1, nebo 0, nebo 1. Protože $a_n=-(a_1+a_2+\dots+a_{n-1})$, je pak i číslo a_n rovno buď -1, nebo 0, nebo 1. Proto stačí dokázat nerovnost

$$|x_1+2x_2+\dots+nx_n|\le\frac{n^2}{4}$$

pouze pro ty případy, kdy $x_1+x_2+\dots+x_n=0$ a zároveň každé z čísel $x_1,x_2,\dots,x_n$ je rovno 1 nebo -1, nebo jedno z nich je rovno 0 a ostatní jsou rovny -1 nebo 1.

Protože součet všech n čísel x_k je roven 0, tak pro sudá $n=2p$ je p z nich rovno 1 a p je rovno -1. V případě lichého $n=2p+1$ je p čísel rovno 1, p čísel je rovno -1 a jedno číslo je rovno 0.

Pro $n=2p$ tedy platí

$$\begin{aligned}|a_1+2a_2+&\dots+2pa_{2p}|\le\\ &\le 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+\dots+p\cdot(-1)+(p+1)\cdot 1+\dots+2p\cdot 1=\\ &=-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(3p+1)}{2}=p^2=\frac{n^2}{4}\,.\end{aligned}$$

Pro $n=2p+1$ podobně platí

$$\begin{aligned}|a_1+2a_2+&\dots+(2p+1)a_{2p+1}|\le\\ &\le 1\cdot(-1)+\dots+p\cdot(-1)+(p+1)\cdot 0+(p+2)\cdot 1+\dots+(2p+1)\cdot 1=\\ &=-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(3p+3)}{2}=p^2+p=\frac{n^2}{4}\,.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Jak jsme slíbili, do druhé skupiny aplikací věty 2.2 zařadíme příklady, v jejichž řešeních zvolíme vždy vhodnou kvadratickou funkci $f(x) = px^2 + qx + r$. Protože její druhá derivace je rovna konstantní funkci s hodnotou $2p$, je taková funkce f s kladným koeficientem p ryze konvexní, zatímco v případě záporného koeficientu p je funkce f ryze konkávní, v obou případech na celé číselné ose $\mathbb{R}$.

Příklad 2.10. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 1, 3\rangle$ platí[11]

$$(a+b+c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\,.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Po ekvivalentních úpravách postupně dostáváme:

$$(a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\,,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\,,$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd \leq 0\,.$$

Vidíme, že levá strana nerovnosti je v každé ze čtyř proměnných kvadratická funkce ve tvaru $x^2 + px + q$ s kladným koeficientem 1 u x^2, takže nikde uvnitř daného intervalu $\langle 1, 3\rangle$ nemůže mít hodnotu větší, než jsou obě hodnoty v krajních bodech $x = 1$ a $x = 3$. Největší hodnoty tedy musí nutně nabývat v krajním bodě 1 nebo 3. Stačí proto původní nerovnost ověřit pro libovolnou čtveřici a, b, c, d sestavenou z těchto dvou hodnot. Je-li v takové čtveřici k čísel rovno číslu 3 a ostatních $4 - k$ čísel rovno 1, pak po dosazení do nerovnosti a ekvivalentních úpravách dostáváme

$$(3k + 4 - k)^2 \geq 3(9k + 4 - k)\,,$$

$$(2k+4)^2 \geq 27k + 12 - 3k\,,$$

$$4k^2 - 8k + 4 \geq 0\,,$$

$$(k-1)^2 \geq 0\,,$$

což je zřejmé. Přitom rovnost nastane jen tehdy, je-li $k = 1$, tj. jedno z čísel a, b, c, d je rovno 3 a ostatní se rovnají 1.

Příklad 2.11. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[12]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + 1\right)^2 \geq 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2\,.$$

[11] [And-07], str. 145
[12] [Kou-01], str. 156

Řešení. Uvažme rozdíl

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + 1\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

Jde o kvadratickou funkci vzhledem ke každé z proměnných a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Přitom vzhledem k a_k je to kvadratická funkce se záporným koeficientem u členu a_k^2, dosahující proto na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ svého minima při $a_k = 0$ nebo $a_k = 1$. Stačí proto dokázat danou nerovnost pro případ, kdy každé z čísel a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ je rovno 0 nebo 1. Nechť tedy l je počet těch čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, která jsou rovna 1, všechna zbylá jsou pak rovna 0. Musíme dokázat, že $(l + 1)^2 \geq 4l$ neboli $(l - 1)^2 \geq 0$, což je však zřejmé.

Příklad 2.12. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[13]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k - 2a_{k+1}) \leq \frac{n}{2} ,$$

kde $a_{n+1} = a_1$.

Řešení. Levou stranu nerovnosti můžeme považovat za funkci proměnné a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Je to funkce kvadratická s kladným koeficientem 1 u členu a_k^2, která proto na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ dosahuje své největší hodnoty v jednom z jeho krajních bodů. Stačí tedy dokázat platnost dané nerovnosti za předpokladu, že každé z čísel a_k je rovno 0 nebo 1.

Nechť tedy $a_1, a_2, \dots, a_n$ je posloupnost nul a jedniček. Jsou-li v této posloupnosti některé dva sousední členy rovny jedné (např. $a_k = a_{k+1} = 1$), nahradíme druhý z nich (tzn. a_{k+1}) nulou, přičemž členy a_1 a a_n považujeme rovněž za sousední. Je zřejmé, že hodnota levé strany dané nerovnosti tímto vzroste aspoň o 1, neboť se změní pouze tato část součtu:

$$a_k(a_k - 2a_{k+1}) + a_{k+1}(a_{k+1} - 2a_{k+2}) ,$$

a to z hodnoty $-2a_{k+2}$ na hodnotu 1. Po konečném počtu takových změn získáme takovou posloupnost nul a jedniček $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$, ve které žádné dva sousední členy nejsou rovny jedné. Počet jedniček v této posloupnosti jistě nepřevyšuje číslo $\frac{n}{2}$, a proto i suma $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(a_k - 2a_{k+1})$ není větší než $\frac{n}{2}$, neboť každý sčítanec je roven buď nule (je-li $a_k = 0$), nebo jedné (je-li $a_k = 1$). Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.13. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$, kde $n \geq 2$ je dané, jsou reálná čísla z intervalu $\langle a, b\rangle$. Najděte největší hodnotu výrazu[14]

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 .$$

[13] [Kou-01], str. 156
[14] [Hun-07], str. 79

Řešení. Označme $F = (x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_1-x_n)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2$. Zafixováním $n-1$ proměnných můžeme výraz F zapsat jako funkci jedné proměnné

$$f(x_1) = (n-1)x_1^2 - 2\left(\sum_{i=2}^{n} x_i\right)x_1 + c$$

kde c je konstanta. Je patrné, že jde o funkci kvadratickou s kladným koeficientem u členu x^2, takže F dosahuje svého maxima, jedině když platí $x_i \in \{a,b\}$ pro všechna $i = 1,2,\ldots,n$. Předpokládejme tedy, že k čísel x_i je rovno číslu a, $(n-k)$ čísel x_i je rovno číslu b. Díky Lagrangeově identitě po dosazení uvedených hodnot x_i dostaneme

$$F = n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = nka^2 + n(n-k)b^2 - \big(ka+(n-k)b\big)^2 = k(n-k)(a-b)^2\,.$$

Odtud snadnou úvahou o kvadratické funkci $g(k) = k(n-k)$, jež má maximum v bodě $k = \frac{n}{2}$, zjišťujeme, že

$$\max(F) = \begin{cases} m^2(a-b)^2 & \text{pro } n = 2m \ (m \in \mathbb{N}), \\ m(m+1)(a-b)^2 & \text{pro } n = 2m+1 \ (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Ve třetí části aplikací věty 2.2 budeme pracovat s obecnějšími funkcemi, nežli jsou funkce lineární nebo kvadratické, takže jejich konvexnost či konkávnost budeme v jednotlivých příkladech prokazovat výpočtem druhé derivace a určením znaménka jejich hodnot, nepůjde-li o tak známé funkce, jako jsou konvexní funkce $y = \frac{1}{x}$ a konkávní funkce $y = \ln x$ – obě uvažované na intervalu $(0,\infty)$.

Příklad 2.14. Dokažte, že pro každá reálná $p,q > 1$ a každé x z intervalu $\langle -1,1\rangle$ platí nerovnost[15]

$$(1+x)^p + (1-x)^q \le \max\{2^p, 2^q\}\,.$$

Řešení. Z předpokladů $p > 1$ a $q > 1$ je zřejmé, že funkce

$$f(x) = (1+x)^p \qquad \text{a} \qquad g(x) = (1-x)^q$$

jsou konvexní, neboť pro každé x z uvažovaného intervalu platí

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \ge 0 \qquad \text{a} \qquad g''(x) = q(q-1)x^{q-2} \ge 0\,.$$

Svého maxima tedy funkce f a g dosahují v jednom z jeho krajních bodů. A protože $f(1) = 2^p$, $g(-1) = 2^q$ a $f(-1) = g(1) = 0$, plyne odtud odhad pro maximum konvexní funkce $f+g$ uvedený v zadání příkladu.

[15] Vlastní námět.

Příklad 2.15. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí[16]

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2\,.$$

Řešení. Je zřejmé, že symetrická funkce f určená levou stranou dokazované nerovnosti je na intervalu $\langle 0,1\rangle$ konvexní ve všech třech proměnných a, b, c, neboť např. při derivování podle proměnné a

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{bc+1}-\frac{bc}{(ac+1)^2}-\frac{bc}{(ab+1)^2}\,,\\ f''(a) &= \frac{2bc^2}{(ac+1)^3}+\frac{2b^2c}{(ab+1)^3}\geq 0 \quad \text{pro všechna } a,b,c\in\langle 0,1\rangle\,. \end{aligned}$$

Největší hodnoty tedy funkce f dosahuje v jednom z vrcholů krychle $\langle 0,1\rangle^3$. Vzhledem k symetrii stačí vyšetřit pouze trojice $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$ a $(1,1,1)$. V nich má f hodnoty

$$f(0,0,0)=0\,,\quad f(1,0,0)=1\,,\quad f(1,1,0)=2\,,\quad f(1,1,1)=\frac{3}{2}\,,$$

čímž je důkaz hotov.

Příklad 2.16. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 1,2\rangle$ platí[17]

$$\frac{10a}{bc}+\frac{11b}{ca}+\frac{12c}{ab}\leq\frac{69}{2}\,.$$

Řešení. Levá strana zadané nerovnosti je předpisem pro funkci $F(a,b,c)$, která je v každé proměnné $x\in\{a,b,c\}$ tvaru

$$px+\frac{q}{x}\,,$$

kde p a q jsou kladné parametry závislé na ostatních dvou proměnných z intervalu $\langle 1,2\rangle$. Proto je funkce $F(a,b,c)$ v každé z proměnných $a,b,c\in\langle 1,2\rangle$ konvexní, takže nabývá svého maxima v některém z osmi bodů (a,b,c), kde $a,b,c\in\{1,2\}$. Snadno vypočteme:

$$\begin{aligned} &F(1,1,1)=33\,, && F(1,1,2)=\frac{69}{2}\,, && F(1,2,1)=33\,, && F(1,2,2)=\frac{51}{2}\,,\\ &F(2,1,1)=\frac{63}{2}\,, && F(2,1,2)=\frac{99}{4}\,, && F(2,2,1)=24\,, && F(2,2,2)=\frac{33}{2}\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že maximální hodnota je skutečně $\frac{69}{2}$, takže dokazovaná nerovnost platí a rovnost v ní nastane v případě $a=b=1$, $c=2$.

[16] [Eng-98], str. 184

[17] [Thu-07], str. 102, vlastní řešení

Příklad 2.17. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí[18]

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1\,.$$

Řešení. Nahradíme levou stranu nerovnosti funkcí proměnné a

$$f(a)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\,,$$

a spočítáme její první a druhou derivaci:

$$f'(a)=\frac{1}{b+c+1}-\frac{b}{(c+a+1)^2}-\frac{c}{(a+b+1)^2}+(1-b)(1-c)\,,$$
$$f''(a)=\frac{2b}{(c+a+1)^3}+\frac{2c}{(a+b+1)^3}\geq 0 \quad \text{pro všechna } a,b,c\in\langle 0,1\rangle\,.$$

Funkce f je tedy na intervalu $\langle 0,1\rangle$ konvexní, a proto největší hodnoty dosahuje v jednom z jeho krajních bodů. Stačí tedy ověřit platnost nerovnosti ze zadání pouze pro případ, kdy je každé z čísel a, b, c rovno 0 nebo 1. S ohledem na symetrii stačí vyšetřit pouze trojice $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$ a $(1,1,1)$:

$$f(0,0,0)=0+1=1\,, \qquad f(1,0,0)=1+0=1\,,$$
$$f(1,1,0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1\,, \qquad f(1,1,1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=1\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.18. Je dobře známo, že levá z nerovností

$$\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{3}{2}+\frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}\,,$$

které se říká Nesbittova, platí pro libovolná $a, b, c > 0$ (viz např. [Sim-10]). Dokažte pravou nerovnost za předpokladu, že čísla a, b, c leží v intervalu $\langle r, s\rangle$, kde $0 < r < s$.[19]

Řešení. Uvažme, že výraz

$$V(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

je v každé z proměnných a, b, c funkce konvexní na intervalu $\langle r, s\rangle$, proto pro libovolná čísla $a, b, c \in \langle r, s\rangle$ platí

$$V(a,b,c)\leq\max\{V(r,r,r),V(r,r,s),V(r,s,s),V(s,s,s)\}$$

[18] [Loz-96], str. 122
[19] [Kur-07], str. 22

(s ohledem na symetrii není nutné uvádět další variace hodnot r, s). Stačí tedy vyjádřit uvedené čtyři hodnoty:

$$V(r,r,r) = \frac{3}{2}\,, \qquad V(r,r,s) = \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}\,,$$

$$V(r,s,s) = \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2s(r+s)}\,, \qquad V(s,s,s) = \frac{3}{2}\,.$$

Odtud plyne, že pro libovolná $a, b, c \in \langle r, s\rangle$ platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.19. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[20]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k} + \prod_{k=1}^{n} (1-a_k) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Řešení. Pro pevně zvolené $k = 1, 2, \ldots, n$ nahradíme levou stranu nerovnosti funkcí s proměnnou $a_k \in \langle 0, 1\rangle$:

$$f(a_k) = \frac{a_k}{1+a_k} + (1-a_k)A + B\,,$$

kde A, B jsou konstanty

$$A = (1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(1-a_{k-1})\cdot(1-a_{k+1})\cdot\ \ldots\ \cdot(1-a_n)\,,$$

$$B = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{1+a_{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_n}\,.$$

Protože pro první a druhou derivaci funkce f platí

$$f'(a_k) = \frac{1}{(1+a_k)^2} - A \qquad \text{a} \qquad f''(a_k) = \frac{-2}{(1+a_k)^3} < 0\,,$$

je funkce f na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ konkávní a nejmenší hodnoty tedy nabývá v jednom z jeho krajních bodů. Stačí tedy dokázat nerovnost ze zadání příkladu pouze pro případ, kdy je každé z čísel a_k rovno 0 nebo 1. To je však snadné. Je-li totiž mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alespoň jedna jednička, je nerovnost zřejmá. A jsou-li všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovna nule, je daná nerovnost rovněž splněna.

[20] [Kou-01], str. 156

Příklad 2.20. Dokažte, že pro jakákoliv čísla a, b, c, d, e z intervalu $\langle p, q\rangle$, kde $0 < p < q$, platí[21]

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \leq 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2,$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Řešení. Levá strana nerovnosti – uvažovaná jako funkce f o pěti proměnných – je ryze konvexní v každé z kladných proměnných a, b, c, d, e, neboť např. v proměnné a je tvaru

$$(a+u)(\frac{1}{a}+v) = \frac{u}{v}+av+uv+1$$

s kladnými konstantami u, v. Svého maxima tedy nutně dosahuje pouze když $a, b, c, d, e \in \{p, q\}$.

Pokud všech pět proměnných je rovno číslu p nebo se všechny rovnají číslu q, hodnota funkce f je rovna 25 a dokazovaná nerovnost platí jako ostrá. Jestliže jedna z proměnných bude rovna p a zbylé čtyři budou q (nebo naopak), pak zřejmě $f = 17+4(\frac{p}{q}+\frac{q}{p})$. A pokud se budou tři z proměnných rovnat p a zbylé dvě budou q (nebo naopak), pak dostaneme hodnotu $f = 13+6(\frac{p}{q}+\frac{q}{p})$.

Díky zřejmé rovnosti

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{p} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2+2$$

můžeme obě určené kritické hodnoty f zapsat jako

$$17+4\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right) = 25+4\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

$$13+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right) = 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Tím je důkaz hotov. Rovnost v dokazované nerovnosti nastane, právě když čísla a, b, c, d, e tvoří jednu z pětic p, p, p, q, q nebo q, q, q, p, p (v libovolném pořadí).

Příklad 2.21. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[22]

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc} \leq \max\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\right\}.$$

[21] [Mil-06], str. 7
[22] [Thu-07], str. 114

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \le b \le c$. Pak máme dokázat nerovnost

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 .$$

Vezměme proto funkci $f(x) = \frac{x+a+c}{3} - \sqrt[3]{xac}$ definovanou na $\langle a, c\rangle$. Z výpočtů jejích derivací

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{x^2}}\right), \qquad f''(u) = \frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{x^5}},$$

vidíme, že je na uvažovaném intervalu konvexní. Tedy z úvodní podmínky $a \le b \le c$ máme $f(b) \le \max\{f(a), f(c)\}$. Předpokládejme, že $f(a) \ge f(c)$ (v opačném případě lze postupovat analogicky, protože v dalších úvahách už nezáleží na tom, které z čísel a, c je větší). Pak zbývá dokázat nerovnost $f(a) \le (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2$, tj.

$$\frac{2a+c}{3} - \sqrt[3]{a^2c} \le (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \qquad \text{neboli} \qquad 2\sqrt{ac} \le \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} + \sqrt[3]{a^2c}.$$

Ta však plyne z AG-nerovnosti pro šestici čísel ve tvaru

$$a + c + c + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c} \ge 6\sqrt[6]{a \cdot c \cdot c \cdot a^2 \cdot c}.$$

Tím je důkaz zadaného horního odhadu rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří čísel hotov. Důkaz jeho zobecnění pro n-tici nezáporných čísel a_i ve tvaru

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \max_{1 \le i < j \le n} \left\{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\right\}$$

(viz [Thu-07], str. 114–116) zde uvádět nebudeme.

Příklad 2.22. Dokažte, že pro libovolná čísla x, y, z, t z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[23]

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - (xy^2 + yz^2 + zt^2 + tx^2) \le \frac{8}{27}.$$

Řešení. S ohledem na cykličnost lze předpokládat, že $y \ge t$. Pak ze zápisu levé strany dokazované nerovnosti jako funkce čtyř proměnných ve tvaru

$$f(x, y, z, t) = (y - t)x^2 + (t^2 - y^2)x + y^2z + z^2t - yz^2 - zt^2,$$

je patrné, že je tato funkce v proměnné x na $\langle 0, 1\rangle$ konvexní, a proto

$$f(x, y, z, t) \le \max\{f(0, y, z, t), f(1, y, z, t)\}.$$

[23] [Thu-07], str. 116

Stačí tedy dokázat nerovnosti

$$f(0, y, z, t) \leq \frac{8}{27} \quad \text{a} \quad f(1, y, z, t) \leq \frac{8}{27}.$$

Protože $f(0, y, z, t) = z(y - t)(y + t - z)$, je v případě $y + t - z < 0$ první z obou nerovností zřejmá. V případě $y + t - z > 0$ plyne stejná nerovnost z AG-nerovnosti pro trojici čísel $z, y - t, y + t - z$, podle které

$$f(0, y, z, t) \leq \left(\frac{z + (y - t) + (y + t - z)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2y}{3}\right)^3 \leq \frac{8}{27}.$$

Přitom rovnost v ní nastane, právě když $x = 0, y = 1, z = y - t = y + t - z$, čili v případě $(x, y, z, t) = (0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Druhá nerovnost je o hodnotě $f(1, y, z, t) = (1 - z)t^2 + (z^2 - 1)t + y + y^2 z - y^2 - yz^2$, jež je v proměnné t na $\langle 0, 1\rangle$ konvexní funkce. Tu však díky předpokladu $y \geq t$ stačí uvažovat pouze na intervalu $\langle 0, y\rangle$ a usoudit tak, že pro naše hodnoty y, z, t platí

$$f(1, y, z, t) \leq \max\{f(1, y, z, 0), f(1, y, z, y)\}.$$

Proto je naším cílem dokázat nerovnosti

$$f(1, y, z, 0) \leq \frac{8}{27} \quad \text{a} \quad f(1, y, z, y) \leq \frac{8}{27}.$$

Druhá z nich platí ostře díky tomu, že $f(1, y, z, y) = 0$; první nerovnost zapsaná ve tvaru $f(1, y, z, 0) = y(1 - z)(1 + z - y) \leq \frac{8}{27}$ je zřejmě důsledkem AG-nerovnosti pro trojici čísel $y, 1 - z, 1 + z - y$. Rovnost v tomto případě nastane právě tehdy, když $x = 1$, $t = 0$ a $y = 1 - z = 1 + z - y$ neboli $(x, y, z, t) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. Tím je celý důkaz hotov.

Na závěr této podkapitoly uvedeme náročnější příklad, v jehož řešení uplatníme poznatek o minimu konkávní funkce v kombinaci s postupy, kterým jsme se věnovali v kapitole 1.

Příklad 2.23. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí[24]

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 4(a + b + c) \geq 8(ab + bc + ca).$$

Řešení. Zapišme dokazovanou nerovnost jako nerovnost $f(b) \geq 0$ pro funkci jedné nezáporné proměnné b dané předpisem

$$f(b) = b^3 + b(9ac - 8a - 8c + 4) + a^3 + c^3 + 4(a + c) - 8ac.$$

Trojím užitím AG-nerovností pro vhodné dvojice čísel dostáváme

$$(a^3 + 4a) + (c^3 + 4c) \geq 4a^2 + 4c^2 \geq 8ac,$$

[24] [Hun-07], str. 111, řešení podstatně upraveno

takže pokud platí $4+9ac \geq 8(a+c)$, je funkce f nezáporná a požadovaná nerovnost je dokázána, přičemž rovnost nastane pouze pro čísla $a = c = 2$, $b = 0$ a pro $a = b = c = 0$.

Dokážeme nyní její platnost i v opačném případě, kde (po označení $x = a + c$, $y = ac$, při kterém $a^3 + c^3 = x^3 - 3xy$) máme $8x > 9y + 4$. Protože $f'(b) = 3b^2 - (8x - 9y - 4)$, je rovnost $f'(b_0) = 0$ splněna pro

$$b_0 = \sqrt{\frac{8x - 9y - 4}{3}}\,,$$

přičemž funkce f je klesající na $(0, b_0\rangle$ a rostoucí na $\langle b_0, \infty)$. Stačí tedy dokázat nerovnost $g(y) \geq 0$, kde nová funkce g je při pevném x dána předpisem

$$\begin{aligned} g(y) &= f\left(\sqrt{\frac{8x-9y-4}{3}}\right) = \\ &= \left(\frac{8x-9y-4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - (8x-9y-4)\left(\frac{8x-9y-4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + x^3 - 3xy + 4x - 8y = \\ &= \frac{-2(8x-9y-4)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + x^3 - 3xy + 4x - 8y\,. \end{aligned}$$

Všimněme si, jakých hodnot proměnná $y \geq 0$ v dokazované nerovnosti $g(y) \geq 0$ nabývá. Z vymezení $8x > 9y + 4$ máme $x > \frac{1}{2}$ a $y < \frac{8x-4}{9}$, ze vztahů $x = a + c$, $y = ac$ plyne $y \leq \frac{x^2}{4}$. Celkem tedy

$$x > \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad 0 \leq y \leq t, \quad \text{kde} \quad t = \min\left\{\frac{x^2}{4}, \frac{8x-4}{9}\right\}.$$

Protože

$$g'(y) = 3\sqrt{3(8x - 9y - 4)} - (3x + 8)\,,$$

je g' klesající funkce proměnné $y \in \langle 0, t\rangle$, takže funkce g je na tomto intervalu konkávní, a proto nabývá svého minima v krajních bodech intervalu. Stačí tudíž dokázat nerovnosti $g(0) \geq 0$ a $g(t) \geq 0$. Pokud jde o první z nich, platí

$$g(0) = \frac{-2(8x-4)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + x^3 + 4x\,,$$

takže stačí ověřit, že pro každé $x > \frac{1}{2}$ je splněna nerovnost

$$27(x^3 + 4x)^2 \geq 4(8x - 4)^3\,.$$

Rozdíl levé a pravé strany je mnohočlen s rozkladem

$$(x - 2)^2(27x^4 + 108x^3 + 540x^2 - 320x + 64)\,,$$

který je zřejmě nezáporný jak pro každé $x \geq 1$ (neboť $540 > 320$), tak pro každé $x \in \langle \frac{1}{2}, 1)$, kdy lze využít nerovnost

$$540x^2 - 320x + 50 = 270x(2x - 1) + 50(1 - x) > 0\,.$$

Pokud jde o nerovnost $g(t) \ge 0$, rozlišíme případy, kdy $t = \frac{8x-4}{9}$ a kdy $t = \frac{x^2}{4}$. V prvním z nich podle definice t platí $t \le \frac{x^2}{4}$; s přihlédnutím k $8x - 9t - 4 = 0$ v tomto případě dostáváme

$$g(t) = x^3 + 4x - 3xt - 8t \ge x^3 + 4x - 3x \cdot \frac{x^2}{4} - 8 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4} - 2x^2 + 4x = \frac{x(x-4)^2}{4} \ge 0\,.$$

Zbývá tedy dokázat nerovnost $g(t) \ge 0$ v případě, kdy $t = \frac{x^2}{4} \le \frac{8x-4}{9}$. Označme $s = \frac{x}{2}$. Pak podmínka $\frac{x^2}{4} \le \frac{8x-4}{9}$ znamená $s^2 \le \frac{16s-4}{9}$ a nerovnost $g\left(\frac{x^2}{4}\right) = g(s^2) \ge 0$ můžeme po dosazení $x = 2s$ zapsat ve tvaru

$$2s^3 - 8s^2 + 8s - \frac{2}{3\sqrt{3}}(16s - 9s^2 - 4)^{\frac{3}{2}} \ge 0\,.$$

Protože $2s^3 - 8s^2 + 8s = 2s(s-2)^2 \ge 0$ pro každé $s > \frac{1}{4}$, je nerovnost, kterou máme dokázat, ekvivalentní s nerovností

$$27(2s^3 - 8s^2 + 8s)^2 \ge 4(16s - 9s^2 - 4)^3\,.$$

Rozdíl levé a pravé strany je mnohočlen s rozkladem

$$16(s-1)^2(189s^4 - 648s^3 + 648s^2 - 160s + 16)\,,$$

takže stačí ukázat, že funkce h určená posledním činitelem vyhovuje podmínce

$$h(s) = 189s^4 - 648s^3 + 648s^2 - 160s + 16 > 0$$

pro všechna s splňující kvadratickou nerovnici $s^2 \le \frac{16s-4}{9}$. Všechna taková s zaplní interval $\langle s_1, s_2\rangle$, kde

$$s_1 = \frac{2}{9}(4 - \sqrt{7}) \doteq 0{,}301 \qquad \text{a} \qquad s_2 = \frac{2}{9}(4 + \sqrt{7}) \doteq 1{,}477\,.$$

Prověrku takové vlastnosti je nejsnazší provést numericky: derivace funkce h je kubický polynom se třemi reálnými kořeny

$$s_3 \doteq 0{,}159\,, \qquad s_4 \doteq 0{,}854\,, \qquad s_5 \doteq 1{,}559\,,$$

takže na zkoumaném intervalu $\langle s_1, s_2\rangle$ je funkce h rostoucí na $\langle s_1, s_4\rangle$ a klesající na $\langle s_4, s_2\rangle$. Její globální minimum na $\langle s_1, s_2\rangle$ je tedy rovno menší z hodnot $h(s_1)$, $h(s_2)$, které jsou

$$h(s_1) \doteq 10{,}425\,, \qquad h(s_2) \doteq 4{,}851\,.$$

Tím je celá úloha vyřešena, přičemž rovnost v dokazované nerovnosti nastane v triviálním případě $a = b = c = 0$, v případě $a = c = 2$, $b = 0$, dále pokud $x = 2$, $y = 1$, tedy v případě $a = b = c = 1$, a pokud $x = 2$, $y = 0$, tedy v případě $a = b = 2$, $c = 0$ nebo $b = c = 2$, $a = 0$.

2.2 Jensenova nerovnost I

Dostáváme se nyní k tomu uplatnění pojmů konvexnosti a konkávnosti, jež je pro svůj význam jak v teorii nerovností, tak i jejích aplikacích, nejznámější. Nese název Jensenova nerovnost podle dánského matematika, který s plným jménem Johan Ludwig William Valdemar Jensen žil v letech 1859 až 1925. Byl to patrně právě on, kdo si poprvé nad nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

uvědomil, že jde o nerovnost tvaru

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{2.4}$$

pro funkci $f(x) = -\ln x$ a že Cauchyův postup při jejím důkazu (dnes označovaný za důkaz *zpětnou indukcí*) lze po uvedeném přepisu zopakovat pro jakoukoliv funkci f, jež na oboru hodnot proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňuje ve dvou proměnných x_1, x_2 nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Takovou funkci f dnes nazýváme *J-konvexní.* Pro naši práci tento speciálnější pojem ovšem žádný význam mít nebude, neboť je známo, že každá funkce, která je na některém intervalu J-konvexní a zároveň spojitá, je na něm i konvexní v obvyklém významu, tj. splňuje nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{2.5}$$

pro libovolnou dvojici koeficientů $\lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0, 1\rangle$ svázaných vztahem $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, nikoliv zaručeně pouze pro dvojici $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Historicky původní tvar (2.4) *Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci* dnes rovněž zapisujeme v obecnější podobě

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n), \tag{2.6}$$

kde $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ je libovolná *konvexní kombinace* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Protože tento termín není všeobecně rozšířen, avšak bude výhodný pro výklad řešení našich příkladů, uveďme ho výrazně v samostatné definici.

Definice 2.24. Číslo $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ se nazývá konvexní kombinací čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, splňují-li koeficienty λ_i této lineární kombinace podmínky

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{a} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1. \tag{2.7}$$

Jednoduchým (a přitom z hlediska aplikací významným) příkladem konvexní kombinace čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jejich *aritmetický průměr*, zastoupený již v prvotní Jensenově nerovnosti (2.4). My nyní už rovnou uvedeme a dokážeme[25] výsledek o obecné Jensenově nerovnosti (2.6).

[25] Text tohoto všeobecně známého důkazu je převzat z naší diplomové práce [Pri-05].

Věta 2.25. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak platí:*

(i) *Je-li funkce f konvexní na I, pak pro každou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ jakýchkoliv čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí nerovnost* (2.6).

(ii) *Je-li funkce f ryze konvexní na I, pak nerovnost* (2.6) *z části* (i) *je ostrá, právě když v konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ pro některé indexy i, j platí zároveň $x_i \neq x_j$, $\lambda_i > 0$ a $\lambda_j > 0$. (Poslední v případě, kdy $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, znamená, že rovnost v* (2.6) *nastane, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.)*

Oba závěry předchozí věty platí i s obměnou, při které „konvexní" zaměníme za „konkávní" a nerovnost (2.6) za nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)\,,$$

které říkáme *Jensenova nerovnost pro konkávní funkci.* Tato obměna je jako obvykle důsledkem přechodu od konkávní funkce f ke konvexní funkci $-f$.

Důkaz věty 2.25.

(i) Pro pevně zvolená $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ označme

$$\alpha = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{a} \qquad \beta = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\,.$$

Pak jistě z podmínek (2.7) plyne

$$\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\alpha \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\beta = \beta\,,$$

takže $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \in I$ a (2.6) má smysl.

