

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Šárka Hošková
Jaromír Kuben
Pavlína Račková

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016

Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

Hošková Šárka, Kuben Jaromír, Račková Pavlína
Integrální počet funkcí jedné proměnné

© Šárka Hošková, Jaromír Kuben, Pavlína Račková 2006
ISBN 80-248-1191-X

Obsah

Předmluva	vi
1 Úvod	1
1.1 Co je to integrální počet a čím se zabývá	1
1.2 Co budete po prostudování tohoto textu umět	1
1.3 Orientace v textu	2
2 Neurčitý integrál	5
2.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál	6
2.2 Základní integrační metody	10
2.2.1 Tabulkové integrály	10
Příklady k procvičení	15
Klíč k příkladům k procvičení	18
2.2.2 Metoda per partes	19
Příklady k procvičení	26
Klíč k příkladům k procvičení	27
2.2.3 Substituční metoda	28
Příklady k procvičení	37
Klíč k příkladům k procvičení	39
2.3 Rozklad na parciální zlomky	40
2.4 Integrace racionální lomené funkce	45
2.4.1 Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli	45
2.4.2 Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli	49
2.4.3 Integrace parciálních zlomků s reálnými a komplexními kořeny ve jmenovateli	54
Příklady k procvičení	56
Klíč k příkladům k procvičení	58
2.5 Integrace některých speciálních typů funkcí	60
2.5.1 Integrály obsahující goniometrické funkce	60
Příklady k procvičení	69
Klíč k příkladům k procvičení	71
2.5.2 Integrály obsahující odmocniny	72
2.6 Závěrečné poznámky	79

2.6.1	Dostaneme integrací elementární funkce opět elementární funkci?	79
2.6.2	Využití systémů počítačové algebry při výpočtu integrálů	81
2.6.3	Technika slepování	83
	Příklady k procvičení	87
	Klíč k příkladům k procvičení	88
2.7	Závěrečná cvičení ke kapitole 2	90
	Klíč k příkladům k procvičení	92
	Autotest	94
	Klíč k autotestu	95
3	Určitý integrál	96
3.1	Od výpočtu obsahů a objemů k integrálnímu počtu	96
3.2	Konstrukce určitého integrálu	104
3.3	Existence určitého integrálu	110
3.4	Základní vlastnosti určitého integrálu	113
3.5	Výpočet určitého integrálu	117
3.5.1	Metoda per partes pro určitý integrál	122
3.5.2	Substituční metoda pro určitý integrál	123
3.5.3	Určitý integrál jako funkce mezí	130
	Příklady k procvičení	132
	Klíč k příkladům k procvičení	134
3.6	Aplikace určitého integrálu	135
3.6.1	Geometrické aplikace	135
	Příklady k procvičení	149
	Klíč k příkladům k procvičení	151
3.6.2	Fyzikální aplikace	153
	Příklady k procvičení	160
	Klíč k příkladům k procvičení	161
3.7	Počátky infinitezimálního počtu	162
	Autotest	169
	Klíč k autotestu	170
4	Nevlastní integrál	171
4.1	Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu	171
4.2	Nevlastní integrál z neohraničené funkce	177
4.3	Zobecnění nevlastního integrálu	182
	Příklady k procvičení	192
	Klíč k příkladům k procvičení	193
4.4	Kritéria konvergence nevlastních integrálů	194
4.4.1	Kritéria konvergence nezáporných funkcí	195
4.4.2	Absolutní a relativní konvergence	199
	Příklady k procvičení	201
	Klíč k příkladům k procvičení	203

Autotest	203
Klíč k autotestu	203
5 Numerické metody řešení určitého integrálu	204
5.1 Obdélníková metoda	205
5.2 Lichoběžníková metoda	207
5.3 Simpsonova metoda	208
5.4 Cvičení ke kapitole 5	213
Klíč k příkladům k procvičení	214
Literatura	216
Rejstřík	218

Předmluva

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s. r. o. v Mostě, Univerzita obrany, Brno a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5. 1. 2006 a bude ukončen 4. 1. 2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím Internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese <http://www.studopory.vsb.cz/>.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděční, pokud nás na ně upozorníte.

