CVIČENÍ K PŘEDNÁŠCE DM 2

Základy planimetrie

Důkazové příklady řešte užitím vět o shodných trojúhelnících.

(1) Rovnoběžníkem nazýváme čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že v rovnoběžníku a) každé dvě protější strany jsou shodné, b) obě úhlopříčky se navzájem půlí. Poté dokažte, že naopak každá z vlastností (a) či (b) zaručuje, že dotyčný konvexní čtyřúhelník je rovnoběžník. Nakonec dokažte, že rovnoběžníkem je každý konvexní čtyřúhelník, jehož některé dvě protější strany jsou shodné a rovnoběžné.

(2) Osou úhlu AVB rozumíme tu polopřímku s počátečním bodem V, která daný úhel půlí, tj. rozděluje na dva shodné úhly. Dokažte, že osa úhlu o velikosti mezi $0°$ a $180°$ je množina těch jeho vnitřních bodů, které mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti.

(3) Dokažte, že množina všech bodů roviny s danou přímkou p, které od této přímky mají danou vzdálenost d, je sjednocením dvou rovnoběžek s přímkou p, které od ní mají vzdálenost d.

(4) Dokažte, že v trojúhelníku leží proti shodným stranám shodné vnitřní úhly a proti větší straně leží větší vnitřní úhel (a naopak).

(5) Připomeňme, že střední příčkou trojúhelníku rozumíme úsečku, která spojuje středy dvou jeho stran. Dokažte, že tato úsečka je rovnoběžná se třetí stranou a má ve srovnání s ní poloviční délku.

Konstrukční úlohy

(1) Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a třetí přímka, která obě rovnoběžky protíná. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří daných přímek.

(2) V rovině je dána kružnice k a její vnější přímka p. Sestrojte kružnici l o daném poloměru r, která se dotýká přímky p a která má s kružnicí k a) vnější dotyk, b) vnitřní dotyk.

(3) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, t_a, t_b.

(4) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno α, v_b a v_c.

(5) Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány paty A_0, B_0 jeho výšek AA_0, BB_0 a přímka l, na které leží strana AB.

(6) V rovině je dán pravý úhel XVY, jeho vnitřní bod Q a úsečka délky d. Sestrojte bod A na rameni VX a bod B na rameni VY tak, aby úsečka AB měla danou délku d a aby úhel AQB byl pravý.

Úhly v kružnicích

(1) V libovolném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme S střed kružnice opsané a P patu výšky z vrcholu A. Dokažte, že úhly BAP a SAC jsou shodné.

(2) Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se protínají v bodech K a L. Vyberme libovolně body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby bod K byl vnitřním bodem úsečky XY. Zdůvodněte, proč velikost úhlu XLY nezávisí na výběru bodů X a Y.

(3) Přímka p protíná strany AB a CD daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ tak, že ho rozděluje na dva tětivové čtyřúhelníky. Dokažte, že $BC \parallel AD$.

(4) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno a) a, α, t_a, b) a, α, ϱ (poloměr vepsané kružnice).

(5) V jedné z polorovin s hraniční přímkou p je dána kružnice k a na ní dva různé body P a Q. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho základna AB ležela na přímce p, vrchol C na kružnici k, bod P uvnitř ramene AC a bod Q uvnitř ramene BC.

Mocnost bodu ke kružnici

(1) V rovině je dána kružnice $k(S, 5\,\mathrm{cm})$ a bod M tak, že $|SM| = 7\,\mathrm{cm}$. Bodem M prochází přímka p, která na kružnici k vytíná tětivu AB délky $2\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte délky úseček MA a MB.

(2) Sestrojme společnou tečnu dvou daných kružnic, které se protínají ve dvou bodech A a B. Dokažte, že přímka AB prochází středem úsečky, která spojuje body dotyku sestrojené tečny s danými kružnicemi.

(3) Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body D, E, F. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a DEF jsou soustředné, právě když platí

$$|DB| \cdot |DC| = |EC| \cdot |EA| = |FA| \cdot |FB|.$$

(4) V kružnici jsou dány tři tětivy. Každá z nich je rozdělena průsečíky s ostatními dvěma tětivami na tři shodné části. Dokažte, že všechny tři tětivy jsou stejně dlouhé.

