# Masarykova Univerzita

Přírodovědecká fakulta

# AG–nerovnost v příkladech

Diplomová práce z matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Studijní program Učitelství pro střední školy

Studijní obor Učitelství matematiky pro střední školy

Brno 2010 Milan Navrátil

# Obsah

# Úvod

V tomto textu se budeme zabývat problematikou dokazování algebraických a geometrických odhadů, k čemuž využijeme jeden z nejvýznamnějších elementárních prostředků teorie nerovností. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, stručně nazývaná AG–nerovnost.

Práce je rozčleněna do dvou kapitol, kde první z nich se věnuje zformulování věty o AG–nerovnosti a podává několik důkazů založených na různých principech. Hlavní částí práce je však sbírka řešených úloh, které jsou rozděleny do tří kategorií podle složitosti, podobnosti zadání či řešení.

Úlohy byly ve většině případů vybírány tak, abychom k jejich dokazování užili pouze AG–nerovnost alespoň pro trojici čísel. Důraz byl kladen na nerovnosti, které se objevily v publikacích vydaných během posledních 15 let. Tato práce vychází ze skripta [5], na které se budeme několikrát v průběhu textu odvolávat, a může být chápána jako rozšíření kapitoly o AG–nerovnosti. Příklady z této publikace byly v tomto textu vynechány.

Z důvodu rozsahu práce v závěru řešení uvádím bez důkazu, zda a kdy ve zkoumané nerovnosti nastane rovnost. V úplném závěru řešení nalezneme v hranatých závorkách odkaz na literaturu, z které byla daná nerovnost čerpána. Tam je také připojena případná informace, nakolik je úloha v naší práci oproti svému podání v původním zdroji zobecněna.

Práce je vysázena typografickým systémem LaTeX, obrázky jsou vytvořeny pomocí METAFONTu. Potřebné informace k bezproblémové sazbě byly čerpány z [14],[15] a [16].

# Kapitola 1

# AG–nerovnost a její důkazy

V této kapitole uvedeme definice aritmetického a geometrického průměru a zformulujeme větu o nerovnosti mezi těmito průměry. Dále popíšeme, jak tuto nerovnost různými způsoby dokázat. Uvedené důkazy jsou převzaty z publikací [7] a [4]. Dva z důkazů jsem nepřevzal přímo z literatury, dozvěděl jsem se je na konzultacích od vedoucího práce.

**Definice.** Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou reálná čísla. Číslo

$$\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

nazveme aritmetickým průměrem čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$.

**Definice.** Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nezáporná čísla. Geometrický průměr čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je definován takto:

$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

**Věta (AG–nerovnost).** *Pro libovolná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ platí nerovnost*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \tag{1}$$

*přitom rovnost v (1) nastane, jen když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.*

*Poznámka.* Je-li $a_k = 0$ pro některé $k = 1, 2, \dots, n$, je tvrzení o nerovnosti (1) zřejmé, neboť její pravá strana je rovna nule. V dále uvedených důkazech proto budeme předpokládat, že všechna čísla $a_k$ jsou kladná.

**První důkaz (Cauchyův důkaz zpětnou indukcí).** Větu o AG–nerovnosti dokážeme matematickou indukcí vzhledem k $n$. Pro $n = 1$ je důkaz triviální, neboť $\mathcal{A}_1(a_1) = a_1 = \mathcal{G}_1(a_1)$. Nyní dokažme nerovnost (1) pro $n = 2$ ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1 a_2}, \\ a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 &\geq 0, \\ (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná, přitom rovnost v poslední nerovnosti nastane právě tehdy, když $\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$ neboli $a_1 = a_2$.

V druhé části důkazu předpokládejme, že věta platí pro $n$ a dokažme ji pro $2n$. Uvažme tedy libovolných $2n$ kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ a vytvořme k nim $n$ čísel

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}.$$

Podle indukčního předpokladu platí

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}, \tag{2}$$

přitom rovnost v (2) nastane, právě když $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$. Pro levou stranu (2) platí:

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2} + \cdots + \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}{2n} = \mathcal{A}_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}).$$

Pravou stranu nerovnosti (2) odhadneme zdola pomocí AG–nerovnosti, kterou jsme dokázali pro $n = 2$. Využijeme ji celkem $n$-krát:

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2} \geq \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}},$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když $a_1 = a_2, a_3 = a_4, \ldots, a_{2n-1} = a_{2n}$. Vynásobením levých a pravých stran a následným odmocněním dostaneme

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}} \geq$$
$$\geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}} = \mathcal{G}_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}).$$

Dohromady

$$\mathcal{A}_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \geq \mathcal{G}_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}),$$

kde rovnost nastane, právě když

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_3 + a_4}{2} = \cdots = \frac{a_{n-1} + a_{2n}}{2} \quad \text{a} \quad a_1 = a_2,\ a_3 = a_4,\ \ldots,\ a_{n-1} = a_{2n}.$$

To je ekvivalentní s podmínkou, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n}$.

V třetí části důkazu předpokládejme, že tvrzení o nerovnosti (1) platí pro $n + 1$ a dokažme, že platí pro $n$. Zvolme libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a přidejme k nim číslo $a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Podle indukčního předpokladu platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}}, \tag{3}$$

přitom tato nerovnost se změní v rovnost, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$. Pro levou stranu nerovnosti (3) platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} = \frac{n a_{n+1} + a_{n+1}}{n + 1} = \frac{(n + 1)\, a_{n+1}}{n + 1} = a_{n+1}.$$

Odtud a z (3) vyplývá

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}},\\
(a_{n+1})^{n+1} &\geq a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1},\\
(a_{n+1})^{n} &\geq a_1 a_2 \dots a_n,\\
a_{n+1} &\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},
\end{aligned}
$$

což je AG–nerovnost pro $n$ čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde rovnost nastane právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Tímto je celý důkaz zpětnou indukcí hotov.

□

**Druhý důkaz**. Protože je nerovnost (1) homogenní (viz [5, str. 92]), lze $n$-tici $a_1, a_2, \dots, a_n$ normovat tak, že $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Potom nerovnost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$$

je ekvivalentní s nerovností (1). Tvrzení o upravené nerovnosti dokážeme pomocí matematické indukce podle počtu proměnných. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť tehdy $a_1 = 1$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro libovolnou $n$-tici čísel a dokažme ho pro $n{+}1$-tici čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, pro kterou platí $a_1 a_2 \dots a_{n+1} = 1$. Zvolíme-li

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1}, \quad b_n = a_n a_{n+1},$$

pak $b_1 b_2 \dots b_n = 1$, což podle předpokladu znamená, že

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} \geq n.$$

Potřebujeme ukázat, že platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1.$$

K tomu zřejmě stačí, aby platilo $a_n + a_{n+1} \geq a_n a_{n+1} + 1$, tj. $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0$. To z pouhého předpokladu $a_1 a_2 \dots a_{n+1} = 1$ obecně neplyne, s ohledem na symetrii (viz [5, str. 92]) je však možné čísla $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ předem uspořádat tak, aby $a_n \leq a_i \leq$ $\leq a_{n+1}$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Tehdy ovšem platí $(a_n)^{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_{n+1} \leq (a_{n+1})^{n+1}$, tj. $a_n \leq 1 \leq a_{n+1}$, odkud plyne $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0$. Tím je nerovnost $a_1 + a_2 + \dots +$ $+ a_{n+1} \geq n + 1$ dokázána; rovnost znamená, že $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n a_{n+1} = 1$ a $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = 0$, odkud plyne $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 1$.

□

Před dalším, v pořadí třetím, důkazem AG–nerovnosti zformulujeme a dokážeme jedno pomocné tvrzení.

**Lemma** (**Bernoulliova nerovnost**). *Jsou-li čísla $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Q}$ taková, že $t > -1$ a $p > 1$, pak platí*

$$(1 + t)^p \geq 1 + pt, \tag{4}$$

*přitom rovnost nastává, právě když $t = 0$.*

**Důkaz**. Nechť $s \in \mathbb{R}^+$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je

$$\frac{s^{n+1}-1}{n+1} - \frac{s^n-1}{n} = \frac{s-1}{n+1}\left(s^n + s^{n-1} + \cdots + s + 1\right) -$$
$$\frac{s-1}{n}\left(s^{n-1} + s^{n-2} + \cdots + s + 1\right) = \frac{s-1}{n\,(n+1)} \cdot \left(ns^n - s^{n-1} - \cdots - s - 1\right),$$

Je-li $s > 1$, potom oba činitelé jsou větší než nula. Pokud $0 < s < 1$, jsou oba činitelé menší než nula. V každém případě proto platí

$$\frac{s^{n+1}-1}{n+1} - \frac{s^n-1}{n} \geq 0 \tag{5}$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $s = 1$. Jsou-li nyní $m$ a $n$ přirozená čísla, $m > n$, plyne z (5) odhad

$$\frac{s^m-1}{m} - \frac{s^n-1}{n} \geq 0.$$

Položíme-li zde $s = (1+t)^{\frac{1}{n}}$ pro zadané $t > -1$, dostáváme nerovnost

$$\frac{(1+t)^{\frac{m}{n}}-1}{m} - \frac{(1+t)^{\frac{n}{n}}-1}{n} \geq 0,$$

odkud po násobení číslem $m$ vychází

$$(1+t)^{\frac{m}{n}} - 1 - \frac{m}{n} \cdot t \geq 0,$$

což je nerovnost (4) pro racionální číslo $p = \frac{m}{n} > 1$. Tato nerovnost je ostrá pro $t \neq 0$.

□

*Poznámka.* Právě jsme dokázali nerovnost (4) pro *racionální* čísla $p > 1$, lze ji však dokázat i pro *iracionální* čísla $p > 1$ pomocí prostředků diferenciálního počtu. V dalším textu ovšem budeme potřebovat nerovnost (4) dokonce jen pro *celá* čísla $p > 1$.

**Třetí důkaz**. K daným kladným číslům $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označme

$$\mathcal{A}_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{G}_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$$

pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $k\mathcal{A}_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ a $\mathcal{G}_k^k = a_1 a_2 \ldots a_k$, odkud dostáváme tyto rekurentní vztahy

$$(k+1)\mathcal{A}_{k+1} = k\mathcal{A}_k + a_{k+1} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{G}_{k+1}^{k+1} = \mathcal{G}_k^k a_{k+1},$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pak je

$$\mathcal{A}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\mathcal{A}_k + \frac{1}{k+1}a_{k+1} = \frac{k}{k+1}\mathcal{A}_k + \frac{1}{k+1}\frac{\mathcal{G}_{k+1}^{k+1}}{\mathcal{G}_k^k},$$

tj.

$$\mathcal{A}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\mathcal{A}_k + \frac{\mathcal{G}_k}{k+1}\left(\frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k}\right)^{k+1}. \tag{6}$$

Nyní užijeme Bernoulliovu nerovnost (4) z předchozího lemmatu pro $p = k + 1$. Tato nerovnost má pak tvar

$$(1+t)^{k+1} \geq 1 + (k+1)t \qquad \text{pro každé } t > -1,$$

přičemž pro $t \neq 0$ je nerovnost ostrá. Položíme-li zde

$$t = \frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k} - 1,$$

dostaneme

$$\left(\frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\left(\frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k} - 1\right) = (k+1)\frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k} - k,$$

což po použití v identitě (6) dává:

$$\mathcal{A}_{k+1} \geq \frac{k}{k+1}\mathcal{A}_k + \frac{\mathcal{G}_k}{k+1}\left(\frac{\mathcal{G}_{k+1}}{\mathcal{G}_k}(k+1) - k\right) = \frac{k}{k+1}\mathcal{A}_k + \mathcal{G}_{k+1} - \frac{k}{k+1}\mathcal{G}_k,$$

čili

$$(\mathcal{A}_{k+1} - \mathcal{G}_{k+1}) \geq \frac{k}{k+1}(\mathcal{A}_k - \mathcal{G}_k)\,. \tag{7}$$

Protože pro $k = 2$ je $\mathcal{A}_2 \geq \mathcal{G}_2$ (viz úvod prvního důkazu), plyne z poslední nerovnosti indukcí

$$\mathcal{A}_k \geq \mathcal{G}_k \qquad \text{pro } k = 2, 3, \ldots, n,$$

což pro $k = n$ je AG–nerovnost pro předem daná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jsou-li alespoň dvě z nich různá, je AG–nerovnost ostrá: lze totiž čísla $a_i$ uspořádat tak, aby bylo $a_1 \neq a_2$, a pak je $\mathcal{A}_2 > \mathcal{G}_2$, takže z (7) plyne $\mathcal{A}_k > \mathcal{G}_k$ pro každé $k = 2, 3, \ldots, n$.

□

**Čtvrtý důkaz**. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Aritmetický průměr $\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ označme písmenem $\mathcal{A}$ a z $n$-tice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ utvořme novou $n$-tici následujícím způsobem: $b_1 = \mathcal{A}, b_n = a_1 + a_n - \mathcal{A}$ a $b_k = a_k$ pro všechna $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Pak zřejmě

$$\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathcal{A}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \mathcal{A},$$

tj. aritmetický průměr se při přechodu od $n$-tice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ k $n$-tici $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nezmění. Podívejme se, co platí pro jejich geometrické průměry. Podle předpokladu je $a_1 \leq$ $\leq a_i \leq a_n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a tedy platí

$$na_1 \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq na_n,$$

neboli $a_1 \leq \mathcal{A}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq a_n$. To znamená, že je $\mathcal{A} - a_1 \geq 0$ a $a_n - \mathcal{A} \geq 0$, čili i číslo $b_n$ je stejně jako ostatní $b_k$ kladné a platí

$$0 \leq (\mathcal{A} - a_1)(a_n - \mathcal{A}) = \mathcal{A}(a_1 + a_n - \mathcal{A}) - a_1 a_n = b_1 b_n - a_1 a_n.$$

Dostáváme tak nerovnost $a_1 a_n \leq b_1 b_n$. Vynásobíme-li obě strany nerovnosti kladným číslem $a_2 a_3 \ldots a_{n-1}$, pro které platí $a_2 a_3 \ldots a_{n-1} = b_2 b_3 \ldots b_{n-1}$, dostaneme po odmocnění nerovnost

$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \mathcal{G}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n), \tag{8}$$

tj. geometrický průměr se při přechodu od $n$-tice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ k $n$-tici $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nezmenší.

Všimněme si nyní $n$-tice $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a rozlišme následující dva případy:

a) Žádné z čísel $b_2, b_3, \ldots, b_n$ není menší než $\mathcal{A}$. Uvědomíme-li si, jak jsou definována čísla $b_i$, dostáváme nerovnosti

$$\mathcal{A} \le a_2, \quad \mathcal{A} \le a_3, \quad \ldots, \quad \mathcal{A} \le a_{n-1}, \quad \mathcal{A} \le a_1 + a_n - \mathcal{A}. \tag{9}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$(n-1)\mathcal{A} \le a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1 + a_n - \mathcal{A} = n\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) - \mathcal{A} = (n-1)\mathcal{A}.$$

Zde však nutně musí nastat rovnost, a tedy musí platit rovnosti všude v (9):

$$\mathcal{A} = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n + a_1 - \mathcal{A}.$$

Protože $b_1 = \mathcal{A}$, dostáváme odtud $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = \mathcal{A}$ a $b_n = a_1 + a_n - \mathcal{A} = \mathcal{A}$. Naše $n$-tice $b_1, b_2, \ldots, b_n$ má v tomto případě tvar

$$b_1 = \mathcal{A}, \quad b_2 = \mathcal{A}, \quad \ldots, \quad b_n = \mathcal{A},$$

takže pravá strana (8) je rovna $\mathcal{A}$ a důkaz AG–nerovnosti je hotov.

b) Mezi čísly $b_2, b_3, \ldots, b_n$ existuje číslo menší než $\mathcal{A}$. Protože však $\mathcal{A}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \mathcal{A}$, musí mezi nimi existovat i číslo větší než $\mathcal{A}$ (jinak by totiž bylo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) < \frac{n\mathcal{A}}{n} = \mathcal{A}$, a to by byl spor). Uspořádáme-li tedy čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ podle velikosti: $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$, bude se číslo $\mathcal{A}(= b_1)$ vyskytovat alespoň jednou mezi čísly $b_{i_2}, b_{i_3}, \ldots, b_{i_{n-1}}$ (musí platit, že $b_{i_n} \ne \mathcal{A}$, neboť $\mathcal{A}$ není ani nejmenší, ani největší ze všech čísel $b_k$).

Nyní utvořme z $n$-tice $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$ novou $n$-tici $c_1, c_2, \ldots, c_n$ stejným postupem jako jsme to učinili u $n$-tice $a_1, a_2, \ldots, a_n$: Položíme

$$c_1 = \mathcal{A}, \quad c_2 = b_{i_2}, \quad c_3 = b_{i_3}, \quad \ldots, \quad c_{n-1} = b_{i_{n-1}}, \quad c_n = b_{i_1} + b_{i_n} - \mathcal{A}.$$

Pak bude

$$\mathcal{A}_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \mathcal{A} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{G}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \le \mathcal{G}_n(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Mezi čísly $c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ se vyskytuje alespoň jedno číslo $\mathcal{A}$, a protože $c_1 = \mathcal{A}$, je číslo $\mathcal{A}$ v $n$-tici $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zastoupeno alespoň dvakrát. Stejně jako u $n$-tice $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zjistíme, že buď má $n$-tice $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tvar

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = \mathcal{A},$$

nebo je jedno z čísel $c_i$ pro některé $i = 2, 3, \ldots, n$, menší než $\mathcal{A}$, tj. při vhodném pořadí platí

$$c_{j_1} < c_{j_2} \le c_{j_3} \le \ldots \le c_{j_{n-1}} \le c_{j_n},$$

kde $c_{j_1} < \mathcal{A}$ a mezi čísly $c_{j_2}, \ldots, c_{j_{n-1}}$ se číslo $\mathcal{A}$ vyskytuje alespoň dvakrát.

