PÍSEMNÉ ZKOUŠKY Z TEORIE MNOŽIN II

1. a) Udejte příklad nekonečných množin A, B, C takových, že $|A| < |B| < |C|$.
   b) Vysvětlete proč kardinální čísla netvoří množinu.

2. Buď A dobře uspořádaná množina a $f : A \to A$ prosté izotonní zobrazení. Dokažte, že pro všechna $x \in A$ platí $x \leq f(x)$. (Návod: Uvažte podmnožinu $\{x \in A, f(x) < x\}$.)

3. a) Nalezněte tři navzájem neisomorfní spočetné dobře uspořádané množiny.
   b) Udejte příklad nespočetné dobře uspořádané množiny.
   c) Seřaďte následující ordinální čísla podle velikosti: $2\omega, \omega + 1, \omega + \omega_1, \omega_1 + \omega, 1 + \omega, \omega + \omega, \omega + 1 + \omega$.
   d) Rozhodněte, zda existuje největší spočetné ordinální číslo.

4. Zformulujte
   a) axiom výběru,
   b) princip dobrého uspořádání,
   c) princip maximality.

5. Definujte
   a) kardinální číslo,
   b) uspořádání kardinálních čísel.

Je toto uspořádání
   a)lineární
   b) dobré?

Nalezněte
   a) nejmenší kardinální číslo,
   b) nejmenší nekonečné kardinální číslo,
   c) nejmenší nespočetné kardinální číslo.

6. Reálné číslo se nazývá algebraické, pokud je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že množina algebraických čísel je spočetná.

7. a) Udejte příklad dobře uspořádané množiny A takové, že A^{op} je rovněž dobře uspořádaná.
   b) Udejte příklad dobrého uspořádání na množině $\omega \times \omega$.

8. a) Definujte součin $\alpha \cdot \beta$ ordinálních čísel α, β (s vysvětlením v definici použitých pojmů).
   b) Charakterizujte ordinální čísla α taková, že $\alpha \cdot 2 = 2 \cdot \alpha$.

9. Ukažte, že množina spočetných ordinálních čísel je nekonečná.

10. Definujte
   a) ordinální číslo,
   b) uspořádání ordinálních čísel,
   c) součet ordinálních čísel,
   d) součin ordinálních čísel.

Nalezněte

a) nejmenší ordinální číslo $> \omega^2 + \omega + 1$,

c) nejmenší nespočetné ordinální číslo.

11 .a) Definujte relaci $|A| \leq |B|$ (uspořádání kardinálních čísel).
b) Dokažte, že tato relace je reflexivní a tranzitivní.

12.a) Ukažte, že neexistuje množina A taková, že pro libovolnou množinu B platí $|B| \leq |A|$.
b) Nalezněte množinu A takovou, že pro libovolnou množinu B platí $|A| \leq |B|$.

13. Dokažte, že platí a) $|A| \leq |A \cup B|$,
b) $|A| \leq |A \times A|$.
c) Rozhodněte, zda platí $|B| \leq |A - B|$.

14.a) Definujte součet $\alpha + \beta$, součin $\alpha \cdot \beta$ a mocninu α^β kardinálních čísel.
b) Dokažte, že platí $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

15. Nalezněte 3 navzájem neizomorfní dobrá uspořádání množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel, udejte jejich ordinální čísla a seřaďte je podle velikosti.

16.a) Definujte vlastní začátek uspořádané množiny.

b) Ukažte, že libovolný vlastní začátek dobře uspořádané množiny A je tvaru $Z(a) = \{x \in A \backslash x < a\}$ pro nějaké $a \in A$.

17. Dokažte, že dobře uspořádaná množina není isomorfní s žádným svým vlastním začátkem.

18. Definujte lexikografický součin $A \cdot B$ dobře uspořádaných množin A, B. Dokažte, že $A \cdot B$ je dobře uspořádaná množina.

19. a) Uveďte definici spočetné množiny.

b) Nalezněte 5 navzájem různých spočetných množin.

20. Dokažte, že sjednocení dvou spočetných množin je spočetná množina.

21. a) Dokažte, že nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná.
b) Uveďte příklad dvou množin, které mají různou mohutnost a přitom nejsou ani konečné, ani spočetné.

22. a) Definujte, kdy se uspořádaná množina nazývá dobře uspořádaná.

b) Uveďte příklad uspořádané množiny, která není dobře uspořádaná.

c) Nalezněte všechna možná dobrá uspořádaní množiny $\{1, 2, 3\}$.