Důkaz nerovnosti (2.6), která je zřejmá pro $n = 1$, provedeme indukcí vzhledem k číslu n. Nechť tedy nerovnost (2.6) platí pro všechny $(n-1)$-tice s daným $n \geq 2$. Mějme n-tice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kde $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Nechť $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (jinak lze rovnou využít indukční předpoklad). Označme nyní

$$\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \qquad \text{a} \qquad \bar{x} = \frac{\lambda_1}{\mu}\,x_1 + \frac{\lambda_2}{\mu}\,x_2 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu}\,x_{n-1}\,.$$

Protože $\frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_2}{\mu} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} = 1$, je $\bar{x} \in I$. Dále zřejmě platí

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \mu\bar{x} + (1-\mu)x_n\,.$$

S využitím nerovnosti (2.5) pro $\lambda_1 = \mu$ a $\lambda_2 = 1 - \mu$ a indukčního předpokladu dostaneme

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) &= f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) \leq \mu f(\bar{x}) + (1-\mu)f(x_n) \leq \\ &\leq \mu\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\,f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\mu}\,f(x_2) + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu}\,f(x_{n-1})\right) + \lambda_n f(x_n) = \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)\,. \end{aligned}$$

(ii) Pro konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ (pro niž budeme posuzovat, zda nerovnost (2.6) s ryze konvexní funkcí f platí ostře či nikoliv) označme $y_1, y_2, \ldots, y_k$, kde $k \leq n$, všechny vzájemně různé body x_i, tj. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Dále označme μ_j součet všech λ_i, pro něž $y_j = x_i$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Pak zřejmě $\mu_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = 1$. Je zřejmé, že kritérium rovnosti v (2.6), které budeme nyní dokazovat, lze v novém označení vyjádřit takto: *platí $k \geq 2$ a $0 < \mu_j < 1$ pro alespoň jeden index j.*

Nejprve předpokládejme, že pro zkoumanou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ je nerovnost (2.6) s ryze konvexní funkcí f ostrá. Nemůže být $k = 1$, protože by platilo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ a dostali bychom rovnost. Kdyby neexistovalo $0 < \mu_j < 1$, existovalo by $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $\mu_s = 1$ a $\mu_j = 0$ pro každé $j \neq s$. Pak by platilo

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = f(y_s) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)\,,$$

což je opět spor. Dokázali jsme, že $k \geq 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$.

Nyní předpokládejme naopak, že $k \geq 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$. Pak pro všechna $j = 1, 2, \ldots, k$ je $\mu_j < 1$, a tedy i $\lambda_i < 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. Vybereme největší x_i, pro něž $\lambda_i > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to x_n. Definujme bod $\bar{x}$ stejně jako v části (i). Jako tam se ukáže, že $\bar{x}$ leží mezi těmi x_i, pro něž je $\lambda_i > 0$, a tedy $\bar{x} < x_n$. Přitom $0 < \mu < 1$. Protože předpokládáme, že f je funkce ryze konvexní, bude v řetězci vztahů na konci části (i) platit ostrá nerovnost $f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) < \mu f(\bar{x}) + (1-\mu) f(x_n)$, a tudíž i nerovnost (2.6) bude ostrá.

Důkaz věty 2.25 je ukončen. □

Z rozsáhlého množství příkladů uplatnění Jensenovy nerovnosti uvedeme v této podkapitole pouze ty ukázky, při kterých je využita Jensenova nerovnost v podobě (2.4), tj. s konvexními kombinacemi rovnými aritmetickým průměrům. V podkapitole 2.3 jsou zařazeny aplikace Jensenovy nerovnosti (2.6) s jinými konvexními kombinacemi. Konečně v podkapitole 2.4 ukážeme, že pomocí Jensenovy nerovnosti lze dokázat mnohé další (prakticky všechny nejznámější) základní nerovnosti pro konečné skupiny reálných čísel.

Z ukázek zařazených do této podkapitoly jsou příklady 2.26, 2.27, 2.29, 2.30, 2.32, 2.37, 2.38, 2.42, 2.45, 2.46, 2.48, 2.49, 2.57, 2.58 převzaty z naší diplomové práce [Pri-05]; i u těchto příkladů však uvádíme odkaz na původní zdroj.

Příklad 2.26. Dokažte, že platí nerovnost[26]

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}\,.$$

Řešení. Důkaz plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Ta je na intervalu $(0,\infty)$ ryze konkávní, neboť $f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}<0$. Pro hodnoty $x_1=3+\sqrt[3]{3}$ a $x_2=3-\sqrt[3]{3}$ tak dostáváme

$$\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2}<\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}}{2}}\,,$$

což je po úpravě dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.27. Ukažte, že pro libovolná čísla a, $b\in\langle -1,1\rangle$ platí[27]

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\le\sqrt{4-(a+b)^2}\,.$$

Řešení. Funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je na intervalu $\langle -1,1\rangle$ konkávní, což plyne z tvaru jejího grafu, kterým je polokružnice. Z Jensenovy nerovnosti tedy máme

$$\frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{2}\le\sqrt{1-\frac{(a+b)^2}{4}}\,,$$

odkud po vynásobení číslem 2 dostaneme dokazovanou nerovnost.

Příklad 2.28. Pro délky a,b,c stran libovolného ostroúhlého trojúhelníku dokažte nerovnost[28]

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}\le a+b+c\,.$$

Řešení. Všimněme si, že z kosinové věty pro ostroúhlý trojúhelník plynou nerovnosti

$$a^2+b^2-c^2>0\,,\quad b^2+c^2-a^2>0\,,\quad c^2+a^2-b^2>0\,.$$

Protože funkce $f(x)=\sqrt{x}$ definovaná na intervalu $(0,\infty)$ je jak známo konkávní, dostáváme z Jensenovy nerovnosti pro libovolné pořadí (u,v,w) trojice (a,b,c)

$$\frac{\sqrt{u^2+v^2-w^2}+\sqrt{u^2-v^2+w^2}}{2}\le\sqrt{\frac{(u^2+v^2-w^2)+(u^2-v^2+w^2)}{2}}=u\,.$$

Sečtením takových tří nerovností pro pořadí (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b) dostáváme

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}\le a+b+c\,,$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

[26] [Kou-00], str. 164
[27] [Kou-00], str. 164
[28] [Kur-07], str. 23, vlastní řešení

Příklad 2.29. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, pro něž $a+b=1$, platí[29]

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}\,.$$

Řešení. Daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2$. Ta je na intervalu $(0,\infty)$ konvexní, neboť $f''(x)=2\left(1+\frac{3}{x^4}\right)>0$ pro každé $x>0$. Platí tedy

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2,$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge 2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right)^2=\frac{25}{2},$$

což je dokazovaná nerovnost.

Poznámka. Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je roven 1. Z Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2$ dostaneme

$$\frac{1}{n}\left(\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2\right) \ge \left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}\right)^2,$$

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \ge \frac{(1+n^2)^2}{n}\,.$$

Získaný odhad lze dále zobecnit způsobem, který uvádíme jako příklad 2.48.

Příklad 2.30. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \ge \frac{1}{2}$ platí[30]

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \ge \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}\,.$$

Řešení. Protože

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2+\frac{a+b}{2}=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4+2a+2b}{4}=\frac{2a^4-a^4-2a^2b^2+2b^4-b^4+2a+2b}{4}=$$

$$=\frac{a^4+a+b^4+b}{2}-\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2,$$

[29] [Eng-98], str. 184
[30] [Kou-00], str. 165

můžeme dokazovanou nerovnost přepsat do tvaru

$$\frac{a^4+a+b^4+b}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,. \tag{$*$}$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Ta je konvexní na intervalu $\langle \frac{1}{4}, \infty)$, neboť

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \geq 2 - \frac{1}{4\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}} = 0 \quad \text{pro každé } x \in \left\langle \frac{1}{4}, \infty \right)\,.$$

Jensenova nerovnost pro funkci f má tvar

$$\lambda_1\left(x_1^2 + \sqrt{x_1}\right) + \lambda_2\left(x_2^2 + \sqrt{x_2}\right) \geq (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2 + \sqrt{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\,,$$

odkud pro čísla $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$, která díky nerovnostem $a, b \geq \frac{1}{2}$ leží v intervalu $\langle \frac{1}{4}, \infty)$, a pro koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ dostáváme nerovnost $(*)$, čímž je důkaz hotov.

Příklad 2.31. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je roven 1, platí[31]

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Řešení. Podmínka $a + b + c = 1$ nám umožňuje dokazovanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}} + \frac{b}{\sqrt{1-b}} + \frac{c}{\sqrt{1-c}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Pak již užitím funkce $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ definované na intervalu $(0, 1)$, jež je tam konvexní, neboť

$$f'(x) = \frac{2-x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad f''(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}} \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in (0, 1)\,,$$

z Jensenovy nerovnosti pro trojici čísel a, b, c dostáváme potřebné:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}} + \frac{b}{\sqrt{1-b}} + \frac{c}{\sqrt{1-c}} \geq 3 \cdot \frac{\frac{a+b+c}{3}}{\sqrt{1 - \frac{a+b+c}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

[31] [Thu-07], str. 112, uvedeno bez řešení

Příklad 2.32. Ukažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je roven 1, platí[32]

$$64 \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right).$$

Řešení. Uvedený vztah plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x),$$

která je na intervalu $(0,\infty)$ konvexní, což je zřejmé z výpočtu její druhé derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2(1+x)^2} > 0 \quad \text{pro každé } x > 0\,.$$

Jensenovu nerovnost pro funkci f tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3}\right) \leq \lambda_1 \ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right) + \lambda_2 \ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right) + \lambda_3 \ln\left(1+\frac{1}{x_3}\right).$$

Dosadíme-li sem kladná $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, dostaneme s ohledem na předpoklad $a+b+c=1$ postupnými úpravami

$$\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{3}(a+b+c)}\right) \leq \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{c}\right),$$

$$3\ln 4 \leq \ln\left[\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right],$$

$$64 \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right),$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.33. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d platí[33]

$$\left(\frac{2b+c+d}{2a+c+d}\right)^3 + \left(\frac{2c+d+a}{2b+d+a}\right)^3 + \left(\frac{2d+a+b}{2c+a+b}\right)^3 + \left(\frac{2a+b+c}{2d+b+c}\right)^3 \geq 4\,.$$

[32] [Ste-04], str. 99
[33] [Thu-07], str. 112

Řešení. Díky homogenitě lze předpokládat, že $a+b+c+d=1$. Po označení $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-d$, $t=d-a$ zřejmě $x+y+z+t=0$ a nerovnost ze zadání můžeme zapsat ve tvaru

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^3\geq 4\,.$$

Nyní vezměme funkci $f(u)=\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^3$ definovanou na intervalu $(-1,1)$. Pak z výpočtu jejích derivací

$$f'(u)=\frac{-6(1-u)^2}{(1+u)^4}\,,\qquad f''(u)=\frac{12(1-u)(3-u)}{(1+u)^5}$$

plyne, že funkce f je na daném intervalu konvexní. Proto – užitím Jensenovy nerovnosti – máme

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^3&=\\ =f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\geq 4f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)&=\\ =4f(0)=4\,,&\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.34. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a,b,c platí[34]

$$a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\,.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x)=x\ln x$ definovanou na intervalu $(0,\infty)$. Pro ni zřejmě platí

$$f'(x)=1+\ln x\qquad\text{a}\qquad f''(x)=\frac{1}{x}>0\quad\text{pro každé}\,x>0\,,$$

takže funkce f je na daném intervalu konvexní. Z Jensenovy nerovnosti proto dostáváme

$$\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3}\geq\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\,,$$

odkud po vynásobení třemi a odlogaritmování máme

$$a^ab^bc^c\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\,.$$

A protože pro trojici čísel a,b,c podle AG-nerovnosti platí

$$\frac{a+b+c}{3}\geq(abc)^{\frac{1}{3}}\,,$$

plyne odtud dokazovaná nerovnost.

[34] [Thu-07], str. 110, řešení upraveno

Poznámka. Stejným postupem lze dokázat nerovnosti

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}$$

pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$.[35]

Příklad 2.35. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b > 0$ a $x, c > 1$ platí[36]

$$x^{a^c} + x^{b^c} \geq 2x^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^c}.$$

Řešení. Na intervalu $(0, \infty)$ uvažme při pevných hodnotách x, c funkce proměnné t

$$f(t) = t^c \qquad \text{a} \qquad g(t) = x^t.$$

Obě jsou za podmínky $x, c > 1$ na daném intervalu konvexní, funkce g je navíc rostoucí. Pak ovšem i funkce $h(t) = g\left(f(t)\right) = x^{t^c}$ je konvexní. Tento obecný poznatek dokážeme úvahou o libovolné konvexní kombinaci $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$ každých dvou hodnot t_1, t_2 z daného intervalu:

$$\begin{aligned} h(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) = g\left(f(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\right) \leq g\left(\lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2)\right) \leq \\ \leq \lambda_1 g\left(f(t_1)\right) + \lambda_2 g\left(f(t_2)\right) = \lambda_1 h(t_1) + \lambda_2 h(t_2). \end{aligned}$$

Z Jensenovy nerovnosti pro funkci h po dosazení čísel a, b dostáváme

$$x^{a^c} + x^{b^c} = h(a) + h(b) \geq 2h\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2x^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^c}.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.36. Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku platí[37]

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[35] [Kou-00], str. 164

[36] [And-07], str. 144, zadání i řešení upraveno

[37] Tato klasická nerovnost (i většina dalších, které uvádíme v poznámce za řešením) nechybí v žádném přehledu trigonometrických nerovností. Podle sbírky [Bot-69], která je patrně nejúplnějším zdrojem odkazů na původ podobných nerovností, odhad součtu sinů z příkladu 2.36 jako první publikoval A. Padoa v r. 1925.

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \sin x$. Ta je na intervalu $(0, \pi)$ jak známo konkávní, a tedy z Jensenovy nerovnosti přímo dostáváme

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,,$$

čímž je důkaz hotov.

Poznámka. Stejnou metodou lze pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku odvodit nerovnosti

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}\,, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\,,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}\,, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,,$$

neboť funkce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ jsou na intervalu $(0, \pi)$ konvexní, zatímco funkce $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ jsou tam konkávní. (Neuvádíme další obdobné nerovnosti, které lze odvodit tímto způsobem také a které jsou algebraickými důsledky zapsaných nerovností díky obecným nerovnostem mezi harmonickým, geometrickým, aritmetickým a kvadratickým průměrem.)

Podobně pro vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}\,, \qquad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geq \sqrt{3}\,, \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}\,,$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}\,, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}\,,$$

neboť funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sin^2\frac{x}{2}$ jsou na $(0, \frac{\pi}{2})$ konvexní, zatímco funkce $\sin 2x$, $\cos x$, $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ jsou tam konkávní.

Příklad 2.37. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c a obsahem S platí[38]

$$ab + ac + bc \geq 4\sqrt{3}\,S\,.$$

Řešení. Obsah libovolného trojúhelníku lze vyjádřit pomocí dvou stran a úhlu, který tyto strany svírají, známými vzorci

$$S = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha\,.$$

[38] [Ste-04], str. 92

Zřejmě tedy platí
$$ab = \frac{2S}{\sin\gamma}\,, \quad ac = \frac{2S}{\sin\beta}\,, \quad bc = \frac{2S}{\sin\alpha}\,.$$
Sečtením těchto rovností dostaneme
$$ab + ac + bc = 2S\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right)\,. \tag{$*$}$$
Z nerovnosti mezi harmonickým a aritmetickým průměrem trojice kladných čísel $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$, jež je tvaru
$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}} \le \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\,,$$
a z výsledku příkladu 2.36 plyne odhad
$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \ge 2\sqrt{3}\,,$$
takže s využitím rovnosti $(*)$ můžeme psát
$$ab + ac + bc \ge 2S\,2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,S\,.$$

Příklad 2.38. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a obsahem S platí[39]
$$a^2 + b^2 + c^2 \ge (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}\,S.$$

Řešení. Vyjdeme z kosinové věty pro stranu a, kterou můžeme upravit následujícím způsobem:
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = \\ &= (b-c)^2 + \frac{4S(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = (b-c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,. \end{aligned}$$
Stejně tak dostaneme i rovnice pro zbylé dvě strany trojúhelníka
$$b^2 = (c-a)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,,$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\,.$$
Sečtením těchto tři rovností dostáváme
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4S\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)\,. \tag{$*$}$$

[39] [Ste-04], str. 102

V poznámce za příkladem 2.36 však byla dokázána nerovnost

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}\,,$$

takže z rovnosti $(*)$ dostáváme

$$a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}\,S\,,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.39. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a,b,c, pro něž $a+b+c=abc$, platí[40]

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{3}{2}\,.$$

Řešení. Nechť $\alpha=\operatorname{arctg}a$, $\beta=\operatorname{arctg}b$, $\gamma=\operatorname{arctg}c$. Protože a,b,c jsou čísla kladná, jistě platí $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$. Dále z rovnosti $a+b+c=abc$ po dosazení máme

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\,,$$

odkud (s využitím vlastností funkce tangens) za podmínky $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq1$ dostáváme

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi-\alpha-\beta)\,,$$

takže $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Zbylý případ $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$ nastat nemůže, neboť pak by muselo platit $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\gamma$ neboli $a+b=0$, což je spor.

Nyní si všimněme, že pomocí čísel α,β,γ můžeme dokazovanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}\,,$$

neboť zřejmě za předpokladu $\cos x\neq0$ platí vzorec

$$\cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}\,.$$

Získaná nerovnost pro vnitřní úhly α,β,γ libovolného ostroúhlého trojúhelníku však platí podle poznámky za příkladem 2.36, čímž je důkaz hotov.

[40] [exc-01], úloha South Korean MO 1998

Příklad 2.40. Pro libovolná čísla x, y z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, kde $x + y < \frac{\pi}{2}$, dokažte nerovnosti[41]

$$\sqrt{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \leq \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ konvexní, takže z Jensenovy nerovnosti přímo plyne pravá nerovnost ze zadání

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}$$

pro libovolná čísla x, y z uvedeného intervalu (bez omezení podmínkou $x + y < \frac{\pi}{2}$).

Levá nerovnost ze zadání přepsaná do tvaru

$$\frac{\ln(\operatorname{tg} x) + \ln(\operatorname{tg} y)}{2} \leq \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}\right)$$

je Jensenovou nerovností pro funkci $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$. Ta je však konkávní pouze na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, neboť

$$f''(x) = \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,,$$

a proto ji nemůžeme využít pro některé dvojice čísel $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, byť platí $x+y < \frac{\pi}{2}$. Místo toho pro taková x, y za předpokladu $x \geq y$ označíme $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$ a z nerovností $0 \leq b < a < \frac{\pi}{4}$ odvodíme nerovnost, kterou máme dokázat:

$$\operatorname{tg}(a+b) \cdot \operatorname{tg}(a-b) \leq \operatorname{tg}^2 a\,.$$

Pro pevné a $(0 < a < \frac{\pi}{4})$ uvážíme na intervalu $\langle 0, a\rangle$ funkci

$$f(t) = \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}(a+t) \cdot \operatorname{tg}(a-t)\,.$$

Ukážeme, že $f(t) > 0$ pro každé $t \in (0, a)$. Protože $f(0) = 0$ a

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{\sin(a+t)\cos(a+t) - \sin(a-t)\cos(a-t)}{\cos^2(a-t)\cos^2(a+t)} = \\
&= \frac{2(\cos^2 a \cdot \sin t \cos t - \sin^2 a \cdot \sin t \cos t)}{\cos^2(a-t)\cos^2(a+t)} = \\
&= \frac{\cos 2a \cdot \sin 2t}{\cos^2(a+t)\cos^2(a-t)} > 0 \quad \text{pro všechna} \quad t \in (0, a)\,,
\end{aligned}$$

je tak důkaz hotov.

[41] [Ben-05], str. 185, vlastní řešení

Příklad 2.41. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, kde $ab < 1$, platí[42]

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{1-ab+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \le \frac{a+b}{2}\,.$$

Řešení. Ukážeme, že požadovaný výsledek plyne z nerovností

$$\sqrt{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \le \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \le \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}\,.$$

dokázaných v příkladu 2.40. Nejprve pomocí goniometrických vzorců upravíme prostřední výraz. Pro libovolná čísla $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x+y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}\cdot\frac{1+\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}} = \frac{\sin(x+y)}{1+\cos(x+y)} =$$

$$= \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{1+\cos x\cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 y)}}\,.$$

Nyní po substituci $x = \operatorname{arctg} a$, $y = \operatorname{arctg} b$ dostáváme z předpokladu $ab < 1$ nerovnost $x+y < \frac{\pi}{2}$, takže můžeme uplatnit zmíněný výsledek příkladu 2.40, z něhož po dosazení $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg} y$ dostaneme

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{1-ab+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \le \frac{a+b}{2}\,,$$

což je požadovaný výsledek.

Příklad 2.42. Ukažte, že ze všech konvexních n-úhelníků vepsaných do dané kružnice má největší obsah právě pravidelný n-úhelník.[43]

Řešení. Jistě můžeme uvažovat jen takové vepsané n-úhelníky, které obsahují střed O dané kružnice. Je patrné, že každý takový konvexní n-úhelník se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný hlavní vrchol ve středu O. Obsah každého takového n-úhelníka je tedy roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Je-li daná kružnice jednotková, pak pro obsah S každého z nich platí

$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi\,,$$

kde φ je úhel při středu O. Obsah A celého n-úhelníka tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k\,, \quad \text{kde} \quad 0 < \varphi_k < \pi \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n}\varphi_k = 2\pi.$$

[42] [Ben-05], str. 161
[43] [Ste-04], str. 100

Je dobře známo, že funkce $f(x) = \sin x$ je ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, a proto z Jensenovy nerovnosti plyne

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\varphi_k \le \frac{1}{2}\, n \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right) = \frac{1}{2}\, n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = A',$$

kde A' je zřejmě obsah pravidelného n-úhelníka. A protože rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$, tedy $\varphi_k = \frac{2\pi}{n}$ pro všechna $1 \le k \le n$, je tvrzení o maximálním obsahu pravidelného n-úhelníka dokázáno.

Příklad 2.43. Dokažte, že pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z intervalu $(0, \pi)$ a jejich aritmetický průměr $p = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ platí[44]

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right) \le \left(\frac{\sin p}{p}\right)^n .$$

Řešení. Po zlogaritmování obou stran nerovnosti, které jsou vzhledem k podmínce $x_i \in (0, \pi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kladné, dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{\sin x_i}{x_i} \le n \cdot \ln\frac{\sin p}{p},$$

která za předpokladu, že funkce $f(t) = \ln\frac{\sin t}{t}$ je na intervalu $(0, \pi)$ konkávní, plyne přímo z Jensenovy nerovnosti. Pro derivace funkce f však platí

$$f'(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}, \qquad f''(t) = \frac{-1}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2 t - t^2}{t^2 \sin^2 t},$$

takže $f''(t) < 0$ pro každé $t > 0$, neboť tehdy $|\sin t| < t$. Poslední nerovnost je zřejmá, je-li $t \ge \pi$; na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ je ovšem funkce $g(t) = t - |\sin t| = t - \sin t$ podle první derivace rostoucí a $g(0) = 0$, takže $g(t) > 0$ pro každé $t \in (0, \pi\rangle$. Důkaz je tak hotov.

Příklad 2.44. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla větší než -1 a číslo p značí jejich aritmetický průměr. Dokažte nerovnost[45]

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_n+1} \ge \frac{n}{p+1}.$$

[44] [And-07], str. 147
[45] [Kur-07], str. 11

Řešení. Uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\,.$$

Z výpočtu její první a druhé derivace

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

plyne, že je na intervalu $(-1, \infty)$ konvexní, a proto z Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+1} \geq f(p)\,,$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.45. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí[46]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}\,,$$

kde $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{x}{S-x}$ je na intervalu $(0, S)$ konvexní, neboť $f''(x) = \frac{S}{(S-x)^3} > 0$ pro každé $x \in (0, S)$. Z Jensenovy nerovnosti pro funkci f a koeficienty $\lambda_i = \frac{1}{n}$ proto dostáváme

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}\right) \geq \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{S - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = \frac{S}{Sn-S} = \frac{1}{n-1}\,,$$

odkud dokazovaná nerovnost vyplývá.

Poznámka. V předchozím příkladu jsme cyklickým způsobem sečetli zlomky, kde v čitateli bylo jedno z daných čísel a ve jmenovateli $n-1$ ostatních čísel. V příkladu 2.46 se budeme zabývat zobecněním takových součtů na zlomky, kdy v čitateli bude součet k po sobě jdoucích daných čísel a ve jmenovateli součet $n-k$ ostatních čísel.

[46] [Bag-05], str. 410

Příklad 2.46. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a pro každé přirozené číslo $k = 2, 3, \ldots, n-1$ platí[47]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \ldots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \ldots + a_{i+k})} \geq \frac{nk}{n-k},$$

kde $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a $a_{i+n} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Řešení. Jako v příkladu 2.45 uplatníme Jensenovu nerovnost k funkci $f(x) = \frac{x}{S-x}$ konvexní na intervalu $(0, S)$, čili

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S - x_i} \geq \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{S - \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

a dosadíme do ní čísla $x_i \in (0, S)$ zvolená takto:

$$x_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Protože pro jejich součet platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k \cdot S,$$

dostáváme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \ldots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \ldots + a_{i+k})} \geq \frac{\frac{k}{n} \cdot S}{S - \frac{k}{n} \cdot S},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + \ldots + a_{i+k}}{S - (a_{i+1} + \ldots + a_{i+k})} \geq \frac{nk}{n-k},$$

což je dokazovaný výsledek.

Příklad 2.47. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$, jejichž součet je roven 1, platí pro každé reálné $s > 0$ nerovnosti:[48]

a) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i)^s} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^s,$$ b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i^s)^{\frac{1}{s}}} \geq \frac{n}{(n^s-1)^{\frac{1}{s}}}.$$

[47] [Bag-05], str. 410

[48] Vlastní námět, inspirováno [Thu-07], str. 68.

Řešení.

a) Na intervalu $(0,1)$ uvažme funkci $f(x) = \frac{x}{(1-x)^s}$. Pro ni platí

$$f'(x) = \frac{1-(1-s)x}{(1-x)^{1+s}}\,, \qquad f''(x) = \frac{s(2+(s-1)x)}{(1-x)^{2+s}}\,.$$

Funkce f je tedy na $(0,1)$ konvexní, právě když

$$s(2+(s-1)x) > 0 \qquad \text{pro každé } x \in (0,1)\,,$$

což nastane, právě když $s > 0$. Dokazovaná nerovnost tedy plyne přímo z Jensenovy nerovnosti pro funkci f, podle které z podmínky $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i)^s} = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = n \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^s,$$

což je požadovaný výsledek.

b) Pro funkci $f(x) = \frac{x}{(1-x^s)^{\frac{1}{s}}}$ uvažovanou na intervalu $(0,1)$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^s)^{\frac{1+s}{s}}}\,, \qquad f''(x) = \frac{x^{s-1}(1+s)}{(1-x^s)^{\frac{1+2s}{s}}}\,.$$

Zřejmě tedy $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in (0,1)$ a funkce f je na uvažovaném intervalu konvexní. Můžeme tedy využít Jensenovu nerovnost, ze které za podmínky ze zadání dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i^s)^{\frac{1}{s}}} = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = n \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}} = \frac{n}{(n^s-1)^{\frac{1}{s}}}\,,$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.48. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je roven 1, a pro libovolné kladné reálné číslo p platí[49]

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}\,.$$

[49] [Ste-04], str. 206

Řešení. Uvažme na intervalu $(0,1)$ funkci $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^p$, pro niž platí

$$f'(x) = p\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= p\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-2}\left[(p-1)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2}{x^3}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] = \\ &= p\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p}\big(x(1+x^2)\big)^{-2}\left[2(1+x^2) - (1-x^2)^2 + p(1-x^2)^2\right] = \\ &= p\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p}(x+x^3)^{-2}\left[1 + 3x^2 + (1-x^2)x^2 + p(1-x^2)^2\right]. \end{aligned}$$

Protože $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (0,1)$, je funkce f na uvažovaném intervalu konvexní a tedy z Jensenovy nerovnosti pro čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dostáváme

$$f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}},$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.49. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pro něž $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, platí[50]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i} - a_i\right) \geq (n-1)\sqrt{n}.$$

Řešení. Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$, konvexní na intervalu $(0,\infty)$, neboť $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} > 0$, má tvar

$$\lambda_1\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1}\right) + \ldots + \lambda_n\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}} - \sqrt{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}.$$

Po dosazení $x_i = a_i^2$ a $\lambda_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tedy dostaneme

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{a_1} - a_1\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - a_n\right)\right] \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} - \frac{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}{\sqrt{n}},$$

$$\left(\frac{1}{a_1} - a_1\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) \geq n\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i} - a_i\right) \geq (n-1)\sqrt{n}.$$

[50] [Kou-00], str. 164

Příklad 2.50. Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou kladná reálná čísla s vlastností $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Dokažte, že platí[51]

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{3n}{2}\,.$$

Řešení. Funkce

$$f(x) = x + \frac{1}{1+x}$$

definovaná na intervalu $(0, \infty)$ je konvexní, neboť $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} > 0$ pro každé $x > 0$. Z Jensenovy nerovnosti tak pro levou stranu dokazované nerovnosti dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{1+a_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right).$$

Dále z AG-nerovnosti máme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = 1\,,$$

takže stačí dokázat, že $f(x) \geq \frac{3}{2}$ pro každé $x \geq 1$. To je však snadné, neboť pro všechna taková x platí

$$f(x) - \frac{3}{2} = \frac{(x-1)(2x+1)}{2(x+1)} \geq 0\,.$$

Příklad 2.51. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí[52]

$$n \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \right) \left(n + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost nejdříve upravíme:

$$\frac{n\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)}{n + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{1+a_1} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\,,$$

$$\frac{n}{\frac{1}{\frac{a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n}} + 1} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1^{-1}} + 1} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{a_n^{-1}} + 1}\,.$$

[51] [Ber-04], str. 137
[52] [Leh-06], str. 73

Nyní vezměme funkci

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}\,.$$

Ta je na intervalu $(0, \infty)$ ryze konkávní, neboť

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} < 0 \quad \text{pro všechna } x > 0\,.$$

Užitím Jensenovy nerovnosti proto pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ dostáváme

$$\frac{n}{\frac{1}{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} + 1} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1} + 1} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{x_n} + 1}\,,$$

přitom rovnost nastane, jedině když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Po substituci $x_i = \frac{1}{a_i}$ přejde odvozená nerovnost ve výše upravenou dokazovanou nerovnost. Tím je důkaz hotov. Dodejme, že rovnost v ní nastane pouze v případě $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Příklad 2.52. Pro kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ označme $p = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Pro každé $r > 0$ dokažte:[53]

a) Je-li $a_i \leq \frac{1}{r}$ $(1 \leq i \leq n)$, pak platí

$$\frac{1}{(1+a_1)^r} + \frac{1}{(1+a_2)^r} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^r} \leq \frac{n}{(1+p)^r}\,.$$

b) Je-li $a_i \geq \frac{1}{r}$ $(1 \leq i \leq n)$, pak platí

$$\frac{1}{(1+a_1)^r} + \frac{1}{(1+a_2)^r} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^r} \geq \frac{n}{(1+p)^r}\,.$$

(Při pevném $r > 0$ pro mnohé n-tice $a_1, a_2, \dots, a_n$ nenastane ani případ a), ani případ b), neboť podmínky $p \leq \frac{1}{r}$, resp. $p \geq \frac{1}{r}$ jsou pro ně pouze nutné, nikoliv postačující.)

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = (1 + \mathrm{e}^x)^{-r}$ definovanou na množině všech reálných čísel. Z vyjádření jejích derivací

$$f'(x) = \frac{-r\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^{r+1}}\,, \qquad f''(x) = \frac{r\,\mathrm{e}^x(r\,\mathrm{e}^x - 1)}{(1+\mathrm{e}^x)^{r+2}}$$

plyne, že funkce f je na intervalu $(-\infty, \ln\frac{1}{r}\rangle$ konkávní a na $\langle \ln\frac{1}{r}, \infty)$ konvexní. Z Jensenovy nerovnosti pro n-tici čísel $x_i = \ln a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ proto v případě $a_i \leq \frac{1}{r}$ $(1 \leq i \leq n)$ dostáváme

$$\frac{1}{(1+a_1)^r} + \frac{1}{(1+a_2)^r} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^r} \leq n \cdot \frac{1}{(1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^r}$$

[53] Vlastní námět, který je zobecněním příkladu 5.32 v [Thu-07], ve kterém $r = 1$.

a v případě $a_i \geq \frac{1}{r}$ $(1 \leq i \leq n)$

$$\frac{1}{(1+a_1)^r} + \frac{1}{(1+a_2)^r} + \ldots + \frac{1}{(1+a_n)^r} \geq n \cdot \frac{1}{(1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n})^r},$$

což jsou dokazované nerovnosti za uvedených podmínek.