Budeme-li v tomto procesu pokračovat, dostaneme po $k$-tém kroku ($k < n$) takovou $n$-tici $d_1, d_2, \dots, d_n$, v niž alespoň $k$ čísel bude rovných $\mathcal{A}$, a přitom bude platit

$$\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathcal{A}_n(b_1, b_2, \dots, b_n) = \mathcal{A}_n(c_1, c_2, \dots, c_n) = \dots = \mathcal{A}_n(d_1, d_2, \dots, d_n),$$
$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \mathcal{G}_n(b_1, b_2, \dots, b_n) \le \mathcal{G}_n(c_1, c_2, \dots, c_n) \le \dots \le \mathcal{G}_n(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Po nejvýše $n-1$ krocích dojdeme k $n$-tici $e_1, e_2, \dots, e_n$, pro kterou bude platit $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = \mathcal{A}$, a tedy také $e_n = \mathcal{A}$. Ale $\mathcal{G}_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sqrt[n]{\mathcal{A}^n} = \mathcal{A}$, takže máme

$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \mathcal{G}_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathcal{A} = \mathcal{A}_n(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

což je AG–nerovnost pro původně zadaná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$.

□

**Pátý důkaz**. Geometrický průměr čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ označme $z = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, dále označme

$$x_1 = \frac{a_1}{z}, \qquad x_2 = \frac{a_1 a_2}{z^2}, \qquad \dots, \qquad x_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{z^n} = 1,$$
$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \qquad y_2 = \frac{1}{x_2}, \qquad \dots, \qquad y_n = \frac{1}{x_n} = 1.$$

Protože jsou $n$-tice $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_n$ opačně uspořádané (viz [5, str. 128]), platí následující nerovnost, do které rovnou čísla $x_i$, $y_i$ dosadíme a ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n &\le x_1 y_n + x_2 y_1 + x_3 y_2 + \dots + x_n y_{n-1}, && (10) \\ 1 + 1 + \dots + 1 &\le \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z} + \dots + \frac{a_n}{z}, \\ n &\le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{z}, \\ z = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &\le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. && (11) \end{aligned}$$

Tím je AG–nerovnost pro čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokázána.

Rovnost v (11) nastane, právě když rovnost nastane v permutační nerovnosti (10). To, jak je známo, bude právě tehdy, když obě $n$-tice $y_1, y_2, \dots, y_n$ a $y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ budou souhlasně uspořádané (druhá z nich totiž musí být stejně jako první opačně uspořádaná než $n$-tice $x_1, x_2, \dots, x_n$). Předpokládejme, že posloupnosti $y_1, y_2, \dots, y_n$ a $y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ jsou souhlasně uspořádané a alespoň dvě z čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou různá. Pak existují $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ taková, že $y_i > y_{i+1}$ a $y_j < y_{j+1}$, kde $y_{n+1} = y_1$, pro která platí $(y_{i+1} - y_{j+1})(y_i - y_j) \le 0$, což je spor. Docházíme k závěru, že posloupnosti $y_1, y_2, \dots, y_n$ a $y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ jsou souhlasně uspořádané právě tehdy, když platí $y_1 = y_2 = \dots = y_n$ (opačná implikace je zřejmá). Odtud dostáváme $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1 = x_1 = x_2 = \dots = x_n$, což je ekvivalentní s podmínkou $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. □

**Šestý důkaz**. Pro každé $a \ge 0$ označme $f_n(a)$ maximální hodnotu součinu $x_1 x_2 \dots x_n$ za podmínek $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ (takové maximum existuje díky Weistrassově větě pro funkci $n$ proměnných spojitou na kompaktní množině). Rekurentní vztah mezi $f_n(a)$ a $f_{n-1}(a)$ dostaneme, když si uvědomíme, že při pevném $x_n \in \langle 0, a\rangle$ hledáme pro ostatní $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ maximální hodnotu součinu $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ za podmínek $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \geq 0$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - x_n$. Platí tedy

$$f_n(a) = \max_{0 \leq x_n \leq a} [x_n f_{n-1}(a - x_n)] \tag{12}$$

přitom zřejmě $f_1(a) = a$.

Po substituci $x_i = a y_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$, $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$, dostaneme

$$f_n(a) = a^n f_n(1).$$

Po dosazení do (12) obdržíme

$$\begin{aligned} f_n(1) = \max_{0 \leq y \leq 1} [y f_{n-1}(1 - y)] = \max_{0 \leq y \leq 1} \left[ y (1 - y)^{n-1} f_{n-1}(1) \right] = \\ = f_{n-1}(1) \max_{0 \leq y \leq 1} \left[ y (1 - y)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Užitím diferenciálního počtu zjistíme, že funkce $g$ daná předpisem $g(y) = y(1 - y)^{n-1}$ má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ maximum rovné $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$. Proto platí

$$f_n(1) = \frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

odkud vzhledem k $f_1(1) = 1$ snadno indukcí plyne $f_n(1) = \frac{1}{n^n}$. Proto

$$f_n(a) = a^n f_n(1) = \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

neboli

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left( \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n.$$

To je AG–nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat. □

**Sedmý důkaz**. Funkce $e^x$ je ostře konvexní na $\mathbb{R}$, protože $(e^x)'' = e^x > 0$. Označme $y_i = \ln x_i$, pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak z Jensenovy nerovnosti (viz [3, str. 180]) dostaneme

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n} \geq \lambda_1 e^{y_1} + \cdots + \lambda_n e^{y_n} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Speciálně volbou $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, dostaneme AG–nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$, protože $0 < \frac{1}{n}$. □

Při řešení některých úloh budeme kromě AG–nerovnosti potřebovat odhad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}). \tag{13}$$

*Důkaz.* Po převedení všech členů na levou stranu a po vynásobení celé nerovnosti číslem dva dostáváme

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0.$$

Užitím metody čtverců pak obdržíme

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Tato nerovnost je vždy splněna, neboť na její levé straně vystupuje součet tří nezáporných čísel. □

Na závěr této kapitoly zfomulujme další velice významnou nerovnost, která nachází své velké uplatnění nejen v matematice, ale i fyzice. Jedná se o známou Cauchyovu nerovnost (důkaz viz [5, str. 111]):

**Cauchyova nerovnost**
Pro libovolné dvě $n$-tice reálných čísel $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ platí nerovnost

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2). \tag{14}$$

Rovnost nastane jen tehdy, je-li $u_k = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ nebo existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $v_k = tu_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

# Kapitola 2

# Řešené příklady

V této kapitole se budeme zabývat dokazováním algebraických a geometrických nerovností, které jsou rozděleny do tří kategorií L, S a T podle obtížnosti, podobnosti zadání či řešení. Toto označení je odvozeno od slov lehčí, středně obtížné a těžší. Posouzení obtížnosti každé úlohy je velice subjektivním názorem, proto navržené rozdělení úloh do tří skupin je nutno brát pouze orientačně.

## 2.1 Kategorie L

**Úloha 1:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

**Řešení:** Trojím užitím AG–nerovnosti obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{bc} + b + c &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a, \\ \frac{b^3}{ca} + c + a &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b, \\ \frac{c^3}{ab} + a + b &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2\left(a + b + c\right) \geq 3\left(a + b + c\right).$$

Odečtením čísla $2(a+b+c)$ dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b = c$. [13]

**Úloha 2:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

**Řešení:** Sečtením následujících tří AG–nerovností

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}=3ab,$$
$$\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a}\cdot ca}=3bc,$$
$$\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{b}\cdot ab}=3ca$$

obdržíme

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+(ab+bc+ca)\geq 3\,(ab+bc+ca)\,.$$

Odečtením čísla $ab+bc+ca$ a následným dělením dvěma vychází dokazovaná nerovnost, přitom rovnost tu nastane, právě když $a=b=c$. [13]

**Úloha 3:** *Pro libovolná kladná čísla $u,v,w$ dokažte nerovnost*

$$\left(\frac{u}{w}\right)^3+\left(\frac{v}{u}\right)^3+\left(\frac{w}{v}\right)^3\geq\frac{uv}{w^2}+\frac{vw}{u^2}+\frac{wu}{v^2}.$$

**Řešení:** Označme $a=\frac{uv}{w^2}, b=\frac{vw}{u^2}$ a $c=\frac{wu}{v^2}$, potom platí rovnost $abc=1$ a dokazovanou nerovnost lze zapsat ve tvaru:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c.$$

Sečtením následujících tří AG–nerovností pro trojice čísel

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=3a,\quad \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}=3b,\quad \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=3c$$

dostáváme

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3\,(a+b+c)\,.$$

Odtud dělením číslem 3 dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $u=v=w$. [12]

**Úloha 4:** *Pro libovolná kladná čísla $a,b,c$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}>\frac{5}{2}.$$

**Řešení:** Užitím AG–nerovnosti na upravenou levou stranu nerovnosti dostáváme

$$\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}=\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\geq$$
$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)^3}=\frac{6}{\sqrt[6]{108}}.$$

Podle AG–nerovnosti pro šestici čísel dostáváme

$$\frac{6}{\sqrt[6]{108}} = \frac{6}{\sqrt[6]{3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}} > \frac{6}{\frac{14}{6}} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7} > \frac{5}{2}.$$

Tím je důkaz hotov. [13]

**Úloha 5:** *Pro přirozené číslo $n$ a kladné číslo $a$ dokažte, že platí*

$$(1+a)^{n+1} \geq \frac{a(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

**Řešení:** Užitím AG–nerovnosti na $n+1$ čísel $a, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}$ dostáváme

$$a \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \leq \left(\frac{a+1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Vynásobením kladným číslem $(n+1)^{n+1}$ obdržíme požadované. Rovnost nastane, právě když $a = \frac{1}{n}$. [12]

**Úloha 6:** *Pokud víte, že všechny kořeny polynomu $x^6 - 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + 1$ v oboru komplexních čísel jsou kladná reálná čísla, najděte $a, b, c, d$.*

**Řešení:** Označme (kladné) kořeny zadaného polynomu $x_1, x_2, \dots, x_6$ a zapišme ho ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_6) = x^6 - 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + 1.$$

Roznásobením činitelů a porovnáním koeficientů u $x^5$ a absolutního členu se zadaným polynomem dostáváme

$$-x_1 - x_2 - \cdots - x_6 = -6 \qquad a \qquad x_1x_2\dots x_6 = 1.$$

To znamená, že jak aritmetický průměr kořenů, tak jejich součin se rovnají jedné. Užitím AG–nerovnosti dostáváme

$$1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_6}{6} \geq \sqrt[6]{x_1x_2\dots x_6} = 1$$

Vypsaná nerovnost tedy platí jako rovnost, což nastane pouze v případě, kdy $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 1$. Zadaný polynom má tedy jeden šestinásobný kořen. Užitím například binomické věty dopočítáme zbylé koeficienty:

$$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

Hodnoty hledaných koeficientů jsou $a = 15, b = -20, c = 15$ a $d = -6$. [8]

**Úloha 7:** *Pokud polynom $f$ stupně $n$ má pouze reálné kořeny, nezáporné koeficienty a jeho první i poslední koeficient je roven jedné, potom platí $f(2) \geq 3^n$, dokažte.*

**Řešení:** Protože všechny koeficienty polynomu $f$ jsou nezáporné a alespoň dva dokonce kladné, musí platit $f(x) > 0$ pro všechna $x \geq 0$. Proto každý kořen $f$ bude záporný, označme je $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$. Zapišme nyní daný polynom $f$ ve tvaru součinu kořenových činitelů, tedy $f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$ a dosaďme za $x = 0$ a $x = 2$:

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= a_1 a_2 \dots a_n, \\ f(2) &= (2 + a_1)(2 + a_2) \dots (2 + a_3). \end{aligned}$$

Součin kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je tedy roven 1. Roznásobením závorek ve výrazu pro $f(2)$ dostaneme

$$f(2) = \sum_{k=0}^{n} \left( 2^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \right). \tag{15}$$

Pomocí AG–nerovnosti odhadneme součet $\binom{n}{k}$ součinů zdola:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \geq \binom{n}{k} \left( \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \right)^{\frac{1}{\binom{n}{k}}} = \binom{n}{k}.$$

Po dosazení tohoto odhadu do (15) dostáváme

$$f(2) \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} = 3^n.$$

Nerovnost přejde v rovnost pro polynomy tvaru $f(x) = (x + 1)^n$. [10]

**Úloha 8:** *Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 2$ platí*

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \left( \frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}.$$

**Řešení:** Užitím AG–nerovnosti na skupinu $n - 1$ kombinačních čísel dostáváme

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \leq 1 \cdot 1 \cdot \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{n - 1} \right)^{n-1} = \left( \frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $n = 3$. [8]

**Úloha 9:** *Rozhodněte, zda existuje posloupnost kladných reálných čísel $a_n$ taková, že obě řady $\sum a_n$ a $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ jsou konvergentní.*

**Řešení:**
Předpokládejme, že řady $\sum a_n$ a $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ jsou konvergentní pro nějakou posloupnost kladných čísel $a_n$. Potom i řada $\sum \left( a_n + \frac{1}{n^2 a_n} \right)$ je konvergentní. Užitím AG–nerovnosti ke každému jejímu členu obdržíme $\sum \left( a_n + \frac{1}{n^2 a_n} \right) \geq 2 \sum \frac{1}{n}$. Tato známá (harmonická) řada

je však divergentní, což je spor. [4]

V další části textu se budeme zabývat tzv. Nesbittovou nerovností, která je speciálním případem Shapirovy nerovnosti. V matematické literatuře lze nalézt mnoho různých důkazů Nesbittovy nerovnosti, například v [2] jich nalezneme 25. Pro zajímavost uvedeme tři různé postupy, které jsou všechny založeny na užití AG–nerovnosti, a na závěr ukážeme jednu úlohu na aplikaci Nesbittovy nerovnosti.

**Úloha 10:** *Dokažte pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ Nesbittovu nerovnost*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

**Řešení 1:** Označme

$$\begin{aligned}L&=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\\ A&=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},\\ B&=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.\end{aligned}$$

Dvojím užitím AG–nerovnosti, poprvé na součet $L+A$, podruhé na součet $L+B$, a sečtením $A+B$ dostáváme

$$\begin{aligned}L+A&=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3,\\ L+B&=\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=3,\\ A+B&=\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3.\end{aligned}$$

Ze součtu prvních dvou nerovností vyplývá $6\leq(L+A)+(L+B)=2L+(A+B)=$ $=2L+3$, neboli $L\geq\frac{3}{2}$, což jsme chtěli dokázat. Rovnost nastane, jen když $a=b=c$. [13]

**Řešení 2:** Vynásobíme obě strany dokazované nerovnosti dvěma a přičteme jedničku ke každému zlomku na levé straně:

$$\begin{gathered}\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{2b+c+a}{c+a}+\frac{2c+a+b}{a+b}\geq 3+3,\\ \frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{c+b}{a+b}\geq 6.\end{gathered}$$

To je však AG–nerovnost pro šestici čísel, neboť součin 6 zlomků z levé strany je roven 1. [2]

**Řešení 3:** Podle AG–nerovnosti platí

$$\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{(a+a)(b+c)(b+c)}}. \tag{16}$$

Opět pomocí AG–nerovnosti odhadneme shora součin tří čísel pod odmocninou, tedy

$$(a+a)(b+c)(b+c) \leq \left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3.$$

Odtud a z (16) plyne

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{1}{2} \geq \frac{9a}{2(a+b+c)}.$$

Stejným způsobem odvodíme nerovnosti

$$\frac{2b}{c+a} + \frac{1}{2} \geq \frac{9b}{2(a+b+c)} \qquad \text{a} \qquad \frac{2c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9c}{2(a+b+c)}.$$

Sečtením a následnou úpravou obdržíme

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \frac{3}{2} \geq \frac{9(a+b+c)}{2(a+b+c)},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

což jsme chtěli dokázat. [2]

**Úloha 11:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součet je roven jedné. Dokažte, že platí*

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

**Řešení:** Protože $a+b+c=1$, je nerovnost

$$\frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2} + \frac{b(a+b+c)}{(c+a)^2} + \frac{c(a+b+c)}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$$

ekvivalentní se zadanou nerovností. Označíme-li levou stranu jako $L$, pak platí

$$L = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right). \tag{17}$$

Dosazením Cauchyovy nerovnosti

$$(1+1+1)\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right) \geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^2$$

do trojnásobku rovnosti (17) dostáváme

$$3L \geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Výrazy v posledních dvou závorkách jsou jeden a týž součet, který odhadneme zdola pomocí Nesbittovy nerovnosti:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Dohromady obdržíme

$$3L \geq \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2+3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}=\frac{27}{4}.$$

Dělením číslem 3 vychází dokazovaná nerovnost. Rovnost tu nastane právě tehdy, když $a=b=c=\frac{1}{3}$. [13]

## 2.2 Kategorie S

**Úloha 12:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

**Řešení:** Označíme-li levou stranu jako $L$, pak platí

$$L^2 = \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2). \tag{18}$$

Trojím užitím AG–nerovnosti pro dvě čísla dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} &\geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}} = 2b^2,\\
\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} &\geq 2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2a^2}{b^2}} = 2c^2,\\
\frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} &\geq 2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2}} = 2a^2.
\end{aligned}$$

Porovnání součtů levých a pravých stran vede k nerovnosti

$$2\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}\right) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

kterou po dělení dvěma dosadíme do rovnosti (18):

$$L^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

To je však dokazovaná nerovnost, neboť $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Rovnost nastane, právě když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 13:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $a + b + c = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Řešení:** Trojím užitím AG–nerovnosti na trojice čísel dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{a+b}{8} \cdot \frac{a+c}{8}} = \frac{3a}{4},\\
\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} \cdot \frac{b+c}{8} \cdot \frac{b+a}{8}} = \frac{3b}{4},\\
\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \cdot \frac{c+a}{8} \cdot \frac{c+b}{8}} = \frac{3c}{4}.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností obdržíme

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{4(a+b+c)}{8} \geq \frac{3(a+b+c)}{4},$$

kde po převedení čísla $\frac{4}{8}(a+b+c)$ na pravou stranu a užitím předpokladu $a+b+c=3$ vychází požadovaná nerovnost. Rovnost nastane pouze tehdy, když $a=b=c=1$. [13]

**Úloha 14:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla taková, že $a+b+c=3$. Ukažte, že platí*

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq 1.$$

**Řešení:** Trojím užitím AG–nerovnosti pro trojice čísel dostaneme

$$\frac{9a^3}{b(2c+a)} + 3b + (2c+a) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9a^3}{b(2c+a)} \cdot 3b \cdot (2c+a)} = 9a,$$
$$\frac{9b^3}{c(2a+b)} + 3c + (2a+b) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9b^3}{c(2a+b)} \cdot 3c \cdot (2a+b)} = 9b,$$
$$\frac{9c^3}{a(2b+c)} + 3a + (2b+c) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9c^3}{a(2b+c)} \cdot 3a \cdot (2b+c)} = 9c.$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$9\left(\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)}\right) + 6(a+b+c) \geq 9(a+b+c).$$

Odečtením čísla $6(a+b+c)$ a následným dělením číslem tři obdržíme

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

To je však dokazovaná nerovnost, neboť $a+b+c=3$. Rovnost nastane právě tehdy, když $a=b=c=1$. [13]

**Úloha 15:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

**Řešení:** Nejprve pro libovolná kladná čísla $x, y$ dokažme odhad $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, který využijeme v hlavní části důkazu. Podle AG–nerovnosti pro trojice čísel platí

$$x^3+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3x^2y, \qquad x^3+y^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy^2.$$

Sečtením nerovností a následným dělením číslem tři docházíme k závěru, že zmíněná nerovnost je platná (rovnost v ní zřejmě nastane, jen když $x=y$).