Kapitola 1

Úvod

1.1. Co je to integrální počet a čím se zabývá

Integrál je jedním z ústředních pojmů matematické analýzy a matematiky vůbec. Jeho vznik motivovaly mimo jiné dvě úlohy:

1. určení funkce, je-li známa její derivace,
2. výpočet plochy, která je vymezena grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a osou nezávislé proměnné x .

Tyto dvě úlohy vedou k pojmu **neurčitého a určitého integrálu**. Vyšetřování vlastností a výpočet těchto spolu souvisejících podob integrálu je obsahem **integrálního počtu**.

S rozvojem matematiky a v souvislosti s potřebami přírodních věd a techniky se pojem integrálu vyvíjel, byl předmětem mnoha zobecnění a prošel řadou změn. Postupně vznikala řada neustále obecnějších integrálů, které čím dál tím lépe řešily dvě výše uvedené úlohy.

Podíváme-li se do dnešních učebnic diferenciálního a integrálního počtu, většinou výklad začíná seznámením s reálnými čísly, následuje pojem limita, pomocí limity se definuje derivace, pak neurčitý integrál a nakonec integrál určitý.

Historicky ovšem tyto pojmy nevznikaly v tomto pořadí. Ve skutečnosti se nejdříve vyvíjel pojem určitého integrálu (výpočty obsahů a objemů), pak derivace a neurčitý integrál (v 17. stol.), které byly založeny na intuitivním chápání nekonečně malé a velké veličiny a tudíž limitního procesu, a o 100 let později se upřesňoval pojem limity a teprve v 19. století byla vybudována teorie reálných čísel.

1.2. Co budete po prostudování tohoto textu umět

Obsahem skript je výklad integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné, který společně s diferenciálním počtem tvoří základ matematického vzdělání inženýra. Znalost integrálního počtu funkcí jedné proměnné je nezbytným předpokladem pro studium dalších matematických partií, jako diferenciálních rovnic, integrálního počtu funkcí více proměnných, vektorové analýzy, integrálních transformací a řady dalších. Neobejde se bez něho ani mechanika, fyzika a mnoho dalších technických disciplín.

1.3. Orientace v textu

Text je rozdělen do čtyř kapitol. První je věnována neurčitému integrálu a druhá Riemannovu určitému integrálu. Z hlediska výkladu je tento přístup snazší a přehlednější. Pro výuku je však možné probrat pouze první dvě sekce první kapitoly, pak zavést určitý integrál, vysvětlit jeho základní vlastnosti a Newtonovu-Leibnizovu formuli, potom se vrátit ke zbytku první kapitoly a na závěr dokončit druhou kapitolu, zejména různé aplikace. Zvolený přístup umožní dojít na cvičeních dříve k určitému integrálu a průběžně procvičovat i jeho výpočet. Třetí kapitola je pak týká zobecnění na nevlastní integrál. Čtvrtá, nejkratší, uvádí informativně základní numerické metody výpočtu určitého integrálu.

Vzhledem k tomu, pro koho je text určen, není řada tvrzení dokazována. Prakticky vše je dokázáno v první kapitole, kde důkazy nejsou příliš obtížné. Naopak ve druhé kapitole důkazy téměř nejsou, protože jsou technicky většinou dost obtížné. Ve zbývajících kapitolách jsou dokázána jen některá jednodušší tvrzení. V dnešní době totiž klesá význam „drilování“ mechanického integrování, protože nám mohou podstatně pomoci tzv. programy symbolické neboli počítačové algebry. Pro jejich správné používání je ovšem třeba dobře rozumět pojmům, se kterými tyto programy pracují, jinak nedokážeme odhalit chyby, které nutně tyto programy při nesprávném použití dělají. Proto je věnována velká pozornost důkladnému zavádění pojmů, jejich správnému pochopení a přesné formulaci matematických vět. Pro větší názornost je text doplněn řadou obrázků.

