CVIČENÍ K PŘEDNÁŠCE DM 1

Matematická logika

Příklad 1. Negujte následující výroky (Písmena A, B, C označují množiny reálných čísel, písmena K, L, M množiny přirozených čísel):

(1) Přirozené číslo m je sudé a číslo $m^2 + 1$ je prvočíslo.

(2) Množina A je konečná nebo má konečně mnoho záporných prvků.

(3) Trojúhelník, který má dvě shodné těžnice, je rovnoramenný.

(4) Je-li číslo m^2 dělitelné devíti, je číslo m^3 dělitelné 27. (Předpokládáme, že číslo m je celé.)

(5) Nejvýše 12 žáků naší třídy nosí brýle.

(6) Nastane to v alespoň devíti případech z deseti.

(7) Ve třídě je právě sedm dívek a více než třikrát tolik chlapců. (Negaci vyjádřete výhodně ve formě implikace.)

(8) Každé číslo z množiny A je větší než 10.

(9) Existuje prvek množiny B, který není prvkem množiny A.

(10) Existuje přímka p jdoucí bodem X, jež je kolmá k dané přímce q.

(11) Existuje přímka p, která je kolmá k oběma daným mimoběžkám q a r.

(12) Některé číslo z A je větší než druhá mocnina libovolného čísla z B.

(13) Je-li každý prvek A záporné číslo, pak žádný prvek B není větší než 1.

(14) Je-li některý prvek A kladné číslo, pak všechna čísla z B jsou celá.

(15) V množině K neleží žádné prvočíslo nebo libovolné číslo z L je liché.

(16) Pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $b \leq a^2$.

(17) Pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $b > a + c$ pro každé $c \in C$.

(18) Některá z množin K, L, M obsahuje nekonečně mnoho prvočísel.

(19) Žádné číslo z K není násobkem žádného čísla z L.

(20) Některé číslo z K není násobkem žádného čísla z L.

(21) V množině K neleží žádný násobek jistého čísla z L.

(22) Jsou-li v K alespoň čtyři prvočísla, pak v L jsou nejvýše dvě prvočísla.

(23) Jsou-li některá dvě čísla $a \in A$ a $b \in B$ navzájem opačná, pak jsou to jedině čísla $a = 1$ a $b = -1$.

(24) Pro libovolná čísla $x \in A$, $y \in B$ a $z \in C$ platí $x \leq y^2 \leq z^3$.

Příklad 2. Ke všem implikacím z Příkladu 1 vytvořte obměněné implikace.

Příklad 3. Do konstrukcí „K tomu, aby … , je nutné, aby …“, „K tomu, aby … , stačí, aby …“, „K tomu, aby … , je nutné a stačí, aby …“ doplňte následující dvojice výroků A a B tak, aby výsledné tvrzení bylo pravdivé.

(1) A: Úhly α a β jsou pravé.
B: Úhly α a β jsou shodné.

(2) A: Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.
B: Čtyřúhelník $ABCD$ je obdélník.

(3) A: Číslo x je dělitelné devíti.
B: Číslo x je dělitelné osmnácti.

(4) A: Číslo x je dělitelné devíti.
B: Číslo x má ciferný součet dělitelný osmnácti.

(5) A: Číslo x je dělitelné desíti.
B: Číslo x je dělitelné dvěma a pěti.

(6) A: Čísla x a y jsou dělitelná sedmi.
B: Číslo $x + y$ je dělitelné sedmi.

(7) A: Čísla x a y jsou dělitelná sedmi.
B: Číslo $x + 2y + 1$ není dělitelné sedmi.

(8) A: Přirozená čísla x a y jsou nesoudělná.
B: Přirozená čísla x a y jsou různá.

(9) A: Reálné číslo x je menší než 1.
B: Druhá mocnina reálného čísla x je menší než 1.

(10) A: Číslo x je celé.
B: Číslo $x + x$ je celé.