Pomocí této nerovnosti odhadneme zdola jmenovatele všech tří zlomků zadané nerovnosti. Dostaneme tak jejich horní odhady:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3+b^3+abc} &\leq \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)},\\
\frac{1}{b^3+c^3+abc} &\leq \frac{1}{bc(b+c)+abc} = \frac{1}{bc(a+b+c)} = \frac{a}{abc(a+b+c)},\\
\frac{1}{c^3+a^3+abc} &\leq \frac{1}{ca(c+a)+abc} = \frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{b}{abc(a+b+c)}.
\end{aligned}$$

Jejich sečtením vychází

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c$. [13]

**Úloha 16:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $abc = 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

**Řešení:** Nejprve odhadneme zdola výraz $x^5 + y^5$ pomocí AG–nerovnosti pro všechna kladná čísla $x, y$:

$$\begin{aligned}
x^5+y^5 = \frac{1}{5}\left((3\cdot x^5+2\cdot y^5)+(2\cdot x^5+3\cdot y^5)\right) \geq \frac{1}{5}\left(5\sqrt[5]{x^{15}y^{10}}+5\sqrt[5]{x^{10}y^{15}}\right) = \\
= x^3y^2+x^2y^3 = x^2y^2(x+y).
\end{aligned}$$

Užitím předchozího odhadu a s ohledem na podmínku $abc = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{a^5+b^5+ab} &\leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c},\\
\frac{bc}{b^5+c^5+bc} &\leq \frac{bc}{b^2c^2(b+c)+bc} = \frac{1}{bc(b+c)+1} = \frac{abc}{bc(b+c)+abc} = \frac{a}{a+b+c},\\
\frac{ca}{c^5+a^5+ca} &\leq \frac{ca}{c^2a^2(c+a)+ca} = \frac{1}{ca(c+a)+1} = \frac{abc}{ca(c+a)+abc} = \frac{b}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Sečtením nerovností dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 17:** *Nechť $a, b, c$ jsou reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

**Řešení:** S ohledem na cykličnost předpokládejme $a = \max[a, b, c]$. Uvažme AG–nerovnost pro trojici čísel:

$$1 = \frac{(1+b+c)+(1-b)+(1-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(1+b+c)(1-b)(1-c)}.$$

Umocněním a následným násobením nezáporným číslem $\frac{1-a}{1+b+c}$ dostáváme

$$\frac{1-a}{1+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c). \tag{19}$$

Z podmínky $a = \max[a, b, c]$ plynou následující odhady:

$$\frac{b}{1+b+c} \geq \frac{b}{1+a+c}, \qquad \frac{c}{1+b+c} \geq \frac{c}{1+b+a}. \tag{20}$$

Dosazením (19) a (20) do rovnosti

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} + \frac{1-a}{1+b+c} = 1$$

dostáváme potřebné. Rovnost nastane, právě když $a = b = c = 0$ nebo $a = b = c = 1$. [12]

**Úloha 18:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, pro která platí $a^2+b^2+c^2 = 1$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{1}{3}.$$

**Řešení:** Sečtením následujících tří AG–nerovností

$$\begin{aligned}
\frac{9a^3}{b+2c} + a(b+2c) &\geq 2\sqrt{\frac{9a^3}{b+2c} \cdot a(b+2c)} = 6a^2,\\
\frac{9b^3}{c+2a} + b(c+2a) &\geq 2\sqrt{\frac{9b^3}{c+2a} \cdot b(c+2a)} = 6b^2,\\
\frac{9c^3}{a+2b} + c(a+2b) &\geq 2\sqrt{\frac{9c^3}{a+2b} \cdot c(a+2b)} = 6c^2
\end{aligned}$$

obdržíme odhad

$$\frac{9a^3}{b+2c} + \frac{9b^3}{c+2a} + \frac{9c^3}{a+2b} + 3(ab+bc+ca) \geq 6(a^2+b^2+c^2).$$

Po dělení číslem 3 a následným převedením čísla $ab+bc+ca$ na pravou stranu dostaneme

$$3\left(\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}\right) \geq 2(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca).$$

Nyní na pravé straně využijeme nerovnosti (13) z předchozí kapitoly a získáme tak odhad

$$3\left(\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}\right) \geq a^2+b^2+c^2,$$

odkud po dělením číslem 3 a dosazením $a^2+b^2+c^2 = 1$ dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. [13]

**Úloha 19:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin je roven jedné. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Řešení:** Užijeme třikrát AG–nerovnost pro trojici čísel:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{1+b}{8}\cdot\frac{1+c}{8}}=\frac{3a}{4},$$
$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}\cdot\frac{1+c}{8}\cdot\frac{1+a}{8}}=\frac{3b}{4},$$
$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\cdot\frac{1+a}{8}\cdot\frac{1+b}{8}}=\frac{3c}{4}.$$

Sečtením těchto nerovností a dalšími úpravami dostaneme

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{6+2(a+b+c)}{8}\geq\frac{3(a+b+c)}{4},$$
$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}.$$

Na pravou stranu nerovnosti opět uplatníme AG–nerovnost a předpoklad $abc=1$:

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Nerovnost přejde v rovnost právě tehdy, když $a=b=c=1$. [13]

**Úloha 20:** *Součin kladných čísel $a,b,c$ je roven 1, dokažte nerovnost*

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1}\leq 1.$$

**Řešení:** Nejprve označíme levou stranu dokazované nerovnosti jako $L$. Následně užitím AG–nerovnosti na upravený jmenovatel prvního sčítance dostáváme

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}=\frac{2}{a^2+b^2+2a+2}\leq\frac{2}{2\sqrt{a^2b^2}+2(a+1)}=\frac{1}{ab+a+1}.$$

Stejný postup použijeme na zbylé dva sčítance:

$$\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}\leq\frac{1}{bc+b+1},\qquad\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1}\leq\frac{1}{ca+c+1}.$$

Sečtením předchozích tří nerovností obdržíme

$$L\leq\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+a+1}.$$

Položme $x=\sqrt[3]{\frac{a}{c}}, y=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, z=\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, pak platí $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ a

$$L\leq\frac{yz}{xy+yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz+zx}+\frac{xy}{xy+yz+zx}.$$

Pravá strana, jak je vidět, se rovná 1, proto platí $L \leq 1$. Rovnost nastane jen tehdy, když $a = b = c = 1$. [9]

**Úloha 21:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

**Řešení:** Obě strany nerovnosti vynásobíme číslem $1 + abc$ a následně k nim přičteme 3, pak platí

$$\left(\frac{1+abc}{a(1+b)} + 1\right) + \left(\frac{1+abc}{b(1+c)} + 1\right) + \left(\frac{1+abc}{c(1+a)} + 1\right) \geq 6.$$

Užitím algebraických úprav na levou stranu nerovnosti dostáváme

$$\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)} + \frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)} + \frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)} \geq 6,$$

neboli

$$\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{ab(1+c)}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{bc(1+a)}{b(1+c)} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{ca(1+b)}{c(1+a)} \geq 6.$$

To je však AG–nerovnost pro šestici čísel, tím je důkaz u konce. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = 1$. [9]

**Úloha 22:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin nepřevyšuje jejich součet. Dokažte, že platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

**Řešení:** Výraz $-(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$, jak je vidět, je vždy menší nebo roven nule. Užitím algebraických úprav dostáváme nerovnost[1]

$$(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) \leq 0.$$

Odtud a z předpokladu $a + b + c \geq abc$ vyplývá

$$\frac{(abc)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2. \tag{21}$$

Dále podle AG–nerovnosti platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Z toho po umocnění na třetí obdržíme nerovnost

$$3^3(abc)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)^3,$$

z které po vynásobení s nerovností (21) vyplývá

$$3^2(abc)^4 \leq (a^2+b^2+c^2)^4.$$

[1] Jedná se o Cauchyovu nerovnost (14) pro $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$ a $v_1 = v_2 = v_3 = 1$.

Tato nerovnost je však ekvivalentní se zadanou nerovností. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = \sqrt{3}$. [1]

**Úloha 23:** *Nechť $a, b, c$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet se rovná 3. Dokažte nerovnost*

$$a\sqrt{1+b^3} + b\sqrt{1+c^3} + c\sqrt{1+a^3} < 5.$$

**Řešení:** Podle AG–nerovnosti pro dvojici kladných čísel $1 + b, 1 - b + b^2$ platí

$$a\sqrt{1+b^3} = a\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)} \leq a\sqrt{\left(\frac{2+b^2}{2}\right)^2} = a + \frac{ab^2}{2},$$

přitom rovnost nastane, je-li $a = 0$ nebo $1 + b = 1 - b + b^2$, tj. $b \in \{0, 2\}$. Analogickým postupem obdržíme

$$b\sqrt{1+c^3} \leq b + \frac{bc^2}{2}, \qquad c\sqrt{1+a^3} \leq c + \frac{ca^2}{2}.$$

Sečtením všech tří nerovností dostáváme

$$a\sqrt{1+b^3} + b\sqrt{1+c^3} + c\sqrt{1+a^3} \leq (a+b+c) + \frac{1}{2}(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

Protože však rovnost nastat nemůže (součet $a + b + c = 3$ nelze z čísel $a, b, c \in \{0, 2\}$ sestavit), stačí nám dokázat platnost nerovnosti $ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 4$. S ohledem na cykličnost předpokládejme, že $b$ je z čísel $a, b, c$ druhé největší. Pak platí nerovnost $a(b-a)(b-c) \leq 0$. Odtud roznásobením získáme odhad $ab^2 + ca^2 \leq abc + a^2b$. Dohromady dostáváme

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq abc + a^2b + bc^2 = b(a^2 + 2ac + c^2) - abc \leq b(a+c)^2.$$

Pomocí AG–nerovnosti pro trojice čísel odhadneme shora výraz $b(a + c)^2$:

$$b(a+c)^2 = 4 \cdot b \cdot \left(\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2}\right) \leq 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 4.$$

Tím je důkaz hotov. [11]

**Úloha 24:** *Součet nezáporných čísel $a, b, c, d$ je roven 3. Dokažte, že platí*

$$ab(b+c) + bc(c+d) + cd(d+a) + da(a+b) \leq 4.$$

**Řešení:** Ekvivalentně upravujme levou stranu $L$ zadané nerovnosti:

$$\begin{aligned} L &= (b \cdot ab + a \cdot bc) + (c \cdot bc + b \cdot cd) + (d \cdot cd + c \cdot da) + (a \cdot da + d \cdot ab) = \\ &= (a+c)(bc+da) + (b+d)(ab+cd) = (a+c)((a+c)(b+d) - (ab+cd)) + \\ &+ (b+d)(ab+cd) = (a+c)^2(b+d) + (ab+cd)(b+d-a-c). \end{aligned}$$

Díky cykličnosti zadání předpokládejme $b+d \leq a+c$, pak platí $L \leq (a+c)^2(b+d)$. Podle AG–nerovnosti pro trojici $(a+c), (a+c), (2b+2d)$ a užitím předpokladu $a+b+c+d=3$ dostáváme

$$2L \leq (a+c)(a+c)(2b+2d) \leq \left(\frac{2(a+b+c+d)}{3}\right)^3 = 8.$$

Dělením číslem 2 obdržíme požadované. Rovnost v dokazované nerovnosti nastane, právě když pro čísla $a, b, c, d$ platí, že jsou cyklickou permutací hodnot $1, 2, 0, 0$. [11]

**Úloha 25:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c, d$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{c^2+d^2+a^2} + \frac{c}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}.$$

**Řešení:** S ohledem na homogennost předpokládejme $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, potom daná nerovnost přejde do tvaru:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{22}$$

Užitím AG–nerovnosti na trojici kladných čísel $2a^2, 1-a^2$ a $1-a^2$ dostáváme

$$2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leq \left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Odmocněním a následným užitím ekvivalentních úprav vychází

$$\frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

Sečtením poslední nerovnosti s dalšími třemi analogickými nerovnostmi pro proměnné $b, c, d$ obdržíme

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

Ostrá nerovnost (22) tak bude dokázána, když vysvětlíme, proč je v poslední nerovnosti vyloučena rovnost. Kdyby nastala, musely by současně platit čtyři rovnosti $2a^2 = 1 - a^2, 2b^2 = 1-b^2, 2c^2 = 1-c^2$, a $2d^2 = 1-d^2$, neboli $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \frac{1}{3}$, což však odporuje podmínce $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. [11]

**Úloha 26:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

**Řešení:** Roznásobením závorek levé strany nerovnosti dostáváme

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Stačí tedy dokázat, že platí

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geq\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{23}$$

Uvažme nyní šest AG–nerovností pro trojice čísel:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}},\qquad \frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},$$
$$\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},\qquad \frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}},$$
$$\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}},\qquad \frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Jejich součet nám již přímo dává (23). Rovnost nastane, jen když $a=b=c$. [13]

**Úloha 27:** *Nechť $a,b,c$ jsou kladná čísla splňující $ab+bc+ca=1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\geq\frac{9}{2}.$$

**Řešení:** S využitím předpokladu $ab+bc+ca=1$ upravujme zadanou nerovnost:

$$\frac{c(a+b)+ab}{a(a+b)}+\frac{a(b+c)+bc}{b(b+c)}+\frac{b(c+a)+ca}{c(c+a)}\geq\frac{9}{2},$$
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2},$$
$$\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)-3\geq\frac{9}{2}.$$

Označme levou stranu poslední nerovnosti jako $L$. Dvojím užitím AG–nerovnosti a dalšími úpravami dostáváme:

$$L=\left(\frac{a+b}{4b}+\frac{b+c}{4c}+\frac{c+a}{4a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)+$$
$$+\frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\right)-3\geq 6\cdot\sqrt[6]{\frac{a+b}{4b}\cdot\frac{b+c}{4c}\cdot\frac{c+a}{4a}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{c+a}}+$$
$$+\frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}+3\right)-3=6\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{4^3}}+\frac{3}{4}(3+3)-3=\frac{9}{2}.$$

Nerovnost přejde v rovnost, právě když $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. [13]

**Úloha 28:** *Pro libovolná kladná čísla $a,b,c$ dokažte, že platí*

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

**Řešení:** Uvažme následující tři AG–nerovnosti pro dvojice čísel:

$$ca+ab\geq 2a\sqrt{cb},\qquad ab+bc\geq 2b\sqrt{ac},\qquad bc+ca\geq 2c\sqrt{ba}.$$

Porovnání součtů levých a pravých stran vede k nerovnosti

$$2(ab + bc + ca) \geq 2(a\sqrt{cb} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ba}). \tag{24}$$

Opět užijeme třikrát AG–nerovnost, tentokrát pro čtveřice čísel:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4a\sqrt{bc}, \\ b^2 + b^2 + c^2 + a^2 &\geq 4b\sqrt{ca}, \\ c^2 + c^2 + a^2 + b^2 &\geq 4c\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Sečtením předchozích tří nerovností a následným dělením číslem čtyři obdržíme

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

Sečteme-li tuto nerovnost s nerovností (24), dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}).$$

Dělením číslem 3 vychází požadovaná nerovnost, neboť levá strana je rovna $(a + b + c)^2$. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$. [1]

**Úloha 29:** *Dokažte, že pro libovolná kladná $a, b$ platí*

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{2}{a^3 + b^3} \geq \frac{24}{(a + b)^3}.$$

**Řešení:** Užitím AG–nerovnosti na levou stranu zadané nerovnosti dostaneme

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{2}{a^3 + b^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a^3b^3(a^3 + b^3)}} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{a^3b^3(a^2 - ab + b^2)(a + b)}}.$$

Výraz $a^3b^3(a^2-ab+b^2)$ z posledního jmenovatele odhadneme shora pomocí AG–nerovnosti pro čtveřici čísel:

$$a^3b^3(a^2 - ab + b^2) \leq \left(\frac{ab + ab + ab + (a^2 - ab + b^2)}{4}\right)^4 = \frac{(a + b)^8}{2^8}.$$

Z obou předchozích nerovností obdržíme odhad

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{2}{a^3 + b^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2^9}{(a + b)^9}} = \frac{24}{(a + b)^3}.$$

Dokazovaná nerovnost přejde v rovnost, jen když $a = b$. [12]

**Úloha 30:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b$ dokažte nerovnost*

$$\sqrt[3]{2(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

**Řešení:** Nechť $x, y$ jsou kladná čísla. Dvojím užitím AG–nerovnosti pro trojice čísel dostáváme

$$x^6 + x^3y^3 + x^3y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^{12}y^6} = 3x^4y^2, \qquad y^6 + x^3y^3 + x^3y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^{12}} = 3x^2y^4.$$

Přičtením $x^6 + y^6$ k oběma stranám nerovnosti, kterou získáme sečtením předchozích dvou nerovností, obdržíme

$$2(x^6 + y^6 + 2x^3y^3) \geq x^6 + y^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4.$$

Nyní tuto nerovnost ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} 2(x^3+y^3)^2 &\geq (x^2+y^2)^3, \\ \sqrt[3]{2(x^3+y^3)^2} &\geq x^2+y^2, \qquad / : xy > 0 \\ \sqrt[3]{2(x^3+y^3)\left(\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}\right)} &\geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \\ \sqrt[3]{2(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)} &\geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Volbou $x = \sqrt[3]{a}$ a $y = \sqrt[3]{b}$ dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b$. [1]