(5) Je dána kružnice k se středem S a bod A ležící v její vnější oblasti. Zvolme libovolný průměr MN kružnice k, při kterém jsou body A, M, N vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že kružnice l jemu opsaná prochází kromě bodu A ještě dalším pevným bodem, který nezávisí na volbě průměru MN.

(6) Jsou dány kružnice k a l se společnou tětivou AB. Jejím vnitřním bodem P vedeme libovolnou tětivu KM kružnice k a libovolnou tětivu LN kružnice l tak, že vznikne konvexní čtyřúhelník $KLMN$. Dokažte, že vždy jde o čtyřúhelník, který je tětivový.

Podobné trojúhelníky

(1) Vlastnosti středních příček trojúhelníku jsme dříve dokázali pomocí vět o shodnosti Δ. Ukažte nyní, jak snadno plynou z vět o podobnosti Δ.

(2) Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že pro vnitřní bod K strany AB a vnitřní bod L strany AC platí $KL \parallel BC$, právě když oba poměry $|AK| : |KB|$ a $|AL| : |LC|$ mají stejnou hodnotu.

(3) Úhlopříčky daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Dokažte, že platí $AB \parallel CD$, právě když $|AP| \cdot |DP| = |BP| \cdot |CP|$.

(4) Dokažte, průsečík P úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, v němž $AB \parallel CD$, je středem té úsečky s krajními body na jeho ramenech, která prochází bodem P rovnoběžně se základnami. Pak vyjádřete její délku pomocí délek $a = |AB|$ a $c = |CD|$ (vyjde jejich *harmonický průměr*).

(5) Je dán trojúhelník ABC a kladná reálná čísla p, q. Body K a L leží po řadě na stranách BC a AC tak, že $|BK| : |KC| = 1 : p$ a $|AL| : |LC| = 1 : q$. Dokažte, že úsečka AK je úsečkou BL proťata v bodě M, pro který platí $|AM| : |MK| = (p+1) : q$.

(6) Je dána kružnice $k(S, r)$ s průměrem AB a tečnou t v bodě A. Vypočtěte poloměr R té kružnice $l(O, R)$ s neznámým středem O na kružnici k, která prochází bodem B a dotýká se přímky t.

(7) Z úseček daných délek a, b, c, d sestrojte úsečky délek

a) $\sqrt{a^2 + b^2 + 2c^2}$, b) $\dfrac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{c}$ $(a > b)$, c) $\dfrac{a^2 b}{cd}$,

d) $\sqrt{ab + cd}$, e) $a\sqrt[4]{2}$.

(8) Ukažte, že rovnosti $v^2 = c_a \cdot c_b$ a $a^2 = c_a \cdot c$ z Eukleidových vět jsou důsledky obecného poznatku o mocnosti bodu ke kružnici.

(9) Nechť BP a CQ jsou výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC. Dvojím způsobem dokažte podobnost $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, a to užitím úhlů, resp. mocnosti.

(10) Dvě tětivy AB, CD téže kružnice se protínají v bodě M. Dokažte rovnost $\dfrac{|AC| \cdot |AD|}{|AM|} = \dfrac{|BC| \cdot |BD|}{|BM|}$.

(11) V kružnici opsané trojúhelníku ABC sestrojme libovolnou tětivu CN, která protne stranu AB ve vnitřním bodě, který označíme M. Dokažte, že rovnost $|CM| \cdot |CN| = |AC|^2$ nastane právě v případě, kdy $|AC| = |BC|$.

Osové souměrnosti

(1) Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho vrcholy A, B a přímka o, na níž leží osa vnitřního úhlu při vrcholu C.

(2) Uvnitř úhlu AVB o velikosti nejvýše 45° je dán bod K. Sestrojte bod L na rameni VA a bod M na rameni VB tak, aby lomená čára KLM byla co nejkratší.

(3) Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $KLMN$ tak, aby jeho základna KL ležela na straně AB, vrchol M na straně BC, vrchol N na straně AC a aby se jeho úhlopříčky protínaly v bodě P.

(4) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b$, c a v_a.

(5) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno β, v_a a $d = b - a > 0$.

(6) Na průměru AB dané kružnice zvolme libovolný vnitřní bod M. Veďme jím tětivu CD, která svírá s průměrem AB úhel 45°. Dokažte, že součet $|CM|^2 + |DM|^2$ nezávisí na volbě bodu M.