Poznámka. Nerovnosti z předchozího příkladu jsou za slabších předpokladů rovněž dokázány metodou nelineárních odhadů v příkladech 1.84, 1.85, resp. 1.86, a to pro konkrétní hodnoty $r = 1$, $r = \frac{1}{2}$, resp. $r = 2$.

Příklad 2.53. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí[54]

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1 a_2 + a_2^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2 a_3 + a_3^2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n a_1 + a_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$. Z výpočtu jejích derivací

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 1\right)(\mathrm{e}^x + 1)^{-\frac{3}{2}},$$
$$f''(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 1\right)(\mathrm{e}^x + 1)^{-\frac{5}{2}}$$

vidíme, že je konvexní na celé množině reálných čísel. Proto Jensenova nerovnost pro čísla

$$x_1 = \ln\frac{a_1}{a_2}, \quad x_2 = \ln\frac{a_2}{a_3}, \quad \ldots, \quad x_n = \ln\frac{a_n}{a_1}$$

má tvar

$$f\left(\ln\frac{a_1}{a_2}\right) + f\left(\ln\frac{a_2}{a_3}\right) + \ldots + \left(\ln\frac{a_n}{a_1}\right) \geq nf\left(\frac{\ln\frac{a_1}{a_2} + \ln\frac{a_2}{a_3} + \ldots + \ln\frac{a_n}{a_1}}{n}\right).$$

A protože součet logaritmů na pravé straně je roven nule, dostáváme po dosazení

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1 a_2 + a_2^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2 a_3 + a_3^2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n a_1 + a_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}},$$

což jsme měli dokázat. Dodejme, že rovnost v dokazované nerovnosti nastane pouze v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, neboť funkce f je na $\mathbb{R}$ ryze konvexní.

[54][Kur-07], str. 23

Příklad 2.54. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 2$, jejichž součet je roven 1, platí[55]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} \geq \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Ta je na intervalu $(0,1)$, kde čísla a_i podle zadání všechna leží, konvexní, neboť

$$f'(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}, \qquad f''(x) = \frac{4-x}{4\sqrt{(1-x)^5}} > 0 \quad \text{pro každé } x \in (0,1).$$

Z Jensenovy nerovnosti a podmínky $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ tedy plyne

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} \geq \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Nerovnost ze zadání příkladu tak bude dokázána, ověříme-li, že platí

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} \qquad \text{neboli} \qquad \sqrt{\frac{1}{n}} \geq \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}}{n}.$$

To však ihned plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $g(x) = \sqrt{x}$, jež je na intervalu $(0,1)$ konkávní. Aritmetický průměr čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je totiž roven právě zlomku $\frac{1}{n}$. Tím je celý důkaz hotov.

Příklad 2.55. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ platí[56]

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^n} \geq \frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}{(n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)^n}.$$

[55] [And-07], str. 147, řešení upraveno
[56] [Hun-07], str. 70

Řešení. Dokazovanou nerovnost můžeme zapsat a dále upravit následujícím způsobem:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i} \geq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \right)^n ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{a_i}{1-a_i}\right) \geq n \ln \left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{1 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \right),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\ln a_i - \ln(1-a_i)\big) \geq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Poslední nerovnost je však Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$. Ta je skutečně na intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$ konvexní, neboť

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \qquad \text{pro všechna } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

neboť pro taková x platí $x > 1 - x > 0$. Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.56. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \dots n)$ platí[57]

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^n - 1) \leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i - 1\right)^n .$$

Řešení. Nerovnost má nezápornou pravou stranu, takže je triviální, je-li $a_i = 1$ pro některé i, kdy levá strana je rovna nule. Proto budeme dále předpokládat, že $a_i > 1$ pro každé i. Na intervalu $(0, \infty)$ vezměme funkci $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$. Pro ni platí

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}, \qquad f''(x) = \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0 \quad \text{pro každé } x \in (0, \infty).$$

Funkce f je tedy na daném intervalu konkávní, a proto z Jensenovy nerovnosti pro n-tici kladných čísel $x_i = \ln a_i^n$ máme

$$\ln(a_1^n - 1) + \ln(a_2^n - 1) + \dots + \ln(a_n^n - 1) \leq n \cdot \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln a_1^n + \ln a_2^n + \dots + \ln a_n^n}{n}} - 1\right),$$

odkud po odlogaritmování dostáváme, co jsme měli dokázat.

[57] [Thu-07], str. 113, uvedeno bez řešení

Příklad 2.57. Dokažte, že pro libovolnou n-tici reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ z intervalu $(0, \frac{1}{2})$ platí[58]

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^n} \le \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)^n}.$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost můžeme postupně zapsat ve tvaru

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)} \le \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}\right)^n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i} \le n \ln \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}.$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ a spočtěme její druhou derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)}, \qquad f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}.$$

Vidíme, že $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \frac{1}{2})$, takže funkce f je na tomto intervalu konkávní. Jensenova nerovnost pro funkci f bude mít tedy tvar

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i}\right) \le \ln \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{1-a_i} \le n \ln \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)},$$

což jsme měli dokázat.

[58] [Kou-00], str. 165

Příklad 2.58. Dokažte, že pro dvě libovolné n-tice nezáporných reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ platí[59]

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \dots b_n)^{\frac{1}{n}} \leq \big((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)\big)^{\frac{1}{n}} .$$

Řešení. Abychom dokázali, že daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti, bude nutné ji nejdříve upravit. Protože je nerovnost triviální v případě, kdy $a_i = 0$ pro některé i, předpokládejme dále, že $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, a vydělme nejprve obě strany kladným výrazem $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$:

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \dots b_n)^{\frac{1}{n}}}{(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\big((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)\big)^{\frac{1}{n}}}{(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}} .$$

Dále v této nerovnosti označme $c_k = \frac{b_k}{a_k} > 0$ pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme

$$1 + (c_1 c_2 \dots c_n)^{\frac{1}{n}} \leq \big((1 + c_1)(1 + c_2) \dots (1 + c_n)\big)^{\frac{1}{n}} .$$

Nyní dosaďme $c_k = \mathrm{e}^{d_k}$, kde $d_k = \ln c_k$, a celou nerovnost zlogaritmujme. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \left(\mathrm{e}^{d_1}\,\mathrm{e}^{d_2} \dots \mathrm{e}^{d_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) &\leq \ln\left(\left(1 + \mathrm{e}^{d_1}\right)\left(1 + \mathrm{e}^{d_2}\right) \dots \left(1 + \mathrm{e}^{d_n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} , \\
\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}}\right) &\leq \frac{1}{n} \ln\left(\left(1 + \mathrm{e}^{d_1}\right)\left(1 + \mathrm{e}^{d_2}\right) \dots \left(1 + \mathrm{e}^{d_n}\right)\right) , \\
\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_k}\right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{d_k}\right) ,
\end{aligned}$$

což je však Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$. Zbývá tedy ověřit, zda je funkce f konvexní (na celém $\mathbb{R}$, neboť d_k mohou být jak kladná, tak záporná čísla). To zjistíme z výpočtu její druhé derivace:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} , \\
f''(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} > 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ konvexní a důkaz je tak hotov.

[59] [Ste-04], str. 100

Příklad 2.59. Pro daná kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \ge 3$, označme

$$p = \frac{1}{1 + a_2^2 a_3 \dots a_n} + \frac{1}{1 + a_1 a_3^2 \dots a_n} + \dots + \frac{1}{1 + a_1^2 a_2 \dots a_{n-1}}\,.$$

Dokažte nerovnost[60]

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \ge \frac{np}{n-p} \cdot a_1 a_2 \dots a_n\,.$$

Řešení. Pro hodnotu p zřejmě platí $0 < p < n$ a lze ji zapsat ve tvaru

$$p = \frac{1}{1 + b_1^{-1}} + \frac{1}{1 + b_2^{-1}} + \dots + \frac{1}{1 + b_n^{-1}}\,,$$

kde (při označení $a_{n+1} = a_1$) je číslo b_k pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ dáno vztahem

$$b_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} > 0\,.$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Ta je na potřebném intervalu $(0, \infty)$ konkávní, jak plyne z jejího vyjádření $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$, takže užitím Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
nf\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) &\ge f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)\,,\\
\frac{n(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{b_1 + b_2 + \dots b_n + n} &\ge \frac{1}{1 + b_1^{-1}} + \frac{1}{1 + b_2^{-1}} + \dots + \frac{1}{1 + b_n^{-1}} = p\,,\\
n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) &\ge p(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + np\,,\\
b_1 + b_2 + \dots + b_n &\ge \frac{np}{n-p}\,,
\end{aligned}$$

odkud již po dosazení hodnot b_k a vynásobení obou stran číslem $a_1 a_2 \dots a_n$ dostaneme dokazovanou nerovnost.

Příklad 2.60. Dokažte, že pokud je součin kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ roven 1, pak platí[61]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + n - 1} \le 1\,. \tag{$*$}$$

[60] [Kur-07], str. 15, zadání upraveno
[61] [Kur-05], str. 14, zobecněno

Řešení. V případě $n = 2$ je $(*)$ zřejmou rovností, takže se budeme dále zabývat pouze případem $n \geq 3$. S ohledem na symetrii předpokládejme, že $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Nerovnost $(*)$ dokážeme ve třech možných případech:

$$\text{(i) } a_{n-1} \geq n-1\,, \quad \text{(ii) } a_{n-1} < n-1,\ a_n > n-1\,, \quad \text{(iii) } a_n \leq n-1\,.$$

(i) Z nerovností $a_{n-1} \geq n-1$ a $a_n \geq n-1$ (připomeňme, že $a_n \geq a_{n-1}$) plyne

$$\frac{1}{a_{n-1}+n-1} \leq \frac{1}{2(n-1)} \quad \text{a} \quad \frac{1}{a_n+n-1} \leq \frac{1}{2(n-1)}\,.$$

Sečteme-li tyto dvě nerovnosti se zřejmými nerovnostmi

$$\frac{1}{a_i+n-1} < \frac{1}{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)\,,$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i+n-1} < \frac{n-2}{n-1} + \frac{2}{2(n-1)} = 1\,.$$

(ii) Položme $x_k = \ln a_k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, takže z podmínky $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ plyne $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + n - 1}$. Její druhá derivace má vyjádření

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - n + 1)}{(\mathrm{e}^x + n - 1)^3}\,,$$

takže je funkce f konkávní na intervalu $(-\infty, r_n\rangle$, kde $r_n = \ln(n-1)$. Na tomto intervalu díky předpokladu $a_{n-1} < n-1$, z něhož přímo plyne $a_i < n-1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$, leží všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Proto podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i+n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{a_n+n-1} \leq (n-1) f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + \frac{1}{a_n+n-1} = \\ &= (n-1) f\left(\frac{-x_n}{n-1}\right) + \frac{1}{a_n+n-1} = \frac{n-1}{\mathrm{e}^{\frac{-x_n}{n-1}} + n - 1} + \frac{1}{a_n+n-1} = \\ &= \frac{(n-1)p}{(n-1)p+1} + \frac{1}{p^{n-1}+n-1}\,,\end{aligned}$$

kde $p = \sqrt[n-1]{a_n} > \sqrt[n-1]{n-1} > 1$. Proto bude platit ostrá nerovnost $(*)$, když ukážeme, že pro každé $p > 1$ platí

$$\frac{(n-1)p}{(n-1)p+1} + \frac{1}{p^{n-1}+n-1} = 1 - \frac{1}{(n-1)p+1} + \frac{1}{p^{n-1}+n-1} < 1\,.$$

Chceme tedy dokázat, že pro jmenovatele posledních dvou zlomků platí pro každé $p > 1$ nerovnost $(n-1)p+1 < p^{n-1}+n-1$. Položíme-li $p = 1+\varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$, pak podle binomické věty $p^{n-1} = (1+\varepsilon)^{n-1} > 1 + (n-1)\varepsilon$, odkud plyne

$$p^{n-1} + n - 1 > 1 + (n-1)\varepsilon + (n-1) = (n-1)(\varepsilon+1) + 1 = (n-1)p + 1$$

a důkaz je hotov.

(iii) Protože nyní všechna čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ leží v intervalu $(-\infty, r_n\rangle$, na kterém je funkce f zavedená v případě (ii) konkávní, můžeme nyní použít Jensenovu nerovnost pro celou n-tici hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$. Podle ní platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + n - 1} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le n \cdot f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n \cdot f(0) = 1\,.$$

Tím je celý důkaz hotov.

Příklad 2.61. Dokažte, že pro libovolná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ splňující podmínku $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ platí[62]

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \le \frac{n}{3}\,.$$

Řešení. Případ $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ je triviální. Předpokládejme proto dále, že mezi čísly x_i je k čísel záporných, např. $x_1, x_2, \dots, x_k$ a $n-k$ čísel $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ je nezáporných. Označme

$$s = -x_1^3 - x_2^3 - \dots - x_k^3 = x_{k+1}^3 + x_{k+2}^3 + \dots + x_n^3 > 0\,. \tag{$*$}$$

Z nerovnosti $x \le x^3$, jež zřejmě platí pro každé $x \in \langle -1, 0\rangle$, vyplývá odhad

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \le x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 = -s\,. \tag{$**$}$$

Jak je dobře známo, funkce $\sqrt[3]{x}$ je na intervalu $\langle 0, \infty)$ konkávní, takže podle Jensenovy nerovnosti pro $n-k$ čísel x_i^3 $(k+1 \le i \le n)$ platí

$$\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n}{n-k} \le \sqrt[3]{\frac{x_{k+1}^3 + x_{k+2}^3 + \dots + x_n^3}{n-k}} = \sqrt[3]{\frac{s}{n-k}}\,. \tag{$\sharp$}$$

Sečteme-li nyní nerovnost $(**)$ s $(n-k)$-násobkem nerovnosti $(\sharp)$, dostaneme

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \le \sqrt[3]{(n-k)^2 s} - s\,.$$

Z dvojího vyjádření $(*)$ hodnoty s plyne $s \le \min\{k, n-k\}$, takže úloha bude vyřešena, když dokážeme implikaci

$$0 \le s \le \min\{k, n-k\} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{(n-k)^2 s} - s \le \frac{n}{3}\,. \tag{$\sharp\sharp$}$$

pro každé $k = 1, 2, \dots, n-1$. Rozlišíme, zda $k \le n-k$, nebo naopak $k > n-k$.

[62] [Mil-06], str. 12, řešení upraveno

Zabývejme se nejprve případem, kdy $k \leq n-k$ neboli $k \leq \frac{n}{2}$. Máme ukázat, že tehdy funkce $g(s) = \sqrt[3]{(n-k)^2 s} - s$ splňuje nerovnost $g(s) \leq \frac{n}{3}$ pro každé $s \in \langle 0, k \rangle$. Tato funkce má na $(0, \infty)$ rostoucí derivaci

$$g'(s) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{n-k}{s}\right)^2} - 1$$

s nulovým bodem $s_0 = \frac{n-k}{\sqrt{27}}$, takže její globální maximum na intervalu $\langle 0, \infty)$ má hodnotu

$$g(s_0) = \sqrt[3]{\frac{(n-k)^3}{\sqrt{27}}} - \frac{n-k}{\sqrt{27}} = \frac{2(n-k)}{\sqrt{27}}\,.$$

Snadno se ověří platnost ekvivalencí

$$s_0 < k \Leftrightarrow k > \frac{n}{1+\sqrt{27}} \doteq 0{,}161n \qquad \text{a} \qquad g(s_0) < \frac{n}{3} \Leftrightarrow k > \frac{(2-\sqrt{3})n}{2} \doteq 0{,}134n\,.$$

Využijeme je takto: je-li $s_0 < k$, platí $g(s) \leq g(s_0) < \frac{n}{3}$ pro každé $s \in \langle 0, k \rangle$, jak jsme chtěli ukázat; je-li naopak $s_0 \geq k$, je funkce g na $\langle 0, k \rangle$ rostoucí, takže stačí ověřit nerovnost $g(k) \leq \frac{n}{3}$. Upravme ji do tvaru $n + 3k \geq 3\sqrt[3]{k(n-k)^2}$ a porovnejme rozdíl třetích mocnin obou stran

$$(n+3k)^3 - 27k(n-k)^2 = n^3 - 18n^2k + 81nk^2 = n(n-9k)^2 \geq 0\,.$$

Tím je důkaz implikace ($\sharp\sharp$) v prvním případě hotov.

V případě $k > n-k$ můžeme v předchozí části zaměnit číslo k číslem $n-k$ a dospět tak k závěru, že pro každé $s \in \langle 0, n-k \rangle$ platí druhá z nerovností

$$\sqrt[3]{(n-k)^2 s} - s \leq \sqrt[3]{k^2 s} - s \leq \frac{n}{3}\,.$$

Rovnost v první zřejmé nastane pouze pro $s = 0$, kdy je však druhá nerovnost ostrá, takže ve druhém případě platí i ostrá nerovnost v závěru implikace ($\sharp\sharp$).

Celé řešení příkladu je hotovo. Rovnost $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{n}{3}$ nastane pouze v případě, kdy $\frac{8}{9}n$ čísel x_i je rovno $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{9}n$ čísel x_i je rovno -1 (číslo n tak musí být násobkem devíti).

Příklad 2.62. Dokažte, že pro kladná čísla $p, a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že

$$\frac{1}{a_1+p} + \frac{1}{a_2+p} + \ldots + \frac{1}{a_n+p} = \frac{1}{p}\,,$$

platí[63]

$$\frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{n-1} \geq p\,.$$

[63]Vlastní námět, inspirováno [Mil-06], str. 16.

Řešení. Nechť $x_k = \frac{1}{a_k+p}$ neboli $a_k = \frac{1}{x_k} - p$ pro každé k. Pak zřejmě $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{p}$ a protože

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k} - p\right) = \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_k} - p\right)},$$

stačí k určení minima součinu čísel a_k nalézt minimum součtu hodnot $\ln\left(\frac{1}{x_k} - p\right)$. Zřejmě pro příslušnou funkci proměnné x platí

$$\left(\ln\left(\frac{1}{x} - p\right)\right)' = \frac{-1}{x - px^2},$$

$$\left(\ln\left(\frac{1}{x} - p\right)\right)'' = \frac{1 - 2px}{(x - px^2)^2}.$$

Vidíme, že funkce $\ln\left(\frac{1}{x} - p\right)$ je ryze konvexní na intervalu $(0, \frac{1}{2p}\rangle$. Čísla x_k byla zavedena tak, že leží v intervalu $(0, \frac{1}{p})$. Kdyby všechna ležela v intervalu $(0, \frac{1}{2p}\rangle$, mohli bychom uplatnit Jensenovu nerovnost

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_k} - p\right) \geq \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k} - p\right) = \ln(np - p)$$

a dostat tak odhad

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \geq \mathrm{e}^{n \ln(np-p)} = (np - p)^n,$$

který je zřejmě ekvivalentní s dokazovanou nerovností.

V případě, kdy některá čísla x_k leží v intervalu $(\frac{1}{2p}, \frac{1}{p})$, provedeme s n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ několikrát za sebou úpravu následujícího typu: vybereme dva indexy $i \neq j$ a složky x_i, x_j zaměníme dvěma stejnými čísly $\frac{1}{2}(x_i + x_j)$. Součet $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ rovný $\frac{1}{p}$ se přitom nezmění. Z nerovnosti

$$\frac{1}{2}(x_i + x_j) \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{2p}$$

navíc plyne, že po konečném počtu takových úprav s vhodně volenými dvojicemi indexů (i, j) dostaneme n-tici $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, pro kterou již nerovnost $x'_k \leq \frac{1}{2p}$ bude platit pro každé k, takže popsané uplatnění Jensenovy nerovnosti k této n-tici bude korektní. Zbývá ukázat, že při každé jednotlivé úpravě se součet hodnot $\ln\left(\frac{1}{x_k} - p\right)$ zmenší, nejsou-li měněná čísla x_i, x_j stejná (úprava v případě $x_i = x_j$ je zbytečná). Označíme-li $a = x_i$, $b = x_j$, pak pro kladná $a \neq b$ stačí dokázat implikaci

$$a + b \leq \frac{1}{p} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{a} - p\right) + \ln\left(\frac{1}{b} - p\right) > 2 \ln\left(\frac{2}{a+b} - p\right).$$

Nerovnost z pravé strany implikace několikrát ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-p\right)\left(\frac{1}{b}-p\right) &> \left(\frac{2}{a+b}-p\right)^2,\\ \frac{1}{ab}-p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &> \frac{4}{(a+b)^2}-\frac{4p}{a+b},\\ (a+b)^2-p(a+b)^3 &> 4ab-4abp(a+b),\\ (a-b)^2 &> p(a+b)(a-b)^2,\end{aligned}$$

čímž pro $a \neq b$ dostáváme zřejmou nerovnost. Rovnost v dokazované nerovnosti nastane pouze v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = p(n-1)$.

2.3 Jensenova nerovnost II

Jak jsme již naznačili, v druhé části našeho textu o Jensenově nerovnosti jsou soustředěny její aplikace pro obecnější konvexní kombinace $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nežli je jejich aritmetický průměr, který odpovídá shodným koeficientům $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Uhodnout „správnou“ volbu koeficientů λ_i k důkazu zadané nerovnosti je někdy značně obtížné, zejména tehdy, když příslušná Jensenova nerovnost je pouze prvním (byť rozhodujícím) krokem celého postupu řešení. Přesvědčíme se o tom zejména v posledních příkladech celé podkapitoly. I do ní jsme zařadili některé ukázky z diplomové práce [Pri-05], konkrétně příklady 2.63, 2.66, 2.68, 2.69, 2.70, 2.77, s odkazy na původní zdroje. Dodejme ještě, že k úspornějšímu zápisu některých vztahů používáme sumační znak v podobě

$$\sum_{\text{cykl}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pro zápis cyklického součtu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_2, x_3, \ldots, x_1) + \ldots + f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Příklad 2.63. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí[64]

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ je na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ ryze konkávní, což je zřejmé ze známého průběhu jejího grafu. Pro hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{n}$ a $\lambda_1 = \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = \frac{n}{n+1}$ tedy z Jensenovy nerovnosti pro funkci f postupně plyne

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{n+1}\cdot 0 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n}\right) &> \frac{1}{n+1}\cos 0 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n}\,,\\
\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) &> \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n}\,,\\
(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) &> 1 + n\cos\frac{\pi}{n}\,,
\end{aligned}$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.64. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Dokažte nerovnost[65]

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a+b+c}{a+b+c+1}\,.$$

Řešení. Dokazovaná nerovnost plyne přímo z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Ta je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní, neboť $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} < 0$ pro každé $x > 0$. Díky podmínce ze zadání jsou čísla $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ koeficienty konvexní kombinace a platí tedy

$$\frac{1}{a}\cdot f(a^2) + \frac{1}{b}\cdot f(b^2) + \frac{1}{c}\cdot f(c^2) \leq f\left(\frac{1}{a}\cdot a^2 + \frac{1}{b}\cdot b^2 + \frac{1}{c}\cdot c^2\right)\,,$$

čili

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a+b+c}{a+b+c+1}\,.$$

[64] [Kou-00], str. 165

[65] Poskytnuto vedoucím práce z archívu úlohové komise MO.

Příklad 2.65. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, c se součinem $abc = 1$ platí[66]

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, která je jak známo konvexní pro každé $x > 0$. Po zavedení substituce $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ užitím Jensenovy nerovnosti s koeficienty úměrnými kladným číslů x, y, z dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= xf\left(\frac{y+z}{x}\right) + yf\left(\frac{z+x}{y}\right) + zf\left(\frac{x+y}{z}\right)\\ &\geq (x+y+z)f\left(\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}\right) = \frac{x+y+z}{2}\,.\end{aligned}$$

A protože podle AG-nerovnosti platí $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, je důkaz hotov.

Příklad 2.66. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[67]

$$a(a+b-c)^2 + b(b+c-a)^2 + c(c+a-b)^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c}\,.$$

Řešení. Po vydělení obou stran nerovnosti výrazem $a + b + c$ dostaneme

$$\frac{a(a+b-c)^2}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)^2}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)^2}{a+b+c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}\,.$$

Je patrné, že jde o Jensenovu nerovnost pro konvexní funkci $f(x) = x^2$ s hodnotami

$$x_1 = a+b-c\,, \qquad x_2 = b+c-a\,, \qquad x_3 = c+a-b\,,$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{b}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{c}{a+b+c}\,.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned}&\frac{a(a+b-c)^2}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)^2}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)^2}{a+b+c} =\\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) =\\ &= \left(\frac{a(a+b-c)}{a+b+c} + \frac{b(b+c-a)}{a+b+c} + \frac{c(c+a-b)}{a+b+c}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}\,,\end{aligned}$$

což je skutečně upravená nerovnost ze zadání. Zdůrazněme ještě, že funkce f je konvexní na celém $\mathbb{R}$, takže je aplikace Jensenovy nerovnosti korektní nezávisle na tom, jaká znaménka čísla x_1, x_2, x_3 mají.

[66] [Mil-06], str. 9
[67] [Kou-00], str. 166

Příklad 2.67. Nechť a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníku, jehož obvod je roven $2s$ $(= a + b + c)$. Dokažte nerovnost[68]

$$\frac{s}{a} + \frac{s}{b} + \frac{s}{c} \geq 3 + \frac{s^2}{2s^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Řešení. Vezměme čísla

$$\lambda_1 = \frac{b + c - a}{a + b + c}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c - b}{a + b + c}, \quad \lambda_3 = \frac{a + b - c}{a + b + c},$$

pro která zřejmě platí $\lambda_i > 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Pak podle Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, která je na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, a pro konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, kde $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$, platí

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i\right)$$

neboli po dosazení

$$\frac{1}{a + b + c}\left(\frac{b + c - a}{a} + \frac{a + c - b}{b} + \frac{a + b - c}{c}\right) \geq \frac{a + b + c}{a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c)}.$$

Odtud již postupnými úpravami dostáváme

$$\frac{s - a}{a} + \frac{s - b}{b} + \frac{s - b}{c} \geq \frac{2s^2}{2ab + 2ac + 2bc - (a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$\frac{s}{a} + \frac{s}{b} + \frac{s}{c} \geq 3 + \frac{s^2}{2s^2 - (a^2 + b^2 + c^2)},$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 2.68. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[69]

$$\frac{a}{\sqrt{a + b}} + \frac{b}{\sqrt{b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c + a}} < \sqrt{2(a + b + c)}.$$

---

[68] [Kur-05], str. 14

[69] [Kou-00], str. 165

Řešení. Označme $S = a + b + c$ a vydělme obě strany nerovnosti výrazem $\sqrt{S}$. Dostaneme

$$\frac{a}{S}\sqrt{\frac{S}{a+b}} + \frac{b}{S}\sqrt{\frac{S}{b+c}} + \frac{c}{S}\sqrt{\frac{S}{c+a}} < \sqrt{2}\,.$$

Získaná nerovnost vyplyne z Jensenovy nerovnosti, a to pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$, jež je na intervalu $\langle 0, \infty)$ zřejmě konkávní. Zřejmě totiž platí

$$\frac{a}{S}\sqrt{\frac{S}{a+b}} + \frac{b}{S}\sqrt{\frac{S}{b+c}} + \frac{c}{S}\sqrt{\frac{S}{c+a}} = \frac{a}{S} f\left(\frac{S}{a+b}\right) + \frac{b}{S} f\left(\frac{S}{b+c}\right) + \frac{c}{S} f\left(\frac{S}{c+a}\right) \le$$

$$\le f\left(\frac{a}{S}\cdot\frac{S}{a+b} + \frac{b}{S}\cdot\frac{S}{b+c} + \frac{c}{S}\cdot\frac{S}{c+a}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{b}{a+b} + 1 - \frac{c}{b+c} + 1 - \frac{a}{c+a}} < \sqrt{3 - \left(\frac{b}{S} + \frac{c}{S} + \frac{a}{S}\right)} = \sqrt{2}\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.69. Ukažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníka a, b, c platí[70]

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| \le 2\left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)\,.$$

Řešení. Zavedeme funkci g tří proměnných

$$g(a,b,c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\,,$$

a rozlišíme dva možné případy

(i) $\quad g(a,b,c) \ge 0\,,\qquad\qquad$ (ii) $\quad g(a,b,c) < 0\,.$

(i) Protože funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je jak známo konvexní na $(0, \infty)$ a koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a+b-c}{a+b+c}\,,\qquad \lambda_2 = \frac{b+c-a}{a+b+c}\,,\qquad \lambda_3 = \frac{c+a-b}{a+b+c}\,,$$

[70] [Kou-00], str. 166

jsou kladná čísla, jejichž součet je roven jedné, můžeme Jensenovu nerovnost využít následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\left|g(a,b,c)\right| = g(a,b,c) = 3 - \left(\frac{a+b-c}{a} + \frac{b+c-a}{b} + \frac{c+a-b}{c}\right) &= \\ = 3 - (\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(c))\,(a+b+c) &\le \\ \le 3 - f\left(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c\right)(a+b+c) &= \\ = 3 - \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = 2\left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)&.\end{aligned}$$

(ii) Protože pro funkci g platí

$$\left|g(a,b,c)\right| = -g(a,b,c) = g(c,b,a) > 0,$$

můžeme provést obdobnou úvahu jako v případě (i). Pro stejnou funkci f a koeficienty λ_1, λ_2, λ_3 s využitím Jensenovy nerovnosti tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\left|g(c,b,a)\right| = g(c,b,a) = 3 - \left(\frac{c+b-a}{c} + \frac{b+a-c}{b} + \frac{a+c-b}{a}\right) &= \\ = 3 - (\lambda_1 f(c) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(a))\,(c+b+a) &\le \\ \le 3 - f\left(\lambda_1 c + \lambda_2 b + \lambda_3 a\right)(c+b+a) &= \\ = 3 - \frac{(c+b+a)^2}{c^2+b^2+a^2} = 2\left(1 - \frac{cb+ba+ac}{c^2+b^2+a^2}\right)&,\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov.

Příklad 2.70. Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníku a, b, c platí[71]

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \le 1\,.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \ln x$, konkávní na intervalu $(0,\infty)$, neboť $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Dosadíme-li tedy do Jensenovy nerovnosti pro funkci f čísla

$$x_1 = \frac{a+b-c}{a}\,, \qquad x_2 = \frac{b+c-a}{b}\,, \qquad x_3 = \frac{c+a-b}{c}\,,$$

[71] [Kou-00], str. 164

která jsou kladná podle trojúhelníkové nerovnosti, pak pro koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{b}{a+b+c}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{c}{a+b+c}$$

dostaneme zvlášť na levé a pravé straně:

$$L = \frac{a}{a+b+c}\cdot\ln\left(\frac{a+b-c}{a}\right) + \frac{b}{a+b+c}\cdot\ln\left(\frac{b+c-a}{b}\right) + \frac{c}{a+b+c}\cdot\ln\left(\frac{c+a-b}{c}\right),$$

$$P = \ln\left(\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}\right) = \ln\left(\frac{a+b+c}{a+b+c}\right) = \ln 1\,.$$

Z takové Jensenovy nerovnosti $L \leq P$ po vynásobení číslem $a+b+c$ a odlogaritmování plyne

$$a\,\ln\left(1+\frac{b-c}{a}\right) + b\,\ln\left(1+\frac{c-a}{b}\right) + c\,\ln\left(1+\frac{a-b}{c}\right) \leq (a+b+c)\,\ln 1\,,$$

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a \left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b \left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1\,,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.71. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[72]

$$a^b b^c c^a \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \ln x$, která je jak známo na intervalu $(0, \infty)$ konkávní. S využitím zřejmé rovnosti

$$\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} = 1$$

můžeme Jensenovu nerovnost s koeficienty rovnými sčítaným zlomkům zapsat ve tvaru

$$\frac{b}{a+b+c}\,\ln a + \frac{c}{a+b+c}\,\ln b + \frac{a}{a+b+c}\,\ln c \leq \ln\left(\frac{ba+cb+ac}{a+b+c}\right),$$

odkud dostáváme

$$\left(a^b b^c c^a\right)^{\frac{1}{a+b+c}} \leq \frac{ba+cb+ac}{a+b+c}\,.$$

A protože navíc platí

$$\frac{ba+cb+ac}{a+b+c} \leq \frac{a+b+c}{3}\,,$$

[72] [Kur-07], str. 25

neboť ekvivalentně dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc &\geq 0\,, \\ \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2 &\geq 0\,, \end{aligned}$$

což je zřejmé, je tak celý důkaz hotov.