23. a) Uveďte definici ordinálního čísla.

b) Definujte relaci $\bar{A} \leq \bar{B}$ (uspořádání ordinálních čísel).

c) Dokažte, že neexistuje největší ordinální číslo.

24. a) Definujte součet $\alpha + \beta$ a součin $\alpha \cdot \beta$ ordinálních čísel.

b) Nakreslete Hasseův diagram dobře uspořádaných množin, které mají ordinální čísla $\omega + 1$ a $1 + \omega$.

c) Dokažte, že platí $\omega + 1 \neq 1 + \omega$.

25. a) Nakreslete Hasseův diagram dobře uspořádaných množin, které mají ordinální čísla $2 \cdot \omega$ a $\omega \cdot 2$.

b) Dokažte, že platí $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

c) Ordinální čísla $\omega, \omega + 1, 1 + \omega, 2 \cdot \omega, \omega \cdot 2$ seřaďte podle velikosti.

26. a) Nakreslete Hasseův diagram dobře uspořádané množiny, která má ordinální číslo $\omega \cdot \omega$.

b) Definujte mocninu α^β ordinálních čísel.

27. Definujte lexikografický součin $A \cdot B$ dobře uspořádaných množin A, B. Dokažte, že uspořádané množiny $A \cdot (B \cdot C)$ a $(A \cdot B) \cdot C$ jsou izomorfní.

28. Zformulujte axiom výběru a princip dobrého uspořádání. Dokažte, že princip dobrého uspořádání implikuje axiom výběru.

29. Dokažte, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná.

30. Reálné číslo se nazývá transcendentní, pokud není kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že množina všech transcendentních reálných čísel je nespočetná.

3. Určete mohutnost množiny $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel.

31. Dokažte, že z principu dobrého uspořádání vyplývá, že uspořádání kardinálních čísel je lineární.

32. Pro libovolné kardinální číslo $\aleph_\alpha$ platí $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Z tohoto vztahu dokažte, že pro libovolná kardinální čísla $\aleph_\alpha, \aleph_\beta$ platí:

a) $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$

b) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$

c) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$

33. Nalezněte (v dobře uspořádané třídě ordinálních čísel):

a) třetí nejmenší nekonečné ordinální číslo

b) nějaké ordinální číslo α s vlastností $\omega^2 < \alpha < \omega^3$

c) největší spočetné ordinální číslo

d) ω-té nespočetné ordinální číslo

34. a) Definujte součet $\alpha + \beta$ ordinálních čísel (s vysvětlením v definici použitých pojmů).

b) Nalezněte všechna ordinální čísla α taková, že $2 + \alpha = \alpha + 2$.

35. Určete ordinální čísla

$$1^\omega, 2^\omega, \ldots, n^\omega, \ldots, \omega^\omega$$

(kde n je přirozené číslo). Rozhodněte, která z těchto ordinálních čísel jsou spočetná a která jsou nespočetná.

36. Zformulujte a dokažte princip transfinitní indukce.

37. Nalezněte dobré uspořádání množiny
a) $\mathbb{Z}$ všech celých čísel
b) $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel
c) všech polynomů, jejichž koeficienty jsou nezáporná celá čísla.

38. Dokažte $(A \times B)^C = A^C \times B^C$.

39. Nalezněte
a) nejmenší ordinální číslo,
b) nejmenší nekonečné ordinální číslo,
c) nejmenší nespočetné ordinální číslo.
d) pět navzájem různých spočetných ordinálních čísel
e) největší spočetné ordinální číslo
f) nejmenší ordinální číslo $> \omega^2$

40. Udejte příklad dobře uspořádané množiny A, izotonního zobrazení $f : A \to A$ a prvku $a \in A$ tak, že $f(a) < a$.

41. Dokažte, že pro libovolnou množinu A platí $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Udejte příklad množiny A takové, že $|A| = |\mathcal{P}(A)|$.

42. Dokažte
a) $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |N|$
b) $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

43. Definujte součet a součin ordinálních čísel. Rozhodněte, zda pro tyto operace platí asociativní, komutativní a distributivní zákon.