Skriptum obsahuje spoustu velmi podrobně řešených příkladů, které by čtenáři měly pomoci porozumět probírané látce. Za jednotlivými tematickými celky jsou dále zařazena cvičení. Samostatné řešení v nich obsažených příkladů tvoří nedílnou součást studia. Jen tak mohou studenti získat potřebné početní návyky a hlouběji si osvojit nové pojmy. Pro usnadnění kontroly jsou všechna cvičení opatřena výsledky. Pro lepší orientaci v textu jsou konce důkazů označeny symbolem \square a konce cvičení symbolem \blacktriangle .

Existuje řada učebnic a skript, které jsou věnovány problematice integrálu funkcí jedné proměnné. V textu [18] naleznete všechny důkazy neuvedené v těchto skriptech, pokud není explicitně uveden jiný pramen. Mezi klasické české učebnice patří [8]. Poučné je číst rovněž knihu [19], která byla první moderní českou učebnicí integrálního počtu. Přestože její jazyk zastaral, její obsah je pozoruhodný a je zajímavé srovnat, na co se kladl při výkladu této partie důraz před téměř sto lety a na co se klade dnes. Rovněž lze doporučit učebnici [16] a pro ty, kteří hovoří rusky, také klasickou knihu [5].



Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.



Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Touto ikonou jsou označeny všechny řešené příklady. Konec řešených příkladů je označen plným trojúhelníčkem.



Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní pojmy, které je třeba umět přesně definovat. To znamená pojem nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jeho přesnou definici.



Kontrolní otázky

Těmito otázkami si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.



Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku.



Autotest

Pomocí autotestu si otestujete své znalosti a početní dovednosti z určitého objemu učiva.



Pro zájemce

Tato část obsahuje komentáře, příp. rozšíření učiva. Je nepovinná a je od ostatního textu odlišena menším typem písma.



Klíč k příkladům k procvičení

Za každým oddílem s příklady k procvičení je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky neřešených příkladů.



Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.





Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Závěrem

Celý text vychází z koncepce výuky matematické analýzy pro první ročník na Fakultě elektrotechniky a informatiky VŠB–TU v Ostravě a na Fakultě vojenských technologií Univerzity obrany. Jako podklad k vytvoření tohoto textu posloužila skripta [7]. Výklad i grafická podoba byly uzpůsobeny potřebám studentů v distanční a kombinované formě studia.

Text existuje ve dvou verzích — tištěné a interaktivní. U interaktivní verze se jedná o multimediální výukový text obsahující animace a interaktivní testy. Oba studijní materiály byly vytvořeny v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*. Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Děkujeme recenzentům prof. RNDr. Josefu Diblíkovi, DrSc. z Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT v Brně a doc. RNDr. Zdeňku Šmardovi, CSc. z Ústavu matematiky FEKT VUT v Brně za řadu připomínek, které napomohly ke zlepšení textu.

Dále bychom chtěli také poděkovat prof. RNDr. Štefanu Schwabikovi, DrSc. z MÚ AV ČR a RNDr. Petře Šarmanové, Ph.D. z FEI VŠB–TU Ostrava za poskytnutí materiálu týkajícího se historie integrálního počtu.

Za pomoc se zařazením animací do interaktivní verze a vytvoření úvodních stránek výukového CD děkujeme Ing. Mgr. Michalovi Haleckému.

Text byl připraven sázecím systémem pdf \TeX ve formátu $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, většina obrázků byla vytvořena programem METAPOST s použitím balíku \TeX ovských maker `mfpic`. Dva obrázky byly připraveny v programu Maple.