Příklad 2.72. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $a+b+c+d=4$. Dokažte nerovnost[73]

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}\,.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. Jak je patrné z hodnot jejích derivací

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,, \\ f''(x) &= \frac{-2x^2(x+1)+(2x+1)(4x^2+2x)}{x^4(x+1)^3} = \frac{6x^2+6x+2}{x^3(x+1)^3}\,, \end{aligned}$$

funkce f je na intervalu $(0,\infty)$ konvexní a podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\frac{a}{4}\cdot f(b)+\frac{b}{4}\cdot f(c)+\frac{c}{4}\cdot f(d)+\frac{d}{4}\cdot f(a) \geq f\left(\frac{ab+bc+cd+da}{4}\right)\,,$$

což lze po dosazení hodnot f zapsat ve tvaru

$$\sum_{\text{cykl}}\frac{a}{b^2+b} \geq \frac{64}{(ab+bc+cd+da)^2+4(ab+bc+cd+da)}\,.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{64}{(ab+bc+cd+da)^2+4(ab+bc+cd+da)} \geq \frac{8}{ab+bc+cd+da}\,.$$

Ta je však v kladné proměnné $s=ab+bc+cd+da$ ekvivalentní s nerovností $s \leq 4$, kterou zdůvodníme dalšími ekvivalentními úpravami takto:

$$\begin{aligned} 4s &\leq 16\,, \\ 4(a+c)(b+d) &\leq (a+c+b+d)^2\,, \\ 0 &\leq \big((a+c)-(b+d)\big)^2\,. \end{aligned}$$

Důkaz je tak hotov.

[73] [Hun-07], str. 71

Příklad 2.73. Pro libovolná reálná čísla $x \geq y \geq 1$ dokažte:[74]

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{y}{\sqrt{x+y}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}}\,.$$

Řešení. Rovnost zřejmě nastane v případech $y=1$ a $x=y$. Vzhledem k podmínce v zadání tedy položme $x=y+a$, $y=1+b$, kde $a,b>0$ (případy $a=0$ a $b=0$ jsme již posoudili), a upravenou nerovnost

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-1}{\sqrt{y+1}}+\frac{1-x}{\sqrt{x+1}} \geq 0$$

přepišme do tvaru

$$\frac{a}{\sqrt{2+a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{2+b}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2+a+b}}\,.$$

To je však Jensenova nerovnost aplikovaná na konvexní funkci $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro konvexní kombinaci $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$, kde

$$\lambda_1=\frac{a}{a+b}\,,\quad \lambda_2=\frac{b}{a+b}\,,\quad u=2+a+2b\,,\quad v=2+b\,.$$

Podle ní platí

$$\begin{aligned} af(2+a+2b)+bf(2+b) &\geq (a+b)f\left(\frac{a(2+a+2b)+b(2+b)}{a+b}\right)= \\ &=(a+b)f\left(\frac{(a+b)^2+2(a+b)}{a+b}\right)= \\ &=(a+b)f(2+a+b)=\frac{a+b}{\sqrt{2+a+b}}\,. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Z $x \geq y \geq 1$ plyne

$$\frac{1}{\sqrt{y+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,,$$

takže dokazovaná nerovnost je tvaru

$$a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2 \geq a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2 \tag{$*$}$$

pro dvě trojice $a_1 \geq b_1 \geq c_1$ a $a_2 \geq b_2 \geq c_2$. Permutační nerovnost $(*)$ pro takto uspořádané trojice však neplatí obecně; v případě $a_2 > c_2$ je to vidět z přepisu do tvaru

$$b_1 \geq \frac{b_2-c_2}{a_2-c_2}\cdot a_1+\frac{a_2-b_2}{a_2-c_2}\cdot c_1\,,$$

kde napravo je konvexní kombinace bodů a_1, c_1 s koeficienty závislými na druhé trojici (a_2, b_2, c_2), takže vyhovující b_1 zaplní pouze část intervalu mezi body a_1, c_1.

[74] [Mil-06], str. 31

Příklad 2.74. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[75]

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1\,.$$

Řešení. Protože je daná nerovnost homogenní, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a+b+c=1$. Pro funkci $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ zřejmě platí

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}>0 \qquad \text{pro všechna } x\in(0,\infty)\,.$$

Funkce f je tedy na intervalu $(0,\infty)$ konvexní, a proto z Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$a\cdot f(a^2+8bc)+b\cdot f(b^2+8ca)+c\cdot f(c^2+8ab)\geq f(M)\,,$$

kde $M=\sum_{\text{cykl}} a(a^2+8bc)=24abc+a^3+b^3+c^3$. Protože levé strany dokazované a odvozené nerovnosti se rovnají, potřebujeme nyní dokázat, že $f(M)\geq 1$ neboli $M\leq 1$, tedy

$$24abc+a^3+b^3+c^3\leq (a+b+c)^3\,.$$

Roznásobením pravé strany a dalšími úpravami dostáváme nerovnost

$$6abc\leq ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c\,,$$

kterou snadno upravíme do tvaru

$$0\leq a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\,.$$

Poslední nerovnost je již zřejmá a důkaz je tak hotov.

Příklad 2.75. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[76]

$$\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{b}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}+\frac{c}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}\geq 1\,.$$

Řešení. Díky homogennosti můžeme předpokládat, že $a+b+c=1$. Pro funkci $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ konvexní na $(0,\infty)$ z Jensenovy nerovnosti dostaneme pro levou stranu dokazované nerovnosti odhad

$$a\cdot f(4b^2+bc+4c^2)+b\cdot f(4c^2+ca+4a^2)+c\cdot f(4a^2+ab+4b^2)\geq f(M)\,,$$

[75] [Hun-07], str. 71
[76] [Hun-07], str. 72, řešení upraveno

kde $M = \sum_{\text{cykl}} a(4b^2 + bc + 4c^2) = 4 \sum_{\text{cykl}} ab(a+b) + 3abc$. Stačí tedy dokázat, že $f(M) \geq 1$ neboli $M \leq 1$. Platí (podrobné rozepisování algebraických úprav v řešení tohoto i jiných příkladů vynecháme)

$$\begin{aligned} 1 - M &= (a+b+c)^3 - 4\sum_{\text{cykl}} ab(a+b) - 3abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - \sum_{\text{cykl}} ab(a+b) + 3abc = \\ &= abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc\,.$$

Tvrzení je zřejmé, je-li některé z čísel

$$u = a+b-c\,, \quad v = b+c-a\,, \quad w = c+a-b$$

záporné: je-li např. $u < 0$ neboli $c > a+b$, pak $v > 2b > 0$ a $w > 2a > 0$, tedy $uvw < 0 < abc$. Jsou-li všechna tři čísla u, v, w nezáporná, pak podle AG-nerovnosti platí

$$\sqrt{uv} \leq \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b$$

a podobně $\sqrt{uw} \leq a$ a $\sqrt{vw} \leq c$. Vynásobením posledních tří nerovností potom dostaneme $uvw \leq abc$. Tím je důkaz hotov.

Příklad 2.76. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a_1, a_2, a_3 platí[77]

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} \geq \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4}\,.$$

Řešení. Nerovnost, kterou máme dokázat, plyne přímo z Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci $f(x) = x^2$. Pro hodnoty

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_2a_3}\,, \quad x_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1a_3}\,, \quad x_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1a_2}\,, \\ \lambda_1 &= \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,, \quad \lambda_3 = \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$

[77] [And-07], str. 147

je totiž $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ konvexní kombinace bodů x_1, x_2, x_3 s hodnotou

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \frac{a_1^2}{2a_2a_3} + \frac{a_2^2}{2a_1a_3} + \frac{a_3^2}{2a_1a_2} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{2a_1a_2a_3},$$

zatímco stejná konvexní kombinace hodnot $f(x_i)$ je rovna

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) &= \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2a_3^2} + \frac{a_2^2}{4a_1^2a_3^2} + \frac{a_3^2}{4a_1^2a_2^2}\right) = \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)}{4a_1^2a_2^2a_3^2}.\end{aligned}$$

Příslušná Jensenova nerovnost má tudíž tvar

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = \frac{(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^2}{4a_1^2a_2^2a_3^2} \le \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)}{4a_1^2a_2^2a_3^2},$$

což je po úpravě požadovaný výsledek.

Příklad 2.77. Ukažte, že pro všechna kladná reálná čísla a_1, a_2, a_3, a_4 platí[78]

$$2 \le \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2}.$$

Řešení. Zaveďme nejprve následující označení:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ C &= \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že dokazovaná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti s koeficienty $\lambda_i = \frac{a_i}{S}$ (jejichž součet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ je podle definice součtu S roven jedné)

$$f\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i x_i}{S}\right) \le \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i}{S} \cdot f(x_i).$$

Vezmeme-li totiž konvexní funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, která je jak známo konvexní na $(0, \infty)$, a dosadíme-li do vypsané Jensenovy nerovnosti kladná čísla $x_1 = a_2 + a_3$, $x_2 = a_3 + a_4$, $x_3 = a_4 + a_1$,

[78] [Ste-04], str. 104

$x_4 = a_1 + a_2$, dostaneme pro její levou a pravou stranu vyjádření

$$L = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_1) + a_4(a_1 + a_2)},$$

$$P = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_3 + a_4} + \\ + \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{1}{a_1 + a_2}.$$

Pokud označíme jmenovatele zlomku levé strany D, můžeme Jensenovu nerovnost $L \le P$ přepsat do jednoduchého tvaru

$$\frac{S}{D} \le \frac{C}{S}, \qquad \text{odkud} \qquad \frac{S^2}{D} \le C.$$

Naší úlohou je dokázat nerovnost $C \ge 2$, stačí tedy ověřit, že

$$\frac{S^2}{D} \ge 2 \qquad \text{neboli} \qquad S^2 - 2D \ge 0.$$

Levou stranu poslední nerovnosti však můžeme postupně upravit

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 2\big(a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_1) + a_4(a_1 + a_4)\big) =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_3 - 2a_4a_2 = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \ge 0$$

a tím je zmíněná úloha vyřešena.

Poznámka. Dodejme, že nerovnost

$$\frac{n}{2} \le \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}$$

se nazývá *Shapirova* a platí s libovolnými kladnými čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pouze pro sudá $n \le 12$ a lichá $n \le 23$. Shapirovu nerovnost pro $n = 3$

$$\frac{3}{2} \le \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_1} + \frac{a_3}{a_1 + a_2},$$

lze zobecnit i jiným způsobem uvedeným v příkladu 2.45.

Příklad 2.78. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je roven 1, a pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí[79]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + x_i} \le \frac{1}{1 + x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}.$$

[79] [And-07], str. 147

Řešení. Nejprve zaveďme substituci $y_i = \ln x_i$. Pro taková y_i pak z podmínky $x_i \in (0, 1\rangle$ dostáváme $y_i \le 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Nyní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ vezměme funkci $f(y) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^y}$, pro niž platí

$$f'(y) = -\frac{\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^y)^2}, \qquad f''(y) = \frac{\mathrm{e}^y(\mathrm{e}^y - 1)}{(1+\mathrm{e}^y)^3} \le 0 \quad \text{pro všechna } y \le 0 .$$

Funkce f je tedy na daném intervalu konkávní, takže užitím Jensenovy nerovnosti pro konvexní kombinaci $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$ bodů $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(y_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) \qquad \text{neboli} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+\mathrm{e}^{y_i}} \le \frac{1}{1 + \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{a_i y_i}},$$

odkud po dosazení $x_i = \mathrm{e}^{y_i}$ obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+x_i} \le \frac{1}{1 + x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.79. Pro každé celé číslo $n \ge 2$ najděte nejmenší kladné reálné číslo $\lambda = \lambda(n)$ takové, že platí

$$b_1 b_2 \ldots b_n \le \lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n),$$

kde $0 \le a_1, a_2, \ldots, a_n \le \frac{1}{2}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ jsou libovolná reálná čísla splňující podmínku

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1 .$$ [80]

Řešení. Na intervalu $(0, \infty)$ uvažme funkci

$$f(x) = \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{x} .$$

Ta je na daném intervalu zřejmě konvexní, neboť $b_1 b_2 \ldots b_n > 0$, a proto z Jensenovy nerovnosti pro konvexní kombinaci kladných čísel b_i s koeficienty a_i plyne

$$\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n} = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i) .$$

[80] [Loz-96], str. 121

Předpokládejme, že $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Potom hodnota součtu $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ bude nejmenší v případě, kdy $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Pak zřejmě $f(b_1) \geq f(b_2) \geq \ldots \geq f(b_n)$ a podle předchozího platí

$$\begin{aligned}\frac{b_1b_2\ldots b_n}{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n} &\leq a_1f(b_1) + a_2f(b_2) + \ldots + a_nf(b_n) \leq \\ &\leq a_1f(b_1) + (a_2 + \ldots + a_n)f(b_2) = \\ &= a_1f(b_1) + (1-a_1)f(b_2) = f(b_2) + a_1\left(f(b_1) - f(b_2)\right) \leq \\ &\leq f(b_2) + \frac{f(b_1) - f(b_2)}{2} = \frac{(b_1+b_2)b_3b_4\ldots b_n}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

přičemž poslední odhad dostaneme užitím AG-nerovnosti pro $n-1$ čísel $b_1 + b_2, b_3, b_4, \cdots, b_n$. Rovnosti v předchozí posloupnosti nerovností nastanou, právě když $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \ldots a_n = 0$ a $b_1 = b_2 = \frac{1}{2(n-1)}$, $b_3 = \ldots b_n = \frac{1}{n-1}$. Tedy

$$\lambda(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

je nejmenší hledané číslo splňující podmínku ze zadání.

Příklad 2.80. Dokažte, že pokud je součin kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ roven 1, pak platí[81]

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n-1]{\frac{a_k}{a_k + n^{n-1} - 1}} \geq 1\,.$$

Řešení. Užijme substituci $b_k = \sqrt[n]{a_k}$ neboli $a_k = b_k^n$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak z podmínky $a_1a_2\ldots a_n = 1$ plyne $b_1b_2\ldots b_n = 1$, takže dokazovanou nerovnost můžeme přepsat do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n-1]{\frac{b_k^n}{b_k^n + (n^{n-1}-1)b_1b_2\ldots b_n}} \geq 1\,.$$

Poslední nerovnost je homogenní v kladných proměnných $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Budeme ji proto dokazovat za předpokladu $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1$ (namísto $b_1b_2\ldots b_n = 1$) a přepíšeme ji při označení $p = b_1b_2\ldots b_n$ do podoby

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sqrt[n-1]{\frac{1}{b_k^{n-1} + (n^{n-1}-1)\cdot\frac{p}{b_k}}} \geq 1\,.$$

[81]Vlastní námět, inspirováno [Kur-05], str.16.

Protože funkce $f(x) = \sqrt[n-1]{\frac{1}{x}}$ je na intervalu $(0, \infty)$ zřejmě konvexní, podle Jensenovy nerovnosti s koeficienty $\lambda_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sqrt[n-1]{\frac{1}{b_k^{n-1} + (n^{n-1} - 1) \cdot \frac{p}{b_k}}} \geq \sqrt[n-1]{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k^n + (n^{n-1} - 1)p)}} .$$

Důkaz tak bude hotov, když zdůvodníme nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^n + (n^n - n)\, b_1 b_2 \ldots b_n \leq (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^n .$$

To je však poměrně snadné. Když provedeme umocnění v pravé části, dostaneme n^n jednotlivých sčítanců, z nichž n vytvoří součet $b_1^n + b_2^n + \ldots + b_n^n$, zatímco ostatních $n^n - n$ sčítanců (členů stupně n) má tu vlastnost, že jejich geometrický průměr je $b_1 b_2 \ldots b_n$, takže podle AG-nerovnosti je jejich součet alespoň $(n^n - n)\, b_1 b_2 \ldots b_n$. Tím je potřebná nerovnost dokázána a celé řešení je tak ukončeno.

Příklad 2.81. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že platí[82]

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} .$$

Řešení. Nerovnost ze zadání můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a+c}{2(a+b+c)} \cdot \sqrt{\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} .$$

Levá strana upravené nerovnosti je konvexní kombinace tří hodnot funkce $f(x) = \sqrt{x}$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a+c}{2(a+b+c)}, \qquad \lambda_2 = \frac{b+a}{2(a+b+c)}, \qquad \lambda_3 = \frac{c+b}{2(a+b+c)} .$$

Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní, neboť $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ pro každé $x > 0$, a proto z Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a+c}{2(a+b+c)} \cdot \sqrt{\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{a+c}{2(a+b+c)} \cdot \frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}} = \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{2a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}} .$$

[82] [Hun-07], str. 72

Stačí tedy dokázat, že

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{9}{4}\,.$$

Nerovnost vynásobíme kladným číslem $4(a+b)(b+c)(c+a)$ a pak její levou stranu algebraicky upravíme:

$$4\sum_{\text{cykl}} a(a+b+c)(b+c) = 8(a+b+c)(ab+ac+bc)\,.$$

Máme tedy dokázat nerovnost

$$8(a+b+c)(ab+ac+bc) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)\,.$$

Rozdíl mezi pravou a levou stranou však můžeme algebraicky upravit na součet

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2\,,$$

který je zřejmě nezáporný. Tím je důkaz hotov. K výsledku příkladu se ještě vrátíme v poznámce k příkladu 2.82.

Příklad 2.82. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[83]

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}} \leq 1\,.$$

Řešení. Zadanou nerovnost nejprve upravíme do tvaru

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{4a+4c+b}{9(a+b+c)} \cdot \sqrt{\frac{81a(a+b+c)^2}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)^2}} \leq 1\,.$$

Na levé straně upravené nerovnosti máme konvexní kombinaci tří hodnot funkce $f(x) = \sqrt{x}$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{4a+4c+b}{9(a+b+c)}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{4b+4a+c}{9(a+b+c)}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{4c+4b+a}{9(a+b+c)}\,.$$

[83] [Hun-07], str. 73

A protože funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní, užitím Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{4a+4c+b}{9(a+b+c)} \cdot \sqrt{\frac{81a(a+b+c)^2}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)^2}} \leq$$
$$\leq \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{4a+4c+b}{9(a+b+c)} \cdot \frac{81a(a+b+c)^2}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)^2}} =$$
$$= \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{9a(a+b+c)}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}}\,.$$

Díky homogennosti můžeme předpokládat, že $a+b+c=1$. Pak nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{9a(a+b+c)}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)} \leq 1\,,$$

kterou máme dokázat, můžeme postupně upravit následujícím způsobem:

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{9a}{(4-3b)(4-3c)} \leq 1\,,$$
$$\sum_{\text{cykl}} 9a(4-3a) \leq \prod_{\text{cykl}} (4-3a)\,.$$

Levou stranu poslední nerovnosti upravíme takto:

$$\sum_{\text{cykl}} 9a(4-3a) = 9\sum_{\text{cykl}} a^2 + 36\sum_{\text{cykl}} a(1-a) = 9\sum_{\text{cykl}} a^2 + 36\sum_{\text{cykl}} a(b+c) = 9\sum_{\text{cykl}} a^2 + 72\sum_{\text{cykl}} ab\,.$$

Pravou stranu roznásobíme a pokračujeme v dalších úpravách:

$$9(a+b+c)^2 + 54\sum_{\text{cykl}} ab \leq 64 - 48(a+b+c) + 36\sum_{\text{cykl}} ab - 27abc\,,$$

$$18(ab+ac+bc) + 27abc \leq 7\,.$$

Poslední nerovnost platí, neboť z předpokladu $a+b+c=1$ plyne podle AG-nerovnosti odhad $abc \leq \frac{1}{27}$ a navíc z elementární nerovnosti $3(ab+ac+bc) \leq (a+b+c)^2$ plyne odhad $ab+ac+bc \leq \frac{1}{3}$. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. S ohledem na Cauchyovu nerovnost $(u+v+w)^2 \leq 3(u^2+v^2+w^2)$ se nabízí otázka, zda dokázanou nerovnost nelze získat jako důsledek jednodušší nerovnosti

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3}\,.$$

Taková nerovnost však pro kladná a, b, c obecně neplatí: například pro $a = 4$, $b = 1$ a $c \to +0$ má její levá strana limitu $\frac{2}{5}$, což je číslo větší než $\frac{1}{3}$. Stejně tak nelze ani nerovnost z příkladu 2.81 odvodit z nerovnosti

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \le \frac{3}{2}\,,$$

která neplatí např. pro $a = 3$, $b = 2$ a $c = 1$.

Příklad 2.83. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla s vlastností $a+b+c = 1$. Dokažte, že platí[84]

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Řešení. Zadanou nerovnost můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2b}{(a+c)(a+b)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Levá strana upravené nerovnosti je konvexní kombinace tří hodnot funkce $f(x) = \sqrt{x}$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a+b}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{b+c}{2}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{c+a}{2}\,.$$

Zmíněná funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní, a proto užitím Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2b}{(a+c)(a+b)^2}} \le \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{2a^2b}{(a+b)(a+c)}}\,.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a^2b}{(a+b)(a+c)} \le \frac{1}{4}\,,$$

kterou můžeme postupně algebraicky upravit následujícím způsobem:

$$4\sum_{\text{cykl}} a^2b(b+c) \le (a+b+c)\prod_{\text{cykl}}(a+b)\,,$$

$$2\sum_{\text{cykl}} a^2b^2 \le \sum_{\text{cykl}} a^3(b+c)\,,$$

$$0 \le \sum_{\text{cykl}} ab(a-b)^2\,.$$

Protože sčítanci v součtu na pravé straně poslední nerovnosti jsou nezáporní, je celý důkaz hotov. Dodejme, že rovnost nastane pouze v případě $a = b = c = \frac{1}{3}$.

[84] [Hun-07], str. 156

Poznámka. Obdobně jako u příkladů 2.81 a 2.82 je zajímavé posoudit, zda pro libovolná kladná čísla a, b, c se součtem 1 platí silnější nerovnost

$$\frac{a^2b^2}{ab+bc} + \frac{b^2c^2}{bc+ca} + \frac{c^2a^2}{ca+ab} \le \frac{1}{6}\,.$$

Takovou hypotézu vyvracejí trojice $a = \frac{1}{2} - \varepsilon$, $b = \frac{1}{2} - \varepsilon$, $c = 2\varepsilon$, neboť pro ně má levá strana zkoumané nerovnosti limitu rovnou $\frac{1}{4}$ při $\varepsilon \to +0$.

Položme si ještě otázku, zda není možné dokázat výsledek předchozího příkladu jednodušší cestou: nerovnost ze zadání přepsat do tvaru

$$a\sqrt{\frac{b}{a+c}} + b\sqrt{\frac{c}{b+a}} + c\sqrt{\frac{a}{c+b}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a využít toho, že na levé straně za předpokladu $a+b+c=1$ stojí konvexní kombinace hodnot funkce $f(x) = \sqrt{x}$, která je na intervalu $(0,\infty)$ konkávní. Podle Jensenovy nerovnosti platí

$$a\sqrt{\frac{b}{a+c}} + b\sqrt{\frac{c}{b+a}} + c\sqrt{\frac{a}{c+b}} \le \sqrt{a\cdot\frac{b}{a+c} + b\cdot\frac{c}{b+a} + c\cdot\frac{a}{c+b}}\,,$$

a proto by pro náš účel stačilo dokázat nerovnost

$$\frac{ab}{a+c} + \frac{bc}{b+a} + \frac{ca}{c+b} \le \frac{1}{2}$$

(samozřejmě za téhož předpokladu $a+b+c=1$). Ovšem taková nerovnost obecně neplatí, jak lze ověřit například dosazením hodnot $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{3}{8}$, kdy nalevo vyjde $\frac{73}{140}$.

Příklad 2.84. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[85]

$$\sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}} \le 1\,.$$

Řešení. S ohledem na homogenitu můžeme předpokládat, že $a^2+b^2+c^2 = 3$. Nerovnost ze zadání můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a^2+4b^2+4c^2}{27} \cdot \sqrt{\frac{27^2ab}{(4a^2+b^2+4c^2)(a^2+4b^2+4c^2)^2}} \le 1\,.$$

Na levé straně upravené nerovnosti máme konvexní kombinaci tří hodnot funkce $f(x) = \sqrt{x}$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \frac{a^2+4b^2+4c^2}{27}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{b^2+4c^2+4a^2}{27}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{c^2+4a^2+4b^2}{27}\,.$$

[85] [Hun-07], str. 230, řešení upraveno

(Díky podmínce $a^2+b^2+c^2=3$ skutečně platí $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$.) Protože funkce $f(x)=\sqrt{x}$ je na intervalu $(0,\infty)$ konkávní, z Jensenovy nerovnosti máme

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{a^2+4b^2+4c^2}{27}\cdot\sqrt{\frac{27^2ab}{(4a^2+b^2+4c^2)(a^2+4b^2+4c^2)^2}} \le$$
$$\le \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{27ab}{(4a^2+b^2+4c^2)(a^2+4b^2+4c^2)}} = \sqrt{\sum_{\text{cykl}} \frac{3ab}{(4-a^2)(4-b^2)}}\,.$$

Budeme tedy dokazovat nerovnost

$$3\sum_{\text{cykl}} ab(4-c^2) \le \prod_{\text{cykl}} (4-a^2)\,.$$

Postupnými algebraickými úpravami s využitím podmínky $a^2+b^2+c^2=3$ dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$4\cdot 3\sum_{\text{cykl}} ab - 3\sum_{\text{cykl}} a^2bc \le 64-16\sum_{\text{cykl}} a^2+4\sum_{\text{cykl}} a^2b^2-a^2b^2c^2\,,$$
$$4\left(\sum_{\text{cykl}} a^2\right)\left(\sum_{\text{cykl}} ab\right) \le \frac{16}{9}\left(\sum_{\text{cykl}} a^2\right)^2+4\sum_{\text{cykl}} a^2b^2+3\sum_{\text{cykl}} a^2bc-a^2b^2c^2\,,$$
$$36\sum_{\text{cykl}} a^3(b+c)+9\sum_{\text{cykl}} a^2bc+9a^2b^2c^2 \le 16\sum_{\text{cykl}} a^4+68\sum_{\text{cykl}} a^2b^2\,.$$

Protože podle AG-nerovností pro trojice čísel a,b,c, resp. a^2,b^2,c^2 platí

$$3\sum_{\text{cykl}} a^2bc = \left(\sum_{\text{cykl}} a^2\right)\cdot abc\cdot\left(\sum_{\text{cykl}} a\right) \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot abc\cdot 3\sqrt[3]{abc} = 9a^2b^2c^2\,,$$

plyne odtud odhad

$$9\sum_{\text{cykl}} a^2bc+9a^2b^2c^2 \le 12\sum_{\text{cykl}} a^2bc\,,$$

a proto stačí dokázat nerovnost

$$9\sum_{\text{cykl}} a^3(b+c)+3\sum_{\text{cykl}} a^2bc \le 4\sum_{\text{cykl}} a^4+17\sum_{\text{cykl}} a^2b^2\,,$$

která je ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{\text{cykl}}\left(2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\right)(a-b)^2 \ge 0\,.$$

S ohledem na symetrii stačí poslední nerovnost dokázat v případě, kdy $a \geq b \geq c \geq 0$. Tehdy pro hodnoty u, v, w určené rovnostmi

$$u = 2a^2 + 2b^2 + \frac{3c^2}{2} - 5ab\,, \qquad v = 2b^2 + 2c^2 + \frac{3a^2}{2} - 5bc\,, \qquad w = 2c^2 + 2a^2 + \frac{3b^2}{2} - 5ac$$

platí

$$\begin{aligned} v &= 2(b-c)^2 + \frac{a^2}{2} + (a^2 - bc) \geq 0\,, \\ w &\geq 2c^2 + 2a^2 + \frac{3c^2}{2} - 5ac = 2\left(a - \frac{5c}{4}\right)^2 + \frac{3c^2}{8} \geq 0\,, \\ u + w &= 2\left(a - \frac{5b}{4}\right)^2 + 2\left(a - \frac{5c}{4}\right)^2 + \frac{3(b^2+c^2)}{8} \geq 0\,, \end{aligned}$$

takže platí i dokazovaná nerovnost, neboť ji lze zapsat ve tvaru

$$v(b-c)^2 + (u+w)(a-b)^2 + w\big((a-c)^2 - (a-b)^2\big) \geq 0$$

a přihlédnout ještě k tomu, že $a - c \geq a - b \geq 0$, odkud $(a-c)^2 \geq (a-b)^2$. Celý důkaz je tak hotov.

Poznámka. I nad výsledkem předchozího příkladu (stejně jako dříve u příkladů 2.81–2.83) nastolíme otázku, zda pro libovolná kladná čísla a, b, c platí jednodušší nerovnost „bez odmocnin“

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}\,, \tag{$*$}$$

z níž původní nerovnost „*s odmocninami*“ bezprostředně vyplývá (opět díky Cauchyově nerovnosti). Autoru disertace se podařilo na internetu objevit kolekci [Can-07], v níž je $(*)$ jednou ze 174 dokázaných (vesměs obtížných) nerovností. I když je důkaz $(*)$ veden elementárními prostředky, je technicky velice náročný. Jeho součástí je například využití zajímavé nerovnosti

$$3(a^3b + b^3c + c^3a) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2\,,$$

která se pro libovolná reálná čísla a, b, c dokáže stěží objevitelnou algebraickou úpravou do tvaru nerovnosti pro součet tří čtverců

$$\sum_{\text{cykl}} (a^2 - c^2 - 2ab + bc + ca)^2 \geq 0\,.$$

2.4 Odvození klasických nerovností

V závěrečné podkapitole věnované přímým aplikacím Jensenovy nerovnosti ukážeme, že tuto nerovnost lze využít k důkazům mnohých základních algebraických nerovností pro konečné skupiny reálných čísel. Text je s drobnými úpravami převzat z naší diplomové práce [Pri-05], doplněn je pouze o druhý případ Minkowského nerovnosti a o Radonovu nerovnost, vynechána je naopak Bernoulliova nerovnost, dříve dokázaná v příkladu 1.4. Odkazy na formulace ani důkazy těchto klasických výsledků neuvádíme, i když v některých případech postupy založené na Jensenově nerovnosti nepatří k nejobvyklejším důkazům dotyčných tvrzení.

AG-nerovnost

Jak jsme uvedli v úvodní části podkapitoly 2.2 a jak je časově upřesněno na str. 10 v [Ste-04], nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

a její důkaz Cauchyovou metodou zpětné indukce přivedly v roce 1906 J. L. W. V. Jensena k objevu obecné nerovnosti, kterou dnes označujeme jeho příjmením. Na tomto místě uvedeme a dokážeme AG-nerovnost v obecnějším tvaru pro tzv. *vážené průměry.*

V praxi při výpočtu aritmetického průměru často přisuzujeme jednotlivým průměrovaným číslům $x_1, \ldots, x_n$ různé váhové koeficienty $v_1, \ldots, v_n > 0$. Aritmetický průměr pak počítáme podle vzorce

$$A = \frac{v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n}{v_1 + \ldots + v_n}\,.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme *váženým aritmetickým průměrem* čísel $x_1, \ldots, x_n$. Zavedeme-li *normované* váhové koeficienty

$$\lambda_i = \frac{v_i}{v_1 + \ldots + v_n} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

můžeme vážený aritmetický průměr vyjádřit vzorcem

$$A = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\,.$$

Všimněme si, že koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kladná čísla a jejich součet je roven jedné. Připomeňme, že takové lineární kombinaci čísel $x_1, \ldots, x_n$ říkáme podle definice 2.24 *konvexní kombinace* těchto čísel.

Podobně lze definovat i *vážený geometrický průměr* nezáporných čísel $x_1, \ldots, x_n$, a to vzorcem

$$G = x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}\,,$$

přitom pro koeficienty $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ dostaneme obvyklé (nevážené) průměry. Obecnou AG-nerovnost uvedeme v následující větě.