44. Seřaďte podle velikosti
a) Kardinální čísla $\aleph_0, 2 \cdot \aleph_0, \aleph_0 \cdot 2, \aleph_0^2, 2^{\aleph_0}, \aleph_0 \cdot \aleph_0$
b) Ordinální čísla $\omega, 2 \cdot \omega, \omega \cdot 2, \omega^2, 2^\omega, \omega \cdot \omega$

45. Buď A dobře uspořádaná množina. Dokažte, že existuje jediný isomorfismus $A \to A$.

46. (1) Definujte
a) uspořádanou množinu
b) lineárně uspořádanou množinu
c) dobře uspořádanou množinu
(2) Udejte příklad
(a) uspořádané množiny, která není lineárně uspořádaná
(b) lineárně uspořádané množiny, která není dobře uspořádaná
(c) konečné lineárně uspořádané množiny, která není dobře uspořádaná.

47. a) Udejte příklad nekonečných množin A, B, C takových, že $|A| < |B| < |C|$.
   b) Udejte příklad množiny, která má právě spočetně mnoho podmnožin.

48. Vysvětlete, proč neexistuje
   a) největší kardinální číslo
   b) největší ordinální číslo.
Rozhodněte, zda existuje
   a) největší kardinální číslo $< \aleph_1$
   b) největší ordinální číslo $< \omega_1$.

49. Rozhodněte, kolik existuje navzájem neizomorfních dobrých uspořádání množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel. Nalezněte tři z nich.

50. a) Definujte relaci $|A| \leq |B|$.
   b) Dokažte, že je reflexivní a tranzitivní.
   c) Rozhodněte, zda je antisymetrická a své rozhodnutí zdůvodněte.
   d) Nalezněte tři nekonečné množiny A, B, C takové, že $|A| < |B| < |C|$.

51. a) Definujte pojem dobře uspořádané množiny.
   b) Rozhodněte, které z následujících množin (s uspořádáním $\leq$ podle velikosti) jsou dobře uspořádané: $\{-3, 0, 1, 3, 5\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1]$.

52. a) Definujte, kdy dobře uspořádané množiny A, B nazýváme izomorfní.
   b) Nalezněte 2 navzájem neizomorfní konečné dobře uspořádané množiny.
   c) Nalezněte 2 navzájem neizomorfní spočetné dobře uspořádané množiny.

53. a) Definujte mocninu α^β ordinálních čísel α a β.
   b) Určete ordinální čísla 1^ω a 2^ω
   c) Rozhodněte, zda $\omega^\omega = \omega$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

54. a) Definujte ordinální číslo ω_1.
   b) Rozhodněte, zda $\omega_1 \leq \omega^\omega$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

55. Následující ordinální čísla seřaďte podle velikosti: $1000, 1+\omega, \omega+1, 2\cdot\omega, \omega\cdot 2, \omega+\omega, \omega+1+\omega$.

56. Určete mohutnost množiny $\mathbb{N}^*$ všech konečných posloupností přirozených čísel. Výsledek zdůvodněte.

57. Určete mohutnost množiny $Rel(\mathbb{N})$ všech binárních relací na množině přirozených čísel. Výsledek zdůvodněte.

58. a) Definujte součet ordinálních čísel $\alpha + \beta$.
b) Rozhodněte, zda $\omega + \omega = \omega$. Své rozhodnutí zdůvodněte.
c) Rozhodněte, zda $\omega + \omega^2 = \omega^2$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

59. Následující ordinální čísla seřaďte podle velikosti (a vyznačte případné rovnosti):

$$10, 10^{\omega}, \omega^{10}, \omega + \omega, \omega^{\omega}, \omega_1, 10 + \omega.$$

60. Seřaďte následující množiny podle mohutností (s vyznačením případných rovností): množina $\mathbb{I}$ iracionálních čísel, množina $M(\mathbb{R})$ čtvercových reálných matic, množina $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ reálných funkcí, množina $\mathbb{R}[x]$ polynomů s reálnými koeficienty a množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel.

61. Nalezněte nějaké dobré uspořádání množiny $M_2(\mathbb{Q})$ čtvercových matic nad $\mathbb{Q}$ stupně 2.

62. Následující ordinální čísla seřaďte podle velikosti (a vyznačte případné rovnosti):

$$\omega + 1 + \omega, \omega \cdot (\omega + 1), (1 + \omega) \cdot \omega, (1 + \omega) \cdot (\omega + 1), \omega + 1 + \omega^2 + \omega.$$

63. Následující množiny seřaďte do posloupnosti $A_1, \dots, A_7$ takové, že A_i předchází A_j, právě když $|A_i| \leq |A_j|$. Úseky posloupnosti sestávající z množin stejné mohutnosti podtrhněte:

$$\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Q}, P(\mathbb{R}), \emptyset, P(\mathbb{N}), \mathbb{I}$$

($\mathbb{I}$ označuje množinu všech iracionálních čísel):

64. Rozhodněte, zda uspořádaná množina A je dobře uspořádaná. V kladném případě napište *ano*, v záporném uveďte neprázdnou podmnožinu $X \subseteq A$, která nemá nejmenší prvek:
 a) $A = \mathbb{R}$,
 b) $A = \mathbb{Z}$,
 c) $A = P(\{0, 1\}$ (uspořádaná inkluzí).