Brno, září 2006

Autoři

Kapitola 2

Neurčitý integrál

Průvodce studiem



V předcházejícím studiu jste se seznámili s důležitým pojmem, a to derivací funkce. Funkci f byla přiřazena jistým způsobem definovaná nová funkce f' . Přitom pro konkrétní hodnotu x číslo $f'(x)$ mohlo mít různou interpretaci podle toho, co vyjadřovala funkce f . Např. geometricky hodnota $f'(x)$ měla význam směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x, f(x)]$, tj. byla to tangenta úhlu, který svírala tečna s kladnou částí osy x . Vyjadřovala-li funkce f polohu bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, udávalo číslo $f'(x)$ okamžitou rychlost tohoto bodu v čase x , vyjadřovala-li funkce f okamžitou rychlost takového bodu v závislosti na čase, udávalo číslo $f'(x)$ okamžité zrychlení tohoto bodu v čase x , atd. Obecně hodnota $f'(x)$ vyjadřovala „míru“ velikosti změny funkce f v závislosti na změně nezávisle proměnné x . Čím větší byla hodnota $f'(x)$, tím prudčeji funkce f narůstala v okolí bodu x a naopak.

Úloha, kterou se v této kapitole budeme zabývat, je v podstatě opačná. K zadané funkci f budeme hledat funkci F takovou, aby platilo $F' = f$. Budeme se tedy ptát, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f . Tudíž ze znalosti směrníc tečen ke grafu funkce budeme chtít najít tuto funkci, ze znalosti okamžité rychlosti bodu budeme chtít zjistit polohu tohoto bodu, ze znalosti okamžitého zrychlení bodu budeme chtít určit jeho okamžitou rychlost apod.

V této kapitole si mimo jiného postupně všimneme zejména následujících otázek:

- Zda vůbec taková funkce F existuje.
- Zda takových funkcí může být více.
- Jak nějakou takovou funkci najít ke konkrétně zadané elementární funkci f .

Zatímco odpovědi na první dvě otázky budou mít teoretičtější charakter, u třetí otázky, které bude věnováno nejvíc místa, nám půjde o praktické nalezení takové funkce F .



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- objasnit pojem primitivní funkce,
- objasnit pojem neurčitý integrál,
- prakticky integrovat některé jednoduché funkce,
- použít metodu per partes a substituční metodu,
- integrovat racionální lomenou funkci,
- integrovat integrály obsahující goniometrické funkce,
- integrovat integrály obsahující odmocniny.

2.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 2.1. Necht' funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I . Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní* k funkci $f(x)$ na I , jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá *neurčitý integrál* z funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x) dx$. Tedy

$$\int f(x) dx = \{F(x) : F(x) \text{ je primitivní k } f(x) \text{ na } I\}. \quad (2.1)$$

Pokud v předchozí definici není interval I otevřený, v krajních bodech máme na mysli jednostranné derivace.

Symbol \int pro neurčitý integrál vznikl protažením písmene S, kterým začíná slovo *suma* (jakou to má souvislost, bude patrné v kapitole 3). Funkci $f(x)$ nazýváme *integrandem*. Výraz dx je diferenciál proměnné x a v tuto chvíli je jeho význam jen v tom, že nám říká, jak je označena proměnná. Později ale uvidíme, že nám usnadní např. výpočetní mechanismus při tzv. substituční metodě.

Zkusme nyní najít nějakou primitivní funkci např. k funkci $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také pro funkci $\sin x + 3$ platí $(\sin x + 3)' = \cos x$, tudíž i funkce $\sin x + 3$ je primitivní k funkci $\cos x$. Podobně obecněji všechny funkce $\sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, jsou primitivní k funkci $\cos x$.

Obecně platí: Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I , jsou také funkce $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, rovněž primitivní k $f(x)$ na I . Má-li tedy funkce $f(x)$ aspoň jednu primitivní funkci, má jich pak nekonečně mnoho. Naskýtá se otázka, zda toto už jsou všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$. Odpověď dává následující věta.