Středové souměrnosti

(1) V rovině jsou dány dvě různoběžky a, b a dva různé body C, T. Sestrojte trojúhelník ABC s těžištěm T tak, aby vrchol A ležel na přímce a a vrchol B na přímce b.

(2) Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Sestrojte rovnoběžník $KLMN$ tak, aby jeho strana KL ležela na straně AB, vrchol M na straně BC, vrchol N na straně AC a aby se jeho úhlopříčky protínaly v bodě P.

(3) Dokažte, že pokud těžnice AK trojúhelníku ABC leží na ose jeho vnitřního úhlu BAC, je tento trojúhelník rovnoramenný.

(4) V rovině je dán trojúhelník KLM. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod K byl středem strany AB, bod L vnitřním bodem strany BC a bod M vnitřním bodem strany AC.

(5) V rovině je dána kružnice k a v její vnější oblasti dva body A, B. Sestrojte průměr KL kružnice k tak, aby platilo $|AK| = |BL|$.

(6) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno t_a, v_b a v_c.

Posunutí

(1) V rovině je dána úsečka AB a kružnice k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s vrcholy C, D na kružnici k.

(2) Dvě kružnice k_1 a k_2 o stejném poloměru r mají vnější dotyk v bodě K. Zvolme body $A \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby úhel AKB byl pravý. Dokažte, že $|AB| = 2r$. [Návod: Je-li KL průměr k_2, pak $BL \parallel AK$. Odtud vyvoďte, že při posunutí, ve kterém $k_1 \to k_2$, musí tětiva AK přejít v tětivu BL.]

(3) V rovině je dána přímka p a mimo ni bod C. Kromě toho je dána úsečka délky c a úhel velikosti γ. Sestrojte trojúhelník ABC s vnitřním úhlem γ u vrcholu C a stranou AB, která leží na přímce p a má délku c.

(4) V rovině jsou dány dvě rovnoběžky a, b a bod C, který má od nich různé vzdálenosti. Sestrojte bod A na přímce a a bod B na přímce b tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou AB předem dané délky z, která je větší nežli vzdálenost přímek a a b.

(5) Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $a = |AB|$, $b = |BC|$ a $\omega = |\sphericalangle ASB|$, kde S je průsečík úhlopříček.

(6) Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte s ní rovnoběžnou přímku q, která na kružnicích k_1, k_2 vytne tětivy téže délky.

Otočení

(1) Dané dvě kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech. Jeden z nich je označen písmenem T. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, vrchol A ležel na kružnici k_1 a vrchol B na kružnici k_2.

(2) Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Sestrojme v něm střed K úhlopříčky BD a střed M strany EF. Dokažte, že trojúhelník AKM je rovnostranný.

(3) V rovině je dána kružnice $k(S, r)$, přímka p a úsečka délky a, $a < 2r$. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně délky a, jehož vrcholy A, B leží na kružnici k a vrchol C na přímce p.

(4) Uvnitř kružnice k o středu S jsou dány další dva body K a L, přitom úhel KSL není pravý. Sestrojte dvě shodné a navzájem kolmé tětivy kružnice k tak, aby na první z nich ležel bod K a na druhé bod L.

(5) V rovině je dána kružnice $k(S, r)$ a v její vnější oblasti dva body A, B. Sestrojte tětivu KL kružnice k tak, aby měla danou délku d, $d < 2r$, a aby platilo $|AK| = |BL|$. (Pro případ $d = 2r$ jde o úlohu 5 z cvičení na středové souměrnosti.)

(6) Ve vnější oblasti kružnice $k(S, r)$ je dán bod A. Sestrojte přímku p, která prochází bodem A a protíná kružnici k ve dvou bodech X a Y tak, že trojúhelník SXY má největší možný obsah.

Stejnolehlosti

(1) Sestrojte kosočtverec o straně 6 cm, jehož úhlopříčky mají délky v poměru $2 : 3$.

(2) Na kružnici k jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte její tětivu AD, kterou tětiva BC protne v bodě, jehož vzdálenosti od krajních bodů A, D jsou (v uvedeném pořadí) v poměru $3 : 1$.

(3) Uvnitř konvexního úhlu XVY je dán bod T. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a těžištěm T tak, aby jeho vrcholy A, C ležely na rameni VX a vrchol B ležel na rameni VY.