65. Rozhodněte, zda pro libovolné uspořádané množiny A, B, C platí distributivní zákon

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

V kladném případě napište *ano* a uveďte důkaz, v záporném případě uveďte *ne* a udejte uspořádané množiny A, B, C, pro které tvrzení neplatí.

66. Nalezněte nejmenší ordinální číslo α takové, že ordinální mocnina α^{ω} je
 a) konečné ordinální číslo,
 b) spočetné ordinální číslo,
 c) nespočetné ordinální číslo.

67. a) Definujte relaci $|A| \leq |B|$.
 b) Dokažte, že je reflexivní a tranzitivní.
 c) Rozhodněte, zda je antisymetrická a své rozhodnutí zdůvodněte.

68. a) Definujte mocninu α^{β} ordinálních čísel α a β.

b) Určete ordinální čísla 1^ω a 2^ω.
c) Rozhodněte, zda $\omega^\omega = \omega$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

69. a) Definujte ordinální číslo ω_1.
b) Rozhodněte, zda $\omega_1 \leq \omega^\omega$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

70. Vyjádřete ω_1 v Cantorově normálním tvaru (t.j.,

$$\omega_1 = \omega^{\gamma_0} \cdot m_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k,$$

kde $k, m_0, m_1, \ldots, m_k$ jsou nenulová přirozená čísla a $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ ordinální čísla.

71. Nalezněte dobré uspořádání množiny všech polynomů, jejichž koeficienty jsou nezáporná celá čísla.

72. a) Definujte mocninu α^β ordinálních čísel α a β.
b) Spočtěte ordinální číslo ω_1^ω.

73. a) Nalezněte ordinální čísla $\delta \leq \omega$ a $\rho < 3$ taková, že $\omega = 3 \cdot \delta + \rho$.
b) Nalezněte ordinální čísla $\delta \leq \omega_1$ a $\rho < \omega$ taková, že $\omega_1 = \omega \cdot \delta + \rho$.

74. a) Definujte relaci $\overline{A} \leq \overline{B}$.
b) Dokažte, že je reflexivní a tranzitivní.
c) Rozhodněte, zda je antisymetrická a své rozhodnutí zdůvodněte.

75. Ordinální číslo $\overline{A}$ se nazývá spočetné, pokud $|A| = \aleph_0$.
a) Nalezněte infimum množiny všech spočetných ordinálních čísel.
b) Nalezněte supremum množiny všech spočetných ordinálních čísel.

76. Rozhodněte, zda
(a) $\omega^\omega = \omega$,
(b) $\omega^{(\omega^\omega)} = \omega^\omega$,
(c) existuje nejmenší ordinální číslo α takové, že $\omega^\alpha = \alpha$,
(d) v kladném případě v (c) rozhodněte, zda toto číslo je spočetné.

77. a) Definujte mocninu $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ kardinálních čísel $\aleph_\alpha$ a $\aleph_\beta$.
b) Seřaďte následující kardinální čísla podle velikosti: $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, \aleph_0^{\aleph_0}$.

78. Kardinální číslo $\aleph_\alpha$ se nazývá regulární, pokud sjednocení méně než $\aleph_\alpha$ množin mohutnosti menší než $\aleph_\alpha$ má mohutnost menší než $\aleph_\alpha$. Dokažte, že $\aleph_{\alpha+1}$ je vždy regulární.

79. Nalezněte 2 navzájem neizomorfní dobrá uspořádání množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel, která nemají největší prvek.

80. Dokažte, že libovolná podmnožina dobře uspořádané množiny je dobře uspořádaná.

81. Udejte příklad dobře uspořádané množiny A takové, že $\bar{A} = \omega^2 + 1$.

82. Rozhodněte, zda pro ordinální čísla α, β platí

$$\alpha^\omega = \beta^\omega \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Své rozhodnutí zdůvodněte.