(11) A: Čtverce $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají stejný obsah.
B: Čtverce $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají stejnou stranu.

(12) A: Obdélníky $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ mají stejný obsah.
B: Obdélníky $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ mají shodnou šířku i shodnou délku.

(13) A: Pravoúhlé trojúhelníky $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ mají shodné přepony.
B: Obě odvěsny $\mathcal{T}_1$ jsou shodné s odvěsnami $\mathcal{T}_2$.

(14) A: Trojúhelník $\mathcal{T}$ má právě dva vnitřní úhly ostré.
B: Trojúhelník $\mathcal{T}$ je tupoúhlý.

Lineární rovnice, nerovnice a soustavy rovnic

1. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\left(x-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}-x\right)+\frac{8}{3}\leq 0$.

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{(3-2x)(2x+1)}{x^2(x^2-1)}\geq 0$.

3. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\left|\frac{x+4}{x-1}\right|\geq x+4$.

4. Nerovnici $\big||x-1|-4\big|<3$ řešte v oboru $\mathbb{R}$.

5. Najděte všechna řešení soustavy rovnic:

$$\frac{x+1}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{3}{2},\qquad \frac{2x+2}{x+y}-\frac{3y}{x-y}=\frac{1}{2}.$$

6. Zásoba mouky ve skladu jídelny se vyčerpá o 4 dny dříve, jestliže se počet strávníků zvýší o 40, vystačí však o 6 dní déle, sníží-li se počet strávníků o 40. Kolik je původně strávníků v jídelně?

7. Za kolik minut po sedmé hodině sevřou ručičky na obvyklém ciferníku hodin poprvé pravý úhel?

8. Přední kolo vozu má obvod 2,1 m, zadní 3,5 m. Jak dlouhá je dráha, na níž zadní kolo učiní o 2 000 otoček méně než kolo přední?

Kvadratické rovnice, jejich kořeny a kvadratické nerovnice

1. Ukažte, že jeden kořen rovnice

$$(1+\sqrt{3})x^2 - 2(2+\sqrt{3})x + 3 + \sqrt{3} = 0$$

je přirozené číslo, zatímco druhý kořen je druhá odmocnina z přirozeného čísla.

2. Určete, pro která čísla $p \in \mathbb{R}$ má rovnice $2 \cdot (x-p)^2 = 14 - px$ v oboru reálných čísel takové dva různé kořeny, že trojnásobek jejich součtu je menší než dvojnásobek jejich součinu.

3. Určete celé číslo k tak, aby rovnice $4x^2 + (8k-4)x + 4k + 13 = 0$ měla v oboru reálných čísel dva různé kořeny a součet jejich druhých mocnin byl co nejmenší.

4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{10}{x-2} \leq \dfrac{21}{x} - \dfrac{4}{x-3}$.

5. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{8-x}{12-|x^2-6x-4|} \leq 1$.

Lineární, lineární lomené a kvadratické funkce

1. Sestrojte graf funkce $f\colon y = |1-x| - \frac{1}{2}|x+2|$ a s jeho pomocí určete počet řešení rovnice $|1-x| - \frac{1}{2}|x+2| = p$ v závislosti na reálném parametru p.

2. Sestrojte graf funkce $f\colon y = \big||x-1|-2\big|$.

3. Sestrojte grafy funkcí daných předpisy:
a) $y = \dfrac{3\cdot|x|+1}{2-x}$, b) $y = \dfrac{|x-1|-1}{|x|-2}$.

4. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic znázorněte množinu všech bodů $P[x,y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$2x - 3y + xy = 2.$$

Které body z této množiny mají obě souřadnice celočíselné?

5. Sestrojte grafy funkcí daných předpisy:
a) $y = 2x - x^2 - 1$, b) $y = 2|x| - x^2 - 1$, c) $y = |x|\cdot(2-x) - 1$,
d) $y = x\cdot|2-x| - 1$, e) $y = |2x - x^2| - 1$.