Věta 2.85. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla* $x_1, \dots, x_n$ *a libovolné kladné koeficienty* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*, jejichž součet se rovná jedné, platí nerovnost*

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}, \tag{2.8}$$

přitom rovnost nastane, právě když $x_1 = \dots = x_n$*.*

Důkaz. Pokud je $x_i = 0$ pro některé $i = 1, \dots, n$, je nerovnost (2.8) zřejmá, neboť její pravá strana je rovna nule. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Vyjdeme-li z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, která je ryze konkávní na $(0, \infty)$, neboť zřejmě $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$, obdržíme

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n = \ln\left(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}\right).$$

Po odlogaritmování již dostaneme nerovnost (2.8), kterou jsme měli dokázat. Tvrzení o rovnosti v (2.8) plyne z toho, že funkce f je ryze konkávní a $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$. □

Cauchyova-Schwarzova nerovnost

V teorii n-rozměrných vektorových prostorů se skalárním součinem má následující výsledek zásadní význam.

Věta 2.86. *Pro libovolná reálná čísla* $u_1, \dots, u_n$*,* $v_1, \dots, v_n$ *platí nerovnost*

$$|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}, \tag{2.9}$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, jsou-li uspořádané n*-tice* $(u_1, \dots, u_n)$ *a* $(v_1, \dots, v_n)$ *lineárně závislé vektory lineárního prostoru* $\mathbb{R}^n$*.*

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $v_i \neq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Ukážeme, že nerovnost (2.9) je důsledkem Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = x^2$ (ryze konvexní na celém $\mathbb{R}$, neboť $f''(x) = 2 > 0$ pro každé x):

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Položme v této nerovnosti

$$x_i = \frac{u_i}{v_i} \quad \text{a} \quad \lambda_i = \frac{v_i^2}{v_1^2 + \dots + v_n^2} \qquad \text{pro } i = 1, \dots, n,$$

což je možné, neboť taková čísla λ_i zřejmě splňují $0 < \lambda_i < 1$ a $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Po dosazení nejprve upravíme odděleně levou a pravou stranu Jensenovy nerovnosti:

$$L = (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 = \left(\frac{v_1^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \ldots + \frac{v_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \frac{u_n}{v_n} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{u_1 v_1}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} + \ldots + \frac{u_n v_n}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \right)^2 = \left(\frac{u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \right)^2,$$

$$P = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = \frac{v_1^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \frac{u_1^2}{v_1^2} + \ldots + \frac{v_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \frac{u_n^2}{v_n^2} =$$

$$= \frac{u_1^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} + \ldots + \frac{u_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} = \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Nerovnost $L \leq P$ tedy vypadá takto:

$$\left(\frac{u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n}{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \right)^2 \leq \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2},$$

$$(u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2),$$

$$|u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2},$$

což je nerovnost (2.9). Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve výchozí Jensenově nerovnosti, tedy právě když jsou všechna čísla x_i stejná (připomínáme, že $\lambda_i > 0$ pro každé i). Jinak vyjádřeno, existuje-li takové $t \in \mathbb{R}$, že $u_i = t v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

V případě, že se všechna čísla v_i v (2.9) rovnají nule, jsou rovny nule i obě strany této nerovnosti. Pokud jsou rovny nule pouze některá (ne však všechna) v_i, stačí v „silnější" nerovnosti

$$|u_1||v_1| + \ldots + |u_n||v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

vynechat na levé i pravé straně ty sčítance $|u_i||v_i|$, u_i^2, v_i^2, pro něž $|v_i| = 0$. Levá strana se tím nezmění, pravá strana se může pouze zmenšit (pokud $u_i \neq 0$ a $v_i = 0$ pro některé i). K takto upravené nerovnosti už můžeme použít dokázané tvrzení. Aby v původní nerovnosti nastala rovnost, musí existovat $t \in \mathbb{R}$ takové, že $u_i = t v_i$ pro všechna ta i, pro něž $v_i \neq 0$. Pro ta i, pro něž $v_i = 0$, ovšem musí podle předchozího platit i $u_i = 0$, takže dohromady $u_i = t v_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. □

Hölderova nerovnost

Tuto nerovnost nejprve uvedeme v historicky první podobě z Hölderova článku z roku 1885.[86]

Věta 2.87. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $v_1, \ldots, v_n$ a $u_1, \ldots, u_n$ a pro každé reálné číslo $p > 1$ platí*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Předpokládejme, že aspoň jedno z (nezáporných) čísel v_i je kladné (jinak je (2.10) triviální rovnost), a definujme čísla

$$\lambda_i = \frac{v_i}{v_1 + \ldots + v_n} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Potom je $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ zřejmě konvexní kombinace čísel $u_1, \ldots, u_n$. Pro funkci $f(u) = u^p$, která je konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro každé $p > 1$, neboť $f''(u) = p\,(p-1)\,u^{p-2} > 0$ pro každé $u > 0$, tak podle Jensenovy nerovnosti postupně dostaneme

$$\left(\frac{v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n}{v_1 + \ldots + v_n}\right)^p \leq \frac{v_1 u_1^p + \ldots + v_n u_n^p}{v_1 + \ldots + v_n}\,,$$

$$\frac{v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n}{v_1 + \ldots + v_n} \leq \left(\frac{v_1 u_1^p + \ldots + v_n u_n^p}{v_1 + \ldots + v_n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n \leq \frac{(v_1 + \ldots + v_n)\,(v_1 u_1^p + \ldots + v_n u_n^p)^{\frac{1}{p}}}{(v_1 + \ldots + v_n)^{\frac{1}{p}}}\,,$$

$$v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n \leq (v_1 + \ldots + v_n)^{\frac{p-1}{p}}\,(v_1 u_1^p + \ldots + v_n u_n^p)^{\frac{1}{p}}\,,$$

což je dokazovaná nerovnost (2.10). □

Hölderova nerovnost se však častěji uvádí ve své „moderní“ verzi, kterou zavedl F. Riesz a kterou zapíšeme v následující větě jako nerovnost (2.11). Ukážeme, že ji lze získat vhodnou volbou hodnot u_k, v_k v již dokázané nerovnosti (2.10).

Věta 2.88. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ a pro každá reálná čísla $p > 0$, $q > 0$ taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.11}$$

[86] Podle [Ste-04], str. 94

Důkaz. Všimneme si nejprve, že z rovnosti $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ plyne $p>1$, $q>1$, $q=\frac{p}{p-1}$, takže (díky nerovnosti $p>1$) lze využít dokázanou nerovnost (2.10) a přepsat ji ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Položíme-li v této nerovnosti $v_k=b_k^q$ a $u_k=\frac{a_k}{b_k^{q-1}}$ za předpokladu, že platí $b_k>0$ pro každé $k=1,\ldots,n$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^q \frac{a_k}{b_k^{q-1}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \frac{a_k^p}{b_k^{p(q-1)}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

což je zřejmě nerovnost (2.11), neboť $q=p\,(q-1)$. Nerovnost (2.11) je tak dokázána v případě, kdy je každé z čísel b_k kladné. Je-li $b_k=0$ pro některé k, lze zopakovat obdobnou úvahu, jakou jsme užili v závěru důkazu Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti. □

Youngova nerovnost

Věta 2.89. *Pro libovolná reálná čísla $a>0$, $b>0$ a každá reálná čísla $p>0$, $q>0$ taková, že $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, platí*

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{2.12}$$

Důkaz. Ukážeme, že nerovnost (2.12) plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x)=\ln x$, která je zřejmě na $(0,\infty)$ konkávní, a tudíž platí

$$\ln(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2$$

pro každou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ kladných čísel x_1 a x_2. Dosadíme-li do této nerovnosti $\lambda_1=\frac{1}{p}$, $\lambda_2=\frac{1}{q}$ a $x_1=a^p$, $x_2=b^q$, pak dostaneme

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q} = \ln(ab),$$

odkud po odlogaritmování obdržíme dokazovanou nerovnost (2.12). □

Minkowského nerovnost

Nerovnost z následující věty je zobecněním „trojúhelníkové nerovnosti“ v n-rozměrném euklidovském prostoru, kterou dostaneme, když ve větě zvolíme za parametr p číslo 2. Pro zajímavost jsme k Minkowského nerovnosti s obvykle uváděným parametrem $p>1$ připojili i její variantu pro $p\in(0,1)$, kdy ovšem trojúhelníková nerovnost platí „naopak“, než je tomu v metrických prostorech.

Věta 2.90. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n$*,* $b_1, \ldots, b_n$ *a každé reálné číslo* $p > 0$ *platí v případě* $p > 1$ *nerovnost*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.13}$$

zatímco v případě $0 < p < 1$ *platí opačná nerovnost*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.14}$$

(V případě $p = 1$ *jsou* (2.13) *i* (2.14) *triviální rovnosti).*

Důkaz. K důkazu obou nerovností využijeme funkci $f(u) = (1 + u^p)^{\frac{1}{p}}$, která je na intervalu $\langle 0, \infty)$ konkávní, resp. konvexní, podle toho, zda $p > 1$, resp. $0 < p < 1$. Přesvědčíme se o tom výpočtem její druhé derivace. Platí

$$f'(u) = \frac{\left(1 + u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \cdot u^{\frac{1}{p}}}{u} \qquad \text{a} \qquad f''(u) = -\frac{(p-1)\left(1 + u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \cdot u^{\frac{1}{p}}}{pu^2}.$$

Vidíme, že funkce f'' má na intervalu $(0, \infty)$ potřebné znaménko v obou případech $p > 1$, resp. $0 < p < 1$. Zabývejme se dále prvním z nich.

V uvažovaném případě $p > 1$ je zavedená funkce f konvexní, takže

$$\left(1 + \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \ge \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \left(1 + x_k^{\frac{1}{p}}\right)^{p}}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k} \tag{$*$}$$

je zápisem příslušné Jensenovy nerovnosti pro konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ s koeficienty

$$\lambda_k = \frac{v_k}{v_1 + \ldots + v_n} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Dosadíme-li do $(*)$ $v_k = a_k^p$ a $u_k = \frac{b_k^p}{a_k^p}$, kde a_k, b_k jsou nezáporná čísla, pro která máme nerovnost (2.13) dokázat (otázku existence zlomků ponechme chvíli stranou), dostaneme postupnými úpravami

$$\left(1 + \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p \frac{b_k^p}{a_k^p}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p \left(1 + \left(\frac{b_k^p}{a_k^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p},$$

$$\frac{\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uvedené odvození Minkowského nerovnosti je korektní s výjimkou případu, kdy všechna čísla v_k jsou rovna nule nebo kdy je takové některé z čísel a_k (takže příslušné u_k neexistuje). V prvním případě jsou všechna čísla a_k rovna nule a nerovnost (2.13) přechází v triviální rovnost. Ve druhém případě můžeme nejprve všechna a_k rovná nule změnit na kladná, pak korektně užít nerovnost (2.13) a nakonec v ní pro zmíněná k provést limitní přechod $a_k \to 0$.

V případě $0 < p < 1$ je důkaz (2.14) analogický, neboť pro tehdy konkávní funkci f platí $(*)$ s opačným znakem nerovnosti „$\leq$“. □

Nerovnost pro mocninné průměry

Pro každé reálné číslo $p > 0$ definujeme *mocninný průměr* stupně p nezáporných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ jako hodnotu

$$\left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p = 1$ dostáváme obvyklý aritmetický průměr, pro $p = 2$ obdržíme *kvadratický průměr* čísel $x_1, \ldots, x_n$.

Věta 2.91. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ a libovolná reálná čísla p, q taková, že $0 < p < q$, platí*

$$\left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.15}$$

přitom rovnost v (2.15) *nastane, právě když $x_1 = \ldots = x_n$.*

Důkaz. Označíme nejprve $r = \frac{q}{p} > 1$. Pak $x_i^q = y_i^r$, kde $y_i = x_i^p$ pro $i = 1, \ldots, n$. Nerovnost (2.15) pak bude mít tvar

$$\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{y_1^r + \ldots + y_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{pr}} .$$

Odtud po umocnění kladným exponentem pr dostaneme

$$\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^{r} \leq \left(\frac{y_1^r + \ldots + y_n^r}{n}\right) ,$$

což je Jensenova nerovnost pro ryze konvexní funkci $f(y) = y^r$ $(r > 1)$ s koeficienty $\lambda_i = \frac{1}{n}$. A protože zřejmě $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, plyne odtud rovněž tvrzení o rovnosti v (2.15). □

Poznamenejme, že stejným způsobem lze dokázat i nerovnost pro *vážené* mocninné průměry libovolných stupňů p a q $(0 < p < q)$

$$(\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda_1 x_1^q + \ldots + \lambda_n x_n^q)^{\frac{1}{q}},$$

kde $\lambda_i > 0$ a $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Nerovnost mezi váženým mocninným a váženým geometrickým průměrem

Věta 2.92. *Pro libovolná kladná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$, reálné koeficienty $\lambda_i > 0$, pro něž $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, a pro libovolné reálné číslo $p > 0$ platí*

$$(\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} , \tag{2.16}$$

přitom rovnost v (2.16) *nastane, právě když $x_1 = \ldots = x_n$.*

Důkaz. Nerovnost (2.16) zlogaritmujeme a postupně upravíme:

$$\frac{1}{p} \ln (\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p) \geq \ln \left(x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}\right) ,$$

$$\ln (\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p) \geq \lambda_1 \ln x_1^p + \ldots + \lambda_n \ln x_n^p .$$

Poslední nerovnost je však Jensenova nerovnost pro funkci $f(x) = \ln x^p$, která je ryze konkávní na $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = -\frac{p}{x^2} < 0$ pro všechna $x > 0$. Odtud plyne i tvrzení o rovnosti v (2.16). □

Poznámka. Geometrickému průměru se někdy říká *mocninný průměr stupně nula*. Ukážeme, že totiž vážené mocninné průměry kromě nerovnosti (2.16) splňují limitní vztah

$$\lim_{p\to 0^+} (\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} = x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} .$$

Přepišme ho po zlogaritmování do ekvivalentního tvaru

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{\ln(\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p)}{p} = \lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n$$

(připomínáme předpoklad, že čísla x_i jsou kladná) a pro poslední limitu, která je typu $\frac{0}{0}$ (neboť $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$), užijeme l'Hospitalovo pravidlo. Podle něho je zkoumaná limita rovna

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln(\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p)}{1} &= \lim_{p\to 0^+} \frac{\lambda_1 x_1^p \ln x_1 + \ldots + \lambda_n x_n^p \ln x_n}{\lambda_1 x_1^p + \ldots + \lambda_n x_n^p} = \\ &= \frac{\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = \lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n ,\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

Radonova nerovnost

Věta 2.93. *Pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ a každé reálné číslo $s \notin \{-1, 0\}$ platí v případě $s < -1$ nebo $s > 0$ nerovnost*

$$\frac{a_1^{s+1}}{b_1^s} + \ldots + \frac{a_n^{s+1}}{b_n^s} \ge \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^{s+1}}{(b_1 + \ldots + b_n)^s} , \tag{2.17}$$

zatímco v případě $-1 < s < 0$ platí opačná nerovnost

$$\frac{a_1^{s+1}}{b_1^s} + \ldots + \frac{a_n^{s+1}}{b_n^s} \le \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^{s+1}}{(b_1 + \ldots + b_n)^s} . \tag{2.18}$$

Není-li $n = 1$, pak rovnost v (2.17) nebo (2.18) nastane, právě když platí $a_k = b_k$ pro každé $k = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Oba případy

$$\text{(i)}\quad s \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty) , \qquad \text{(ii)}\quad s \in (-1, 0)$$

budeme posuzovat současně. Protože jsou obě dokazované nerovnosti homogenní jak v n-tici $a_1, \ldots, a_n$, tak v n-tici $b_1, \ldots, b_n$, stačí je dokázat v situaci, kdy

$$a_1 + \ldots + a_n = 1 \qquad \text{a zároveň} \qquad b_1 + \ldots + b_n = 1 . \tag{$*$}$$

O výrazu z obou levých stran nerovností, který zapíšeme ve tvaru

$$V = a_1 \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{-s} + \ldots + a_n \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{-s},$$

pak máme ukázat, že $V \geq 1$ v případě (i) a $V \leq 1$ v případě (ii). Funkce $f(x) = x^{-s}$ má druhou derivaci $f''(x) = s(s+1)x^{-s-2}$, takže je na intervalu $(0, \infty)$ v případě (i) ryze konvexní a v případě (i) ryze konkávní. Položíme-li $x_i = \frac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, dostaneme vyjádření výrazu V

$$V = a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n)$$

jako konvexní kombinace hodnot $f(x_1), \ldots, f(x_n)$, a to díky první rovnosti v $(*)$. Podle Jensenovy nerovnosti tak v případě (i) platí

$$V \geq f(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = f(b_1 + \ldots + b_n),$$

v případě (ii) naopak

$$V \leq f(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = f(b_1 + \ldots + b_n).$$

Díky druhé rovnosti v $(*)$ platí $f(b_1 + \ldots + b_n) = f(1) = 1^{-s} = 1$ a obě dokazované nerovnosti platí. Rovnost v některé z nich nastane, právě když platí $x_1 = \ldots = x_n$ (což je podmínka ze závěru zadání příkladu), neboť funkce f je pro každé $s \notin \{-1, 0\}$ ryze konvexní, resp. ryze konkávní. □

2.5 Princip majorizace

V závěrečné části této kapitoly se budeme věnovat aplikacím jednoho méně známého zobecnění Jensenovy nerovnosti. Říká se mu majorizační nerovnost[87] a pro konvexní funkci f je tvaru

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n), \tag{2.19}$$

který přejde v základní podobu Jensenovy nerovnosti[88] v případě, kdy

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

V nerovnosti (2.19) jsou $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dvě n-tice čísel z intervalu, na kterém je funkce f konvexní, jež pochopitelně musí splňovat jisté podmínky, mezi něž patří především rovnost

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \tag{2.20}$$

[87] V literatuře se též setkáváme s názvem *Karamata's inequality.*

[88] Více o souvislosti s Jensenovou nerovností pojednáme v poznámce, kterou uvedeme bezprostředně po důkazu věty 2.95 o majorizační nerovnosti.

Zbylé podmínky lze vyjádřit soustavou nerovností, které napíšeme nejsnáze, pokud čísla v obou n-ticích sestupně uspořádáme:

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \qquad \text{a} \qquad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \,. \tag{2.21}$$

S ohledem na symetrii součtů v (2.19) nepředstavují nerovnosti (2.21) žádná omezení. Ta najdeme teprve v následující definici relace $x \succ y$.

Definice 2.94. Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou libovolné n-tice reálných čísel splňující kromě (2.20) a (2.21) soustavu nerovností

$$x_1 \geq y_1 \,, \quad x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \,, \quad \ldots, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \,. \tag{2.22}$$

Pak říkáme, že x *majorizuje* y a píšeme $x \succ y$ nebo (ekvivalentně) $y \prec x$.

Nyní uvedeme formulaci výsledku o majorizační nerovnosti (2.19) pro konvexní funkce. Poté před jeho důkazem učiníme poznámku o modifikaci výsledku pro konkávní funkce, který ovšem dále dokazovat nebudeme, neboť i v tomto případě lze využít záměnu funkce f za funkci $-f$.

Věta 2.95. *Nechť f je funkce konvexní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom pro každé dvě n-tice čísel $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ takové, že*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \,, \tag{2.23}$$

platí tzv. majorizační nerovnost (2.19), *přičemž – je-li funkce f ryze konvexní – rovnost v ní nastane pouze v případě, kdy $x_i = y_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Pro konvexní (resp. ryze konvexní) funkci f, která je navíc rostoucí na I, platí oba uvedené závěry i pro každé dvě n-tice čísel $x_i, y_i \in I$, jež místo podmínky (2.23), *tj. nerovností* (2.21), (2.22) *a rovnosti* (2.20), *splňují nerovnosti* (2.21), (2.22) *a nerovnost*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_n \,. \tag{2.24}$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I naopak konkávní, pak pro n-tice čísel $x_i, y_i \in I$ splňující podmínku (2.23) platí opačná nerovnost

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

se stejným dodatkem o rovnosti pro ryze konkávní funkci f a rozšířením celého tvrzení pro klesající konkávní (resp. ryze konkávní) funkci f.

Abychom učinili důkaz věty 2.95 (převzatý z článku [Kad-05]) přehlednější, vyčleníme jeho teoretický podklad ve formě následujícího lemmatu. Pojednáme v něm o tzv. diferenčním podílu

$$\Delta_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \,,$$

symetrické funkci dvou proměnných x a y, definované pro všechny dvojice (x, y) čísel $x \neq y$ z definičního oboru I zkoumané funkce f. Bez ohledu na to, jaká funkce f je, pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ z oboru I leží hodnota $\Delta_f(x_1, x_3)$ mezi hodnotami $\Delta_f(x_1, x_2)$, $\Delta_f(x_2, x_3)$ a je navíc od nich různá, neplatí-li $\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_3)$. Tato obecná vlastnost diferenčního podílu je důsledkem zřejmých algebraických pravidel

$$\frac{u}{p} < \frac{v}{q} \Rightarrow \frac{u}{p} < \frac{u+v}{p+q} < \frac{v}{q} \quad \text{a} \quad \frac{u}{p} = \frac{v}{q} \Rightarrow \frac{u}{p} = \frac{u+v}{p+q} = \frac{v}{q}$$

platných pro libovolná čísla $u, v \in \mathbb{R}$ a $p, q \in \mathbb{R}^+$, neboť například

$$\frac{u}{p} < \frac{u+v}{p+q} \Leftrightarrow up + uq < up + vp \Leftrightarrow uq < vp \Leftrightarrow \frac{u}{p} < \frac{v}{q}\,.$$

Nyní zformulujeme a dokážeme speciální vlastnost, kterou se vyznačují diferenční podíly sestavené pro konvexní funkce.

Lemma 2.96. *Je-li funkce f konvexní (resp. ryze konvexní) na intervalu I, pak pro každé pevné $y \in I$ je funkce δ daná předpisem*

$$\delta(x) = \Delta_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

neklesající (resp. rostoucí) na množině $I \setminus \{y\}$.

Důkaz. Kromě daného $y \in I$ zvolme body $x_1 < x_2$ z množiny $I \setminus \{y\}$ a ukažme, že v případě konvexní (resp. ryze konvexní) funkce f platí nerovnost $\delta(x_1) \le \delta(x_2)$ (resp. $\delta(x_1) < \delta(x_2)$). Rozlišíme přitom tři možné vzájemné polohy bodů y, x_1, x_2, totiž

$$\text{(i) } x_1 < y < x_2, \qquad \text{(ii) } y < x_1 < x_2, \qquad \text{(iii) } x_1 < x_2 < y,$$

a využijeme charakteristiku konvexní funkce f pomocí implikací (2.3) z úvodu této kapitoly. Podle ní v případě (i) platí $\Delta_f(x_1, y) \le \Delta_f(y, x_2)$, což je přímo nerovnost $\delta(x_1) \le \delta(x_2)$. V případě (ii) platí $\Delta_f(y, x_1) \le \Delta_f(x_1, x_2)$. Mezi těmito hodnotami leží – díky obecné vlastnosti diferenčního podílu – i hodnota $\Delta_f(y, x_2)$, takže $\delta(x_1) \le \delta(x_2)$ platí i tentokrát. Konečně v případě (iii) leží hodnota $\Delta_f(x_1, y)$ mezi hodnotami $\Delta_f(x_1, x_2)$ a $\Delta_f(x_2, y)$, které podle implikace (2.3) splňují nerovnost $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, y)$. Nerovnost $\delta(x_1) \le \delta(x_2)$ je tak dokázána i v posledním případě. Snadná revize posledních tří vět (s ostrými nerovnostmi v pravých stranách (2.3)) ukazuje, že pro ryze konvexní funkci f platí ve všech třech případech ostrá nerovnost $\delta(x_1) < \delta(x_2)$. Důkaz lemmatu je tak hotov. □

Důkaz věty 2.95. Nejprve předpokládejme, že pro n-tice čísel $x_i, y_i \in I$ splňující (2.23) platí navíc $x_i \neq y_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme z_i diferenční podíl funkce f v bodě $[x_i, y_i]$, tedy

$$z_i = \Delta_f(x_i, y_i) = \frac{f(y_i) - f(x_i)}{y_i - x_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Protože funkce f je podle předpokladu věty konvexní, pak z nerovností (2.21) a předchozího lemmatu plyne, že posloupnost hodnot z_i je nerostoucí. Zřejmě totiž díky soustavě nerovností $x_i \geq x_{i+1}$ a $y_i \geq y_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$x_{i+1} \neq y_i \quad \Rightarrow \quad z_{i+1} = \Delta(x_{i+1}, y_{i+1}) \leq \Delta(x_{i+1}, y_i) \leq \Delta(x_i, y_i) = z_i\,,$$

přičemž v případě $x_{i+1} = y_i$ lze využít druhé odvození

$$x_i \neq y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad z_{i+1} = \Delta(x_{i+1}, y_{i+1}) \leq \Delta(x_i, y_{i+1}) \leq \Delta(x_i, y_i) = z_i\,;$$

z podmínky $x_i \neq y_i$ totiž plyne, že rovnosti $x_{i+1} = y_i$ a $x_i = y_{i+1}$ současně nastat nemohou, neboť bychom měli $y_i \geq y_{i+1} = x_i \geq x_{i+1} = y_i$, a tudíž $x_i = y_i$, což je spor s úvodním předpokladem. Dodejme, že podle lemmatu v případě ryzí konvexní funkce f z našeho odvození plyne, že rovnost $z_{i+1} = z_i$ nastane, právě když $x_i = x_{i+1}$ a zároveň $y_i = y_{i+1}$.

Dále označme

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i\,,$$

kde $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_0 = Y_0 = 0$. Pak podle (2.20) platí rovněž $X_n = Y_n$ a užitím tzv. Abelovy sumační metody dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(y_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i - y_i) = \\
= \sum_{i=1}^{n} z_i(X_i - X_{i-1} - Y_i + Y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} z_i(X_i - Y_i) - \sum_{i=1}^{n} z_i(X_{i-1} - Y_{i-1}) = \\
= \sum_{i=1}^{n-1} z_i(X_i - Y_i) - \sum_{i=0}^{n-1} z_{i+1}(X_i - Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_{i+1})(X_i - Y_i)\,.
\end{aligned}$$

A protože $z_i \geq z_{i+1}$ (viz výše) a podle (2.22) rovněž $X_i \geq Y_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$, je poslední suma nezáporná, a tedy i

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geq 0\,,$$

čímž je v případě $x_i \neq y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ důkaz nerovnosti (2.19) hotov. Zjistěme ještě, kdy v uvažovaném případě nastane pro ryze konvexní funkci f v dokázané nerovnosti (2.19) rovnost. Podle odvozeného vyjádření se tak stane, právě když pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$ bude platit $z_{i+1} = z_i$ nebo $X_i = Y_i$, což lze zapsat soustavou podmínek

$$(x_i = x_{i+1} \wedge y_i = y_{i+1}) \vee X_i = Y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Protože v našem případě platí $x_1 \neq y_1$ neboli $X_1 \neq Y_1$, z podmínky pro $i = 1$ plyne $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$. Odtud plyne, že kdyby podmínka pro $i = 2$ byla splněna díky rovnosti $X_2 = Y_2$, měli bychom $2x_1 = 2y_1$, což je ve sporu s $x_1 \neq y_1$; platí tedy $x_1 = x_2 = x_3$ a $y_1 = y_2 = y_3$. Opakováním úvahy nakonec dospějeme k rovnostem

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \quad \text{a} \quad y_1 = y_2 = \ldots = y_n\,, \tag{2.25}$$

které ovšem díky podmínce (2.20) vyjádřené rovností $X_n = Y_n$ opět vedou ke sporu. Dokázali jsme, že v případě $x_i \neq y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ v nerovnosti (2.19) s ryze konvexní funkcí f rovnost nastat nemůže.

Zabývejme se nyní případem, ve kterém pro dvě n-tice čísel $x_i, y_i \in I$ splňující podmínku (2.23) platí rovnost $x_i = y_i$ pro některá $i = 1, 2, \ldots, n$. Jejich počet označme k, $1 \leq k \leq n$. Je-li $k = n$, není co dokazovat (bude to, jak uvidíme, jediný případ, kdy v (2.19) s ryze konvexní funkcí f nastane rovnost). V případě $k < n$ všechny dvojice shodných hodnot x_i, y_i ve výchozích n-ticích škrtneme. Dostaneme tak dvě $(n-k)$-tice $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-k})$ a $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n-k})$, pro které zřejmě opět platí

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-k}) \succ (y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n-k})$$

a pro něž je nerovnost

$$f(x'_1) + f(x'_2) + \ldots + f(x'_{n-k}) \geq f(y'_1) + f(y'_2) + \ldots + f(y'_{n-k}) \tag{2.26}$$

ekvivalentní s původní nerovností (2.19). Protože však $x'_i \neq y'_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-k$, plyne nerovnost (2.26) – včetně dodatku o rovnosti pro ryze konvexní funkci f – z první části našeho důkazu.

Zbývá dokázat druhou část věty o případu rostoucí konvexní funkce f, kdy je podmínka $X_n = Y_n$ nahrazena nerovností $X_n \geq Y_n$, a kdy výsledek Abelovy sumace získává tvar

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) = z_n(X_n - Y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_{i+1})(X_i - Y_i)\,. \tag{2.27}$$

Podmínku $X_n = Y_n$ jsme v předchozím důkazu toho, že suma v pravé straně (2.27) je nezáporná, nepotřebovali. Protože navíc (v případě $x_n \neq y_n$) zřejmě platí $z_n > 0$, je pravá strana (2.27) nezáporná, takže důkaz neostré nerovnosti (2.19) je i při této variantě hotov (princip škrtání složek $x_i = y_i$ opět funguje). Pro ryze konvexní rostoucí funkci f se rozbor rovností v (2.19) v případě $x_i \neq y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ provede stejně jako výše: z rovnosti nule sumy v pravé straně (2.27) se i nyní odvodí rovnosti (2.25). Tím je hotov i důkaz druhé části věty. $\square$

Poznámka. Jak jsme naznačili v úvodu této podkapitoly, majorizační věta 2.95 je zobecněním Jensenovy nerovnosti

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

pro konvexní funkci f, neboť za předpokladu $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ zřejmě platí

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (x, x, \ldots, x)\,, \qquad \text{kde} \quad x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,.$$

Dodejme pro zajímavost, že i obecná Jensenova nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

pro každou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ má svou obecnější podobu ve formě majorizační nerovnosti

$$\lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2) + \ldots + \lambda_n f(y_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

pro funkci f konvexní na intervalu I, platné za předpokladu, že dvě n-tice čísel $x_i, y_i \in I$ splňují podmínky

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \qquad \text{a} \qquad y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_n\,,$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \ge \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_k y_k \qquad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n\,.$$

(Jensenovu nerovnost zřejmě dostaneme volbou $y_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$.) Takové zobecnění majorizační nerovnosti však při řešení příkladů potřebovat nebudeme (žádné jeho účelné uplatnění k přehledným nerovnostem s elementárními funkcemi jsme v literatuře nenašli).

Příklad 2.97. Nechť a, b, c jsou libovolná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, pro něž platí $a+b+c = -\frac{1}{2}$. Najděte maximum výrazu[89]

$$a^{12} + b^{12} + c^{12}\,.$$

Řešení. Jestliže (bez újmy na obecnosti) platí $1 \ge a \ge b \ge c \ge -1$, pak z rovnosti ze zadání plyne

$$\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \succ (a, b, c)\,,$$

neboť $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \ge -c - \frac{1}{2} = a + b$. Z majorizační nerovnosti pro funkci $f(x) = x^{12}$, která je na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ konvexní, neboť $f''(x) = 132x^{10} \ge 0$, tak dostáváme

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} = f(a) + f(b) + f(c) \le f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1) = 2 + \frac{1}{2^{12}}\,,$$

přičemž hodnoty $2 + \frac{1}{2^{12}}$ zkoumaný součet dosahuje v případě $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$, takže jde skutečně o maximální hodnotu.