**Úloha 31:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin je roven jedné, platí*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Řešení 1:** Užitím podmínky $abc = 1$ na levou stranu dokazované nerovnosti dostáváme

$$\frac{abc}{a^3(b+c)} + \frac{abc}{b^3(c+a)} + \frac{abc}{c^3(a+b)},$$

kde pomocí úprav zlomků obdržíme

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Pro přehlednost položme $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ a $z = \frac{1}{c}$, pak platí $xyz = 1$ a máme tedy dokázat

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{25}$$

Z AG–nerovnosti pro trojici čísel vyplývá

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$$

Abychom dokázali zadanou nerovnost, stačí proto dokázat, že platí nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

K tomu uvažme následující tři AG–nerovnosti (čísla $x, y, z$ jsou kladná):

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x,$$
$$\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = y,$$
$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = z.$$

Sečtením těchto nerovností obdržíme

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{1}{2}(x+y+z) \geq x+y+z.$$

Odečtením čísla $\frac{1}{2}(x+y+z)$ dostáváme potřebné. Rovnost tu nastane právě tehdy, když $a = b = c = 1$. [13]

**Řešení 2:** Využijme předchozího řešení a dokažme jiným způsobem nerovnost (25), tj. pro kladná čísla $x, y, z$ platí $xyz = 1$ a máme tedy dokázat

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Užitím Cauchyovy nerovnosti na trojice čísel

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \text{ a } \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{x+y}\right)$$

dostaneme

$$(x+y+z)^2 \leq \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{y^2}{x+y}\right) \cdot 2(x+y+z),$$

neboli

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{y^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Užitím AG–nerovnosti na trojici $x, y, z$ a s ohledem na podmínku $xyz = 1$ dostáváme

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{y^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c = 1$. [4]

**Úloha 32:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$. Dokažte, že platí*

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + abc \leq \frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

**Řešení:** Dokazovaná nerovnost je součtem následujících čtyř AG–nerovností

$$\frac{bc}{a^2} = \sqrt[3]{\frac{b^7}{a^2c^2} \cdot \frac{c^7}{a^2b^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{b^7}{a^2c^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2}\right),$$
$$\frac{ca}{b^2} = \sqrt[3]{\frac{c^7}{b^2a^2} \cdot \frac{a^7}{b^2c^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{c^7}{b^2a^2} + \frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2}\right),$$
$$\frac{ab}{c^2} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2} \cdot \frac{b^7}{c^2a^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{a^7}{c^2b^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2}\right),$$
$$abc = \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2} \cdot \frac{b^7}{c^2a^2} \cdot \frac{c^7}{a^2b^2}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{a^7}{c^2b^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2}\right).$$

Nerovnost přejde v rovnost, právě když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 33:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a + b + c = 3abc$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \ge 3.$$

**Řešení:** Vydělíme-li podmínku $a + b + c = 3abc$ nenulovým součinem $abc$, dostaneme

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 3.$$

Označme levou, resp. pravou stranu zadané nerovnosti jako $L$, resp. $P$. Trojím užitím AG–nerovnosti pro trojice čísel a ekvivalentních úprav dostáváme

$$2L + 3 = 2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + 3 = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + 1\right) + \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 1\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + 1\right) \ge 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 9 = 2P + 3.$$

Odtud již plyne $L \ge P$. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 34:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $a\sqrt{\frac{b}{c}} + b\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{a}{b}} = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \ge 3.$$

**Řešení:** Sečtením tří AG–nerovností pro šestice čísel

$$\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + 4 \cdot 1 \ge 6\sqrt[6]{\frac{a^6}{b^3} \cdot \frac{b^6}{c^3} \cdot 1^4} = 6a\sqrt{\frac{b}{c}},$$
$$\frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} + 4 \cdot 1 \ge 6\sqrt[6]{\frac{b^6}{c^3} \cdot \frac{c^6}{a^3} \cdot 1^4} = 6b\sqrt{\frac{c}{a}},$$
$$\frac{c^6}{a^3} + \frac{a^6}{b^3} + 4 \cdot 1 \ge 6\sqrt[6]{\frac{c^6}{a^3} \cdot \frac{a^6}{b^3} \cdot 1^4} = 6c\sqrt{\frac{a}{b}}$$

dostaneme

$$2\left(\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\right)\geq 6\left(a\sqrt{\frac{b}{c}}+b\sqrt{\frac{c}{a}}+c\sqrt{\frac{a}{b}}\right)-12=18-12=6.$$

Dělením číslem 2 dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a=b=c=1$. [13]

**Úloha 35:** *Pro kladná čísla $a,b,c$ splňující podmínku $ab+bc+cd+da=1$ dokažte*

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}.$$

**Řešení:** Čtverným užitím AG–nerovnosti pro čtveřice čísel dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{36a^3}{b+c+d}+2(b+c+d)+6a+3&\geq 4\sqrt[4]{\frac{36a^3}{b+c+d}\cdot 2(b+c+d)\cdot 6a\cdot 3}=24a,\\
\frac{36b^3}{c+d+a}+2(c+d+a)+6b+3&\geq 4\sqrt[4]{\frac{36b^3}{c+d+a}\cdot 2(c+d+a)\cdot 6b\cdot 3}=24b,\\
\frac{36c^3}{d+a+b}+2(d+a+b)+6c+3&\geq 4\sqrt[4]{\frac{36c^3}{d+a+b}\cdot 2(d+a+b)\cdot 6c\cdot 3}=24c,\\
\frac{36d^3}{a+b+c}+2(a+b+c)+6d+3&\geq 4\sqrt[4]{\frac{36d^3}{a+b+c}\cdot 2(a+b+c)\cdot 6d\cdot 3}=24d.
\end{aligned}$$

Sečtením nerovností obdržíme

$$36\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\right)\geq 12(a+b+c+d)-12. \qquad (26)$$

Podle AG–nerovnosti a podmínky ze zadání platí

$$(a+b)+(c+d)\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2\sqrt{ab+bc+cd+da}=2.$$

Po dosazení tohoto odhadu do pravé strany (26) obdržíme

$$36\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\right)\geq 24-12,$$

odkud po dělení číslem 36 dostaneme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane jen tehdy, když $a=b=c=d=\frac{1}{2}$. [13]

**Úloha 36:** *Nechť $a,b,c$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a+2b+3c\geq 20$. Dokažte, že platí nerovnost*

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13.$$

**Řešení:** Uvažme následující tři AG–nerovnosti:

$$a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4,\quad b+\frac{9}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{9}{b}}=6,\quad c+\frac{16}{c}\geq 2\sqrt{c\cdot\frac{16}{c}}=8.$$

Vynásobíme-li nerovnosti vhodnými čísly

$$\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right) \geq \frac{3}{4}\cdot 4 = 3, \quad \frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right) \geq \frac{1}{2}\cdot 6 = 3, \quad \frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right) \geq \frac{1}{4}\cdot 8 = 2$$

a sečteme, obdržíme

$$\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c} \geq 8. \tag{27}$$

Vydělením podmínky $a+2b+3c \geq 20$ číslem čtyři dostáváme

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4} \geq 5.$$

Sečtením předcházející nerovnosti s nerovností (27) získáme potřebné. Rovnost nastane, právě když $a=2, b=3, c=4$. [13]

**Úloha 37:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$30a+3b^2+\frac{2c^3}{9}+36\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geq 84.$$

**Řešení:** Trojím užitím AG–nerovnosti dostáváme

$$2\cdot a+\frac{b^2}{4}+2\cdot\frac{2}{ab} \geq 5\sqrt[5]{a^2\cdot\frac{b^2}{4}\cdot\left(\frac{2}{ab}\right)^2} = 5,$$

$$3\cdot\frac{b^2}{4}+2\cdot\frac{c^3}{27}+6\cdot\frac{6}{bc} \geq 11\sqrt[11]{\left(\frac{b^2}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{c^3}{27}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{bc}\right)^6} = 11,$$

$$\frac{c^3}{27}+3\cdot a+3\cdot\frac{3}{ca} \geq 7\sqrt[7]{\frac{c^3}{27}\cdot a^3\cdot\left(\frac{3}{ca}\right)^3} = 7.$$

Vynásobením nerovností po řadě čísly $9, 1$ a $4$ získáme

$$18a+\frac{9b^2}{4}+\frac{36}{ab} \geq 45, \quad \frac{3b^2}{4}+\frac{2c^3}{27}+\frac{36}{bc} \geq 11, \quad \frac{4c^3}{27}+12a+\frac{36}{ca} \geq 28.$$

Sečtením těchto nerovností obdržíme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane, právě když $a=1, b=2, c=3$. [13]

**Úloha 38:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $ac \geq 12$ a $bc \geq 8$. Dokažte nerovnost*

$$a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}.$$

**Řešení:** Uvažme následující čtyři AG–nerovnosti (první, resp. druhá nerovnost v pravém sloupci je vynásobena číslem čtyři, resp. sedm):

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{6}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{6}{ab}} = 3, \qquad 4\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{8}{bc}\right) \geq 12\sqrt[3]{\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{4}\cdot\frac{8}{bc}} = 12,$$

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{24}{abc} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{4}\cdot\frac{24}{abc}} = 4, \quad 7\left(\frac{c}{4}+\frac{a}{3}+\frac{12}{ca}\right) \geq 21\sqrt[3]{\frac{c}{4}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{12}{ca}} = 21.$$

Jejich sečtením obdržíme nerovnost

$$3(a+b+c)+\frac{6}{ab}+\frac{32}{bc}+\frac{84}{ca}+\frac{24}{abc}\geq 40,$$

z níž pro levou stranu $L$ dokazované nerovnosti platí

$$3L+\frac{26}{bc}+\frac{78}{ca}\geq 40.$$

Odtud a z podmínek $ac\geq 12$ a $bc\geq 8$ vyplývá

$$3L\geq 40-\frac{26}{8}-\frac{78}{12}=\frac{121}{4}$$

Po dělení číslem tři vychází požadovaná nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $a=3, b=2, c=4$. [13]

**Úloha 39:** *Nechť $a,b,c$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven jedné. Dokažte, že platí*

$$a^4b+b^4c+c^4a\leq\frac{4^4}{5^5}.$$

**Řešení:** S ohledem na cykličnost předpokládejme $a=\max[a,b,c]$. Potom platí následující čtyři odhady:

$$b^4c\leq a^3bc,\qquad c^4a\leq c^2a^3\leq ca^4,\qquad \frac{c}{2}\leq\frac{3c}{4}.$$

Upravujme postupně levou stranu $L$ zadané nerovnosti:

$$\begin{aligned}L&=a^4b+b^4c+\frac{c^4a}{2}+\frac{c^4a}{2}\leq a^4b+a^3bc+\frac{ca^4}{2}+\frac{c^2a^3}{2}=a^3b(a+c)+\frac{ca^3}{2}(a+c)=\\&=a^3(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)\leq a^3(a+c)\left(b+\frac{3c}{4}\right)=4^4\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a+c}{4}\cdot\left(b+\frac{3c}{4}\right).\end{aligned}$$

Podle AG–nerovnosti pro pětici čísel platí

$$\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a+c}{4}\cdot\left(b+\frac{3c}{4}\right)\leq\left(\frac{\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a+c}{4}+\left(b+\frac{3c}{4}\right)}{5}\right)^5.$$

Dohromady a s využitím předpokladu $a+b+c=1$ dostáváme

$$L\leq 4^4\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5=\frac{4^4}{5^5}.$$

Nerovnost přejde v rovnost, právě když $a=\frac{4}{5}, b=\frac{1}{5}, c=0$ nebo $a=0, b=\frac{4}{5}, c=\frac{1}{5}$ nebo $a=\frac{1}{5}, b=0, c=\frac{4}{5}$. [13]

**Úloha 40:** *Jsou dána reálná čísla $a,b,c$ splňující podmínku $0\leq a\leq b\leq c\leq 1$. Ukažte, že platí*

$$a^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(1-c)\leq\frac{108}{529}.$$

**Řešení:** Využijeme podmínky a upravíme levou stranu $L$ zadané nerovnosti:

$$L = a^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(1-c) \leq 0 + \frac{1}{2}\left(b \cdot b \cdot (2c-2b)\right) + c^2(1-c).$$

Užitím AG–nerovnosti na součin čísel $b, b, (2c-2b)$ dostáváme

$$b \cdot b \cdot (2c-2b) \leq \left(\frac{b+b+(2c-2b)}{3}\right)^3 = \frac{8c^3}{27}.$$

Odtud a z upravené levé strany požadované nerovnosti vyplývá

$$L \leq c^2\left(\frac{4c}{27} + 1 - c\right) = c^2\left(1 - \frac{23c}{27}\right) = \left(\frac{54}{23}\right)^2\left(\frac{23c}{54}\right)\left(\frac{23c}{54}\right)\left(1 - \frac{23c}{27}\right).$$

Pomocí AG–nerovnosti odhadneme shora poslední tři činitele pravé strany odvozené nerovnosti a dostaneme tak celkově požadované tvrzení:

$$L \leq \left(\frac{54}{23}\right)^2\left(\frac{\frac{23c}{54} + \frac{23c}{54} + 1 - \frac{23c}{27}}{3}\right)^3 = \left(\frac{54}{23}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{108}{529}.$$

Rovnost nastane, jen když $a = 0, b = \frac{12}{23}, c = \frac{18}{23}$. [13]

**Úloha 41:** *Nechť $x, y, z, t$ jsou reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte nerovnost*

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - xy^2 - yz^2 - zt^2 - tx^2 \leq \frac{8}{27}.$$

**Řešení:** Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $x = \max[x, y, z, t]$. Nejprve upravíme výraz na levé straně $L$ zadané nerovnosti do výhodnějšího tvaru:

$$\begin{aligned} L &= y(x^2 - z^2 + yz - xy) + t(z^2 - x^2 + xt - zt) = \\ &= y(x-z)(x+z-y) + t(z-x)(x+z-t). \end{aligned}$$

Z předpokladu $x \geq z$ a $x \geq t$ vyplývá, že $t(z-x)(x+z-t) \leq 0$, a proto $L \leq y(x-z)(x+z-y)$. Užitím AG–nerovnosti na trojici čísel $y, x-z, x+z-t$ obdržíme

$$L \leq y(x-z)(x+z-y) \leq \left(\frac{y+(x-z)+(x+z-y)}{3}\right)^3 = \frac{8x^3}{27}.$$

Dosazením $x = 1$ do zlomku na pravé straně (pro tuto hodnotu bude zřejmě největší) dostáváme požadované. Rovnost nastane, právě když pro čísla $x, y, z, t$ platí, že jsou cyklickou záměnou hodnot $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0$. [13]

**Úloha 42:** *Dokažte, že pro každá nezáporná čísla $a, b, c$, jejichž součet se rovná třem, platí*

$$\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) \leq 12.$$

**Řešení:** S ohledem na symetrii předpokládejme $a \geq b \geq c$. Potom zřejmě platí nerovnosti $0 \leq b^2 - bc + c^2 \leq b^2$ a $0 \leq c^2 - ca + a^2 \leq a^2$. Jejich vynásobením dostáváme

$$\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) \leq a^2 b^2.$$

Využijme to a odhadněme levou stranu dokazované nerovnosti:

$$L \leq a^2 b^2 \left(a^2 - ab + b^2\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \left(a^2 - ab + b^2\right). \tag{28}$$

Podle AG–nerovnosti platí

$$\frac{3ab}{2} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \left(a^2 - ab + b^2\right) \leq \left(\frac{\frac{3ab}{2} + \frac{3ab}{2} + \left(a^2 - ab + b^2\right)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)^2}{3}\right)^3.$$

Odtud, z předpokladu $a + b + c = 3$ a z (28) vyplývá

$$L \leq \frac{4}{9}\left(\frac{(a+b)^2}{3}\right)^3 \leq \frac{4}{9}\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} \cdot 3^3 = 12.$$

Rovnost tu nastane, právě když trojice $a, b, c$ je permutací trojice $0, 1, 2$. [13]

**Úloha 43:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Ukažte, že platí*

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}} \geq 2.$$

**Řešení:** Trojím užitím AG–nerovnosti a předpokladu $abc = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}} &\geq \frac{a^2 \cdot 2\sqrt{bc}}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}} = \frac{2a\sqrt{a}}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}}, \\
\frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}} &\geq \frac{b^2 \cdot 2\sqrt{ca}}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}} = \frac{2b\sqrt{b}}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}}, \\
\frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}} &\geq \frac{c^2 \cdot 2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}} = \frac{2c\sqrt{c}}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}}.
\end{aligned}$$

Označme $x = a\sqrt{a}, y = b\sqrt{b}$ a $z = c\sqrt{c}$, potom $x, y, z > 0$ a $xyz = 1$. Sečtením předcházejících nerovností dostáváme

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}} \geq \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y}. \tag{29}$$

Označme pravou stranu nerovnosti (29) jako $P$ a položme $m = y + 2z, n = z + 2x$ a $p = x + 2y$, potom platí

$$x = \frac{4n + p - 2m}{9}, \qquad y = \frac{4p + m - 2n}{9}, \qquad z = \frac{4m + n - 2p}{9}.$$

Dosadíme do právé strany nerovnosti (29) a následně upravíme

$$P = \frac{2}{9}\left(\frac{4n+p-2m}{m} + \frac{4p+m-2n}{n} + \frac{4m+n-2p}{p}\right) =$$
$$= \frac{2}{9}\left(4\left(\frac{n}{m} + \frac{m}{p} + \frac{p}{n}\right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{n} + \frac{n}{p}\right) - 6\right).$$

Dvojím užitím AG–nerovnosti na součty zlomků dostáváme

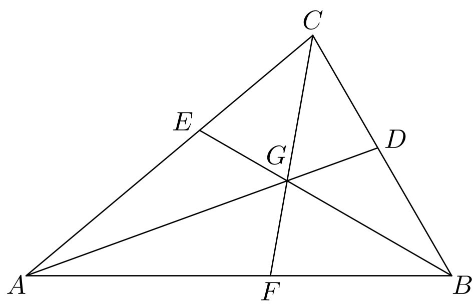
$$P \geq \frac{2}{9}\left(4 \cdot 3\sqrt[3]{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{p}{n}} + 3\sqrt[3]{\frac{p}{m} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p}} - 6\right) = \frac{2}{9}(12+3-6) = 2.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 44:** *V trojúhelníku $ABC$ jsou sestrojeny osy vnitřních úhlů $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$. Jejich průsečík označme $G$, dále označme $D$, resp. $E$, resp. $F$ průsečík osy $o_\alpha$ se stranou $BC$, resp. osy $o_\beta$ se stranou $AC$, resp. osy $o_\gamma$ se stranou $AB$. Dokažte, že platí*

$$\frac{|GA|}{|AD|} \cdot \frac{|GB|}{|BE|} \cdot \frac{|GC|}{|CF|} \leq \frac{8}{27}.$$

**Řešení:**



obr. 1

Označme $a = |BC|, b = |CA|$ a $c = |AB|$ délky stran trojúhelníku. Dále několikrát využijeme vlastnosti, že osa úhlu dělí protější stranu v poměru zbylých dvou stran trojúhelníku. Strana $BC$ délky $a$ je rozdělena osou $o_\alpha$ v poměru $b : c$ na úseky

$$|CD| = \frac{b}{b+c} \cdot a \qquad \text{a} \qquad |DB| = \frac{c}{b+c} \cdot a.$$

Osa $GC$ úhlu $ACD$ dělí stranu $AD$ v trojúhelníku $ADC$ na úseky $GA$ a $GD$ v poměru $|GA| : |GD| = |CA| : |CD|$, neboli

$$\frac{|GA|}{|GD|} = \frac{|CA|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud vyjádříme první činitel dokazované nerovnosti:

$$\frac{|GA|}{|AD|} = \frac{|GA|}{|GA|+|GD|} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Podobným způsobem vyjádříme poměry pro zbývající dva činitele

$$\frac{|GB|}{|BE|} = \frac{c+a}{a+b+c}, \qquad \frac{|GC|}{|CF|} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Užitím AG–nerovnosti na trojici kladných hodnot dostáváme

$$\frac{|GA|}{|AD|} \cdot \frac{|GB|}{|BE|} \cdot \frac{|GC|}{|CF|} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{c+a}{a+b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} \leq \left( \frac{\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Rovnost nastane, jen když trojúhelník $ABC$ je rovnostranný. [4]

**Úloha 45:** *Pro libovolný trojúhelník se stranami a,b,c a obsahem S dokažte nerovnost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

**Řešení:** Užitím Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku a AG–nerovnosti pro trojici kladných hodnot dostáváme

$$16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq (a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

přitom dotyčné tři hodnoty jsou skutečně kladné podle trojúhelníkových nerovností.