Věta 2.2. Necht' funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I . Pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Necht' $F(x)$ a $G(x)$ jsou dvě primitivní funkce k $f(x)$. Tedy $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Protože I je interval, platí podle důsledku Lagrangeovy¹ věty o střední hodnotě — viz [12, str. 233], že tyto funkce se liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G(x) = F(x) + c$, což jsme měli dokázat. \square

Jinými slovy, předchozí věta říká, že známe-li jednu primitivní funkci, známe všechny. Rozdíl dvou takových primitivních funkcí je na intervalu I konstantní.

Pro zájemce:

Zdůrazněme však, že je podstatné, že I je interval. Pokud I není interval, může se stát, že $F'(x) = G'(x)$, ale $F(x) - G(x)$ není na I konstantní. Např. funkce $F(x) = \operatorname{sgn} x$ uvažovaná na množině $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je rovna -1 na intervalu $(-\infty, 0)$ a 1 na intervalu $(0, +\infty)$, a má tedy v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nulovou derivaci — viz obr. 2.2. Jinou takovou funkcí mající všude nulovou derivaci je např. $G(x) = 0$. Přitom jejich rozdíl $F(x) - G(x) = \operatorname{sgn} x$ není na množině $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstantní. Je ovšem konstantní na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ resp. $(0, +\infty)$, jsou-li uvažovány samostatně, což je ve shodě s větou 2.2. (Připomeňme, že pojem primitivní funkce jsme zavedli jen na intervalu.)



Vzhledem k předchozí větě můžeme nyní upravit vzorec (2.1). Je-li $F(x)$ nějaká primitivní funkce k $f(x)$, pak

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Číslo c nazýváme *integrační konstanta*. Říkáme, že neurčitý integrál je určen až na konstantu.

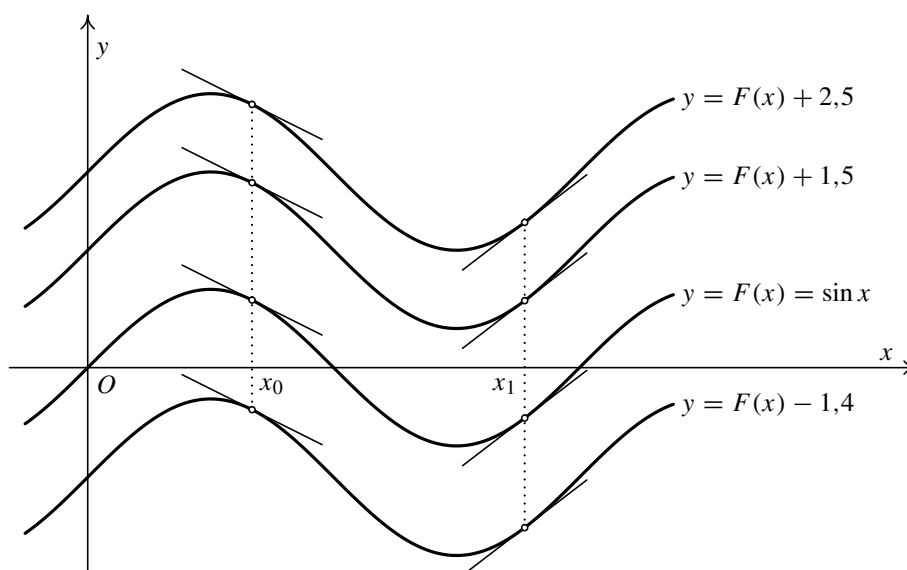
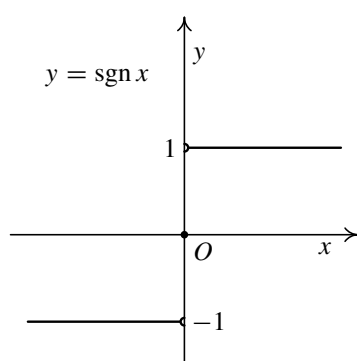
Přesněji by výraz na pravé straně rovnosti (2.2) měl být ve složených závorkách, protože jde o množinu, ale tento zápis se nepoužívá. Rovnost (2.2) tedy znamená, že všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ mají tvar $F(x) + c$, kde $F(x)$ je jedna konkrétní pevně zvolená primitivní funkce k $f(x)$ a c je libovolná konstanta.