[89] [Li-00], str. 2

Příklad 2.98. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí[90]

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}} \le \sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}\,.$$

Řešení. Jistě můžeme předpokládat, že $b \ge a \ge 0$. Ze čtveřice čísel

$$x_1 = b+\sqrt[3]{b}, \qquad x_2 = b+\sqrt[3]{a}, \qquad x_3 = a+\sqrt[3]{b}, \qquad x_4 = a+\sqrt[3]{a}$$

je zřejmě x_1 číslo největší a číslo x_4 nejmenší. A protože $x_1+x_4 = x_2+x_3$, platí jedna z relací $(x_1, x_4) \succ (x_2, x_3)$ nebo $(x_1, x_4) \succ (x_3, x_2)$ – podle toho, které z čísel x_2, x_3 je větší. Nyní uvažme funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ta je na intervalu $\langle 0, \infty)$ konkávní, takže z majorizační nerovnosti – bez ohledu na to, zda (x_1, x_4) majorizuje (x_2, x_3) či (x_3, x_2) – plyne

$$f(x_4)+f(x_1) \le f(x_3)+f(x_2)\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2.99. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[91]

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \ge b \ge c$. Pak ovšem platí

$$(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, b+c, c+a)\,,$$

odkud užitím majorizační nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, ryze konvexní na intervalu $(0, \infty)$, dostáváme

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} = f(a+b)+f(b+c)+f(c+a) \le f(2a)+f(2b)+f(2c) = \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,.$$

Rovnost nastane pouze v případě $a = b = c$.

Příklad 2.100. Dokažte, že libovolná kladná reálná čísla a, b, c, pro něž platí $abc = 1$, splňují nerovnost[92]

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1\,.$$

[90] [Li-00], str. 2
[91] [Kad-05], str. 35
[92] [Kla-02], str. 89

Řešení. Substituce $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, kde např. $x = a$, $y = 1$, $z = ac$, transformuje nerovnost ze zadání do tvaru

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz\,. \qquad (*)$$

S ohledem na symetrii poslední nerovnosti můžeme předpokládat, že $x \geq y \geq z$. Pak platí $y - z + x \geq x - y + z \geq z - x + y$, přitom první dvě z posledních tří hodnot jsou zřejmě kladné, neboť $x - y + z \geq z > 0$. Je-li proto $z - x + y \leq 0$, platí nerovnost $(*)$ triviálně, takže budeme dále předpokládat, že také $z - x + y > 0$. Zřejmě platí

$$(y - z + x, x - y + z, z - x + y) \succ (x, y, z)\,.$$

Užijeme-li nyní funkci $f(x) = \ln x$, která je jak známo ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$, pak z majorizační nerovnosti pro uvedené trojice kladných čísel plyne

$$\ln(y - z + x) + \ln(x - y + z) + \ln(z - x + y) \leq \ln x + \ln y + \ln z\,,$$

odkud po odlogaritmování dostáváme nerovnost $(*)$, kterou jsme chtěli dokázat. Dodejme, že rovnost nastane pouze v případě $x = y = z$ neboli $a = b = c = 1$.

Příklad 2.101. Nechť a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou kladná reálná čísla splňující podmínky

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n\,, \qquad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$$

a dále

$$a_1 \geq b_1\,, \qquad a_1a_2 \geq b_1b_2\,, \qquad \ldots, \qquad a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \geq b_1b_2 \cdot \ldots \cdot b_n\,.$$

Dokažte, že platí[93]

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n\,.$$

Řešení. Zavedeme-li substituci $x_i = \ln a_i$, $y_i = \ln b_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, pak zřejmě platí

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n\,, \qquad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$$

a rovněž jsou splněny nerovnosti

$$x_1 \geq y_1\,, \qquad x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2\,, \qquad \ldots, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_n\,.$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Ta je na $\mathbb{R}$ nejen konvexní, ale i rostoucí, a tedy podle závěrečné části majorizační věty 2.95 platí (podmínka $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ nemusí být splněna)

$$\mathrm{e}^{x_1} + \mathrm{e}^{x_2} + \ldots + \mathrm{e}^{x_n} \geq \mathrm{e}^{y_1} + \mathrm{e}^{y_2} + \ldots + \mathrm{e}^{y_n}\,,$$

což je ekvivalentní dokazované nerovnosti $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

[93] [Kad-05], str. 41

Příklad 2.102. Pro libovolný trojúhelník se stranami a, b, c a obvodem $2s = a + b + c$ dokažte, že za předpokladu $s < 1$ platí nerovnosti[94]

$$\left(\frac{3+2s}{3-2s}\right)^3 \le \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{1+c}{1-c} < \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 .$$

Řešení. Můžeme předpokládat, že platí $a \ge b \ge c > 0$. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá odhad $2s = a + b + c > a + a = 2a$, odkud máme $s > a$ a $2s > a + b$. Dohromady dostáváme pravou z relací

$$\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a, b, c) \prec (s, s, 0) ,$$

levá je díky uspořádání čísel a, b, c a jejich součtu zřejmá. Z podmínky $s < 1$ ze zadání úlohy plyne, že všechna čísla z vypsaných trojic jsou z intervalu $\langle 0, 1)$, na kterém je funkce $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ zřejmě spojitá a ryze konvexní, neboť $f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2} > 0$ pro každé číslo $x \in (0, 1)$. Majorizační nerovnost pro dvě trojice (a, b, c) a $(s, s, 0)$, různé díky nerovnosti $s > a$, je proto ostrá:

$$\ln \frac{1+a}{1-a} + \ln \frac{1+b}{1-b} + \ln \frac{1+c}{1-c} < 2f(s) + f(0) = 2 \ln \frac{1+s}{1-s} .$$

Odlogaritmováním dostaneme pravou z dokazovaných nerovností; levá nerovnost je podobným důsledkem majorizační nerovnosti pro stejnou funkci f a trojice $\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$ a (a, b, c) – k jejímu důkazu ovšem bylo možné využít přímo Jensenovu nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c$.

Příklad 2.103. Dokažte, že pro délky stran libovolného trojúhelníku ABC platí[95]

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} .$$

Řešení. Úvodem poznamenejme, že podle trojúhelníkové nerovnosti jsou všechny odmocňované výrazy kladné. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \ge b \ge c$. Pak zřejmě

$$(a + b - c, c + a - b, b + c - a) \succ (a, b, c) .$$

Vezmeme-li nyní funkci $f(x) = \sqrt{x}$, ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$, pak z majorizační nerovnosti přímo dostáváme

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} .$$

[94] [Ste-04], str. 203, zadání i řešení upraveno
[95] [Kla-02], str. 86

Poznámka. Zvolíme-li v podaném řešení obecnější funkci $f(x) = x^p$ s reálným parametrem p, dojdeme k obecnějšímu závěru, že pro délky a, b, c v případě $p \in (0, 1)$ platí

$$(a+b-c)^p + (b+c-a)^p + (c+a-b)^p \le a^p + b^p + c^p\,,$$

zatímco v případě $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ je splněna opačná nerovnost

$$(a+b-c)^p + (b+c-a)^p + (c+a-b)^p \ge a^p + b^p + c^p\,.$$

Funkce f je totiž na intervalu $(0, \infty)$ v prvním případě konkávní, ve druhém případě konvexní, neboť pro každé $x > 0$ platí $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Konečně volbou konkávní funkce $f(x) = \ln x$ získáme pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku odhad

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc\,,$$

který byl jako úloha E2284 autora A. W. Walkera uveřejněn v r. 1971 v časopise *American Mathematical Monthly.*

Příklad 2.104. Najděte nejmenší a největší hodnotu výrazu[96]

$$V = \frac{1}{4-(a+b)^2} + \frac{1}{4-(b+c)^2} + \frac{1}{4-(c+a)^2}\,,$$

kde proměnné a, b, c jsou nezáporná čísla, jejichž součet se rovná 1.

Řešení. Vzhledem k symetrii výrazu V můžeme předpokládat, že $a \ge b \ge c$. V takovém případě z podmínky $a + b + c = 1$ plyne, že $a \ge \frac{1}{3} \ge c$, a tedy že

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \prec (a+b, a+c, b+c) \prec (1, 1, 0)\,.$$

Zřejmě totiž platí vztahy

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &\le a+b \le 1\,,\\ \frac{2}{3}+\frac{2}{3} &\le a+b+a+c \le 1+1\,,\\ \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} &= a+b+a+c+b+c = 1+1+0\,. \end{aligned}$$

Nyní podle majorizační nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$, která je na intervalu $(0, 1)$ konvexní, neboť pro každý jeho bod x je

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3} > 0\,,$$

[96] [Kur-07], str. 14, upraveno

platí

$$f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\le f(a+b)+f(a+c)+f(b+c)\le f(1)+f(1)+f(0)\,,$$

odkud po dosazení získáváme hledané extrémní hodnoty

$$\frac{27}{32}\le\frac{1}{4-(a+b)^2}+\frac{1}{4-(b+c)^2}+\frac{1}{4-(c+a)^2}\le\frac{11}{12}\,.$$

Jedná se skutečně o minimum a maximum výrazu V, neboť to jsou jeho hodnoty pro čísla $a=b=c=\frac{1}{3}$, resp. $a=1$, $b=c=0$.

Příklad 2.105. Ukažte, že v libovolném ostroúhlém trojúhelníku ABC platí[97]

$$1<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}\,.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\alpha\ge\beta\ge\gamma$. Pak jistě $\alpha\ge\frac{\pi}{3}$ a $\gamma\le\frac{\pi}{3}$. Spolu s tím, že trojúhelník ABC je ostroúhlý, to znamená, že

$$\frac{\pi}{2}>\alpha\ge\frac{\pi}{3}\qquad\text{a}\qquad\pi>\alpha+\beta(=\pi-\gamma)\ge\frac{2\pi}{3}\,,$$

a tedy platí

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(\alpha,\beta,\gamma)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\,.$$

Vezmeme-li nyní funkci $f(x)=\cos x$, která je na intervalu $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ ryze konkávní, pak z majorizační nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)\le f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\\ \le f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Dodejme, že zatímco v první nerovnosti rovnost nastat nemůže (neboť $\gamma>0$), druhá nerovnost, která je vlastně Jensenovou nerovností uvedenou v kapitole 2 v poznámce za příkladem 2.36, přejde v rovnost pouze v případě rovnostranného trojúhelníku.

[97] [Li-00], str. 2

Poznámka. Stejnou metodou lze pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného ostroúhlého trojúhelníku odvodit nerovnosti

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2\,, \qquad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}\,,$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} > 1 + \sqrt{2}\,, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < 2\,,$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} > \sqrt{2}\,, \qquad \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} < 2\sqrt{2} + 1\,.$$

Snadno se totiž ověří, že funkce $\sin x$, $\cos\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2}$ a $\ln\cos\frac{x}{2}$ jsou na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ ryze konkávní, zatímco funkce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ tam jsou ryze konvexní.

Příklad 2.106. Ukažte, že v libovolném tupoúhlém trojúhelníku ABC platí[98]

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} > 2\sqrt{2} - 1\,.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Podle zadání $\alpha > \frac{\pi}{2}$, čili $\frac{\alpha}{2} > \frac{\pi}{4}$. A protože $\frac{\pi}{2} > \beta + \gamma \ge 2\gamma$, tedy $\gamma < \frac{\pi}{4}$, platí $\alpha + \beta > \frac{3\pi}{4}$ neboli $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} > \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$, odkud plyne

$$\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \succ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)\,.$$

Uvažme nyní funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ ryze konvexní na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, neboť $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$ pro všechna $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Užitím majorizační nerovnosti pro funkci f tak dostáváme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \ge \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} - 1\,,$$

neboť $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a hodnotu $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ lze určit ze vzorce pro tangens dvojnásobného úhlu:

$$1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}\,.$$

Dodejme, že rovnost v dokázané nerovnosti nastat nemůže, neboť $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

[98] [Qua-07], str. 2

Poznámka. Stejnou metodou lze pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného tupoúhlého trojúhelníku odvodit nerovnosti

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < \sqrt{2} + 1\,, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} > 2\sqrt{2} + 3\,,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{\sqrt{2}-1}{4}\,, \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} > 7 - 4\sqrt{2}\,,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{4}\,.$$

Snadno se totiž ověří, že funkce $\sin 2x$, $\ln\sin x$ a $\ln\cos x$ jsou na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ ryze konkávní, zatímco funkce $\operatorname{cotg} x$ a $\operatorname{tg}^2 x$ tam jsou ryze konvexní.

Příklad 2.107. Dokažte, že pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$ platí[99]

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \ldots + \cos(2x_n - x_1) \le \cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n\,.$$

Řešení. Vezměme n-tice čísel $(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \ldots, 2x_n - x_1)$ a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uspořádejme je do dvou nerostoucích posloupností

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}, 2x_{m_2} - x_{m_2+1}, \ldots, 2x_{m_n} - x_{m_n+1}) \quad \text{a} \quad (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})\,,$$

kde $x_{n+1} = x_1$. Pak pro každé $l = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$\begin{aligned}
&(2x_{m_1} - x_{m_1+1} + \ldots + 2x_{m_l} - x_{m_l+1}) - (x_{k_1} + \ldots + x_{k_l}) \ge \\
\ge&(2x_{k_1} - x_{k_1+1} + \ldots + 2x_{k_l} - x_{k_l+1}) - (x_{k_1} + \ldots + x_{k_l}) = \\
=&(x_{k_1} + \ldots + x_{k_l}) - (x_{k_1+1} + \ldots + x_{k_l+1}) \ge 0\,,
\end{aligned}$$

přičemž pro $l = n$ nastane v předchozí nerovnosti rovnost. Odtud vyplývá

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}, 2x_{m_2} - x_{m_2+1}, \ldots, 2x_{m_n} - x_{m_n+1}) \succ (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})\,.$$

Nyní užitím majorizační nerovnosti pro funkci $f(x) = \cos x$, která je konkávní na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, kde všechna čísla $2x_i - x_{i+1}$ a x_i podle zadání příkladu leží, dostáváme

$$\cos(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \ldots + \cos(2x_{m_n} - x_{m_n+1}) \le \cos x_{k_1} + \ldots + \cos x_{k_n}\,,$$

což je dokazovaná nerovnost (zapsaná s pozměněným pořadím sčítanců).

[99] [Mat-07], str. 13

Příklad 2.108. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a reálné číslo $p \geq 1$ platí[100]

$$\left(1+\frac{a_1^p}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^p}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^p}{a_1}\right) \geq (1+a_1^{p-1})(1+a_2^{p-1})\dots(1+a_n^{p-1}).$$

Řešení. Označme $x_i = \ln a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ a předpokládejme dále, že $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ a $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ jsou ty dvě permutace téže n-tice $(1, 2, \dots, n)$, pro něž jsou (za předpokladu $x_{n+1} = x_1$) obě posloupnosti

$$(px_{m_1} - x_{m_1+1}, px_{m_2} - x_{m_2+1}, \dots, px_{m_n} - x_{m_n+1}) \text{ a } (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}),$$

nerostoucí. S ohledem na zadanou podmínku $p \geq 1$ je zřejmě nerostoucí i posloupnost

$$((p-1)x_{k_1}, (p-1)x_{k_2}, \dots, (p-1)x_{k_n}).$$

Všimněme si, že pro první a třetí z vypsaných nerostoucích posloupností platí

$$(px_{m_1} - x_{m_1+1}, px_{m_2} - x_{m_2+1}, \dots, px_{m_n} - x_{m_n+1}) \succ ((p-1)x_{k_1}, (p-1)x_{k_2}, \dots, (p-1)x_{k_n}),$$

neboť pro každé $l = 1, 2, \dots, n-1$ jsou splněny nerovnosti

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l}(px_{m_i} - x_{m_i+1}) - \sum_{i=1}^{l}(p-1)x_{k_i} &\geq \sum_{i=1}^{l}(px_{k_i} - x_{k_i+1}) - \sum_{i=1}^{l}(p-1)x_{k_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{l} x_{k_i} - \sum_{i=1}^{l} x_{k_i+1} \geq 0,\end{aligned}$$

přičemž pro $l = n$ nastane v předchozí nerovnosti rovnost. Z majorizační nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, jež je konvexní na $(-\infty, \infty)$, neboť $f''(x) = \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^{-2} > 0$ pro každé x, proto plyne

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\mathrm{e}^{(px_{m_i} - x_{m_i+1})}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\mathrm{e}^{(p-1)x_{k_i}}\right),$$

odkud po dosazení $x_i = \ln a_i$ a odlogaritmování dostáváme, co jsme měli dokázat.

Příklad 2.109. Dokažte, že pro přirozená čísla $k < n$ a kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ taková, že s číslem k splňují nerovnost

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{k},$$

platí[101]

$$\frac{n^2}{n + a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \leq n - k + \frac{k^2}{k + a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

[100] [Mat-07], str. 16, zobecněno

[101] [Ste-04], str. 204, rozšířeno o levou nerovnost

Řešení. Označme $s = \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ a s ohledem na podmínku úlohy a symetrii jejího zadání předpokládejme, že

$$s \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n\,.$$

Z těchto nerovností a vztahu $ks = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ plyne

$$\Bigl(\underbrace{\frac{ks}{n}, \frac{ks}{n}, \ldots, \frac{ks}{n}}_{n}\Bigr) \prec (a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (\underbrace{s, s, \ldots, s}_{k}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k}),$$

takže podle majorizační nerovnosti pro každou funkci f konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$ platí

$$nf\left(\frac{ks}{n}\right) \leq f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \leq (n-k)f(0) + kf(s)\,.$$

K takovým funkcím patří funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$, pro niž je poslední nerovnost tou, kterou jsme měli dokázat, neboť $f(0) = 1$ a

$$\begin{aligned} kf(s) &= \frac{k}{1 + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{k}} = \frac{k^2}{k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,, \\ nf\left(\frac{ks}{n}\right) &= \frac{n}{1 + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}} = \frac{n^2}{n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,. \end{aligned}$$

Poznámka. Volbou obecnější funkce $f(x) = (1+x)^p$ v podaném řešení lze ukázat, že pro čísla $k, a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující zadání příkladu platí v případě $p \in (0,1)$ nerovnosti

$$n^{1-p}(n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p \geq \sum_{i=1}^{n}(1+a_i)^p \geq n - k + k^{1-p}(k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p\,,$$

zatímco v případě $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ platí

$$n^{1-p}(n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p \leq \sum_{i=1}^{n}(1+a_i)^p \leq n - k + k^{1-p}(k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p\,.$$

Analogický výsledek s konkávní funkcí $f(x) = \ln(1+x)$ vede k nerovnostem

$$\left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{k}\right)^k,$$

kde nalevo jsme dostali známou AG-nerovnost pro n-tici čísel $1 + a_i$.

Příklad 2.110. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí[102]

$$3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (ab + bc + ca)^2(a^2 + b^2 + c^2)\,.$$

[102] [Kur-05], str. 8, řešení upraveno

Řešení. Označme $x = a^3$, $y = b^3$ a $z = c^3$. Pak dokazovanou nerovnost můžeme zapsat ve tvaru

$$3(x+y+z)^2 \geq \left(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx}\right)^2 \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2}\right). \tag{$*$}$$

Ta je zřejmou rovností, platí-li $x = y = z$. V opačném případě označíme

$$A = \frac{x+y+z}{3}$$

a s ohledem na symetrii budeme předpokládat $x = \min\{x, y, z\}$ a $y = \max\{x, y, z\}$, takže zřejmě $x < A < y$, a tedy

$$(A, x+y-A) \succ (x, y).$$

Nyní vezměme funkce

$$f(t) = \sqrt[3]{t} \quad \text{a} \quad g(t) = \sqrt[3]{t^2}$$

definované na intervalu $\langle 0, \infty)$. Protože pro každé $t > 0$ platí

$$f''(t) = -\frac{2}{9}\, t^{-\frac{5}{3}} \quad \text{a} \quad g''(t) = -\frac{2}{9}\, t^{-\frac{4}{3}},$$

jsou obě funkce na daném intervalu konkávní a my tak dostáváme majorizační nerovnosti

$$f(A) + f(x+y-A) \geq f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad g(A) + g(x+y-A) \geq g(x) + g(y),$$

čili

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{x+y-A} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \quad \text{a} \quad \sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{(x+y-A)^2} \geq \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}. \tag{$**$}$$

Dále si všimneme, že z nerovností $x < A < y$ plyne

$$A(x+y-A) - xy = (A-x)(y-A) > 0, \quad \text{odkud} \quad \sqrt[3]{A(x+y-A)} > \sqrt[3]{xy}.$$

Sečteme-li poslední nerovnost s $\sqrt[3]{z}$-násobkem první nerovnosti v $(**)$, dostaneme

$$\sqrt[3]{Az} + \sqrt[3]{(x+y-A)z} + \sqrt[3]{A(x+y-A)} > \sqrt[3]{xz} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{xy}, \tag{$\sharp$}$$

zatímco z druhé nerovnosti v $(**)$ po přičtení $\sqrt[3]{z^2}$ k oběma stranám obdržíme

$$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{(x+y-A)^2} + \sqrt[3]{z^2} \geq \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2}. \tag{$\sharp\sharp$}$$

Zaměníme-li proto v nerovnosti $(*)$ trojici čísel (x, y, z) trojicí $(A, x+y-A, z)$, její levá strana se zřejmě nezmění, zatímco pravá strana se díky nerovnostem $(\sharp)$ a $(\sharp\sharp)$ zvětší. Proto v uvažovaném případě, kdy neplatí $x = y = z$, bude platit ostrá nerovnost $(*)$, bude-li pro novou trojici $(A, x+y-A, z)$ platit neostrá nerovnost $(*)$. Jde-li ovšem o trojici stejných čísel (nutně rovných A), je $(*)$ triviální rovnost; v opačném případě leží číslo A mezi čísly $x+y-A$, z a my můžeme zopakovat celý postup, po němž se už dostaneme k trojici (A, A, A). Tím je nerovnost ze zadání příkladu dokázána, rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c$.

Příklad 2.111. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. V závislosti na čísle $n \geq 2$ najděte nejmenší konstantu $C = C(n)$, pro kterou platí[103]

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4 ,$$

a určete, kdy při takovém nejmenším C nastane rovnost.

Řešení. Vzhledem k homogenitě nerovnosti předpokládejme, že $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. (K takové n-tici lze přejít vždy s výjimkou případu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, kdy ovšem zkoumaná nerovnost platí pro každé C.) Za tohoto předpokladu můžeme zadanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) \leq C ,$$

neboť

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(x_i^3 \cdot \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) .$$

Vzhledem k symetrii dále předpokládejme, že $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, a uvažme funkci $f(x) = x^3(1-x) = x^3 - x^4$. Ta je na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ ryze konvexní, neboť $f''(x) = 6x(1-2x) > 0$ pro všechna x z intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Rozlišíme dále dva případy.

(i) Platí-li $x_1 \leq \frac{1}{2}$, pak

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0 \right) ,$$

a z majorizační nerovnosti dostáváme

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + (n-2) f(0) = \frac{1}{8} .$$

Rovnost nastane pouze v případě, kdy dvě z proměnných se rovnají a ostatní jsou rovny nule, tedy např. pro $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ a $x_i = 0$ pro každé $i > 2$.

(ii) Pokud naopak $x_1 > \frac{1}{2}$, pak $1 - x_1 < \frac{1}{2}$ a z rovnosti $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 - x_1$ tak plyne

$$(x_2, x_3, \ldots, x_n) \prec (1 - x_1, 0, \ldots, 0) ,$$

a opětovným užitím majorizační nerovnosti dostáváme

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq f(x_1) + f(1 - x_1) + (n-2) f(0) = f(x_1) + f(1 - x_1) < \frac{1}{8} ,$$

[103] [Kad-05], str. 43

neboť pro funkci $g(x) = f(x) + f(1-x) = -2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x$, pro niž $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, platí

$$g'(x) = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 = -(2x-1)^3 < 0$$

pro každé $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, jaké je v našem případě i x_1.

Hledaná nejmenší konstanta je $C = \frac{1}{8}$ a je tedy nezávislá na čísle n. Rovnost v zadané nerovnosti při ní nastane, právě když buď $x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, nebo $x_i = x_j > 0$ pro některá $i \neq j$ a $x_k = 0$ pro ostatní k.

Kapitola 3

Užití integrálů

Do třetí, rozsahově nejmenší kapitoly naší práce jsme zařadili ukázky uplatnění Riemannova určitého integrálu k důkazu nerovností zapsaných elementárními funkcemi. V samotných zadáních příkladů tedy integrály vystupovat nebudou, dostaneme se k nim (mnohdy překvapivě) až v průběhu řešení, a to vždy na základě nepočetných známých „tabulkových" vzorců pro primitivní funkce k základním elementárním funkcím. Tímto konstatováním chceme zdůraznit, že stranou našich úvah zůstane prakticky celá rozsáhlá *teorie integrálních nerovností*. Nebudeme využívat ani takové jejich základní výsledky, jakým je například Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\,,$$

neboť jsme její uplatnění pro důkaz žádné nerovnosti (jež by byla jednoduše zapsána elementárními funkcemi) v literatuře nenašli. Protože jsme se v kapitole 2 obšírně věnovali Jensenově nerovnosti, uveďme rovnou na tomto místě její méně známou integrální podobu

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(g(x)\right)\,\mathrm{d}x \ge f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\,, \tag{3.1}$$

kterou dostaneme, když v Jensenově nerovnosti pro konvexní funkci f

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}\,f\left(g(\xi_i)\right) \ge f\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}\,g(\xi_i)\right)\,,$$

kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ jsou reprezentanti dělících intervalů, uskutečníme obvyklý limitní přechod za předpokladu, že funkce $g : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a funkce f je na $\langle c, d\rangle$ nejen konvexní, ale i spojitá.[1] Jiný důkaz nerovnosti (3.1) uvedený v [Ste-04] na str. 113–114 navíc ukazuje, že rovnost v (3.1) v případě spojité funkce g a ryze konvexní funkce f nastane, právě když je funkce g konstantní.

[1] [Kac-03], str. 47

S výjimkou jedné aplikace hlubší nerovnosti (3.1) budeme v celé kapitole potřebovat pouze jednoduché důsledky jedné ze základních vlastností určitého integrálu, kterou připomeneme následující větou. Předtím ještě poznamenejme, že ve všech aplikacích budeme integrovat *spojité* funkce – s výjimkou příkladu 3.11, při kterém využijeme funkci *po částech spojitou.*

Věta 3.1. *Pro každou nezápornou funkci f integrovatelnou na $\langle a,b\rangle$ platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0\,.$$

Tato nerovnost je ostrá, platí-li $f(x_0) > 0$ v některém bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$, ve kterém je funkce f spojitá zleva nebo zprava.

Důkaz věty je vskutku triviální, neboť uvažovaná funkce f má nezáporný dokonce *každý* dolní integrální součet, takže je nezáporný i její integrál, rovný supremu množiny zmíněných součtů. Má-li bod $x_0 \in \langle a,b\rangle$ zmíněnou vlastnost, najde se jeho levé nebo pravé okolí, v němž všude platí $f(x) \ge \frac{1}{2}f(x_0) > 0$, takže se snadno sestrojí dolní integrální součet s kladnou hodnotou. Záměnou funkce f za funkci $-f$ dostaneme zřejmou variantu věty 3.1 pro nezápornou funkci, kterou zde ani vypisovat nebudeme.

Závěrem vstupního textu popišme, jak je celá kapitola 3 sestavena. V podkapitole 3.1 budeme v řešení příkladů pracovat s funkcemi, které na celém intervalu integrace nemění znaménko nebo jsou na něm monotónní. V podkapitole 3.2 budou integraci podrobovány funkce konvexní nebo konkávní. V závěrečné podkapitole 3.3 načrtneme základy teorie méně známých matematických průměrů dvojic reálných čísel, které jsou zaváděny pomocí určitých integrálů. Významné nerovnosti, které takové průměry splňují, budeme dokazovat prostředky, pro které by tyto nerovnosti mohly být zařazeny jako izolované výsledky do jiných částí celého textu; kvůli jejich vzájemným souvislostem a ucelenosti zamýšleného výkladu teorie průměrů jsme se rozhodli pro takové jejich soustředění do jedné podkapitoly.

3.1 Nezápornost a monotonie

Při řešení první série příkladů kapitoly 3 využijeme kromě základní věty 3.1 i několik jejích bezprostředních důsledků, které nyní uvedeme.

Věta 3.2. *Je-li spojitá funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ rostoucí, platí*

$$f(a)(b-a) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < f(b)(b-a)\,.$$

Je-li funkce f naopak klesající, platí tyto nerovnosti s opačnými znaky „>“.

K důkazu věty 3.2 stačí aplikovat větu 3.1 na nezáporné funkce $g(x) = f(x) - f(a)$, resp. $h(x) = f(b) - f(x)$. Také následující výsledek okamžitě plyne z věty 3.1, tentokrát užité pro nezápornou funkci $h = f - g$.

Věta 3.3. *Splňují-li spojité funkce f, g nerovnost $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tato nerovnost je ostrá, je-li $f(x) > g(x)$ pro některé $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

V řešení jediného příkladu nebude integrovaná funkce monotónní. Pro odhad integrálu tehdy užijeme známý jednoduchý poznatek, jehož uvedením výčet potřebných prostředků důkazů uzavřeme.

Věta 3.4. *Pro každou funkci spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)\,,$$

kde m, resp. M značí nejmenší, resp. největší hodnotu f na $\langle a, b\rangle$.

I tento třetí výsledek zřejmě plyne z věty 3.1 pro nezáporné funkce $g(x) = f(x) - m$, resp. $g(x) = M - f(x)$. Dodejme, že všechny věty 3.1 až 3.4 jsou natolik běžné a známé, že se na ně v řešeních příkladů nebudeme odvolávat.

Učiňme ještě jednu metodickou poznámku. Nerovnosti

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \qquad (a \leq x \leq b)$$

se spojitou funkcí f nezápornou na $\langle a, b\rangle$ můžeme zdůvodnit namísto užití věty 3.1 také tak, že podle známého výsledku z teorie primitivních funkcí platí $F'(x) = f(x) \geq 0$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, takže funkce F s hodnotou $F(a) = 0$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ neklesající. Tento jednodušší argument (bez užití integrace) jsme bohatě využívali v kapitole 1 této práce. Tím lze částečně vysvětlit skutečnost, že příkladový materiál kapitoly 3 je ve srovnání s kapitolou 1 značně skromnější (přispívá k tomu i skutečnost, že pracujeme v úzkém oboru elementárních funkcí). Do této kapitoly jsme totiž zařadili pouze příklady, u kterých užití integrace přináší nesporné výhody. Budou to zejména situace, kdy určité integrály využijeme k odhadům členů různých *konečných součtů*, nebo jimi (nečekaně) nahradíme některé konstanty v dokazovaných nerovnostech.

Příklad 3.5. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[2]

$$\ln(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n\,.$$

Řešení. Dokazované tvrzení výhodně zapíšeme dvojicí nerovností s jedním logaritmem:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\,.$$

Na intervalu $\langle 1, n\rangle$ uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Ta je tam klesající, a proto pro každé číslo $k = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$\frac{1}{k+1} = f(k+1)\,((k+1)-k) < \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} < f(k)\,((k+1)-k) = \frac{1}{k}\,.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\,.$$

Tím je důkaz hotov, neboť integrál uprostřed je roven $\ln n$.

Poznámka. Přesnější odhady částečných součtů divergentní harmonické řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

odvodíme v příkladu 3.23.

Příklad 3.6. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[3]

$$1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n < n^n\,.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = x^n$. Ta je na intervalu $\langle 0, n\rangle$ rostoucí a platí

$$\frac{n^{n+1}}{n+1} = \int_0^n x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^n\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{n-1}^n x^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Omezíme-li každý z integrálů na pravé straně rovnice zdola:

$$a^n(b-a) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } a = k, b = k+1\,(k = 0, 1, \ldots, n-1)\ ,$$

dostaneme sečtením kýženou nerovnost:

$$0^n + 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n < \frac{n^{n+1}}{n+1} = n^n \cdot \frac{n}{n+1} < n^n\,.$$

[2] [Kou-01], str. 197, zadání upraveno

[3] [Kou-01], str. 197

Poznámka. Dolní odhad pro zkoumaný součet $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ odvodíme později v příkladu 3.19. Oba výsledky můžeme dohromady zapsat pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ dvojicí nerovností

$$\frac{n-1}{2(n+1)} \cdot n^n < 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n < n^n \,.$$

Příklad 3.7. Pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označme $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$. Dokažte nerovnost[4]

$$S_n^3 < 3 \sum_{k=1}^{n} a_k S_k^2 \,.$$

Řešení. Na intervalu $\langle 0, S_n \rangle$ uvažme funkci $f(x) = x^2$. Dále rozdělme zvolený interval délky S_n zleva doprava na úseky délek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a označme

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k^2 \,.$$

Protože rostoucí funkce $f(x) = x^2$ má na k-tém úseku délky a_k největší hodnotu S_k^2, udává S součet obsahů obdélníků omezující obsah podgrafu funkce f shora, takže platí

$$S > \int_0^{S_n} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{S_n^3}{3} \,.$$

Odtud po násobení třemi dostaneme dokazovanou nerovnost.