(4) Ve vnitřní oblasti kružnice $k(S, r)$ je dán bod A, $A \neq S$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby na kružnici k ležel jak vrchol B, tak střed B_1 strany AC.

(5) Uvnitř ostrého úhlu AVB je dán bod E. Na rameni VB sestrojte úsečku CD tak, aby polokružnice nad průměrem CD procházela bodem E a dotýkala se ramena VA.

(6) V daném čtverci $ABCD$ označme E střed strany CD. Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby bod K ležel na straně AB, bod L na straně BC, bod M na straně AD a aby úsečky KM a BE byly rovnoběžné.

(7) Do dané kruhové úseče vymezené obloukem AB nad úsečkou AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB (K blíže A, L blíže B) a aby jeho vrcholy M, N byly body hraničního oblouku AB.

(8) Je dán bod M a tři různoběžky a, b, c se společným bodem P, $P \neq M$. Bodem M veďte přímku p mimo bod P tak, aby proťala přímky a, b, c po řadě v bodech A, B, C, pro které platí $|AB| = 2 \cdot |BC|$.

(9) Ve vnější oblasti oblasti kružnice $k(S, r)$ je dána přímka p a na ní bod M. V kružnici k je navíc sestrojena tětiva PQ, $PQ \parallel p$. Na přímce p sestrojte úsečku XY se středem M tak, aby průsečík Z přímek PX a QY ležel na kružnici k.

(10) Do daného trojúhelníku ABC vepište dvě shodné kružnice k a l s vnějším dotykem tak, aby se kružnice k rovněž dotýkala stran AB, AC a kružnice l stran BA a BC.

(11) Je dána kružnice $k(S, r)$ a dva její různé poloměry SA, SB. Sestrojte tětivu XY kružnice k tak, aby byla oběma poloměry rozdělena na tři shodné úseky XP, PQ a QY.

(12) Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod K jeho strany AB (nevylučujeme, že $K = A$ nebo $K = B$). Sestrojte vnitřní bod X strany AC a vnitřní bod Y strany BC tak, aby lomená čára $CXYK$ byla složena ze tří shodných úseček.

Sinová a kosinová věta

1. V daném trojúhelníku ABC při obvyklém označení stran a vnitřních úhlů platí $a : b = 2 : 3$ a $\alpha : \beta = 1 : 2$. Zjistěte, zda rovněž poměr $a : c$ je poměrem dvou celých čísel (v kladném případě tato čísla najděte).

2. Užitím sinové věty dokažte tzv. *tangentovou větu* pro obecný trojúhelník ABC, která je při obvyklém označení jeho prvků vyjádřena úměrou $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

3. Do kružnice o poloměru $R = 3\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ je vepsán trojúhelník ABC, ve kterém platí $a = 2\sqrt{30}\,\mathrm{cm}$, $v_b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ a $\alpha > 90°$. Vypočtěte délky zbylých stran b a c.

4. V trojúhelníku ABC o obsahu $12\,\mathrm{cm}^2$ při obvyklém označení stran a úhlů platí $a = 5\,\mathrm{cm}$ a $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$. Ukažte, že rovněž délky b, c zbylých dvou stran trojúhelníku jsou (v cm) vyjádřeny racionálními čísly a tato čísla určete.

5. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho strany AB v bodě T, přičemž úsečky AT a BT mají po řadě délky 5 a 9. Vypočtěte délky všech stran trojúhelníku ABC, víte-li navíc, že jeho vnitřní úhel při vrcholu C má velikost $120°$. (Návod: Uvažujte o dalších dvou bodech dotyku vepsané kružnice.)

6. V trojúhelníku ABC platí $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ a $\sin\gamma = 2/3$. Vypočtěte c, $\sin\alpha$ a $\cos\beta$ (přesně, tj. bez užití přibližných hodnot goniometrických a cyklometrických funkcí z kalkulaček).

7. Odvoďte vzorce pro délky těžnic trojúhelníku ABC pomocí délek a, b, c jeho stran. (Návod: Pro určení délky těžnice CS uplatněte nejprve kosinovou větu v trojúhelnících ASC a ABC se společným úhlem u vrcholu A. Pak tento úhel z obou rovností eliminujte.)