6. Graficky určete, pro která čísla p má rovnice

$$\big|x^2 - 3|x| + 2\big| = p$$

největší možný počet řešení. Pro která p je těch řešení lichý počet? Jak souvisí druhá otázka s tím, že levá strana rovnice zadává sudou funkci?

7. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic znázorněte množinu všech bodů $P[x,y]$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$|y-x| \le x - x^2.$$

8. Pro která reálná čísla a je funkce s předpisem $y = ax - x^2$ na intervalu $\langle 1,2\rangle$ a) rostoucí, b) klesající?

9. Grafy funkcí $f\colon y = x^2 + 4x + q$ a $g\colon y = ax^2 + 2bx + 5$ jsou souměrně sdružené podle osy s rovnicí $y = 1$. Určete, pro která reálná čísla a, b, q to platí.

Rovnice a nerovnice s odmocninami

(1) Stanovte definiční obor a pak vyřešte rovnici

$$\sqrt{x\sqrt{x}-x}+\sqrt{x}=x.$$

(2) V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$2x+\sqrt{3-2x-x^2}\geq 0.$$

(3) V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\sqrt{x+\sqrt{x+2}}\leq 2.$$

(4) V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x+3\left(1-\sqrt{2x-2}\right)}{2-\sqrt{x-1}}<0.$$

(5) Stanovte definiční obor nerovnice a pak ji vyřešte:

$$2\cdot\sqrt{21+4x-x^2}+|5x-1|\geq 3x+17.$$

Pomůcka: platí rozklad $17x^2+60x+43=(x+1)(17x+43)$.

(6) Stanovte definiční obor nerovnice a pak ji vyřešte:

$$\sqrt{4x-\sqrt{19-3x}}\leq 3\sqrt{2}.$$

Pomůcka: platí rozklad $16x^2-141x+305=(x-5)(16x-61)$.

(7) Metodou násobení sdruženým výrazem řešte rovnici

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Úlohy s parametry

Písmena a, b, p, q značí reálné parametry.

(1) V oboru $\mathbb{R}$ řešte

a) rovnici $\dfrac{x+p}{x-q} + \dfrac{x+q}{x-p} = 2$, b) nerovnici $\dfrac{x-3p}{x-p-3} < 0$.

(2) Pro která a je aspoň jedno řešení nerovnice $2x - 3 > a$ rovněž řešením nerovnice $x - a < 3$?

(3) V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $|2x+3| + |2x-3| = ax + 6$.

(4) Rovnici $|x-p| = |x| - 1$ řešte grafickou metodou.

(5) Řešte soustavu s neznámými x, y ($a \neq 0$):

$$\frac{x}{a} + ay = a, \quad ax + \frac{y}{a} = 1.$$

(6) Určete, pro která a, b mají obě soustavy rovnic

$$\begin{cases} ax + 2y = b + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = a^2 + 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

stejné množiny řešení.

(7) Zjistěte, pro která p má rovnice $p(x^2+1) - 3 = x \cdot (x - 2p)$ v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny. Pro které z nalezených hodnot p jsou oba tyto kořeny a) kladné, b) záporné, c) opačných znamének?

(8) V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\dfrac{x^2}{a^3} + \dfrac{b^3}{x^2} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{b^2}{a^2}$, kde $a, b \neq 0$.

(9) Pro která p má rovnice $|px^2 - x| = 1$ právě tři řešení?

(10) V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $|x^2 - p| = (p-1)x$.

(11) V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $|x^2 + 2px + 1| > 1$ v případech a) $p > \sqrt{2}$, b) $p \in (0, 1)$.

(12) V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{ax^2}{x-1} \leq (a+1)^2$, kde $a \geq 0$.

(13) Řešte rovnici $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-a+2} = 1$.

Exponeciální a logaritmické rovnice a nerovnice

V úlohách (1)–(13) řešte danou rovnici či nerovnici v oboru $\mathbb{R}$.

(1) $4^{3\cdot\sqrt{x-3}} = 4 \cdot 2^{-2x}$.