Příklad 3.8. Dokažte, že je-li pro daná reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ funkce

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$$

kladná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 > 0$.[5]

[4] [Kou-01], str. 197, zadání upraveno
[5] [Kou-01], str. 197

Řešení. Všimněme si, že platí

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x = 2\pi a_0\,,$$

neboť $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x = 0$ pro každé celé $k \geq 1$. Protože

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \min_{x\in\langle 0,2\pi\rangle} f(x)\cdot(2\pi - 0)$$

a spojitá funkce f má podle zadání na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ kladné minimum, je nerovnost $a_0 > 0$ dokázána.

Příklad 3.9. Užitím určitých integrálů dokažte AG-nerovnost[6]

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

pro libovolná nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ukažte přitom, že rovnost nastane jedině v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Řešení. Předpokládejme, že $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, a označme

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\,, \qquad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.$$

Je-li $G = 0$, je tvrzení o AG-nerovnosti zřejmé. V případě $G > 0$ (tj. $a_1 > 0$) jistě najdeme index k $(1 \leq k \leq n-1)$, pro nějž platí $a_k \leq G \leq a_{k+1}$. Potom funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{G}$$

je nezáporná na intervalech $\langle a_i, G\rangle$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a nekladná na intervalech $\langle G, a_i\rangle$ pro $i = k+1, k+2, \ldots, n$, takže nezáporný je i součet

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{G} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\int_{G}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{G} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme-li do S výsledky integrace

$$\int_{a_i}^{G} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_i}^{G}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{G}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln x - \frac{x}{G}\right]_{a_i}^{G} = \ln\frac{G}{a_i} - \frac{G - a_i}{G}\,,$$

[6] [And-08], str. 428

dostaneme

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{G}{a_i} - \frac{G-a_i}{G}\right) = \frac{1}{n}\ln\frac{G^n}{a_1a_2\,\ldots\,a_n} - \frac{nG-nA}{nG} =$$
$$= \frac{1}{n}\ln 1 - 1 + \frac{A}{G} = \frac{A}{G} - 1\,.$$

Proto z nerovnosti $S \geq 0$ plyne $A \geq G$; přitom rovnost $A = G$ nastane, právě když $S = 0$. Tehdy ovšem všechny intervaly integrace budou muset mít nulovou délku (na jejich vnitřku je totiž funkce f kladná, resp. záporná), a tedy bude platit $a_i = G$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Dodejme, že podle [And-08] uvedený důkaz objevil H. Alzer.

Příklad 3.10. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí[7]

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j} \geq 0\,.$$

Řešení. Protože pro libovolná $i, j \geq 1$ platí

$$\frac{x_ix_j}{i+j} = \int_0^1 x_ix_jt^{i+j-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

můžeme dokazovanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 x_ix_jt^{i+j-1}\,\mathrm{d}t \geq 0 \qquad \text{neboli} \qquad \int_0^1\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jt^{i+j-1}\right)\mathrm{d}t \geq 0\,.$$

Stačí tedy nalézt spojitou funkci $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, pro niž v každém bodě $t \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$(f(t))^2 = \sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jt^{i+j-1}\,.$$

Protože však platí rovnost mnohočlenů

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jy_iy_j\,,$$

kterou využijeme pro $y_i = t^{i-\frac{1}{2}}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, splňuje požadovanou podmínku spojitá funkce

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n}x_it^{i-\frac{1}{2}}$$

a důkaz je tak hotov.

[7] [And-08], str. 428

Příklad 3.11. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pro něž je $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, platí[8]

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j |a_i - a_j| \le 0\,.$$

Ukažte rovněž, že rovnost nastane pouze případě, existuje-li rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na (vzájemně disjunktní) třídy $A_1, A_2, \dots, A_k$ takový, že pokud $j_1, j_2 \in A_i$, pak $a_{j_1} = a_{j_2}$ a $\sum\limits_{j\in A_i} x_j = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$.

Řešení. Označme $\lambda_{\langle 0,a_i\rangle}$ charakteristickou funkci příslušnou intervalu $\langle 0, a_i\rangle$ (rovnou jedné pro všechny body daného intervalu a rovnou nule všude jinde) a uvažme po částech spojitou funkci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{\langle 0,a_i\rangle}\,.$$

Pro ni platí

$$0 \le \int_0^\infty (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{\langle 0,a_i\rangle}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \int_0^\infty \lambda_{\langle 0,a_i\rangle}(x)\lambda_{\langle 0,a_j\rangle}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \int_0^{\min(a_i,a_j)} 1\,\mathrm{d}x = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \min(a_i, a_j)\,.$$

A protože

$$\min(a_i, a_j) = \frac{a_i + a_j - |a_i - a_j|}{2}$$

a (v důsledku zadané rovnosti $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$)

$$\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j (a_i + a_j) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = 0\,, \qquad (*)$$

dostáváme z odvozené nerovnosti kýženou nerovnost

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j |a_i - a_j| \le 0\,.$$

Předpokládejme nyní v dokázané nerovnosti rovnost. Pak podle našeho postupu

$$\int_0^\infty (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

[8] [And-08], str. 440

tedy $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x > 0$. Nechť $b_1, b_2, \dots, b_k$ jsou všechna navzájem různá čísla ležící v dané n-tici čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a nechť $A_i = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_j = b_i\}$. Pak $A_1, A_2, \dots, A_k$ je rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, přičemž pro skoro všechna $x > 0$ platí

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j \in A_i} x_j \right) \lambda_{\langle 0, b_i \rangle}(x) = 0\,,$$

odkud zřejmě plyne, že $\sum\limits_{i \in A_i} x_j = 0$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Skutečně, stačí čísla b_i uspořádat sestupně, tj. $b_1 > b_2 > \dots > b_k$, a pak uvážit rovnost $f(x) = 0$ postupně na intervalech $(b_2, b_1), (b_3, b_2), \dots, (b_k, b_{k-1})$ a $(0, b_k)$, na každém z nichž je funkce f konstantní.

Poznámka. Z postupu řešení založeném na rovnosti $(*)$ plyne, že tvrzení příkladu platí i v případě, kdy je podmínka $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ zaměněna podmínkou (nezávislou na daných koeficientech a_i), jež je tvaru $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Příklad 3.12. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$, pro jejichž součin platí $a_1a_2 \dots a_k \le 1$, a pro kladná reálná čísla r, s taková, že $s \ge kr$, platí[9]

$$r(a_1^s + a_2^s + \dots + a_k^s - k) \ge s(a_1^r a_2^r \dots a_k^r - 1)\,.$$

Řešení. Před vlastním řešením poznamenejme, že pravá strana dokazované nerovnosti má podle zadání nekladnou hodnotu, takže nerovnost je netriviální, jen když i její levá strana je nekladná.

Označme $G = \sqrt[k]{a_1a_2 \dots a_k}$. Podle AG-nerovnosti pro k-tici čísel $a_1^s, a_2^s, \dots, a_k^s$ platí

$$a_1^s + a_2^s + \dots + a_k^s \ge k \sqrt[k]{(a_1a_2 \dots a_k)^s} = kG^s\,,$$

takže místo nerovnosti ze zadání stačí dokázat silnější nerovnost

$$r(kG^s - k) \ge s(G^{kr} - 1) \qquad \text{neboli} \qquad \frac{G^s - 1}{s} \ge \frac{G^{kr} - 1}{kr}\,.$$

Podle zadání platí $0 < G \le 1$, přitom pro $G = 1$ je nerovnost, kterou chceme dokázat, triviální rovnost $0 = 0$. V případě $0 < G < 1$ uvážíme funkci f proměnné $x \in (0, \infty)$ danou předpisem

$$f(x) = \frac{G^x - 1}{x}\,,$$

pro kterou máme z předpokladu $s \ge kr$ odvodit nerovnost $f(s) \ge f(kr)$. Ukážeme proto, že funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí. Namísto běžného postupu (ověření toho, že f' je kladná funkce, je dosti komplikované) si povšimneme, že pro každé $x > 0$ platí

$$f(x) = \frac{G^x - 1}{x} = \ln G \cdot \int_0^1 G^{xt}\,\mathrm{d}t\,.$$

[9] [And-08], str. 431, zadání i řešení upraveno

Díky tomu, že G je konstanta z intervalu $(0,1)$, pro libovolná dvě kladná čísla $x_1 < x_2$ platí nerovnost $G^{x_1 t} > G^{x_2 t}$ pro každé $t > 0$, odkud integrací přes interval $\langle 0,1\rangle$ vyplývá

$$\int_0^1 G^{x_1 t}\,\mathrm{d}t > \int_0^1 G^{x_2 t}\,\mathrm{d}t\,,$$

což spolu s nerovností $\ln G < 0$ vede k závěru $f(x_1) < f(x_2)$. Funkce f je tedy na $(0,\infty)$ skutečně rostoucí a celý důkaz je hotov.

Příklad 3.13. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je roven 1, platí[10]

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a}\right) \geq \frac{3}{4}\,.$$

Řešení. Protože pro libovolná $a, b > 0$ platí

$$\int_0^1 \frac{a}{(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b(b+1)}\,,$$

můžeme druhý činitel v levé straně dokazované nerovnosti zapsat ve tvaru

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{(x+b)^2}+\frac{b}{(x+c)^2}+\frac{c}{(x+a)^2}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Pro integrovaný výraz však z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ konvexní na $(0,\infty)$ a pro hodnoty

$$x_1 = x+b\,,\quad x_2 = x+c\,,\quad x_3 = x+a\,,$$

$$\lambda_1 = a\,,\quad \lambda_2 = b\,,\quad \lambda_3 = c\,,$$

z nichž sestavíme s ohledem na podmínku $a+b+c = 1$ konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, plyne

$$\frac{a}{(x+b)^2}+\frac{b}{(x+c)^2}+\frac{c}{(x+a)^2} \geq \frac{1}{(x+ab+bc+ca)^2} \quad \text{pro každé } x > 0.$$

Odtud integrací přes interval $\langle 0,1\rangle$ dostáváme

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a} \geq \frac{1}{(ab+bc+ca)(ab+bc+ca+1)}\,,$$

takže nerovnost ze zadání je splněna, pokud platí

$$ab+bc+ca+1 \leq \frac{4}{3}\,,$$

což však plyne ze zřejmé nerovnosti $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$, neboť $a+b+c = 1$.

[10] [And-08], str. 432, řešení upraveno

Příklad 3.14. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ platí[11]

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j+1} < \left(\frac{\ln(2n+1)}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} + 0{,}66\right)\cdot\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \,.$$

Řešení. S využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^2 \le (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2)(1 + x^2 + \ldots + x^{2n})\,,$$

která platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a kterou vzápětí prointegrujeme v proměnné x přes interval $\langle 0, 1\rangle$, dostaneme pro součet z levé strany dokazované nerovnosti odhad

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j+1} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j \int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n}(a_i x^i)\cdot(a_j x^j)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^2 \mathrm{d}x \le \int_0^1 \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} x^{2i}\right)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{i=0}^{n}\int_0^n t^{2i}\,\mathrm{d}x\cdot\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\cdot\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \,.
\end{aligned}$$

Protože díky zadání je druhý činitel posledního součinu kladný a protože pro první činitel z výsledku příkladu 3.24 (který uvedeme později) plyne

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1} < \frac{\ln(2n+1)}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} + 0{,}66\,,$$

je důkaz ostré nerovnosti ze zadání příkladu hotov.

Poznámka. V [Kou-01] je uvedeno, že v souvislosti s tzv. *Hilbertovou* nerovností lze pro kladná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dokázat nerovnost

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j+1} < \pi\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \,. \tag{$*$}$$

[11] [Kou-01], str. 208

Ukážeme, že nerovnost z předchozího příkladu je pro $n \leq 70$ silnější (a pro $n \geq 71$ slabší) než nerovnost $(*)$. K tomu pro posloupnost koeficientů

$$c_n = \frac{\ln(2n+1)}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} + 0{,}66$$

stačí s ohledem na hodnoty $c_{70} \doteq 3{,}138$ a $c_{71} \doteq 3{,}145$ ověřit, že jde o rostoucí posloupnost. Skutečně pro každé $n \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{2} \ln \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right) - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > \\ &> \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n+1}\right)^2\right) - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{2n}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{4n^2+4n-1}{(2n+1)^2(2n+3)} > 0\,. \end{aligned}$$

Využili jsme přitom nerovnost $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, která platí pro každé $x > 0$ podle příkladu 1.3.

3.2 Konvexnost a konkávnost

Vizuální představa o vzájemné poloze grafu G konvexní nebo konkávní funkce a úsečkách, které jsou spojnicemi vždy dvou různých bodů z G, napovídá, že pro takovou funkci bude možné zapsat různé lineární odhady, jejichž integrací přes příslušné intervaly získáme zajímavé odhady pro určité integrály ze zkoumané funkce. Podle článku [Nic-03] první takový výpočet provedl v roce 1883 Charles Hermite, o 10 let později jeho výsledek z následující věty znovuobjevil Jacques Hadamard. Proto se mu někdy říká *Hermitova-Hadamardova* nerovnost.

Věta 3.15. *Pro každou funkci f spojitou a konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnosti*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,. \tag{3.2}$$

Je-li funkce f dokonce ryze konvexní, jsou obě nerovnosti v (3.2) ostré. Pro spojitou funkci f, která je na $\langle a, b\rangle$ konkávní, resp. ryze konkávní, platí oba závěry o nerovnostech (3.2) s vyměněnými znaky „$\geq$“.

Důkaz. Jistě se stačí zabývat případem konvexní funkce f, pro niž podle definice konvexnosti pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$f\left((1-t)a + tb\right) \leq (1-t)f(a) + tf(b)\,. \tag{3.3}$$

Proto po záměně proměnné $x = (1-t)a + tb$ v integrálu z (3.2) dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)\mathrm{d}t \leq (b-a)\int_0^1 \left((1-t)f(a)+tf(b)\right)\mathrm{d}t = \\ = (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Tím je důkaz pravé nerovnosti v (3.2) hotov. K důkazu levé nerovnosti užijeme substituci $x = u + \frac{a+b}{2}$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(u+\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left(f\left(u+\frac{a+b}{2}\right) + f\left(-u+\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}u \geq \\ \geq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}u = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

přičemž jsme uplatnili konvexnost funkce f v podobě nerovností

$$\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad \text{s čísly } x_{1,2} = \pm u + \frac{a+b}{2}\,.$$

Tím je i levá nerovnost v (3.2) dokázána. V případě ryze konvexní funkce jsou ovšem poslední nerovnosti pro $x_1 \neq x_2$, stejně jako nerovnosti (3.3) pro $t \in (0,1)$ ostré, takže jsou ostré i obě nerovnosti v (3.2). □

Příklad 3.16. Pro každé kladné reálné číslo a dokažte nerovnosti[12]

$$a - \frac{a^2}{2+a} < \ln(1+a) < a - \frac{a^2}{2(1+a)}\,.$$

Řešení. Ukažme, že uvedené odhady zapsané pomocí integrálu jako

$$a - \frac{a^2}{2+a} < \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t} < a - \frac{a^2}{2(1+a)}$$

plynou z Hermitovy-Hadamardovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$, jež je na intervalu $\langle 0, a\rangle$ zřejmě ryze konvexní. K tomu vypočteme výrazy

$$(a-0)\cdot f\left(\frac{a+0}{2}\right) = a\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{2}} = \frac{a(2+a)-a^2}{2+a} = a - \frac{a^2}{2+a}\,,$$

[12] Podle [Nic-03] tyto nerovnosti objevil sám Charles Hermite.

$$(a-0)\cdot\frac{f(a)+f(0)}{2}=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+a}+1\right)=\frac{a(2+2a-a)}{2(1+a)}=a-\frac{a^2}{2(1+a)}$$

a řešení je tak hotovo.

Příklad 3.17. Dokažte, že pro libovolná různá čísla a, b z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ platí[13]

$$\frac{\sin a+\sin b}{2}<\frac{\cos a-\cos b}{b-a}<\sin\frac{a+b}{2}\,.$$

Řešení. S ohledem na symetrii předpokládejme, že $a < b$. Pro funkci $f(x) = \sin x$, která je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ ryze konkávní, zřejmě platí

$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x=\cos a-\cos b\,.$$

Užitím Hermitovy-Hadamardovy nerovnosti tak přímo dostáváme požadované tvrzení.

Příklad 3.18. Dokažte, že pro libovolná různá čísla a, b z intervalu $(1, \infty)$ platí[14]

$$\frac{a^2+b^2-2}{2(a^2-1)(b^2-1)}>\ln\left(\frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)(b+1)}\right)^{\frac{1}{2(b-a)}}>\frac{4}{(a+b)^2-4}\,.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, která je na uvažovaném intervalu $(1, \infty)$ ryze konkávní, neboť $f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0$ pro každé $x > 1$, platí

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]_a^b=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+b)(1-a)}{(1+a)(1-b)}\,.$$

Po dosazení do Hermitovy-Hadamardovy nerovnosti

$$\frac{\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}}{2}>\ln\left(\frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)(b+1)}\right)^{\frac{1}{2(b-a)}}>\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1}$$

a zřejmých úpravách obou krajních výrazů tak získáme požadovaný výsledek.

[13] [Ben-05], str. 155
[14] [Ben-05], str. 161, zadání upraveno

Příklad 3.19. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[15]

$$1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n > \frac{n-1}{2(n+1)} \cdot n^n \,.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = x^n$, která je na intervalu $\langle 0, \infty)$ ryze konvexní, platí

$$\frac{n^{n+1}}{n+1} = \int_0^n x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} x^n \, \mathrm{d}x < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^n + (k+1)^n}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k^n + \frac{n^n}{2} \,,$$

odkud

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^n > \frac{n^{n+1}}{n+1} - \frac{n^n}{2} = \frac{n-1}{2(n+1)} \cdot n^n \,.$$

Tím je výsledek, o kterém jsme se již zmínili v poznámce za řešením příkladu 3.6, dokázán.

Příklad 3.20. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[16]

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n < \frac{\left(n + \frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \,.$$

Řešení. Na každém z intervalů $\langle k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \rangle$ délky 1 (kde $k = 3, 4, \ldots, n+2$) je funkce $f(x) = x^n$ s exponentem $n > 1$ ryze konvexní, takže platí

$$\sum_{k=3}^{n+2} k^n < \sum_{k=3}^{n+2} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x^n \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{5}{2}}^{n+\frac{5}{2}} x^n \, \mathrm{d}x = \frac{\left(n + \frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \,.$$

Příklad 3.21. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 4$ platí[17]

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1} < \ln n < 1 + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \,.$$

[15] [Kou-01], str. 199

[16] Vlastní námět inspirovaný příkladem 1.57.

[17] [Kou-01], str. 199

Řešení. Na intervalu $\langle 1, \infty)$ uvažme ryze konvexní funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Protože pro každé $k \geq 1$ platí

$$\frac{2}{2k+1} = f\left(k + \frac{1}{2}\right) < \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}}{2},$$

sečtením pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{2k+1} < \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n < 1 + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n}.$$

Příklad 3.22. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $m \geq n \geq 2$ platí[18]

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{2n-1}.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ta je na intervalu $(0, \infty)$ ryze konvexní, a proto platí

$$\frac{2}{2n-1} > \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2m+1} = \int_{n-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{k=0}^{m-n} \int_{n-\frac{1}{2}+k}^{n+\frac{1}{2}+k} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2},$$

čímž je důkaz hotov.

Poznámka. Předchozí příklad souvisí s konvergencí slavné řady $\sum\limits_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2}$, jejíž součet $\frac{\pi^2}{6}$ poprvé exaktně potvrdil Euler. Srovnáme-li výsledek příkladu 3.22 s elementárním výsledkem

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n-1},$$

vidíme, že dokázaný odhad s využitím integrálu je nepatrně lepší, neboť

$$\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} < \frac{1}{n-1}.$$

Příklad 3.23. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[19]

$$\ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n + \frac{1}{2n} + \ln 2.$$

[18] [Kou-01], str. 201
[19] [Kou-01], str. 200

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ zadanou na intervalu $(0, \infty)$. Jde o funkci ryze konvexní a klesající, takže

$$\ln n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\,,$$

odkud plyne levá z nerovností ze zadání. Dále platí

$$\ln n - \ln \frac{1}{2} = \int_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{1}{2}+k}^{\frac{3}{2}+k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n)\,,$$

z čehož po dosazení hodnot $f(k)$ plyne platnost pravé nerovnosti.

Poznámka. Předchozí příklad má velice blízký vztah k Eulerově konstantě C definované vztahem

$$\mathrm{C} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Z dokázaných nerovností tedy dostáváme

$$0{,}5 < \mathrm{C} < \ln 2 \doteq 0{,}693.$$

Existence vypsané limity plyne z toho, že příslušná posloupnost je klesající: pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1} \right) \mathrm{d}x < 0\,,$$

neboť integrovaná spojitá funkce je na $\langle n, n+1)$ záporná.

Příklad 3.24. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[20]

$$\frac{\ln(2n+1)}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} - 0{,}39 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} < \frac{\ln(2n+1)}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} - 0{,}34\,.$$

[20] [Kou-01], str. 200

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, která je na intervalu $(0, \infty)$ ryze konvexní a klesající. Platí

$$\frac{\ln(2n+1)}{2} - \frac{\ln 3}{2} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x <$$
$$< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(1) + f(n)}{2},$$

což vede k levé nerovnosti ze zadání, neboť

$$-\frac{\ln 3}{2} + \frac{f(1)}{2} \doteq -0{,}383\,.$$

Dále platí

$$\frac{\ln(2n+1)}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \int_{\frac{1}{2}}^n \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{1}{2}+k}^{\frac{3}{2}+k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n-\frac{1}{2}}^n f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2},$$

odkud plyne platnost pravé nerovnosti, neboť $-\frac{\ln 2}{2} \doteq -0{,}347$.

Příklad 3.25. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[21]

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{2}\,.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definovanou na intervalu $(0, \infty)$. Ta je tam ryze konvexní, takže platí

$$2\sqrt{n} - 2 = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

což dokazuje platnost levé nerovnosti ze zadání. Pravá nerovnost plyne z následujících úprav a dolních odhadů integrálů z klesající funkce:

$$2\sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{2} = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{1}{2}+k}^{\frac{3}{2}+k} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\,.$$

[21] [Kou-01], str. 200

Příklad 3.26. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[22]

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \,.$$

Řešení. Na intervalu $(0, \infty)$ uvažme ryze konvexní a klesající funkci $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Pro ni platí

$$2 - \frac{2}{\sqrt{n}} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} \,,$$

odkud vyplývá levá nerovnost ze zadání. Pravou ověříme následovně:

$$2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{n}} = \int_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{1}{2}+k}^{\frac{3}{2}+k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) \,,$$

z čehož po dosazení hodnot $f(k)$ do posledního výrazu plyne potřebné.

Příklad 3.27. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[23]

$$\frac{4n+3}{6} \cdot \sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{6} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6} \cdot \sqrt{n} - \frac{1}{6} \,.$$

Řešení. Uvažme funkci $f(x) = \sqrt{x}$. Ta je na intervalu $\langle 0, \infty)$ rostoucí a ryze konkávní. Platí tedy

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} - \frac{2}{3} = \int_1^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} \,,$$

odkud plyne pravá nerovnost ze zadání, neboť

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{4n+3}{6} \cdot \sqrt{n} - \frac{1}{6} \,.$$

Nyní dokážeme levou nerovnost. Platí

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \int_{\frac{1}{2}}^{n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \frac{\sqrt{n}}{2} \,,$$

a protože

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{4n+3}{6} \cdot \sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{6} \,,$$

je tak důkaz hotov.

[22] [Kou-01], str. 200
[23] [Kou-01], str. 199

Příklad 3.28. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[24]

$$\frac{\pi n^2}{4} - \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} < \frac{\pi n^2}{4} - \frac{n}{2}\,.$$

Řešení. Na intervalu $\langle -n, n\rangle$ uvažme funkci $f(x) = \sqrt{n^2 - x^2}$, jejíž grafem je půlkružnice o poloměru n se středem v počátku. Platí

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\text{subst.}: \ x = n \sin t\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi n^2}{4}\,.$$

Z ryzí konkávnosti funkce f máme

$$\frac{\pi n^2}{4} = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}\,,$$

odkud plyne pravá nerovnost ze zadání.

Nyní odvodíme levou nerovnost. Z toho, že je funkce f ryze konkávní a klesající na $\langle 0, n\rangle$, vyplývá

$$\frac{\pi n^2}{4} = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x <$$

$$< \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} < \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{\sqrt{n}}{2}$$

a důkaz je tak hotov.

Příklad 3.29. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí[25]

$$\frac{(2n+1)!}{n!} > \frac{4^n \cdot (n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\,.$$

Řešení. Vezměme funkci $f(x) = \ln x$ ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$. Pro její integrál přes interval $\langle k+1, k+2\rangle$, kde $k \geq 0$, platí Hermitova-Hadamardova nerovnost

$$\int_{k+1}^{k+2} \ln x\,\mathrm{d}x < \ln\left(k + \frac{3}{2}\right),$$

[24] [Kou-01], str. 199

[25] Vlastní výsledek, inspirováno [Kou-01], str. 197.

Sečtením těchto odhadů pro $k = 0, 1, \dots, n-1$ dostaneme nerovnost

$$\int_1^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x < \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(k + \frac{3}{2}\right),$$

kterou můžeme díky tomu, že $(x \ln x - x)' = \ln x$, upravit do tvaru

$$(n+1)\ln(n+1) < \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{3}{2}\right)\right) + n$$

neboli

$$(n+1)^{n+1} < \mathrm{e}^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{3}{2}\right).$$

A protože

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3) = \frac{(2n+1)!}{4^n \cdot n!},$$

je tak důkaz hotov.

Příklad 3.30. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí[26]

$$9{,}5\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n - \sqrt{n}}} < \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < 11\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n - \sqrt{n}}}.$$

Řešení. Zapišme dané nerovnosti pro logaritmy převrácených hodnot původních výrazů

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{11}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) < \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1} < \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{9{,}5}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n \sqrt{n - \sqrt{n}}\right).$$

Nyní vezměme funkci $f(x) = \ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ definovanou na intervalu $(1, \infty)$. Je to funkce ryze konvexní a klesající, jak ukazuje výpočet její první a druhé derivace: pro každé $x > 1$ máme

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-1}{2x\,(\sqrt{x}-1)} < 0,$$

$$f''(x) = \frac{2\,(\sqrt{x}-1) + \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{4x^2(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{3\sqrt{x}-2}{4x^2\,(\sqrt{x}-1)^2} > 0.$$

[26] [Kou-01], str. 201

Najdeme ke zvolené funkci f primitivní funkci F. Platí

$$f(x) = \frac{\ln x}{2} - \ln\left(\sqrt{x} - 1\right),$$

a proto

$$F(x) = \int \left(\frac{\ln x}{2} - \ln\left(\sqrt{x} - 1\right)\right) \mathrm{d}x = \frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{2} - \int \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) \mathrm{d}x\,.$$

Funkce inverzní k funkci $h(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$ má tvar $h^{-1}(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^2$. Je-li $H(x)$ funkce primitivní k funkci $h^{-1}(x)$, pak funkce $xh(x) - H(h(x))$ je funkce primitivní k funkci $h(x)$. Přesvědčíme se o tom derivováním:

$$\big(xh(x) - H(h(x))\big)' = h(x) + xh'(x) - H'(h(x)) \cdot h'(x) = h(x) + xh'(x) - xh'(x) = h(x)\,.$$

Protože zřejmě

$$H(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 2\,\mathrm{e}^x + x\,,$$

je funkce

$$\begin{aligned} xh(x) - H(h(x)) &= x \ln(\sqrt{x} - 1) - \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2} - 2(\sqrt{x} - 1) - \ln(\sqrt{x} - 1) = \\ &= (x - 1) \ln(\sqrt{x} - 1) - \frac{x}{2} - \sqrt{x} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

primitivní k funkci $\ln(\sqrt{x} - 1)$. Primitivní funkce F k funkci f má tedy tvar

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{x \ln x}{2} - (x - 1) \ln(\sqrt{x} - 1)\,.$$

Nyní přikročíme k vlastnímu důkazu. Podle ověřených vlastností funkce f platí

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \ln \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{n} - 1)^{n-1}} - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{2} &= \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \\ < \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}\,. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy nerovnost

$$\sqrt{n} + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}\right)^n \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) + \ln \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} < \sum_{k=2}^{n} f(k)\,,$$

ze které již plyne levá nerovnost z úvodu našeho řešení, neboť

$$\frac{1}{11} < \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} \qquad (\text{numericky } 0{,}091 < 0{,}093)\,.$$

Dokážeme nyní pravou nerovnost. Platí

$$\sqrt{n}+\ln\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{n}-1)^{n-1}}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\ln\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=\int_{\frac{3}{2}}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-3}\int_{\frac{3}{2}+k}^{\frac{5}{2}+k}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{n-\frac{1}{2}}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x>\sum_{k=2}^{n-1}f(k)+\frac{f(n)}{2}=\sum_{k=2}^{n}f(k)-\frac{f(n)}{2}\,.$$

Odtud dostáváme nerovnost

$$\sqrt{n}+\ln\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^{n}\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)+\ln\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}{\sqrt[4]{27}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}}>\sum_{k=2}^{n}f(k)\,,$$

a protože

$$\frac{1}{9{,}5}>\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}{\sqrt[4]{27}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}}\qquad(\text{numericky } 0{,}105>0{,}103)\,,$$

je tak celý důkaz hotov.

V závěrečném příkladu kromě Hermitovy-Hadamardovy nerovnosti pro ryze konkávní funkci $f(x)=\ln x$ budeme v řešení potřebovat i horní odhad (kladného) rozdílu

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\,,$$

jehož odvození se ovšem bude týkat pouze zkoumané funkce $f(x)=\ln x$.

Příklad 3.31. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí[27]

$$\mathrm{e}^{\frac{11}{12}}<\frac{n!\cdot\mathrm{e}^{n}}{\sqrt{n}\cdot n^{n}}<\mathrm{e}\,. \qquad (*)$$

Řešení. Uvažme funkci $y=\ln x$, která je na intervalu $(0,\infty)$ ryze konkávní a rostoucí. Označíme-li a_k obsah té části podgrafu funkce $y=\ln x$ na intervalu $\langle k,k+1\rangle$, která leží nad spojnicí krajních bodů $[k,\ln k]$ a $[k+1,\ln(k+1)]$, pak jistě platí

$$\int_{k}^{k+1}\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln k+\ln(k+1)}{2}+a_k\,.$$

[27] [Kou-01], str. 204

Odtud sečtením pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x = \ln n! - \frac{\ln n}{2} + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})\,.$$

A protože

$$\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x = n \ln n - n + 1\,,$$

dostáváme tak rovnost

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})\,. \tag{$**$}$$

Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jsou kladná, takže podle $(**)$ platí

$$\ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1\,,$$

z čehož po odlogaritmování plyne, že

$$n! < \mathrm{e} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\,.$$

Pravá nerovnost v $(*)$ je tak dokázána.

K důkazu levé nerovnosti v $(*)$ využijeme dříve uvedenou rovnost

$$\int_k^{k+1} \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{\ln k + \ln (k+1)}{2} + a_k\,.$$

Plyne z ní

$$(k+1) \ln (k+1) - k \ln k - 1 = \frac{\ln k + \ln (k+1)}{2} + a_k\,,$$

tedy pro každé celé $k \geq 1$ máme

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{k+1}{k} - 1\,.$$

Nyní omezíme hodnotu $\ln \frac{k+1}{k}$ shora. Využijeme k tomu nerovnost

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{2k+1-x}{k(k+1)}\right)^2 \mathrm{d}x > 0\,.$$

V základu mocniny odčítáme od zlomku $\frac{1}{x}$ lineární funkci, která v krajních bodech $x = k$ a $x = k+1$ má hodnoty $\frac{1}{k}$, resp. $\frac{1}{k+1}$. Roznásobením a následnou integrací obdržíme

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{2}{k(k+1)} \int_k^{k+1} \frac{2k+1-x}{x} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{k^2(k+1)^2} \int_k^{k+1} (2k+1-x)^2 \,\mathrm{d}x > 0\,,$$

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{2(2k+1)}{k(k+1)} \ln \frac{k+1}{k} + \frac{2}{k(k+1)} + \frac{3k^2+3k+1}{3k^2(k+1)^2} > 0\,,$$

odkud po úpravě dostaneme nerovnost

$$\ln \frac{k+1}{k} < \frac{12k^2 + 12k + 1}{6k(k+1)2(k+1)} .$$

Platí tedy

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{k+1}{k} - 1 < \frac{12k^2 + 12k + 1}{12k(k+1)} - 1 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) ,$$

odkud sečtením pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} < \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12} .$$

Z rovnosti $(**)$ tak plyne

$$\ln n! > \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{11}{12} ,$$

a to je levá nerovnost v $(*)$.