Je-li např. $f(x) = \cos x$, za pevně zvolenou primitivní funkci můžeme volit třeba $F(x) = \sin x$. Pak

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Situace je znázorněna na obr. 2.1. Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou vůči sobě rovnoběžně posunuty ve směru osy y . Pro každé pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tedy mají stejné směrnice, což odpovídá tomu, že všechny primitivní funkce $F(x) + c$ mají touž derivaci $f(x)$. Situace je znázorněna na zmíněném obrázku pro konkrétní body x_0 a x_1 .

¹**Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) (čti lagranž) — významný francouzský matematik a mechanik. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky. Mimo jiné ovlivnil rozvoj matematické analýzy a položil základy variačního počtu.

Obr. 2.1: Primitivní funkce k funkci $\cos x$ 

Obr. 2.2

Nyní si všimneme otázky, zda k dané funkci $f(x)$ vůbec nějaká primitivní funkce existuje. Obecně tomu tak není. Např. o funkci $\operatorname{sgn} x$ definované vztahem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

jejíž graf je na obr. 2.2, lze ukázat, že k ní neexistuje primitivní funkce na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Tuto skutečnost nebudeme dokazovat (funkce $\operatorname{sgn} x$ není na \mathbb{R} tzv. darbouxovská — viz např. [4, str. 187]). Naštěstí ale existuje velmi

jednoduchá postačující podmínka existence primitivní funkce, která je obsahem následující věty.

Věta 2.3. *Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f .*

Větu nebudeme dokazovat, protože k tomu nemáme potřebné nástroje. V kapitole 3 se zmíníme, jak se taková primitivní funkce konstruuje (důsledek 3.29).

Předchozí věta je typickým příkladem tzv. *existenční věty*. Říká, že něco existuje, ale neříká, jak se to najde. (Ani důkaz, který jsme neuvedli, není v tomto smyslu konstruktivní.) Později se o tomto problému, který značně komplikuje situaci kolem hledání primitivních funkcí, ještě zmíníme — viz kapitola 2.6.

Na závěr uvedeme jednoduchou, ale velmi důležitou větu, kterou budeme v dalším textu při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Věta 2.4. *Nechť na intervalu I existují integrály $\int f(x) dx$ a $\int g(x) dx$. Pak na I existují také integrály $\int (f(x) \pm g(x)) dx$ a $\int \alpha f(x) dx$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, a platí:*

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad (2.3)$$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx. \quad (2.4)$$

Důkaz. Plyne přímo ze základních vlastností derivace. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce ke $g(x)$, platí $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$, takže $F(x) \pm G(x)$ je primitivní funkce k $f(x) \pm g(x)$ a podobně platí $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$, takže $\alpha F(x)$ je primitivní funkce k $\alpha f(x)$. \square

Stručně říkáme, že „neurčitý integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) neurčitých integrálů“ a že „konstantu, kterou se násobí (tzv. multiplikační konstantu), smíme z neurčitého integrálu vytknout“. První tvrzení lze pochopitelně snadno rozšířit ze dvou na libovolný konečný počet sčítanců. Všimněte si rovněž, že z hlediska existence musíme číst vzorce (2.3) a (2.4) zprava doleva — integrály na pravých stranách musí existovat; pak existují i integrály nalevo a platí příslušné rovnosti.