Po odmocnění obou stran nerovnosti a následným upravením čitatele odtud dostáváme

$$4S \leq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{3\sqrt{3}}.$$

Užitím odhadu (13) z předešlé kapitoly na součet $ab+bc+ca$ obdržíme

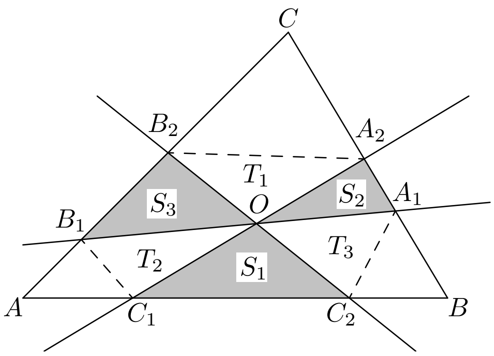
$$4S \leq \frac{a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$$

a po násobením číslem $\sqrt{3}$ vychází dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$. [4]

**Úloha 46:** *Tři přímky se protínají v bodě $O$ uvnitř trojúhelníku $ABC$ s obsahem $S$ tak, že každou stranu trojúhelníku protínají právě dvě z nich. Tyto přímky určují v trojúhelníku $ABC$ tři trojúhelníky s vrcholem $O$ s obsahy $S_1, S_2$ a $S_3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} > \frac{18}{S}.$$

**Řešení:** Nejprve spojíme koncové body základen trojúhelníků tak, abychom dostali tři nové trojúhelníky o obsazích $T_1, T_2, T_3$. Všech šest trojúhelníků dohromady tvoří šestiúhelník (viz obr. 2).




obr. 2

Vyjádřeme postupně obsahy všech šesti trojúhelníků pomocí délek dvou jejich stran a sinu jimi sevřeného úhlu:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}|C_1O| \cdot |C_2O| \cdot \sin|\sphericalangle C_1OC_2|, & T_1 &= \frac{1}{2}|A_2O| \cdot |B_2O| \cdot \sin|\sphericalangle A_2OB_2|, \\ S_2 &= \frac{1}{2}|A_1O| \cdot |A_2O| \cdot \sin|\sphericalangle A_1OA_2|, & T_2 &= \frac{1}{2}|B_1O| \cdot |C_1O| \cdot \sin|\sphericalangle B_1OC_1|, \\ S_3 &= \frac{1}{2}|B_1O| \cdot |B_2O| \cdot \sin|\sphericalangle B_1OB_2|, & T_3 &= \frac{1}{2}|C_2O| \cdot |A_1O| \cdot \sin|\sphericalangle C_2OA_1|. \end{aligned}$$

Protože úhly $C_1OC_2$ a $A_2OB_2$, resp. $A_1OA_2$ a $B_1OC_1$, resp. $B_1OB_2$ a $C_2OA_1$ jsou vrcholové úhly, platí $|\sphericalangle C_1OC_2| = |\sphericalangle A_2OB_2|$, resp. $|\sphericalangle A_1OA_2| = |\sphericalangle B_1OC_1|$, resp. $|\sphericalangle B_1OB_2| = |\sphericalangle C_2OA_1|$. Po rozepsání součinů obsahů $S_1S_2S_3$ a $T_1T_2T_3$ pomocí výše uvedených vyjádření zjistíme, že jsou složeny ze stejných činitelů, a tedy $S_1S_2S_3 = T_1T_2T_3$. Tento poznatek je důležitý pro hlavní část důkazu zadané nerovnosti.

Dvojím užitím AG–nerovnosti, nejprve na levou stranu dokazované nerovnosti, podruhé na nově vzniklý výraz, dostáváme

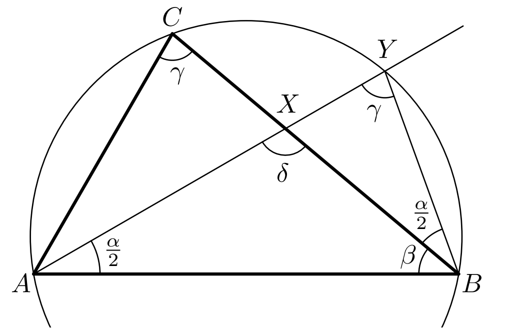
$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}} = \frac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}} \geq \frac{3 \cdot 6}{S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3} > \frac{18}{S}.$$

Důkaz je tímto hotov. [4]

**Úloha 47:** *Je dán trojúhelník $ABC$, jehož osa úhlu $BAC$ protíná stranu $BC$ v bodě $X$ a kružnici opsanou v bodě $Y$. Nechť $l_a$ je poměr délek úseček $|AX| : |AY|$. Definujme $l_b$ a $l_c$ stejným způsobem a označme $\alpha, \beta$ a $\gamma$ velikosti vnitřních úhlů $\Delta ABC$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{l_a}{\sin^2\alpha} + \frac{l_b}{\sin^2\beta} + \frac{l_c}{\sin^2\gamma} \geq 3.$$

**Řešení:** Úhly $ACB$ a $AYB$ jsou obvodové úhly příslušné oblouku $AB$, kružnice opsané proto $|\sphericalangle AYB| = \gamma$. Protože součet úhlů v trojúhelníku $ABY$ se musí rovnat přímému úhlu, platí $|\sphericalangle ABY| = \beta + \frac{\alpha}{2}$. Dále označme $\delta$ velikost úhlu $ABX$ (viz obr. 3). Z trojúhelníku $ABX$ plyne $\delta = \pi - \beta - \frac{\alpha}{2}$.




obr. 3

Pomocí sinové věty vyjádříme poměry délek stran $AX$ a $AB$ v trojúhelníku $ABX$ a délek stran $AB$ a $AY$ v trojúhelníku $ABY$:

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}, \qquad \frac{|AB|}{|AY|} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}.$$

Vynásobením předchozích dvou rovností obdržíme

$$l_a = \frac{|AX|}{|AY|} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2(\beta + \frac{\alpha}{2})},$$

neboť $\sin\delta = \sin(\pi - \beta - \frac{\alpha}{2}) = \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$. Analogickým postupem vyjádříme zbylé dva poměry:

$$l_b = \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin^2(\gamma + \frac{\beta}{2})}, \qquad l_c = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha + \frac{\gamma}{2})}.$$

Dolní odhady

$$l_a \geq \sin\beta\sin\gamma, \qquad l_b \geq \sin\gamma\sin\alpha, \qquad l_c \geq \sin\alpha\sin\beta$$

dostaneme užitím nerovnosti $\frac{1}{\sin^2 x} \geq 1$. Ta je splněna pro všechna reálná $x$, pro která je definována (v našem případě pro hodnoty $\beta + \frac{\alpha}{2}, \gamma + \frac{\beta}{2}$ a $\alpha + \frac{\gamma}{2}$). Z předcházejících odhadů a podle AG–nerovnosti pro trojici čísel vyplývá, že levá strana $L$ dokazované nerovnosti splňuje odhad

$$L \geq \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}} = 3.$$

Nerovnost přejde v rovnost, právě když trojúhelník $ABC$ je rovnostranný. [1]

**Úloha 48:** *Pro libovolný trojúhelník s délkami stran $a, b, c$, vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma$ a poloměrem $r$ kružnice vepsané dokažte nerovnost*

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geq 9r.$$

**Řešení:** Vyjádřeme čtyřmi známými způsoby obsah trojúhelníka, třikrát pomocí délek dvou stran a sinu jimi sevřeného úhlu a jednou pomocí poloměru kružnice vepsané:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \qquad S = \frac{1}{2}ac\sin\beta, \qquad S = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

Odtud vyplývá

$$\sin\gamma = \frac{2S}{ab}, \qquad \sin\alpha = \frac{2S}{bc}, \qquad \sin\beta = \frac{2S}{ac}, \qquad r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Dosazením do dokazované nerovnosti dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{2Sa}{bc} + \frac{2Sb}{ac} + \frac{2Sc}{ab} \geq \frac{18S}{a+b+c}.$$

Obě strany nerovnosti ještě vynásobíme kladnou hodnotou $\frac{a+b+c}{2S}$:

$$\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)(a+b+c) \geq 9. \tag{30}$$

Dvojím užitím AG–nerovnosti pro trojice čísel obdržíme

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{a^2b^2c^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}, \qquad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Vynásobením obou nerovností dostáváme (30), tím je i důkaz původní nerovnosti hotov. Rovnost nastane, jen když $a = b = c$. [1]

**Úloha 49:** *Nechť $a, b, c$ jsou délky stran trojúhelníka $ABC$. Sestrojme trojúhelník $A'B'C'$ s délkami stran $a' = a + \frac{b}{2}, b' = b + \frac{c}{2}, c' = c + \frac{a}{2}$. Dokažte, že pro obsahy těchto trojúhelníků platí*

$$S(\Delta A'B'C') \geq \frac{9}{4} S(\Delta ABC).$$

**Řešení:** Přesvědčeme se nejdříve, že předepsané délky $a', b', c'$ jsou skutečně délkami stran trojúhelníku. Například máme

$$a' + b' = a + \frac{b}{2} + b + \frac{c}{2} = (a+b) + \frac{b+c}{2} > c + \frac{a}{2} = c'$$

podle trojúhelníkových nerovností $a + b > c$ a $b + c > a$. Podobně lze dokázat i nerovnosti $b' + c' > a'$ a $c' + a' > b'$. Obsah trojúhelníku $ABC$ je dán vzorcem $S(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$. Položme $x = s - a, y = s - b$ a $z = s - c$, pak platí

$$a = y + z, \qquad b = z + x,$$
$$c = x + y, \qquad s = x + y + z.$$

Pro délky stran trojúhelníka $A'B'C'$ snadným výpočtem získáme vyjádření

$$a' = \frac{x + 2y + 3z}{2}, \qquad b' = \frac{3x + y + 2z}{2}, \qquad c' = \frac{2x + 3y + z}{2}.$$

Z těchto vzorců obdržíme

$$s' = \frac{a' + b' + c'}{2} = \frac{3(x+y+z)}{2}, \qquad s' - a' = \frac{2x + y}{2},$$
$$s' - b' = \frac{2y + z}{2}, \qquad s' - c' = \frac{2z + x}{2},$$

takže po dosazení do Heronova vzorce dostáváme

$$S(\Delta A'B'C') = \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')} = \sqrt{\frac{3(x+y+z)(2x+y)(2y+z)(2z+x)}{16}}.$$

Podle AG–nerovnosti pro trojici $x, x, y$ platí $2x + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y}$. Podobně dostáváme $2y + z \geq 3\sqrt[3]{y^2z}$ a $2z + x \geq 3\sqrt[3]{z^2x}$. To nás přivádí k odhadu

$$S(\Delta A'B'C') \geq \sqrt{\frac{3\cdot 27(x+y+z)xyz}{16}} = \frac{9}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

Odmocnina na pravé straně poslední nerovnosti je však vyjádření obsahu trojúhelníku $ABC$, což jsme chtěli ukázat. Rovnost nastane, právě když trojúhelník $ABC$ je rovnostranný. [1]

**Úloha 50:** *Jsou-li $a, b, c$ délky stran trojúhelníku s obvodem 3, pak platí*

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca},$$

*dokažte.*

**Řešení:** Označme $x = \sqrt{a+b-c}, y = \sqrt{b+c-a}$ a $z = \sqrt{c+a-b}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= b^2 - c^2 - a^2 + 2ca, & y^2z^2 &= c^2 - a^2 - b^2 + 2ab, \\ z^2x^2 &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc, & (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Sečtením všech čtyř rovností obdržíme

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + (a+b+c)^2 = 4(ab+bc+ca).$$

Odtud plyne, že zadanou nerovnost lze s ohledem na $a + b + c = 3$ zapsat ve tvaru

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq \frac{36}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9}.$$

Pro hodnoty $m = xy, n = yz$ a $p = zx$ tak máme dokázat

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9) \geq 36\sqrt{mnp}. \tag{31}$$

Z AG–nerovnosti pro tři a dvanáct čísel vyplývá

$$m+n+p \geq 3\sqrt[3]{mnp}, \qquad m^2+n^2+p^2+9\cdot 1 \geq 12\sqrt[12]{m^2n^2p^2 1^9} = 12\sqrt[6]{mnp}.$$

Vynásobením předchozím dvou nerovností již dostáváme (31) a důkaz je hotov. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c = 1$. [1]

**Úloha 51:** *Dokažte, že pro délky $a, b, c$ stran libovolného trojúhelníku $ABC$ platí*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

**Řešení:** Označme $x = \frac{1}{2}(b + c - a), y = \frac{1}{2}(c + a - b)$ a $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Z trojúhelníkových nerovností vyplývá, že čísla $x, y, z$ jsou kladná. Sčítáním a odčítáním dvou ze tří předchozích rovností dostáváme

$$\begin{aligned} a &= y + z, & b &= z + x, & c &= x + y, \\ b - c &= z - y, & c - a &= x - z, & a - b &= y - x. \end{aligned}$$

Upravíme zvlášť levou a pravou stranu zadané nerovnosti s dosazenými hodnotami:

$$\begin{aligned} L &= (y + z)^3 + (z + x)^3 + (x + y)^3 = \\ &= 2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^2y + y^2z + z^2x + y^2x + z^2y + x^2z), \\ P &= 3(y + z)(z + x)(x + y) + (y + z)(z - y)^2 + (z + x)(x - z)^2 + (x + y)(y - x)^2 \\ &= 3(2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) + \\ &\quad + (y^3 - y^2x - x^2y + x^3) + (x^3 - x^2z - z^2x + z^3) + (z^3 - z^2y - y^2z + y^3) = \\ &= 6xyz + 2(x^3 + y^3 + z^3) + 2(x^2y + y^2z + z^2x + y^2x + z^2y + x^2z). \end{aligned}$$

Odečtením stejných členů z obou stran nerovnosti vychází

$$x^2y + y^2z + z^2x + y^2x + z^2y + x^2z \geq 6xyz.$$

To je však AG–nerovnost pro šestici čísel a úloha je tímto dokázána. Rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník $ABC$ je rovnostranný. [12]

## 2.3 Kategorie T

**Úloha 52:** *Nechť $k, l, n$ jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a_1^k}{a_2^l} + \frac{a_2^k}{a_3^l} + \dots + \frac{a_n^k}{a_1^l} \geq a_1^{k-l} + a_2^{k-l} + \dots + a_n^{k-l}. \tag{32}$$

**Řešení:** Nejprve nerovnost dokažme pro $k = l$. Z AG–nerovnosti pro $n$ čísel vyplývá

$$\frac{a_1^k}{a_2^k} + \frac{a_2^k}{a_3^k} + \dots + \frac{a_n^k}{a_1^k} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1^k}{a_2^k} \cdot \frac{a_2^k}{a_3^k} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n^k}{a_1^k}} = n,$$

tedy zadaná nerovnost je splněna.

V dalším kroku předpokládejme $k > l$. Opakovaným užitím AG–nerovnosti pro vhodné $k$-tice čísel dostaneme

$$(k-l) \cdot \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l} + l \cdot a_{i+1}^{k-l} \geq k \sqrt[k]{\frac{a_i^{k(k-l)}}{a_{i+1}^{l(k-l)}} \cdot a_{i+1}^{l(k-l)}} = k \sqrt[k]{a_i^{k(k-l)}} = k a_i^{k-l}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $a_{n+1} = a_1$. Sečtením těchto $n$ nerovností obdržíme

$$(k-l) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l} + l \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-l} \geq k \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-l},$$

odkud po odečtení druhé sumy z levé strany a následným dělením číslem $(k-l)$ dostáváme potřebné.