83. Nalezněte 3 navzájem neizomorfní nekonečné množiny, udejte jejich kardinální čísla a seřad̆te je podle velikosti.

84. Nalezněte ω-té nespočetné ordinální číslo.

85. Dokažte, že $\omega^{\omega_1} = \omega_1$.

86. Ordinální číslo $\overline{A}$ se nazývá nespočetné, pokud $|A| > \aleph_0$.
a) Rozhodněte, zda existuje infimum množiny všech nespočetných ordinálních čísel. V kladném případě jej nalezněte, v záporném případě tvrzení dokažte.
b) Rozhodněte, zda existuje supremum množiny všech nespočetných ordinálních čísel. V kladném případě jej nalezněte v záporném případě tvrzení dokažte.

87. Nalezněte
(a) třetí nejmenší nekonečné ordinální číslo,
(b) nějaké limitní ordinální číslo α s vlastností $\omega^2 < \alpha < \omega^3$,
(c) ω-té nespočetné ordinální číslo.

88. a) Definujte mocninu $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ kardinálních čísel $\aleph_\alpha$ a $\aleph_\beta$.
b) Uspořádejte následující kardinální čísla podle velikosti: $\aleph_1, \aleph_0 \cdot \aleph_1, 2^{\aleph_1}, \aleph_0^{\aleph_1}$.

89. Rozhodněte, kolik existuje navzájem neizomorfních dobrých uspořádání množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel. Nalezněte tři z nich.

90. Buď $W_0 = \emptyset$, $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha$ a $W_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} W_\beta$ pro α limitní; indexy probíhají ordinální čísla.
a) Určete W_3.
b) Nalezněte nejmenší α s vlastností $\omega \in W_\alpha$.
c) Nalezněte jednoprvkovou množinu, která nepatří do W_ω.

91. a) Definujte pojem dobře uspořádané množiny.
b) Rozhodněte, které z následujících množin (s uspořádáním $\leq$ podle velikosti) jsou dobře uspořádané: $\mathbb{Q}$, ω, $\mathbb{Z}$, $\{1, 2, 4, 6\}$, $\{\frac{1}{n} \backslash n \in \mathbb{N}\}$.

92. Definujte
a) pojem izomorfismu dvou dobře uspořádaných množin,
b) pojem vlastního začátku dobře uspořádané množiny.

Udejte příklad dobře uspořádané množiny izomorfní se svým vlastním začátkem.

93. a) Definujte mocninu α^β ordinálních čísel α a β.
b) Určete ordinální číslo 2^{ω_1}. Využijte přitom vztahu: $1 < \alpha, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

94. Rozhodněte, zda pro ordinální čísla α, β, γ platí tvrzení

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^\gamma < \beta^\gamma.$$

Tvrzení buď dokažte nebo vyvraťte protipříkladem.

95. Cantorův normální tvar ordinálního čísla α je

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \cdot m_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k,$$

kde $k, m_0, m_1, \ldots, m_k$ jsou nenulová přirozená čísla a $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ ordinální čísla.
Vyjádřete v tomto tvaru $\omega_2 + \omega_1 + \omega + 1$.

96. Udejte příklad množiny mohutnosti
a) $\aleph_0$,
b) $2^{\aleph_0}$,
c) $\aleph_1$.

97. Určete mohutnost množiny
a) všech konečných posloupností symbolů $\{a, b\}$,
b) všech spočetných posloupností symbolů $\{a, b\}$.

98. Buď $W_0 = \emptyset$, $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$ a $W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$ pro α limitní; indexy probíhají ordinální čísla.
a) Udejte příklad množiny patřící do W_5 ale ne do W_4.
b) Nalezněte nejmenší α s vlastností $\omega_1 \in W_\alpha$.
c) Nalezněte jednoprvkovou množinu, která nepatří do W_{ω_1}.

99. Buďte $\alpha < \beta$ a γ ordinální čísla. Rozhodněte, zda platí (tvrzení buď dokažte nebo udejte protipříklad):
a) $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$,
b) $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

100. Buď $W_0 = \emptyset$, $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$ a $W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$ pro α limitní; indexy probíhají ordinální čísla.
a) Udejte příklad množiny patřící do W_ω ale ne do W_n pro žádné $n \in \omega$.
b) Nalezněte nejmenší α s vlastností $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \in W_\alpha$.
c) Nalezněte konečnou množinu, která nepatří do W_ω.