Konečně ještě připomeňme, že přímo z definice neurčitého integrálu vyplývá platnost rovností

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x) \quad \text{a} \quad \int F'(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

takže operace derivování a integrace jsou navzájem komplementární. O správnosti výsledku integrace se tudíž vždy můžeme přesvědčit derivováním výsledku — musí nám vyjít zadaná funkce.

Poznámka 2.5. Všimněme si ještě vztahu (2.3). Na jeho pravé straně stojí ve skutečnosti součet dvou nekonečných množin. Upřesníme si, co se takovým součtem myslí. Sečteme libovolný prvek množiny $\int f(x) dx$ s libovolným prvkem množiny $\int g(x) dx$. Výsledkem je množina všech takových součtů. Avšak všechny prvky prvního neurčitého integrálu mají tvar $F(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, a všechny prvky druhého neurčitého integrálu mají tvar $G(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Zde $F(x)$ a $G(x)$ jsou pevně zvolené primitivní funkce k $f(x)$ a $g(x)$. Tedy výsledná množina je tvořena funkcemi tvaru $F(x) + G(x) + c_1 + c_2$, kde c_1 a c_2 probíhají nezávisle všechna reálná čísla. Jde tedy o množinu tvořenou funkcemi $F(x) + G(x) + c$, kde c je libovolné reálné číslo. Ale to je přesně levá strana zmíněného vztahu.

Podobně ve vztahu (2.4) násobek množiny $\int f(x) dx$ konstantou α na pravé straně tohoto vztahu provedeme tak, že násobíme konstantou α každý prvek této množiny. Prvky takto vytvořené množiny jsou pak všechny funkce tvaru $\alpha F(x) + \alpha c$, kde c je libovolné reálné číslo, což je (pro $\alpha \neq 0$) totéž, co všechny funkce tvaru $\alpha F(x) + c$.

2.2. Základní integrační metody



Průvodce studiem

Obsahem tohoto oddílu bude naučit se prakticky integrovat některé jednoduché funkce, se kterými se v běžných aplikacích setkáváme. Připomeňme, že tzv. elementárními funkcemi rozumíme mocninné funkce, exponenciální a logaritmické funkce, goniometrické a cyklometrické funkce, hyperbolické a hyperbolometrické funkce a všechny další funkce, které z nich můžeme vytvořit konečným počtem aritmetických operací sečítání, odčítání, násobení a dělení a skládáním.

2.2.1. Tabulkové integrály

První skupinu vzorců dostaneme, obrátíme-li základní vzorce pro derivování. Po malých úpravách z nich dostaneme vzorce č. 1–10, 12 a 13 následující tabulky, která je doplněna o dva užitečné vzorce 11 a 14. Vzorce z tabulky 2.1 se obvykle nazývají *tabulkové integrály*. O správnosti všech následujících vzorců se lze snadno přesvědčit derivováním.

Než si ukážeme použití vzorců na příkladech, uvedeme několik komentářů.

- i) Vzorec 2 je zkráceným zápisem pro $\int 1 dx$. Podobně se ve vzorci 4 a dalších obdobných integrálech používá místo $\int \frac{1}{x} dx$ zápis $\int \frac{dx}{x}$ apod.
- ii) Vzorec 3 umožňuje integraci obecné mocniny, tj. i nejrůznějších *odmocnin*.
- iii) Protože derivace funkcí arkustangens a arkuskotangens se liší pouze znaménkem a totéž platí pro arkussinus a arkuskosinus, je možné ve vzorci 9 resp. 10 psát $\int \frac{1}{x^2+1} dx = -\operatorname{arccotg} x + c$ resp. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$ a analogicky v obecných verzích.
- iv) Ve všech vzorcích je nezávisle proměnná označená písmenem x . Při praktickém použití tomu tak pochopitelně nemusí vždy být. Jak je proměnná označená, se dozvíme z diferenciálu. Pak je třeba vzorec adekvátně „upravit“. Např. $\int \cos x dx = \sin x + c$, $\int \cos t dt = \sin t + c$, $\int \cos u du = \sin u + c$ atd.
Tato jednoduchá záměna někdy dělá studentům problémy. Zkuste se proto učit vzorce z tabulky 2.1 bez proměnné (pokud je to aspoň trochu možné). Např.
 - integrál ze sinu je mínus kosinus (vzorec 7),
 - integrál z e na proměnnou je „to samo“ (vzorec 5),
 - integrál z jedna lomeno proměnná je přirozený logaritmus absolutní hodnoty proměnné (vzorec 4),
 - integrál z proměnné na entou je proměnná na en plus prvou lomeno tím samým číslem (vzorec 3).
 I když je to občas trochu krkolomné, uvidíte, že se vám to vyplatí.
- v) Domluvíme se, že všude v dalším textu bude c připsané na konci výpočtu neurčitého integrálu znamenat integrační konstantu.
- vi) Vzorce z předchozí tabulky byste měli umět bezpečně z paměti. V opačném případě, i když budete mít tabulku k dispozici, nedokážete u trochu složitějších případů vybrat