Nyní ukážeme platnost zadané nerovnosti pro čísla splňující $k < l$. Sečtením následujících $n$ AG–nerovností

$$(l-k) \cdot \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l} + k \cdot \frac{1}{a_i^{l-k}} \geq l \sqrt[l]{\frac{a_i^{k(l-k)}}{a_{i+1}^{l(l-k)}} \cdot \frac{1}{a_i^{k(l-k)}}} = l \sqrt[l]{\frac{1}{a_{i+1}^{l(l-k)}}} = \frac{l}{a_{i+1}^{l-k}}$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, kde $a_{n+1} = a_1$ dostaneme

$$(l-k) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l} + k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{l-k}} \geq l \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{l-k}}.$$

Odečtením druhé sumy z levé strany a dělením číslem $(l-k)$ vychází požadovaná nerovnost. Rovnost v (32) nastane, právě když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Dodejme, že výsledek rovněž plyne z permutační nerovnosti užité pro opačně uspořádané $n$-tice $\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right)$ a $\left(\frac{1}{a_1^l}, \frac{1}{a_2^l}, \dots, \frac{1}{a_n^l}\right)$. V [13] dokázáno pro $k = 2, l = 1, n = 3$.

**Úloha 53:** *Dokažte, že pokud je součin kladných čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$ roven 1, pak pro každé přirozené číslo $k$ platí*

$$b_1^{k+1} + b_2^{k+1} + \dots + b_n^{k+1} \geq b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k. \tag{33}$$

**Řešení:** Podle AG–nerovnosti pro $k+1$ čísel platí

$$k \cdot b_i^{k+1} + 1 \geq (k+1) \sqrt[k+1]{b_i^{k(k+1)} \cdot 1} = (k+1) b_i^k$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením všech $n$ nerovností obdržíme

$$k \sum_{i=1}^{n} b_i^{k+1} + n \geq k \sum_{i=1}^{n} b_i^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k.$$

Užitím AG–nerovnosti na druhou sumu pravé strany a podmínky $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^k \geq n \sqrt[n]{(b_1 b_2 \ldots b_n)^k} = n.$$

Pak platí

$$k \sum_{i=1}^{n} b_i^{k+1} + n \geq k \sum_{i=1}^{n} b_i^k + n.$$

Odečtením čísla $n$ od obou stran nerovnosti a následným dělením $k$ obdržíme potřebné. Rovnost v (33) nastane, jen když $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. V [13] dokázano pro $k = 2, n = 3$.

**Úloha 54:** *Pro přirozená čísla $k, l, n$ a kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dokažte, že platí*

$$\frac{a_1^{k+1}}{a_2^{l+1}} + \frac{a_2^{k+1}}{a_3^{l+1}} + \cdots + \frac{a_n^{k+1}}{a_1^{l+1}} \geq \frac{a_1^k}{a_2^l} + \frac{a_2^k}{a_3^l} + \cdots + \frac{a_n^k}{a_1^l}.$$

**Řešení:** Několikanásobným užitím AG–nerovnosti na $k+1$ čísel obdržíme

$$k \cdot \frac{a_i^{k+1}}{a_{i+1}^{l+1}} + a_{i+1}^{k-l} \geq (k+1) \sqrt[k+1]{\frac{a_i^{k(k+1)}}{a_{i+1}^{k(l+1)}} \cdot a_{i+1}^{k-l}} = (k+1) \sqrt[k+1]{\frac{a_i^{k(k+1)}}{a_{i+1}^{l(k+1)}}} = (k+1) \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $a_{n+1} = a_1$. Po sečtení těchto $n$ nerovností dostaneme

$$k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{k+1}}{a_{i+1}^{l+1}} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-l} \geq (k+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l}.$$

Využitím výše dokázaného odhadu (32) upravíme předchozí nerovnost do tvaru:

$$k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{k+1}}{a_{i+1}^{l+1}} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-l} \geq k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{a_{i+1}^l} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-l}.$$

Odečtením druhých sum od obou stran nerovnosti a následným dělením číslem $k$ dostaneme dokazované tvrzení. Rovnost nastane, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. V [13] dokázáno pro $k = 3, l = 2, n = 3$.

*Poznámka.* Pokud v předchozím příkladu dosadíme $k = l$, dostaneme nerovnost (33) s čísly

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{a_n}{a_1},$$

jejichž součin je zřejmě roven 1.

**Úloha 55:** *Nechť $k, l, n$ jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou kladná čísla. Dokažte, že platí*

$$a_1^{k+l} + a_2^{k+l} + \dots + a_n^{k+l} \geq a_1^k a_2^l + a_2^k a_3^l + \dots + a_n^k a_1^l.$$

**Řešení:** Opakovaným užitím AG–nerovnosti pro $k + l$ vhodných čísel dostaneme

$$k \cdot a_i^{k+l} + l \cdot a_{i+1}^{k+l} \geq (k+l) \sqrt[k+l]{a_i^{k(k+l)} a_{i+1}^{l(k+l)}} = (k+l) a_i^k a_{i+1}^l$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $a_{n+1} = a_1$. Sečtením všech $n$ nerovností obdržíme

$$(k+l) \sum_{i=1}^{n} a_i^{k+l} \geq (k+l) \sum_{i=1}^{n} a_i^k a_{i+1}^l,$$

odkud po dělení číslem $(k+l)$ vychází dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Poznamenejme, že k výsledku lze snadno dojít užitím permutační nerovnosti pro souhlasně uspořádané $n$-tice $\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right)$ a $\left(a_1^l, a_2^l, \dots, a_n^l\right)$. V [13] dokázano pro $k = 5, l = 2, n = 3$.

**Úloha 56:** *Pro přirozené číslo $k \geq 2$ a kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokažte nerovnost mezi jejich aritmetickým průměrem a mocniným průměrem stupně $k$:*

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k \cdots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

**Řešení:** Podle AG–nerovnosti pro $k$-tice čísel platí

$$a_i^k + (k-1) \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n} \right)^k \geq k \sqrt[k]{a_i^k \cdot \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n} \right)^{k(k-1)}} = k a_i \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n} \right)^{k-1}$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Sečtením všech těchto nerovností a následnými ekvivalentními úpravami obdržíme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i^k + n(k-1) \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^k &\geq k \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^{k-1} \sum_{i=1}^{n} a_i, \\
\sum_{i=1}^{n} a_i^k &\geq \frac{k \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^k}{n^{k-1}} - \frac{(k-1)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^k}{n^{k-1}}, \\
\frac{\sum_{i=1}^n a_i^k}{n} &\geq \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^k.
\end{aligned}$$

Tato nerovnost je však ekvivalentní se zadanou nerovností. Rovnost nastane, jen když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. V [5] je nerovnost dokázána pomocí Čebyšeovy nerovnosti, uvedený důkaz pomocí AG–nerovnosti je zobecněním postupu z [13] pro $n = 3$.

**Úloha 57:** *Nechť $n$ je přirozené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Dokažte nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le \frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \cdots + \frac{1}{a_n^n}.$$

**Řešení:** Pro každé $i = 1, 2, \ldots n$ s ohledem na podmínku $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ upravujme každý sčítanec levé strany do tvaru:

$$a_i = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1^n} \cdot \frac{1}{a_2^n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_{i-1}^n} \cdot \frac{1}{a_{i+1}^n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n^n} \cdot 1}.$$

Nyní odhadněme pomocí AG–nerovnosti shora $n$ činitelů pod odmocninou:

$$a_i \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}^n} + \frac{1}{a_{i+1}^n} + \cdots + \frac{1}{a_n^n} + 1\right).$$

Sečtením všech $n$ nerovností dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^n} + 1.$$

Dále podle AG–nerovnosti pro $n$ čísel platí

$$1 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^n}} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^n}.$$

Z předchozích dvou nerovností dohromady vyplývá odhad

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^n}.$$

Rovnost tu nastane, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. [8]

**Úloha 58:** *Součin kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se rovná 1. Dokažte nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \frac{2}{1+a_1} + \frac{2}{1+a_2} + \cdots + \frac{2}{1+a_n}.$$

**Řešení:** Nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{a_i + 1} \ge 2n$$

je ekvivalentní se zadanou nerovností, neboť $\frac{2}{a_i+1} = 2 - \frac{2a_i}{a_i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme levou stranu upravené nerovnosti jako $L$ a přepišme ji takto:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{a_i + 1}{2} + \frac{2a_i}{1 + a_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - 1}{2}.$$

Užitím AG–nerovnosti ke každému členu první sumy dostáváme

$$L \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - 1}{2}.$$

Opět užijeme AG–nerovnost, tentokrát na součet $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}$, nacházejících se na pravé straně předchozí nerovnosti, s přihlédnutím k zadané podmínce $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \geq n \sqrt[n]{\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}} = n \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = n. \tag{34}$$

Dohromady platí

$$L \geq 2n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n}{2}.$$

Protože suma na pravé straně je rovna alespoň $n$ (analogický postup jako v (34)), dostáváme $L \geq 2n$. Rovnost nastane, jen když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. [11]

**Úloha 59:** *Nechť $n$ je přirozené číslo větší než jedna a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$. Dokažte nerovnost*

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

**Řešení:** Vynásobíme dokazovanou nerovnost dvěma a následně k obou stranám přičteme $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, tak dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + 2\sqrt{a_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,$$

kde pravá strana je podle zadání rovna $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = 9$. Opakovaným užitím AG–nerovnosti pro vhodné trojice čísel dostaneme

$$a_i^2 + \sqrt{a_i} + \sqrt{a_i} \geq 3 \sqrt[3]{a_i^2 \cdot \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{a_i}} = 3a_i \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sečtením těchto $n$ nerovností obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + 2\sqrt{a_i}\right) \geq 3 \sum_{i=1}^{n} a_i = 3 \cdot 3 = 9.$$

Tím je tvrzení dokázáno. Dokazovaná nerovnost přejde v rovnost, právě když $n = 3$ a $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. [10]

**Úloha 60:** *Pro všechna kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{a_1}{a_n+a_1}+\frac{a_2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_n}.$$

**Řešení:** Podle AG–nerovnosti pro $n$ čísel platí

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i+a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}}}=n,$$

kde $a_{n+1}=a_1$ a $a_{n+2}=a_2$, neboli

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}\geq n. \tag{35}$$

Nyní uvažme součet

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}=n.$$

Dosazením takového vyjádření čísla $n$ do pravé strany odvozené nerovnosti (35) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}},$$

odkud po zrušení shodných sum na obou stranách obdržíme nerovnost, kterou jsme měli dokázat. V případě lichého, resp. sudého $n$ rovnost nastane, právě když $a_1=a_2=\cdots=a_n$, resp. $a_1=a_3=\cdots=a_{n-1}$ a $a_2=a_4=\cdots=a_n$.

[13]

**Úloha 61:** *Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n\geq 3$, platí alespoň jedna z nerovností*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2},$$
$$\frac{a_1}{a_n+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_1}\geq\frac{n}{2}.$$

**Řešení:** Označme po řadě levé strany zadaných nerovností jako $A$ a $B$. Pak platí

$$\begin{aligned}A+\frac{n}{2}&=\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1+a_2}+\frac{1}{2}\right)=\\&=\frac{(a_1+a_2)+(a_1+a_3)}{2(a_2+a_3)}+\frac{(a_2+a_3)+(a_2+a_4)}{2(a_3+a_4)}+\cdots+\frac{(a_n+a_1)+(a_n+a_2)}{2(a_1+a_2)}.\end{aligned}$$

Z AG–nerovnosti pro dvojici čísel vyplývají odhady

$$\frac{(a_i+a_{i+1})+(a_i+a_{i+2})}{2(a_{i+1}+a_{i+2})}=\frac{a_i+a_{i+1}}{2(a_{i+1}+a_{i+2})}+\frac{a_i+a_{i+2}}{2(a_{i+1}+a_{i+2})}\geq\sqrt{\frac{(a_i+a_{i+1})(a_i+a_{i+2})}{(a_{i+1}+a_{i+2})^2}}$$

pro $i = 1, 2, \dots n$, kde $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$. Opět užijeme AG–nerovnost na součet všech $n$ předchozích nerovností:

$$A + \frac{n}{2} \geq \sqrt{\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{(a_2+a_3)^2}} + \sqrt{\frac{(a_2+a_3)(a_2+a_4)}{(a_3+a_4)^2}} + \dots + \sqrt{\frac{(a_n+a_1)(a_n+a_2)}{(a_1+a_2)^2}} \geq$$
$$\geq n \sqrt[2n]{\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)(a_2+a_4)\dots(a_n+a_1)(a_n+a_2)}{(a_2+a_3)^2(a_3+a_4)^2\dots(a_1+a_2)^2}} =$$
$$= n \sqrt[2n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)\dots(a_n+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_n+a_1)}}.$$

Analogickým postupem docházíme k nerovnosti

$$B + \frac{n}{2} \geq n \sqrt[2n]{\frac{(a_1+a_2)^2(a_2+a_3)^2\dots(a_n+a_1)^2}{(a_1+a_3)^2(a_2+a_4)^2\dots(a_n+a_2)^2}},$$

kde po upravení pravé strany dostáváme

$$B + \frac{n}{2} \geq n \sqrt[n]{\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_n+a_1)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)\dots(a_n+a_2)}}.$$

Označme poslední odmocninu jako $C > 0$. Pak dohromady platí

$$A + \frac{n}{2} \geq \frac{n}{\sqrt{C}} \qquad \text{a} \qquad B + \frac{n}{2} \geq nC,$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$A \geq n\left(\frac{1}{\sqrt{C}} - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{a} \qquad B \geq n\left(C - \frac{1}{2}\right).$$

Pokud se číslo $C$ rovná 1, jsou platné obě ze zadaných nerovností. Je-li $C < 1$, resp. $C > 1$, pak platí pouze první, resp. druhá nerovnost. [12]

*Poznámka.* Volbou $n = 3$ v předchozí úloze obě nerovnosti přejdou v Nesbittovu nerovnost, kterou jsme se podrobněji zabývali v předchozí části textu.

**Úloha 62:** *Součet kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je roven 1 (kde $n \geq 3$). Dokažte nerovnost*

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + \dots + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

**Řešení:** Nechť $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Definujme kladná čísla

$$a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \qquad \text{a} \qquad b_i = x_i + x_{i+1} + x_{i+2}, \qquad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Potom dokazovaná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{n^2}{3},$$

přičemž zřejmě platí

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i = 3\sum_{i=1}^{n} x_i = 3.$$

Užitím AG–nerovnosti na $n$-tici čísel $b_i$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geq n\sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}.$$

Následující nerovnost dostaneme z předcházející nerovnosti pomocí ekvivalentních úprav a s přihlédnutím k rovnosti $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 3$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}} \geq \frac{n}{3}. \tag{36}$$

Opět užijeme AG–nerovnost pro $n$ vhodných čísel:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{b_n}} = n\frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}.$$

Odtud a z (36) plyne potřebné. Rovnost nastane, jen když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$. [1]

**Úloha 63:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (kde $n \geq 2$) platí*

$$\left(1 + \frac{2a_1}{3a_2}\right)\left(1 + \frac{2a_2}{3a_3}\right) \ldots \left(1 + \frac{2a_n}{3a_1}\right) \geq \frac{5^n}{3^n}.$$

**Řešení:** Opakovaným užitím AG–nerovnosti pro pětice čísel obdržíme

$$1 + \frac{2a_i}{3a_{i+1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{a_i}{3a_{i+1}} + \frac{a_i}{3a_{i+1}} \geq 5\sqrt[5]{\frac{a_i^2}{3^5 a_{i+1}^2}} = \frac{5}{3}\sqrt[5]{\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^2}$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $a_{n+1} = a_1$ Vynásobením těchto nerovností dostaneme

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2a_i}{3a_{i+1}}\right) \geq \frac{5^n}{3^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

To je však dokazovaná nerovnost, neboť součin na pravé straně poslední nerovnosti je roven číslu 1. Rovnost tu nastane, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. V [13] dokázáno pro $n = 4$.

**Úloha 64:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $2abc = 3a^2 + 4b^2 + 5c^2$. Ukažte, že platí*

$$3a + 2b + c \geq 36.$$

**Řešení:** Označme $x = 3a, y = 2b$ a $z = c$, potom platí $x + y + z = 3a + 2b + c$ a

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 = 3(3a^2 + 4b^2 + 5c^2) = 6abc = xyz.$$

Z AG–nerovnosti pro šest a dvanáct čísel vyplývá

$$x+y+z=\frac{3\cdot 2x+2\cdot 3y+6z}{6}\geq \sqrt[6]{(2x)^3\,(3y)^2\,6z}=\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{3y}\cdot\sqrt[6]{6z},$$

$$x^2+3y^2+15z^2=\frac{3\cdot 4x^2+4\cdot 9y^2+5\cdot 36z^2}{12}\geq$$

$$\geq \sqrt[12]{(4x^2)^3\,(9y^2)^4\,(36z^2)^5}=\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{(3y)^2}\cdot\sqrt[6]{(6z)^5}.$$

Vynásobením obou nerovností obdržíme

$$(x+y+z)(x^2+3y^2+15z^2)\geq 36xyz.$$

Důkaz je tímto hotov, neboť $x^2+3y^2+15z^2=xyz>0$, takže lze číslem $xyz$ obě strany odvozené nerovnosti krátit. Rovnost nastane, jen když $a=b=c=6$. [11]

**Úloha 65:** *Pro libovolná kladná čísla $a,b,c,d$ dokažte nerovnost*

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\geq abcd(a+b+c+d).$$

**Řešení:** Dokazovaná nerovnost je součtem následujících čtyř AG–nerovností pro 51 čísel:

$$\frac{23\cdot a^4b+7\cdot b^4c+11\cdot c^4d+10\cdot d^4a}{51}\geq \sqrt[51]{a^{102}b^{51}c^{51}d^{51}}=a^2bcd, \tag{37}$$

$$\frac{10\cdot a^4b+23\cdot b^4c+7\cdot c^4d+11\cdot d^4a}{51}\geq \sqrt[51]{a^{51}b^{102}c^{51}d^{51}}=ab^2cd,$$

$$\frac{11\cdot a^4b+10\cdot b^4c+23\cdot c^4d+7\cdot d^4a}{51}\geq \sqrt[51]{a^{51}b^{51}c^{102}d^{51}}=abc^2d,$$

$$\frac{7\cdot a^4b+11\cdot b^4c+10\cdot c^4d+23\cdot d^4a}{51}\geq \sqrt[51]{a^{51}b^{51}c^{51}d^{102}}=abcd^2.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $a=b=c=d$. [9]

*Poznámka.* Nejvíce obtížnou částí řešení je určit koeficienty u sčítanců na levých stranách předchozích čtyř nerovností. Označme po řadě $\frac{n_1}{n},\frac{n_2}{n},\frac{n_3}{n},\frac{n_4}{n}$ koeficienty u $a^4b,b^4c,c^4d,d^4a$, kde $n_1,n_2,n_3,n_4,n$ jsou přirozená čísla a $n=n_1+n_2+n_3+n_4$. Pro přehlednost označme $x_1=\frac{n_1}{n},x_2=\frac{n_2}{n},x_3=\frac{n_3}{n},x_4=\frac{n_4}{n}$ a ukažme, jak lze najít koeficienty pro nerovnost (37). Z AG–nerovnosti pro $n$ čísel vyplývá

$$x_1\cdot a^4b+x_2\cdot b^4c+x_3\cdot c^4d+x_4\cdot d^4a\geq a^{4x_1+x_4}b^{4x_2+x_1}c^{4x_3+x_2}d^{4x_4+x_3}.$$

Porovnáním koeficientů na pravých stranách předchozí nerovnosti a nerovnosti (37) obdržíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned}
x_1+\ x_2+\ x_3+x_4&=1\\
4x_1\qquad\qquad\quad +x_4&=2\\
x_1+4x_2\qquad\qquad &=1\\
x_2+4x_3\qquad &=1.
\end{aligned}$$

Spočítáním této soustavy docházíme k závěru, že jediným řešením je uspořádaná čtveřice $\left[\frac{23}{51},\frac{7}{51},\frac{11}{51},\frac{10}{51}\right]$. Zbylé tři nerovnosti dostaneme cyklickou záměnou spočítaných hodnot koeficientů $x_1,x_2,x_3,x_4$ z nerovnosti (37).