Poznámka. Předchozí příklad souvisí s tzv. Stirlingovým vzorcem, což je limitní vztah charakterizující růst hodnot faktoriálů:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \mathrm{e}^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} = \sqrt{2\pi} .$$

Jeho přesný důkaz je dosti komplikovaný (viz např. [Kac-03], str. 42, příklad 1.5.70, řešení na str. 203–205), avšak v předchozím příkladě jsme s pomocí integrálního počtu dokázali nerovnosti, které se Stirlingovu vzorci dosti blíží ($\mathrm{e}^{\frac{11}{12}} \doteq 2{,}501$; $\sqrt{2\pi} = 2{,}507$; $\mathrm{e} = 2{,}718$).

3.3 O průměrech integrálního typu

Hodnoty dané vzorci

$$H = \frac{2ab}{a+b} , \qquad G = \sqrt{ab} , \qquad A = \frac{a+b}{2} , \qquad Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{3.4}$$

jsou v elementární matematice dobře známy od dob antického Řecka. Nazývají se po řadě *harmonický, geometrický, aritmetický* a *kvadratický průměr* kladných čísel a, b. V případě $a \neq b$ jsou tyto průměry navzájem různé a ve výčtu (3.4) jsme je uvedli v rostoucím pořadí. Dnes tyto čtyři průměry často zařazujeme do škály tzv. *mocninných průměrů* M_r stupně r, jež jsou pro každé reálné číslo $r \neq 0$ dány vzorcem

$$M_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} . \tag{3.5}$$

Rovnosti $H = M_{-1}$, $A = M_1$ a $Q = M_2$ jsou zřejmé; podle dříve dokázaných vět 2.91 a 2.92 (uvedených pro obecnější vážené průměry n-tic kladných čísel) je v případě $a \neq b$ hodnota M_r rostoucí spojitá funkce proměnné r na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ s vlastností

$$\lim_{r \to 0} M_r = G \, ,$$

takže je přirozené definovat $M_0 = G$. Pro úplnost dodejme, že zmíněné věty se týkaly pouze hodnot $r > 0$. Pro hodnoty $r < 0$ však stačí tyto výsledky uplatnit na mocninné průměry stupně $-r$ čísel $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{b}$ a pak využít zřejmé rovnosti

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} + \left(\frac{1}{b}\right)^{-r}}{2} \right)^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} .$$

Pro zajímavost poznamenejme, že i konstrukce průměrů (3.5) má své zobecnění. Každé spojité, ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající) funkci f můžeme totiž přiřadit průměr A_f čísel a, b následujícím vzorcem

$$A_f = f^{-1} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) .$$

Pro zřejmou souvislost s aritmetickým průměrem A se průměry A_f někdy nazývají *kvaziaritmetické*. Příkladem odlišným od (3.5) je například kvaziaritmetický průměr

$$E = \ln \left(\frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2} \right) .$$

My se však budeme zabývat obecnými průměry dvojic čísel a, b jiného typu, při jejichž konstrukci je využit určitý integrál. Pro pevně vybranou funkci f definujeme průměr I_f čísel a, b $(a \neq b)$ vzorcem

$$I_f = f^{-1} \left(\frac{1}{a-b} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right) . \tag{3.6}$$

Za předpokladu, že f je na některém intervalu J spojitá a ryze monotónní, je definice (3.6) korektní pro každou dvojici *různých* čísel $a, b \in J$ podle věty o střední hodnotě integrálního počtu. Dodefinujeme-li $I_f = a$ v případě $b = a$, dostaneme funkci $I_f : J \times J \to J$, o které lze snadno dokázat, že je v každé z proměnných a, b spojitá a rostoucí na J a splňuje všude nerovnosti

$$\min (a, b) \leq I_f \leq \max (a, b) \, ,$$

které jsou v případě $a \neq b$ ostré.

Uveďme nyní dva příklady průměrů typu (3.6), kterým je v matematické literatuře věnováno nejvíce pozornosti. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, \infty)$ dostaneme tzv. *logaritmický průměr* L kladných čísel a, b, který je tedy dán (v případě $a \neq b$) vzorcem

$$L = \frac{1}{\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}} = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}\,. \tag{3.7}$$

Vzorec pro druhý, tzv. *identrický průměr* I kladných čísel a, b je poněkud složitější. Pro libovolná kladná čísla $a \neq b$ má tvar

$$I = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\,. \tag{3.8}$$

Ověřme, že takový je výsledek konstrukce (3.6) pro funkci $f(x) = \ln x$ na intervalu $(0, \infty)$, která tam má primitivní funkci tvaru $F(x) = x \ln x - x$:

$$I_{\ln} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{b\ln b - b - a\ln a + a}{b-a}} = \mathrm{e}^{-1}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\cdot \ln\frac{b^b}{a^a}} = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\,.$$

Základní výsledky o logaritmickém a identrickém průměru z let 1974–1990 se týkají srovnání jejich hodnot s mocninnými průměry (3.5). Kromě klasických průměrů H, G, A, Q z (3.4) v nich (na první pohled poněkud překvapivě) sehrávají významnou roli mocninné průměry M_r dvou stupňů, a to $r = \frac{1}{3}$ a $r = \frac{2}{3}$. Nejdůležitější poznatky tohoto druhu shrneme do následující věty.

Věta 3.32. *Pro zkoumané průměry libovolných kladných reálných čísel $a \neq b$ platí*[28]

$$G < L < M_{\frac{1}{3}} < M_{\frac{2}{3}} < I < A\,. \tag{3.9}$$

Důkaz. Postupně dokážeme nerovnosti

$$\text{(i) } G < L\,, \qquad \text{(ii) } L < M_{\frac{1}{3}}\,, \qquad \text{(iii) } M_{\frac{2}{3}} < I\,, \qquad \text{(iv) } I < A\,.$$

Zbývající nerovnost $M_{\frac{1}{3}} < M_{\frac{2}{3}}$ je, jak víme, důsledkem věty 2.91. Ve všech částech budeme s ohledem na symetrii předpokládat, že $a < b$.

(i) Nerovnost $G < L$, která je podle [San-90] známa nejméně od roku 1957 a která je tvaru

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}\,, \tag{$*$}$$

přejde po substituci $a = \mathrm{e}^x$, $b = \mathrm{e}^y$ (z $a < b$ máme $x < y$) do tvaru

$$\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} < \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\,,$$

[28]Původ jednotlivých nerovností upřesníme v následujícím důkazu.

což je Hermitova-Hadamardova nerovnost pro funkci $f(t) = \mathrm{e}^t$, jež je na celém $\mathbb{R}$, a tedy i na intervalu $\langle x, y\rangle$, ryze konvexní. Tím je důkaz převzatý z [Ben-05], str. 159, hotov. Za uvedení stojí i jiný postup ([Rab-01]), při kterém nerovnost $(*)$ nejprve upravíme

$$\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}, \qquad \text{tj.} \qquad \ln\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$$

a nyní pro funkci $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$ dokážeme nerovnost $f(x) > 0$ pro každé $x > 1$. Zřejmě platí

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x^3}} > 0 \quad \text{pro všechna } x \in (1, \infty)\,.$$

Funkce f je tedy na intervalu $\langle 1, \infty)$ rostoucí a protože $f(1) = 0$, je i druhý důkaz $(*)$ hotov.

(ii) Nerovnost $L < M_{\frac{1}{3}}$ neboli

$$\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3 \tag{$**$}$$

objevil a dokázal v roce 1974 T. P. Lin a my jeho postup z článku [Lin-74] teď uvedeme. Po označení $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} > 1$ můžeme nerovnost $(**)$ vydělenou číslem a přepsat do tvaru

$$\frac{x^3-1}{\ln x^3} < \left(\frac{x+1}{2}\right)^3,$$

odkud po snadných úpravách dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{3}{8}\ln x - \frac{x^3-1}{(x+1)^3} > 0\,.$$

Nyní uvažme funkci $f(x) = \frac{3}{8}\ln x - \frac{x^3-1}{(x+1)^3}$. Pro její první derivaci zřejmě platí

$$f'(x) = \frac{3}{8x} - \frac{3(x^2+1)}{(x+1)^4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(x-1)^4}{x(x+1)^4} > 0 \quad \text{pro všechna } x > 1\,.$$

Funkce f je tedy na intervalu $\langle 1, \infty)$ rostoucí a protože $f(1) = 0$, je zároveň kladná pro všechna $x > 1$, čímž je důkaz $(**)$ hotov.

(iii) Nerovnost $M_{\frac{2}{3}} < I$ neboli

$$\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} \tag{$\sharp$}$$

objevil v r. 1980 K. B. Stolarsky a my důkaz z jeho článku [Sto-80] převezmeme. Danou nerovnost nejprve zlogaritmujeme a upravíme do tvaru

$$\frac{3}{2}\ln\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{2} < -1 + \frac{b\cdot\ln b - a\cdot\ln a}{b-a} = -1 + \ln b + \frac{a(\ln b - \ln a)}{b-a}\,.$$

Zvolíme-li nyní substituci $x = \frac{b}{a} > 1$, pak postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\ln\frac{1+x^{\frac{2}{3}}}{2} + \ln a &< -1 + \ln b + \frac{\ln x}{x-1}\,, \\ 1 &< \frac{\ln x}{x-1} + \ln x + \frac{3}{2}\ln\frac{2}{1+x^{\frac{2}{3}}}\,, \\ 1 &< \frac{\ln x}{x-1} + \frac{3}{2}\ln\frac{2}{1+x^{-\frac{2}{3}}}\,. \end{aligned}$$

Protože výraz na pravé straně má pro $x \to 1$ limitu rovnou 1, stačí dokázat, že výraz na pravé straně má pro každé $x > 1$ kladnou derivaci, čili že pro taková x platí nerovnost

$$0 < \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(1+x^{\frac{2}{3}})}\,.$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným výrazem $(x-1)^2$ a nahradíme-li pak číslo x číslem x^3, můžeme pro každé $x > 1$ dokazovat nerovnost

$$0 < \frac{(x^3-1)(x+1)}{3x(x^2+1)} - \ln x\,.$$

Protože pro $x = 1$ nastane v poslední nerovnosti rovnost, můžeme pro $x > 1$ přejít opět k derivaci výrazu na pravé straně, čímž dostaneme po úpravě zřejmou nerovnost

$$0 < \frac{(x^2+x+1)(x-1)^4}{3x^2(x^2+1)^2}\,.$$

Tím je důkaz ($\sharp$) hotov.

(iv) Nerovnost $I < A$ neboli

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} < \frac{a+b}{2}\,, \tag{$\sharp\sharp$}$$

kterou v r. 1975 uveřejnil K. B. Stolarsky v článku [Sto-75], dokážeme stejně jako dříve nerovnost $G < L$ dvěma odlišnými způsoby. Při prvním z nich zapíšeme identrický průměr pomocí integrálu ve tvaru

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}x} < \frac{a+b}{2}\,.$$

Po zlogaritmování však dostaneme

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}x < \ln\frac{a+b}{2}\,,$$

což je Hermitova-Hadamardova nerovnost pro funkci $f(x) = \ln x$, ryze konkávní na intervalu $(0,\infty)$, a důkaz ($\sharp\sharp$) je tak hotov. Ukažme ještě podle [Ber-04], str. 125, druhý způsob důkazu nerovnosti ($\sharp\sharp$), tentokrát v rozšířené podobě $\frac{2A}{\mathrm{e}} < I < A$, čili

$$\frac{a+b}{\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} < \frac{a+b}{2}\,.$$

Zapišme poslední nerovnosti ve tvaru

$$2 < \frac{2}{a+b}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < \mathrm{e}\,. \qquad (\lozenge)$$

Protože

$$\frac{2}{a+b}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} = \frac{2\left(\frac{b-a}{a}+1\right)}{\frac{b-a}{a}+2}\left(1+\frac{b-a}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}}, \qquad \text{kde} \quad \frac{b-a}{a} > 0\,,$$

uvažme funkci

$$f(x) = \frac{2\,(x+1)}{x+2}\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

definovanou pro každé $x > 0$. Pro její první derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(x+2)^2} + \frac{2(1+x)^{\frac{1}{x}+1}\big(x-(1+x)\ln(1+x)\big)}{x^2(x+1)(x+2)} = \\ &= \frac{2\,(1+x)^{1+\frac{1}{x}}}{x^2(x+2)}\left(\frac{2x}{x+2}-\ln(1+x)\right). \end{aligned}$$

Označíme-li $g(x) = \frac{2x}{x+2} - \ln(1+x)$, kde $x \ge 0$, pak z nerovnosti $g'(x) = \frac{-x^2}{(x+1)(x+2)^2} < 0$ pro každé $x > 0$ plyne, že funkce g je na daném intervalu klesající, a protože $g(0) = 0$, je funkce g na $(0,\infty)$ záporná. Z toho plyne, že i funkce f je na intervalu $(0,\infty)$ klesající, a proto pro každé $x > 0$ platí

$$\mathrm{e} = \lim_{t\to 0+} f(t) > f(x) > \lim_{t\to\infty} f(t) = 2\,.$$

Důkaz nerovností $(\lozenge)$, a tedy i druhý důkaz $(\sharp\sharp)$, je tak hotov, neboť

$$\frac{2}{a+b}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} = f\left(\frac{b-a}{a}\right).$$

$\square$

K dokázané větě 3.32 ještě dodejme, že stupně $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ mocninných průměrů jsou v její formulaci optimální. V článcích, které jsme v důkazu této věty citovali, Lin a Stolarsky totiž také dokázali, že pokud některé stupně r, s mají tu vlastnost, že průměry libovolné dvojice kladných čísel a, b splňují nerovnosti

$$L \le M_r\,, \qquad \text{resp.} \qquad M_s \le I\,,$$

pak nutně platí $r \ge \frac{1}{3}$ a $s \le \frac{2}{3}$.

V úvodní části článku [San-90] je podán přehled dalších zajímavých nerovností pro logaritmický průměr L a identrický průměr I ve vztahu k elementárním průměrům H, G, A. H. Alzer (1986 a 1987) dokázal obecnou platnost nerovností (všude dále jde o průměry libovolných *různých* čísel $a, b > 0$)

$$\sqrt{G \cdot I} < L < \frac{G+I}{2}\,, \qquad A \cdot G < L \cdot I \qquad \text{a} \qquad A + G > L + I\,,$$

podle E. B. Sholandera (1983) platí

$$\sqrt[3]{G^2 \cdot A} < L\,.$$

V samotném článku [San-90], v němž jsou i odkazy na předchozí výsledky, jeho autor J. Sándor dokázal nerovnosti

$$\frac{A+L}{2} < I\,, \qquad \frac{A+G}{2} < I \qquad \text{a} \qquad \frac{3}{L} < \frac{1}{G} + \frac{2}{H}\,.$$

Již v roce 1975 K. B. Stolarsky zařadil logaritmický průměr L do zajímavé jednoparametrické škály nových průměrů, ve které leží i identrický průměr I, a díky této škále průměr I vlastně jako první matematik objevil. Tyto nové, dnes zvané Stolarského průměry, jmenovaný autor zavedl pro libovolná kladná čísla $a \neq b$ a libovolný reálný parametr $p \notin \{0, 1\}$ předpisem

$$S_p = \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)} \right)^{\frac{1}{p-1}}\,, \tag{3.10}$$

poté ukázal, že $S_p \to L$ $(p \to 0)$, a nakonec výpočtem limity

$$\lim_{p \to 1} S_p = \mathrm{e}^{-1} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} \tag{3.11}$$

dostal vzorec pro nový průměr I.[29]

Pro průměry L a I pak Stolarsky ve stejném článku získal odhady

$$G < L < I < A$$

v důsledku zjištěné monotonie průměrů S_p vzhledem k parametru p. Jeho technicky náročný důkaz prostředky diferenciálního počtu zde uvádět nebudeme, protože zvolíme jinou cestu. Povšimneme si totiž, že průměr S_p je zřejmě možné definovat namísto (3.10) jako průměr I_f z (3.6) pro funkci $f(x) = x^{p-1}$:

$$S_p = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p-1}}\,. \tag{3.12}$$

Toto nové vyjádření Stolarského průměru S_p (korektní pro každé $p \neq 1$) zahrnuje i rovnost $S_0 = L$.

[29] Stolarsky průměr označil U a nijak ho nepojmenoval, ani ve svém pozdějším článku [Sto-80]. Kdo přišel s termínem *identrický* průměr, zařazeným např. i do slovníku *Wolfram MathWorld*, jsme nezjistili.

Odložme na chvíli slíbený důkaz monotonie S_p a všimněme si nejprve, které zástupce Stolarského průměrů již známe. V jejich škále se nacházejí tři mocninné průměry, totiž $G, M_{\frac{1}{2}}$ a A. Snadno se přesvědčíme, že to jsou průměry S_p pro $p = -1, \frac{1}{2}$ a 2:

$$
\begin{aligned}
S_{-1} &= \left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{(-1)(b-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{ab} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{ab} = G\,, \\
S_{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}(b-a)} \right)^{-2} = \left(\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^{2} = M_{\frac{1}{2}}\,, \\
S_2 &= \left(\frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \right)^{1} = \frac{a+b}{2} = A\,.
\end{aligned}
$$

Protože $G = M_0$ a $A = M_1$, můžeme uvedené tři vztahy zapsat jednotně jako

$$
S_p = M_{\frac{p+1}{3}} \qquad \text{pro každé } p \in \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}.
$$

Jistě se nabízí porovnat průměry S_p a $M_{\frac{p+1}{3}}$ pro další hodnoty p. Jak už víme, pro $p = 0$ a pro $p = 1$ platí podle věty 3.32 (bez ohledu na hodnoty $a \neq b$ průměrovaných čísel) nerovnosti

$$
S_0 = L < M_{\frac{1}{3}} \qquad \text{a} \qquad S_1 = I > M_{\frac{2}{3}}\,.
$$

(Pro další hodnoty p jsme bohužel žádné srovnání průměrů S_p a $M_{\frac{p+1}{3}}$ v dostupné literatuře nenašli.)

Základní Stolarského výsledek o závislosti průměrů S_p na parametru p uvedeme jako následující tvrzení.

Věta 3.33. *Pro libovolná dvě různá kladná reálná čísla a, b je průměr S_p spojitá rostoucí funkce proměnné p na každém z intervalů $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, pro kterou platí limitní vztah* (3.11).[30]

Důkaz. Spojitost S_p v každém bodě $p \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ plyne ze spojité závislosti integrálu ve vzorci (3.12) na parametru p.

Pro libovolná čísla p a q taková, že $1 < p < q$, nerovnost $S_p < S_q$ dokážeme tak, že do ní dosadíme integrální vyjádření (3.12), pak umocníme na *kladný* exponent $q-1$ a ještě ekvivalentně přepíšeme:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p-1}} < \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{q-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q-1}}\,, \\
&\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{p-1}} < \frac{1}{b-a} \int_a^b x^{q-1}\, \mathrm{d}x\,, \\
&\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x^{p-1} \right)^{\frac{q-1}{p-1}}\, \mathrm{d}x > \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{p-1}}\,.
\end{aligned}
$$

[30] [Sto-75], my však uvedeme důkaz inspirovaný výkladem v [Ste-04], str. 128.

To je však Jensenova integrální nerovnost (3.1) s funkcí $f(x) = x^{\frac{q-1}{p-1}}$, která je na intervalu $\langle a^{p-1}, b^{p-1}\rangle$ ryze konvexní (neboť její exponent $\frac{q-1}{p-1}$ je v naší situaci zřejmě větší než 1) a se spojitou nekonstantní funkcí $g(x) = x^{p-1}$. Jak jsme poznamenali v textu za (3.1), taková Jensenova nerovnost platí „ostře".

Podobně pro libovolná čísla p a q taková, že $p < q < 1$, nerovnost $S_p < S_q$ dokážeme tak, že ji po umocnění na *záporný* exponent $p-1$ přepíšeme v ekvivalentním tvaru jako

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x^{q-1}\right)^{\frac{p-1}{q-1}}\,\mathrm{d}x > \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x^{q-1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{q-1}}$$

a užijeme stejný argument jako v prvním případě, ovšem s ryze konvexní funkcí $f(x) = x^{\frac{p-1}{q-1}}$ (opět s exponentem větším než 1).

Vztah (3.11) ve zlogaritmované podobě dokážeme užitím l'Hospitalova pravidla pro limitu typu $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to1}\ln S_p &= \lim_{p\to1}\frac{\ln(b^p-a^p)-\ln p-\ln(b-a)}{p-1} = \\ &= \lim_{p\to1}\frac{\frac{b^p\ln b-a^p\ln a}{b^p-a^p}-\frac{1}{p}}{1} = \\ &= \lim_{p\to1}\frac{b\ln b-a\ln a}{b-a}-1 = \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right).\end{aligned}$$

Tím je důkaz věty ukončen. □

Výsledky dokázané v této podkapitole vedou k následujícím srovnáním Stolarského průměrů S_p (včetně $L = S_0$ a $I = S_1$) s mocninnými průměry M_q. (Budeme psát G, A namísto M_0, resp. M_1, a jako vždy předpokládáme, že $a \neq b$):

$$\begin{aligned}
p < -2 &\;\Rightarrow\; S_p < G = S_{-2}\,, & \tfrac{1}{2} < p < 1 &\;\Rightarrow\; M_{\frac12} < S_p < I = S_1\,,\\
-2 < p \le 0 &\;\Rightarrow\; G < S_p < M_{\frac13}\,, & 1 \le p < 2 &\;\Rightarrow\; M_{\frac23} < S_p < A = S_2\,,\\
0 < p < \tfrac{1}{2} &\;\Rightarrow\; S_0 = L < S_p < M_{\frac12} = S_{\frac12}\,, & p > 2 &\;\Rightarrow\; A < S_p\,.
\end{aligned}$$

Uvedený přehled ještě doplníme o vlastní jednoduchý výsledek o srovnání průměrů S_p a M_{p-1}. Před jeho formulací uveďme, že pro $p = 2$ jde o dva stejné průměry $S_2 = M_1 (= A)$ a že novou informaci po výše zmíněném přehledu výsledek přináší pro $p \in \left(\frac{5}{3}, 2\right)$ a pro $p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Věta 3.34. *Pro průměry S_p a M_{p-1} libovolných dvou různých kladných reálných čísel a, b platí nerovnosti*[31]

$$M_{p-1} < S_p < A\,, \qquad \textit{resp.} \qquad A < S_p < M_{p-1}\,,$$

podle toho, zda $p < 2$, resp. $p > 2$.

[31] Pro zdůraznění jsme do formulace připsali i známá srovnání s průměrem A, která v důkazu mimochodem znovu dokážeme.

Důkaz. Předpokládejme, že $0 < a < b$. V případě $p > 2$ je funkce $f(x) = x^{p-1}$ ryze konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$, takže podle Hermitovy-Hadamardovy nerovnosti z věty 3.15 platí ostré nerovnosti

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p-1} < \frac{1}{b-a}\int_a^b x^{p-1}\,\mathrm{d}x < \frac{a^{p-1}+b^{p-1}}{2}\,, \tag{$*$}$$

z nichž po umocnění na kladný exponent $\frac{1}{p-1}$ plyne $A < S_p < M_{p-1}$.

V případě $1 < p < 2$ je funkce $f(x) = x^{p-1}$ na $\langle a, b\rangle$ ryze konkávní, takže platí nerovnosti $(*)$ s opačnými znaky „>“. Po stejném umocnění jako v prvním případě tedy dostaneme opačné nerovnosti $M_{p-1} < S_p < A$.

Podobně se posoudí i případ, kdy $p < 1$ a kdy funkce $f(x) = x^{p-1}$ je ryze konvexní a exponent $\frac{1}{p-1}$ záporný.

Konečně v případě $p = 1$ máme dokázat $M_0 < S_1 < A$ neboli $G < I < A$. I když to není ve srovnání s předchozími výsledky nic nového, podejme přímý důkaz: ekvivalentní nerovnosti $\ln G < \ln I < \ln A$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\ln a + \ln b}{2} < \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}x < \ln\frac{a+b}{2}\,,$$

což je Hermitova-Hadamardova nerovnost pro ryze konkávní funkci $\ln x$. $\square$

Závěr

Nerovnosti zapsané elementárními funkcemi a metody jejich řešení tvoří – jak jsem se sám při shromažďování materiálů pro disertaci přesvědčil – rozsáhlou a podrobně rozpracovanou matematickou disciplínu. Postupům využívajícím diferenciální a integrální počet však podle mého názoru není (v české, ale ani v zahraniční) matematické literatuře věnována dostatečná pozornost. Přitom v některých případech se taková řešení přímo nabízejí a častokrát jsou mnohem elegantnější než „klasické“ postupy. Mým cílem v této práci bylo ukázat, že odvozování zmíněných nerovností pomocí diferenciálního, popř. integrálního počtu, je přinejmenším užitečným a často velmi efektivním postupem. Doufám, že se mi to alespoň částečně podařilo a že tato práce je toho důkazem.

Zpracování předložené disertační práce pro mě představovalo jednak systematické vyhledávání zdrojů s danou problematikou, jednak analýzu užitých metod a postupů a jejich následnou klasifikaci. Téměř ve všech případech jsem čerpal z cizojazyčných zdrojů, přičemž potýkat jsem se musel např. s polštinou nebo vietnamštinou. Zadání i řešení mnoha takto získaných příkladů bylo poté nezbytné upřesnit, doplnit, někdy i zcela přepracovat. Do výsledného textu jsem zařadil i několik vlastních námětů. Za přínosný prvek práce by se daly považovat i původní teoretické popisy užitých metodických postupů.

Během této práce jsem si prohloubil znalosti v oblasti elementárních nerovností a seznámil jsem se s rozličnými metodami jejich dokazování. Především jsem se však naučil dívat se ně novým pohledem, a to přes „brýle matematické analýzy“. Věřím, že tento pohled ocení jak studenti, tak jejich učitelé v základních kurzech matematické analýzy, a že tato práce bude vhodným doplňkem jejich učebních textů. Vzhledem k užitým metodám a postupům uvedeným v této práci může být i samostatnou náplní matematických seminářů, a to jak na vysoké, tak i na střední škole, ve druhém případě v gymnaziálních třídách se zaměřením na matematiku nebo při individuální péči o talentované žáky.

Seznam použité literatury

[And-04] Andreescu, T., et al.: *Old and New Inequalities.* GIL Publishing House, Zalau, 2004.

[And-07] Andreescu, T., Gelca, R.: *Putnam and Beyond.* Springer Science+Business Media LLC, New York, 2007.

[And-08] Andreescu, T., Dospinescu, G.: *Problems from the Book.* XYZ Press, San Jose, 2008.

[Bag-05] Bagdasar, O.: *Some Applications of Jensen's Inequality.* Octogon Mathematical Magazine, roč. 13, 2005, str. 410–412.

[Ben-05] Bencze, M.: *New Means and Refinements deduced from Jensen-Hadamard Inequality.* Octogon Mathematical Magazine, roč. 13, 2005, str. 154–161.

[Ber-04] Berinde, V., Păltănea, E.: *Gazeta Matematică – A Bridge Over Three Centuries.* Romanian Mathematical Society, Bucureşti, 2004.

[Bot-69] Bottema, O., et al.: *Geometric Inequalities.* Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[Can-07] Can, V. Q. B., et al.: *Collected Problems About Inequality*, 2007. Další bibliografické údaje nezjištěny, stránka internetového dokumentu již neexistuje.

[cze-06] *Matematická olympiáda v ČR.* ÚMS PřF MU. `http://math.muni.cz/mo` Citováno v pořadí ročník–kategorie–kolo–úloha.

[Eng-98] Engel, A.: *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[exc-01] *Mathematical Excalibur – Problem Corner.* Mathematical Excalibur, roč. 6, 2001, č. 3, str. 3.

[Gue-02] Gueron, S.: *Substitutions, Inequalities and History.* Crux Mathematicorum, roč. 28, 2002, č. 2, str. 88–90.

[Her-96] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 1996.

[Her-00] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Equations and Inequalities.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[Hun-07] Hung, P. K.: *Secrets in Inequalities.* GIL Publishing House, Zalau, 2007.

[Kac-03] Kaczor, W. J., Nowak, M. T.: *Problems in Mathematical Analysis III. Integration.* American Mathematical Society, Providence, 2003.

[Kad-05] Kadelburg, Z., et al.: *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and Some Applications.* The Teaching Of Mathematics, roč. 8, 2005, č. 1, str. 31–45.

[Kah-48] Kahanoff, B.: *Certaines inégalités des nombres.* Bulletin de l'Institut d'Égypte, roč. 29, 1948, str. 323–327.

[Kla-02] Klamkin, M. S.: *On a Problem of the Month.* Crux Mathematicorum, roč. 28, 2002, č. 2, str. 86–87.

[Kou-00] Kourliandtchik, L.: *Wędrówki po krainie nierówności.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2000.

[Kou-01] Kourliandtchik, L.: *Powrót do krainy nierówności.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2001.

[Kur-05] Kurlyandchik, L.: *Matematyka elementarna w zadaniach, Tom II.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2005.

[Kur-07] Kurlyandchik, L.: *Kącik olimpijski, Część III: Nierówności.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2007.

[Lar-90] Larson, L. C.: *Metódy riešenia matematických problémov.* Vydavatestvo Alfa, Bratislava, 1990.

[Leh-06] Lehtinen, M.: *The Nordic Mathematical Competition 1987–2006. Problems and Solutions.* Macibu gramata, Riga, 2006.

[Li-00] Li, K. Y.: *Majorization Inequality.* Mathematical Excalibur, roč. 5, 2000, č. 5, str. 2–4.

[Lin-74] Lin, T. P.: *The power mean and the logarithmic mean.* American Mathematical Monthly, roč. 81, 1974, str. 879–883.

[Loz-96] Lozansky, E., Rousseau, C.: *Winning Solutions.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[Mat-07] Matić, I.: *Classical Inequalities*, 2007. `http://www.imomath.com/tekstkut/ineq_im.pdf`

[Mil-06] Mildorf, T. J.: *Olympiad Inequalities*, 2006. `http://web.mit.edu/tmildorf/www/inequalities.pdf`

[Neg-05] Negut, A.: *Problems for the Mathematical Olympiads.* GIL Publishing House, Zalau, 2005.

[Nic-03] Niculescu, C. P., Persson, L. E.: *Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality.* Real Analysis Exchange, roč. 29, 2003, č. 2, str. 663–685.

[Pri-05] Přinosil, M.: *Jensenova nerovnost a její aplikace.* Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity, Brno, 2005.

[Pri-10] Přinosil, M.: *Extrémy funkcí v krajních bodech intervalu.* Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 85, 2010, č. 3, str. 1–9.

[Qua-07] Quang, C. M.: *Bat Dang Thuc Karamata va Mot So Ung Dung.* Další bibliografické údaje nezjištěny, stránka internetového dokumentu již neexistuje.

[Rab-01] Ráb, M.: *Nerovnosti s matematickými průměry.* Písemný referát k přednášce, Brno, březen 2001.

[San-90] Sándor, J.: *On the identric and logarithmic means.* Aequationes Mathematicae, roč. 40, 1990, č. 2–3, str. 261–270.

[Sim-10] Šimša, J.: *Užitečná podoba Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti.* Matematika - Fyzika - Informatika, roč. 19, 2010, č. 9, str. 513–530.

[Ste-04] Steel, J. M.: *The Cauchy-Schwarz Master Class – An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge University Press, New York, 2004.

[Sto-75] Stolarsky, K. B.: *Generalizations of the logarithmic mean.* Mathematical Magazine, roč. 48, 1975, str. 87–92.

[Sto-80] Stolarsky, K. B.: *The power and generalized logarithmic means.* American Mathematical Monthly, roč. 87, 1980, str. 545–548.

[Thu-07] Thuan, P. V., Vi, L.: *Bat Dang Thuc. Suy luan va Kham pha.* Dai Hoc Quoc Gia, Hanoi, 2007.