(2) $(|x^2-13|+3)^{|x-2|-5} > 15^{|x-2|-5}$.

(3) $|4^x - 9| \leq |2^x - 3| + 6$.

(4) $\log_{(x+2)} \log_2 \log_{(x+3)} \bigl(2x^2+6x+8\bigr) = 0$.

(5) $\sqrt{\log_3(9x-3)} = \log_3(x-\frac{1}{3})$.

(6) $\log_{49}\bigl(2x^2+x-5\bigr) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0$.

(7) $\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x$.

(8) $\log_2 x \leq \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$.

(9) $\log_{\frac{6-x}{5}}(x+18) \leq 1 - \log_{\frac{5}{6-x}}(4x+23)$.

(10) $\log_{(4-\sqrt{25-x^2})} |8-2x| > 0$.

(11) $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$.

(12) $(\sqrt{x})^{1-\log_{0,5} x} \geq 8$.

(13) $\sqrt{\log_{x^2}\left(1+\frac{3}{2}x\right)} < 1$.

(14) Určete definiční obor nerovnice $\log_{(x+\frac{1}{2})} \dfrac{5|x|+11x+2}{8} \geq 2$ a pak ji vyřešte.

(15) Definiční obor rovnice $\log_x 27 - \dfrac{5\log_x 3}{\log_x \sqrt{3x^2}} = 1$ vyjádřete jako sjednocení intervalů a pak danou rovnici vyřešte.

(16) Pro které hodnoty reálného parametru p má rovnice $x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - p) = 0$ právě dvě řešení v oboru reálných čísel?

(17) Stanovte definiční obor a pak vyřešte nerovnici $\log_{\frac{p}{x}}\left(\dfrac{5x}{2p} - 1\right) \geq -2$, kde číslo p je *kladný* reálný parametr.

Goniometrické vzorce a rovnice

1. Určete hodnotu $\operatorname{tg} x$, víte-li, že $\cos x = -4/5$ a $x \in (\pi, 2\pi)$.

2. Dokažte, že pokud $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = 0$, pak $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$.

3. Dokažte, že $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$.

4. Dokažte, že pokud $\sin\alpha = k\sin(\alpha+\beta)$, kde $k \in (-1, 1)$, a pokud $\cos\beta \notin \{0, k\}$, pak existuje hodnota $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a je rovna číslu $\sin\beta/(\cos\beta - k)$.

5. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \cos 2x = 1$.

6. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

7. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $2\sin 2x \sin x + \cos 2x = 1$.

8. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $(\sqrt{3} - 1)\sin x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

9. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 2x + \cos 2x - \operatorname{tg} x = 1$.

10. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x$.

11. Pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$5\sin 2x - 6\cos x = k \cdot (5\sin x - 3)$$

v oboru $x \in \langle 0, \pi\rangle$ právě dvě řešení?

12. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \operatorname{cotg} 3x + \sin(\pi + 2x) = \sqrt{2}\cos 5x.$$

13. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\operatorname{cotg} x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

14. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $2\cos^2 3x + \cos(2x + \pi) = 1$.

15. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 3x = \cos 5x$.
Návod: Rovnici nejdříve upravte do tvaru $\sin 3x = \sin(?)$.

16. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 2x - \sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x) + 1 = 0$.
Návod: užijte substituci $t = \sin x + \cos x$.

17. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici

$$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = 1.$$

18. Popište obecnou metodu řešení rovnice $a\cos x + b\sin x + c = 0$ s nenulovými konstantami $a, b, c \in \mathbb{R}$ cestou úpravy výrazu $a\cos x + b\sin x$ do tvaru $K\sin(x + \omega)$, kde $K = \sqrt{a^2 + b^2}$ a ω je vhodné číslo (jak ho k daným a, b určíme?). Rovnici interpetujte též geometricky jako hledání průsečíků jednotkové kružnice a přímky s danou obecnou rovnicí.