*Poznámka.* Předchozí dvě úlohy je rovněž možné vyřešit užitím vážené AG–nerovnosti (viz [5, str. 141]), která není z důvodu rozsahu práce podrobněji zmíněna.

**Úloha 66:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c, d$ dokažte nerovnost $abcd \le \frac{1}{81}$, jestliže platí*

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} = 3.$$

**Řešení:** Nejprve upravíme podmínku do tvaru:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} + 1 - \frac{1}{1+d} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}.$$

Podle AG–nerovnosti pro trojici čísel platí

$$\frac{1}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}.$$

Zcela analogicky vyjádříme dolní odhady čísel $\frac{1}{1+b}$, $\frac{1}{1+c}$ a $\frac{1}{1+d}$. Vynásobením všech čtyř takto vzniklých nerovností obdržíme

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \ge \frac{81abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}.$$

Odtud užitím ekvivalentních úprav dostáváme požadovanou nerovnost. Rovnost nastane jen, když $a = b = c = d = \frac{1}{3}$. [12]

*Poznámka.* Nyní uvedeme bez důkazu zobecněný tvar předešlé úlohy: Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla splňující

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} = n-1,$$

pak platí

$$a_1 a_2 \ldots a_n \le (n-1)^{-n}.$$

**Úloha 67:** *Součet nezáporných čísel $a, b, c, d$ je roven 4. Dokažte, že platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 \ge 4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$

**Řešení:** Užitím ekvivalentních úprav a podmínky $a+b+c+d = 4$ upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru:

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 \ge 4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$

Levá strana nerovnosti je nezáporná, neboť je součtem čtyř nezáporných čísel. Je-li součin na pravé straně nerovnosti záporný, dokazované tvrzení je platné. Dále proto předpokládejme $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \ge 0$. Užitím AG–nerovnosti pro čtveřici čísel obdržíme

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 \ge 4\sqrt[4]{(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2(d-1)^2} =$$
$$= 4\sqrt{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}.$$

Protože platí $\sqrt{x} \geq x$ pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$, stačí nám dokázat, že $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a \geq b \geq c \geq d$. Protože je zkoumaný součin nezáporný, musí zřejmě platit $a \geq b \geq 1 \geq c \geq d$ a zároveň $a + b \leq 4$. Užitím AG–nerovnosti pro nezápornou dvojici čísel $(a-1), (b-1)$ dostáváme

$$(a-1)(b-1) \leq \left(\frac{a+b-2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{4-2}{2}\right)^2 = 1.$$

Vynásobením s nerovností $(c-1)(d-1) \leq 1$, která je pro $c, d \in \langle 0, 1\rangle$ zřejmá, obdržíme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = d = 1$ nebo čísla $a, b, c, d$ jsou permutací čísel $2, 2, 0, 0$. [11]

**Úloha 68:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3.$$

**Řešení:** Podle AG–nerovnosti pro trojici čísel, nacházejících se na levé straně zadané nerovnosti, platí

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}.$$

Stačí nám proto dokázat, že zlomek pod odmocninou na pravé straně nerovnosti je větší nebo roven 1, neboli

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+1)(b+1)(c+1).$$

Roznásobením všech závorek, odečtením stejných členů od obou stran nerovnosti a s přihlédnutím k podmínce $abc = 1$ dostaneme

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca + a + b + c.$$

Označíme levou stranu poslední nerovnosti jako $L$ a užijeme AG–nerovnost pro pětice čísel:

$$a^2b + a^2b + a^2c + a^2c + bc \geq 5\sqrt[5]{a^8b^3c^3} = 5\sqrt[5]{a^5} = 5a,$$
$$b^2c + b^2c + b^2a + b^2a + ca \geq 5\sqrt[5]{b^8c^3a^3} = 5\sqrt[5]{b^5} = 5b,$$
$$c^2a + c^2a + c^2b + c^2b + ab \geq 5\sqrt[5]{c^8a^3b^3} = 5\sqrt[5]{c^5} = 5c.$$

Sečtením všech tří nerovností dostáváme

$$2L + (ab + bc + ca) \geq 5(a + b + c). \tag{38}$$

Uvažíme další tři AG–nerovnosti opět pro pětice čísel:

$$a^2b + a^2b + b^2a + b^2a + c \geq 5\sqrt[5]{a^6b^6c} = 5\sqrt[5]{a^5b^5} = 5ab,$$
$$b^2c + b^2c + c^2b + c^2b + a \geq 5\sqrt[5]{b^6c^6a} = 5\sqrt[5]{b^5c^5} = 5bc,$$
$$c^2a + c^2a + a^2c + a^2c + b \geq 5\sqrt[5]{c^6a^6b} = 5\sqrt[5]{c^5a^5} = 5ca.$$

Následující nerovnost obdržíme sečtením tří předcházejících:

$$2L + (a+b+c) \geq 5(ab+bc+ca).$$

Odtud a z (38) vyplývá sečtením

$$4L + (ab+bc+ca) + (a+b+c) \geq 5(ab+bc+ca) + 5(a+b+c).$$

Odečtením čísel $(ab+bc+ca)$ a $(a+b+c)$ a následným dělením čtyřmi dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = 1$. [11]

**Úloha 69:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2.$$

**Řešení:** Sečtením tří AG–nerovností pro dvojice čísel

$$\frac{a^9}{bc} + abc \geq 2a^5, \quad \frac{b^9}{ca} + abc \geq 2b^5, \quad \frac{c^9}{ab} + abc \geq 2c^5,$$

dostáváme nerovnost

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + 3abc \geq 2(a^5 + b^5 + c^5). \tag{39}$$

Opět užijeme AG–nerovnost, tentokrát pro trojici čísel $a^5, b^5, c^5$:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq 3\sqrt[3]{a^5b^5c^5}.$$

Dosazením do nerovnosti (39) a užitím algebraických úprav na nově vzniklou nerovnost obdržíme

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 3\sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc + \frac{2}{abc}.$$

Stačí nám proto dokázat platnost nerovnosti

$$3\sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc + \frac{2}{abc} \geq 2.$$

Pro přehlednost označme $t = \sqrt[3]{abc} > 0$, dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$3t^5 - 3t^3 + \frac{2}{t^3} \geq 2.$$

Odečtením čísla 2 a následným převedením levé strany odvozené nerovnosti na společný jmenovatel obdržíme

$$\frac{3t^8 - 3t^6 - 2t^3 + 2}{t^3} \geq 0.$$

Čitatel rozložíme na součin vytknutím čísla $(t-1)^2$:

$$\frac{(t-1)^2(3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 6t^3 + 6t^2 + 4t + 2)}{t^3} \geq 0.$$

Tato nerovnost je vždy splněna, neboť $t$ je kladné číslo. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 70:** *Dokažte pro libovolná kladná čísla* $a, b, c$ *nerovnost*

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq a^4 + b^4 + c^4 + 3.$$

**Řešení:** Užitím AG–nerovnosti pro vhodné trojice čísel dostáváme odhady

$$\frac{a^9}{bc} + abc + a^2 \geq 3a^4, \qquad \frac{b^9}{ca} + abc + b^2 \geq 3b^4, \qquad \frac{c^9}{ab} + abc + c^2 \geq 3b^4,$$

jejichž sečtením vychází

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + (a^2 + b^2 + c^2) + 3abc \geq 3(a^4 + b^4 + c^4).$$

Odtud přímo vyplývá nerovnost

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq 3(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2) - 3abc + \frac{3}{abc}. \tag{40}$$

Opět užijeme třikrát AG–nerovnost, tentokrát pro dvě čísla:

$$a^4 + 1 \geq 2a^2, \qquad b^4 + 1 \geq 2b^2, \qquad c^4 + 1 \geq 2c^2.$$

Všechny tři nerovnosti vynásobme jednou polovinou a sečtěme:

$$\frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{3}{2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Dosazením do nerovnosti (40) obdržíme

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq \frac{5}{2}(a^4 + b^4 + c^4) - 3abc - \frac{3}{2} + \frac{3}{abc}.$$

Využitím AG–nerovnosti $a^4 + b^4 + c^4 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$ docházíme k odhadu

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq (a^4 + b^4 + c^4) + \frac{9}{2}\sqrt[3]{a^4b^4c^4} - 3abc - \frac{3}{2} + \frac{3}{abc}.$$

Abychom dokázali zadanou nerovnost, stačí proto dokázat, že platí

$$\frac{9}{2}\sqrt[3]{a^4b^4c^4} - 3abc - \frac{3}{2} + \frac{3}{abc} \geq 3.$$

Označme $t = \sqrt[3]{abc} > 0$ a předchozí nerovnost přepišme do tvaru:

$$\frac{9}{2}t^4 - 3t^3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{t^3} \geq 0.$$

Pomocí ekvivalentních úprav dostaneme nerovnost

$$\frac{3}{2}(t-1)^2(t+1)(3t^4 + t^3 + 4t^2 + 2t + 2) \geq 0,$$

která je splněna pro všechna kladná $t$. Rovnost nastane, jen když $a = b = c = 1$. [13]

**Úloha 71:** *Je dáno $x \in \mathbb{R}$ takové, že $0 \leq x \leq 1$. Najděte maximální hodnotu výrazu*

$$S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}.$$

**Řešení:** Parametrizujme oba sčítance zadaného výrazu:

$$13\sqrt{x^2 - x^4} = \frac{13}{u}\sqrt{u^2x^2(1-x^2)}, \qquad 9\sqrt{x^2 + x^4} = \frac{9}{v}\sqrt{v^2x^2(1+x^2)},$$

kde $u, v$ jsou kladná čísla. Podle AG–nerovnosti pro dvojice čísel platí

$$\frac{13}{u}\sqrt{u^2x^2(1-x^2)} \leq \frac{13}{u} \cdot \frac{u^2x^2 + (1-x^2)}{2} = \frac{13(u^2-1)x^2 + 13}{2u},$$
$$\frac{9}{v}\sqrt{v^2x^2(1+x^2)} \leq \frac{9}{v} \cdot \frac{v^2x^2 + (1+x^2)}{2} = \frac{9(v^2+1)x^2 + 9}{2v},$$

přitom rovnosti současně nastávají, právě když platí $u^2x^2 = 1 - x^2$ a zároveň $v^2x^2 = 1 + x^2$, neboli $(u^2+1)x^2 = (v^2-1)x^2 = 1$. Sečtením obou nerovností dostáváme

$$S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} \leq \left(\frac{13(u^2-1)}{2u} + \frac{9(v^2+1)}{2v}\right)x^2 + \frac{13}{2u} + \frac{9}{2v}.$$

Zvolme $u$ a $v$ tak, aby platilo $u^2 + 1 = v^2 - 1$ a $\frac{13(u^2-1)}{2u} + \frac{9(v^2+1)}{2v} = 0$. Hledané hodnoty parametrů jsou $u = \frac{1}{2}$ a $v = \frac{3}{2}$. Pak z odvozené nerovnosti vidíme, že $S \leq \frac{13}{2u} + \frac{9}{2v} = 16$. Rovnost se dosáhne, pokud $(u^2+1)x^2 = 1$, neboli $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, což je číslo z uvažovaného intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Proto je maximum výrazu $S$ rovno 16. [13]

**Úloha 72:** *Součet kladných čísel $a, b, c$ je roven 3. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

**Řešení:** Nejprve ukažme, že pro kladná čísla $x, y, z$ splňující $x + y + z = 3$ platí

$$xy + yz + zx \leq 3. \tag{41}$$

Násobením nerovnosti číslem 3 a užitím zadané podmínky dostáváme

$$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2.$$

Umocněním pravé strany a odečtením čísla $2(xy + yz + zx)$ vychází

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

To je však nerovnost (13), kterou jsme dokázali v první kapitole.

Levou stranu dokazované nerovnosti upravíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}+b-\frac{2bc^2}{b+2c^2}+c-\frac{2ca^2}{c+2a^2}. \tag{42}$$

Z AG–nerovnosti pro trojici čísel vyplývá následující nerovnost:

$$\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2}\le\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{a\cdot b^2\cdot b^2}}=\frac{2ab}{3\sqrt[3]{ab}}=\frac{2\sqrt[3]{(ab)^2}}{3}.$$

Analogickým způsobem obdržíme

$$\frac{2bc^2}{b+2c^2}\le\frac{2\sqrt[3]{(bc)^2}}{3}\qquad\text{a}\qquad\frac{2ca^2}{c+2a^2}\le\frac{2\sqrt[3]{(ca)^2}}{3}.$$

Dosazením všech tří nerovností do rovnosti (42) a s ohledem na podmínku $a+b+c=3$ dostáváme

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 3-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right).$$

Stačí nám tedy dokázat nerovnost

$$3-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right)\ge 1,$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\le 3.$$

Sečtením následujících tří AG–nerovností

$$a+b+ab\ge 3\sqrt[3]{(ab)^2},\qquad b+c+bc\ge 3\sqrt[3]{(bc)^2},\qquad c+a+ca\ge 3\sqrt[3]{(ca)^2}$$

dostáváme odhad

$$2(a+b+c)+(ab+bc+ca)\ge 3\left(\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right).$$

Z podmínky $a+b+c=3$ a odhadu (41) pak vyplývá

$$9\ge 3\left(\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right).$$

Dělením číslem tři dostáváme požadované. Rovnost nastane, jen když $a=b=c=1$. [11]

**Úloha 73:** *Jsou dána kladná čísla $a,b,c$ taková, že $a+b+c=3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1.$$

**Řešení:** Užitím algebraických úprav na levou stranu obdržíme

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}=a-\frac{2ab^3}{a+2b^3}+b-\frac{2bc^3}{b+2c^3}+c-\frac{2ca^3}{c+2a^3}. \tag{43}$$

Z AG–nerovnosti pro trojici čísel vyplývá

$$\frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} \le \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{a\cdot b^3\cdot b^3}} = \frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Stejným způsobem získáme

$$\frac{2bc^3}{b+2c^3} \le \frac{2c\sqrt[3]{b^2}}{3} \qquad \text{a} \qquad \frac{2ca^3}{c+a^3} \le \frac{2a\sqrt[3]{c^2}}{3}.$$

Dosazením těchto nerovností do rovnosti (43) a s ohledem na podmínku $a+b+c=3$ vychází

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \ge 3-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right).$$

Abychom dokázali zadanou nerovnost, stačí proto dokázat, že platí

$$3-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right) \ge 1.$$

Celou nerovnost ekvivalentně upravme do tvaru:

$$a\sqrt[3]{c^2}+b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2} \le 3.$$

Podle AG–nerovnosti pro vhodné trojice čísel platí

$$a+ac+ac \ge 3\sqrt[3]{a^3c^2} = 3a\sqrt[3]{c^2}, \qquad b+ba+ba \ge 3b\sqrt[3]{a^2}, \qquad c+cb+cb \ge 3c\sqrt[3]{b^2}.$$

Sečtením těchto odhadů dostáváme

$$a+b+c+2(ab+bc+ca) \ge 3(a\sqrt[3]{c^2}+b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}).$$

S ohledem na podmínku $a+b+c=3$ a nerovnost (41) docházíme k odhadu

$$9 \ge a\sqrt[3]{c^2}+b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}.$$

Po dělení číslem tři dostáváme potřebné. Rovnost nastane, jen když $a=b=c=1$. [11]

**Úloha 74:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c$, jejichž součet je roven 3, dokažte nerovnost*

$$\frac{1}{1+2a^2b}+\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a} \ge 1.$$

**Řešení:** Zapišme levou stranu dokazované nerovnosti ve tvaru:

$$\frac{1}{1+2a^2b}+\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a} = 3-\left(\frac{2a^2b}{1+2a^2b}+\frac{2b^2c}{1+2b^2c}+\frac{2c^2a}{1+2c^2a}\right). \tag{44}$$

Pomocí AG–nerovnosti pro trojice čísel odhadneme první sčítanec v závorce na pravé straně (nejprve zdola jeho jmenovatel a následně shora upravený čitatel):

$$\frac{2a^2b}{1+2a^2b} = \frac{2a^2b}{1+a^2b+a^2b} \le \frac{2a^2b}{3\sqrt[3]{(a^2b)^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a\cdot a\cdot b}}{3} \le \frac{2(2a+b)}{9}.$$

Analogickým způsobem získáme nerovnosti

$$\frac{2b^2c}{1+2b^2c} \le \frac{2(2b+c)}{9} \qquad \text{a} \qquad \frac{2c^2a}{1+2c^2a} \le \frac{2(2c+a)}{9}.$$

Sečtením všech tří nerovností dostaneme

$$\frac{2a^2b}{1+2a^2b} + \frac{2b^2c}{1+2b^2c} + \frac{2c^2a}{1+2c^2a} \le \frac{6(a+b+c)}{9}.$$

Dosazením do (44) obdržíme odhad

$$\frac{1}{1+2a^2b} + \frac{1}{1+2b^2c} + \frac{1}{1+2c^2a} \ge 3 - \frac{2(a+b+c)}{3}.$$

To je však dokazovaná nerovnost, neboť $a+b+c=3$. Rovnost tu nastane právě tehdy, když $a=b=c=1$. [11]

**Úloha 75:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \ge 1.$$

**Řešení:** Nejprve přepišme levou stranu zadané nerovnosti do tvaru:

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} = \frac{1}{2} - \frac{a^3}{2(a^3+2)} + \frac{1}{2} - \frac{b^3}{2(b^3+2)} + \frac{1}{2} - \frac{c^3}{2(c^3+2)}. \tag{45}$$

Trojím užitím AG–nerovnosti pro trojice čísel dostáváme

$$\frac{a^3}{2(a^3+1+1)} \le \frac{a^3}{2\cdot 3\sqrt[3]{a^3}} = \frac{a^2}{6}, \qquad \frac{b^3}{2(b^3+2)} \le \frac{b^2}{6}, \qquad \frac{c^3}{2(c^3+2)} \le \frac{c^2}{6}.$$

Dosazením těchto nerovností do rovnosti (45) obdržíme

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \ge \frac{3}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Odtud a z podmínky $a^2+b^2+c^2=3$ plyne dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane, jen když $a=b=c=1$. [11]

**Úloha 76:** *Nechť $a, b, c, d$ jsou kladná čísla, pro která platí*

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

*Dokažte nerovnost $abcd \ge 3$.*

**Řešení:** Nejprve označíme $a^2 = \operatorname{tg}\alpha, b^2 = \operatorname{tg}\beta, c^2 = \operatorname{tg}\gamma, d^2 = \operatorname{tg}\delta$ a využijme identity $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x$ (která se dá snadno dokázat rozepsáním tangentu na podíl sinu a kosinu). Pak podle podmínky ze zadání platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1.$$

Odečtením $\cos^2\alpha$ a užitím AG–nerovnosti pro trojici čísel $\cos^2\beta, \cos^2\gamma, \cos^2\delta$ dostáváme

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta \geq 3\sqrt[3]{\cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma \cdot \cos^2\delta}.$$

Vynásobením této a ostatních tří cyklických nerovností obdržíme

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma \cdot \sin^2\delta &\geq 81\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma \cdot \cos^2\delta \\ \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\,\beta \cdot \mathrm{tg}^2\,\gamma \cdot \mathrm{tg}^2\,\delta &\geq 81 \\ \sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot \mathrm{tg}\,\gamma \cdot \mathrm{tg}\,\delta} &\geq 3. \end{aligned}$$

Levá strana poslední nerovnosti je však součin $abcd$, tím je důkaz hotov. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c = d = \sqrt[4]{3}$. [6]

# Přehled zadání všech úloh

**Úloha 1:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

**Úloha 2:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

**Úloha 3:** *Pro libovolná kladná čísla $u, v, w$ dokažte nerovnost*

$$\left(\frac{u}{w}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3 + \left(\frac{w}{v}\right)^3 \geq \frac{uv}{w^2} + \frac{vw}{u^2} + \frac{wu}{v^2}.$$

**Úloha 4:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > \frac{5}{2}.$$

**Úloha 5:** *Pro přirozené číslo $n$ a kladné číslo $a$ dokažte, že platí*

$$(1+a)^{n+1} \geq \frac{a(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

**Úloha 6:** *Pokud víte, že všechny kořeny polynomu $x^6 - 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + 1$ v oboru komplexních čísel jsou kladná reálná čísla, najděte $a, b, c, d$.*

**Úloha 7:** *Pokud polynom $f$ stupně $n$ má pouze reálné kořeny, nezáporné koeficienty a jeho první i poslední koeficient je roven jedné, potom platí $f(2) \geq 3^n$, dokažte.*

**Úloha 8:** *Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 2$ platí*

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

**Úloha 9:** *Rozhodněte, zda existuje posloupnost kladných reálných čísel $a_n$ taková, že obě řady $\sum a_n$ a $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ jsou konvergentní.*

**Úloha 10:** *Dokažte pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ Nesbittovu nerovnost*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**Úloha 11:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součet je roven jedné. Dokažte, že platí*

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

**Úloha 12:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

**Úloha 13:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $a + b + c = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Úloha 14:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla taková, že $a + b + c = 3$. Ukažte, že platí*

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq 1.$$

**Úloha 15:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

**Úloha 16:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $abc = 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

**Úloha 17:** *Nechť $a, b, c$ jsou reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

**Úloha 18:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, pro která platí $a^2+b^2+c^2 = 1$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{1}{3}.$$

**Úloha 19:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin je roven jedné. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Úloha 20:** *Součin kladných čísel $a, b, c$ je roven 1, dokažte nerovnost*

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1} + \frac{2}{(b+1)^2+c^2+1} + \frac{2}{(c+1)^2+a^2+1} \leq 1.$$

**Úloha 21:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

**Úloha 22:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin nepřevyšuje jejich součet. Dokažte, že platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

**Úloha 23:** *Nechť $a, b, c$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet se rovná 3. Dokažte nerovnost*

$$a\sqrt{1+b^3} + b\sqrt{1+c^3} + c\sqrt{1+a^3} < 5.$$

**Úloha 24:** *Součet nezáporných čísel $a, b, c, d$ je roven 3. Dokažte, že platí*

$$ab(b+c) + bc(c+d) + cd(d+a) + da(a+b) \leq 4.$$

**Úloha 25:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c, d$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{c^2+d^2+a^2} + \frac{c}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}.$$

**Úloha 26:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

**Úloha 27:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $ab + bc + ca = 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{9}{2}.$$

**Úloha 28:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ dokažte, že platí*

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

**Úloha 29:** *Dokažte, že pro libovolná kladná $a, b$ platí*

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{2}{a^3 + b^3} \geq \frac{24}{(a+b)^3}.$$

**Úloha 30:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b$ dokažte nerovnost*

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

**Úloha 31:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$, jejichž součin je roven jedné, platí*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Úloha 32:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$. Dokažte, že platí*

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + abc \leq \frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

**Úloha 33:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a + b + c = 3abc$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3.$$

**Úloha 34:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $a\sqrt{\frac{b}{c}} + b\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{a}{b}} = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \geq 3.$$

**Úloha 35:** *Pro kladná čísla $a, b, c$ splňující podmínku $ab + bc + cd + da = 1$ dokažte*

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

**Úloha 36:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a + 2b + 3c \geq 20$. Dokažte, že platí nerovnost*

$$a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13.$$

**Úloha 37:** *Dokažte, že pro každá kladná čísla $a, b, c$ platí*

$$30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 84.$$

**Úloha 38:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $ac \geq 12$ a $bc \geq 8$. Dokažte nerovnost*

$$a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{121}{12}.$$

**Úloha 39:** *Nechť $a, b, c$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven jedné. Dokažte, že platí*

$$a^4b+b^4c+c^4a\leq\frac{4^4}{5^5}.$$

**Úloha 40:** *Jsou dána reálná čísla $a, b, c$ splňující podmínku $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Ukažte, že platí*

$$a^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(1-c)\leq\frac{108}{529}.$$

**Úloha 41:** *Nechť $x, y, z, t$ jsou reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte nerovnost*

$$x^2y+y^2z+z^2t+t^2x-xy^2-yz^2-zt^2-tx^2\leq\frac{8}{27}.$$

**Úloha 42:** *Dokažte, že pro každá nezáporná čísla $a, b, c$, jejichž součet se rovná třem, platí*

$$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)\leq 12.$$

**Úloha 43:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Ukažte, že platí*

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}\geq 2.$$

**Úloha 44:** *V trojúhelníku $ABC$ jsou sestrojeny osy vnitřních úhlů $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$. Jejich průsečík označme $G$, dále označme $D$, resp. $E$, resp. $F$ průsečík osy $o_\alpha$ se stranou $BC$, resp. osy $o_\beta$ se stranou $AC$, resp. osy $o_\gamma$ se stranou $AB$. Dokažte, že platí*

$$\frac{|GA|}{|AD|}\cdot\frac{|GB|}{|BE|}\cdot\frac{|GC|}{|CF|}\leq\frac{8}{27}.$$

**Úloha 45:** *Pro libovolný trojúhelník se stranami a,b,c a obsahem $S$ dokažte nerovnost*

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

**Úloha 46:** *Tři přímky se protínají v bodě $O$ uvnitř trojúhelníku $ABC$ s obsahem $S$ tak, že každou stranu trojúhelníku protínají právě dvě z nich. Tyto přímky určují v trojúhelníku $ABC$ tři trojúhelníky s vrcholem $O$ s obsahy $S_1, S_2$ a $S_3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{18}{S}.$$

**Úloha 47:** *Je dán trojúhelník $ABC$, jehož osa úhlu $BAC$ protíná stranu $BC$ v bodě $X$ a kružnici opsanou v bodě $Y$. Nechť $l_a$ je poměr délek úseček $|AX|:|AY|$. Definujme $l_b$ a $l_c$ stejným způsobem a označme $\alpha, \beta$ a $\gamma$ velikosti vnitřních úhlů $\Delta ABC$. Dokažte nerovnost*

$$\frac{l_a}{\sin^2\alpha} + \frac{l_b}{\sin^2\beta} + \frac{l_c}{\sin^2\gamma} \geq 3.$$

**Úloha 48:** *Pro libovolný trojúhelník s délkami stran $a, b, c$, vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma$ a poloměrem $r$ kružnice vepsané dokažte nerovnost*

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geq 9r.$$

**Úloha 49:** *Nechť $a, b, c$ jsou délky stran trojúhelníka $ABC$. Sestrojme trojúhelník $A'B'C'$ s délkami stran $a' = a + \frac{b}{2}, b' = b + \frac{c}{2}, c' = c + \frac{a}{2}$. Dokažte, že pro obsahy těchto trojúhelníků platí*

$$S(\Delta A'B'C') \geq \frac{9}{4}S(\Delta ABC).$$

**Úloha 50:** *Jsou-li $a, b, c$ délky stran trojúhelníku s obvodem 3, pak platí*

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca},$$

*dokažte.*

**Úloha 51:** *Dokažte, že pro délky $a, b, c$ stran libovolného trojúhelníku $ABC$ platí*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

**Úloha 52:** *Nechť $k, l, n$ jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost*

$$\frac{a_1^k}{a_2^l} + \frac{a_2^k}{a_3^l} + \cdots + \frac{a_n^k}{a_1^l} \geq a_1^{k-l} + a_2^{k-l} + \cdots + a_n^{k-l}.$$

**Úloha 53:** *Dokažte, že pokud je součin kladných čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ roven 1, pak pro každé přirozené číslo $k$ platí*

$$b_1^{k+1} + b_2^{k+1} + \cdots + b_n^{k+1} \geq b_1^k + b_2^k + \cdots + b_n^k.$$

**Úloha 54:** *Pro přirozená čísla $k, l, n$ a kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dokažte, že platí*

$$\frac{a_1^{k+1}}{a_2^{l+1}} + \frac{a_2^{k+1}}{a_3^{l+1}} + \cdots + \frac{a_n^{k+1}}{a_1^{l+1}} \geq \frac{a_1^k}{a_2^l} + \frac{a_2^k}{a_3^l} + \cdots + \frac{a_n^k}{a_1^l}.$$

**Úloha 55:** *Nechť $k, l, n$ jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla. Dokažte, že platí*

$$a_1^{k+l} + a_2^{k+l} + \cdots + a_n^{k+l} \geq a_1^k a_2^l + a_2^k a_3^l + \cdots + a_n^k a_1^l.$$

**Úloha 56:** *Pro přirozené číslo $k \geq 2$ a kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dokažte nerovnost mezi jejich aritmetickým průměrem a mocniným průměrem stupně $k$:*

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k \cdots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

**Úloha 57:** *Nechť $n$ je přirozené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Dokažte nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \cdots + \frac{1}{a_n^n}.$$

**Úloha 58:** *Součin kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se rovná 1. Dokažte nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{2}{1+a_1} + \frac{2}{1+a_2} + \ldots \frac{2}{1+a_n}.$$

**Úloha 59:** *Nechť $n$ je přirozené číslo větší než jedna a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla splňující podmínku $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$. Dokažte nerovnost*

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

**Úloha 60:** *Pro všechna kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{a_1}{a_n + a_1} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n}.$$

**Úloha 61:** *Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde $n \geq 3$, platí alespoň jedna z nerovností*

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2},$$
$$\frac{a_1}{a_n + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_1} \geq \frac{n}{2}.$$

**Úloha 62:** *Součet kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven 1. Dokažte nerovnost*

$$\frac{x_1}{x_2(x_1 + x_2 + x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2 + x_3 + x_4)} + \cdots + \frac{x_n}{x_1(x_n + x_1 + x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

**Úloha 63:** *Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\left(1 + \frac{2a_1}{3a_2}\right)\left(1 + \frac{2a_2}{3a_3}\right) \ldots \left(1 + \frac{2a_n}{3a_1}\right) \geq \frac{5^n}{3^n}.$$

**Úloha 64:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $2abc = 3a^2 + 4b^2 + 5c^2$. Ukažte, že platí*

$$3a + 2b + c \geq 36.$$

**Úloha 65:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b, c, d$ dokažte nerovnost*

$$a^4 b + b^4 c + c^4 d + d^4 a \geq abcd(a + b + c + d).$$

**Úloha 66:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c, d$ dokažte nerovnost $abcd \leq \frac{1}{81}$, jestliže platí*

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} = 3.$$

**Úloha 67:** *Součet nezáporných čísel $a, b, c, d$ je roven 4. Dokažte, že platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 \geq 4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$

**Úloha 68:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3.$$

**Úloha 69:** *Pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ dokažte nerovnost*

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2.$$

**Úloha 70:** *Dokažte pro libovolná kladná čísla $a, b, c$ nerovnost*

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq a^4 + b^4 + c^4 + 3.$$

**Úloha 71:** *Je dáno $x \in \mathbb{R}$ takové, že $0 \leq x \leq 1$. Najděte minimální hodnotu výrazu*

$$S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}.$$

**Úloha 72:** *Součet kladných čísel $a, b, c$ je roven 3. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq 1.$$

**Úloha 73:** *Jsou dána kladná čísla $a, b, c$ taková, že $a + b + c = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a^2}{a + 2b^3} + \frac{b^2}{b + 2c^3} + \frac{c^2}{c + 2a^3} \geq 1.$$

**Úloha 74:** *Pro všechna kladná čísla $a, b, c$, jejichž součet je roven 3, dokažte nerovnost*

$$\frac{1}{1+2a^2b} + \frac{1}{1+2b^2c} + \frac{1}{1+2c^2a} \geq 1.$$

**Úloha 75:** *Nechť $a, b, c$ jsou kladná čísla splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1.$$

**Úloha 76:** *Nechť $a, b, c, d$ jsou kladná čísla, pro která platí*

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

*Dokažte nerovnost $abcd \geq 3$.*

# Závěr

V tomto textu jsme se podrobně věnovali využití AG–nerovnosti při dokazování konkrétních algebraických a geometrických nerovností. U některých úloh bylo na první pohled znát, jak pomocí AG–nerovnosti dojít k úspěšnému závěru. V jiných případech vyžadovalo řešení úlohy jistou tvořivost.

Při psaní tohoto textu jsem zdokonalil a utříbil svoje znalosti z teorie nerovností. Přišel jsem do styku s novými technikami, jak při dokazování postupovat. Nejzajímavější částí mé práce bylo zobecňování některých nerovností. Jedná se o moji první práci v takovém rozsahu a věřím, že ve své budoucí učitelské praxi uplatním znalosti, které jsem během tvorby diplomové práce nasbíral.

Text je určen zejména pro učitele matematiky středních škol, nadané žáky a pro všechny zájemce dané problematiky. Dokazování algebraických a geometrických nerovností je nedílnou součástí matematických olympiád, proto doufám, že tato práce dobře poslouží budoucím olympionikům.

# Literatura

[1] Bulajich R., Gómez J., Valdez R., *Inequalities,* Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.

[2] Cao Minh Quang, *How many proofs of the Nesbitt's Inequality?,* internetový článek.

[3] Došlá Z., Kuben J., *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné,* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[4] Engel A., *Problem–Solving Strategies,* Springer, New York, 1999.

[5] Herman J., Kučera R., Šimša J., *Metody řešení matematických úloh I,* Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[6] Kin Y. Li, *Math Problem Book I,* Hong Kong Mathematical Society, Hong Kong, 2001.

[7] Kufner A., *Nerovnosti a odhady,* Mladá fronta, edice ŠMM, Praha, 1989.

[8] Larson L., *Metódy riešenia matematických problémov,* Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1990.

[9] Mildorf T., *Olympiad Inequalities,* internetový článek, 2006.

[10] Negut A., *Problems for the Mathematical Olympiads – From the first Team Selection Test to the IMO,* GIL Publishing House, Zalau, 2005.

[11] Pham Kim Hung, *Secrets in inequalities,* GIL Publishing House, Zalau, 2007.

[12] Pham Van Thuan, *BDT, Suy luan & kham pha,* Hanoi, 2007.

[13] Tran Phuong, *Diamonds in Mathematical Inequalities,* Hanoi Publishing House, Hanoi, 2007.

---

[14] Krátká, M., *Tvorba obrázků pro matematické texty pomocí* METAPOST*u*, Diplomová práce, Masarykova univerzita, 2001.

[15] Lomtatidze, L., Plch, R.: *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*, Masarykova univerzita, 2003.

[16] Rybička, J.: *LaTeX pro začátečníky*, KONVOJ, 2003.