1. $\int 0 \, dx = c,$
2. $\int dx = x + c,$
3. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \text{kde } n \in \mathbb{R}, n \neq -1,$
4. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c, \quad \text{obecněji } \int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + c,$
5. $\int e^x \, dx = e^x + c, \quad \text{obecněji } \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c,$
6. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,$
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad \text{obecněji } \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c,$
8. $\int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad \text{obecněji } \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c,$
9. $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad \text{obecněji } \int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} x + c, \quad \text{obecněji } \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c,$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c,$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c, \quad \text{obecněji } \int \frac{1}{\cos^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + c,$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c, \quad \text{obecněji } \int \frac{1}{\sin^2 ax} \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax + c,$
14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c.$

Tab. 2.1: Tabulka neurčitých integrálů

V předchozí tabulce a znamená s výjimkou vzorce 6 libovolné nenulové číslo, tj. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Číslo $c \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Vzorce platí na intervalech, na nichž jsou vždy obě strany definovány.

správný vzorec. U příkladů, kde je nutná nějaká úprava, vás nenapadne, jakou zvolit, protože nebudete ve vzniklých výrazech vidět příslušné vzorce. Rozhodně nevěřte, že k úspěšnému integrování stačí mít tabulku vzorců před očima a není třeba vzorce znát z paměti.



Příklad 2.6. Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x \, dx, & \text{b) } \int \frac{1}{x^2} \, dx, & \text{c) } \int \sqrt{x} \, dx, \\ \text{d) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx, & \text{e) } \int e^{-x} \, dx, & \text{f) } \int \frac{1}{x^2 + 3} \, dx, \\ \text{g) } \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx, & \text{h) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} \, dx, & \text{i) } \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} \, dx. \end{array}$$

Řešení. K řešení prvních čtyř příkladů využijeme 3. vzorec.

$$\text{a) } \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (\text{zde bylo } n = 1),$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c \quad (\text{zde bylo } n = -2),$$

$$\text{c) } \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c \quad (\text{zde bylo } n = 1/2),$$

$$\text{d) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-1/3} \, dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c \quad (\text{zde bylo } n = -1/3).$$

e) Další příklad je na vzorec 5, kde $a = -1$. Dostaneme

$$\int e^{-x} \, dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c = -e^{-x} + c.$$

f) V tomto příkladu použijeme vzorec 9. Zde je $a^2 = 3$, tedy $a = \sqrt{3}$ (mohli bychom volit i $a = -\sqrt{3}$, ale proč si komplikovat život). Potom vyjde

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} \, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

g) V tomto příkladu použijeme vzorec 10. Zde je $a^2 = 4$, tedy $a = 2$. Vyjde tudíž

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{2} + c.$$

h) V tomto příkladu použijeme vzorec 11. Zde je $a = -7$, takže po dosazení vyjde

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - 7}| + c.$$

i) V posledním příkladu použijeme vzorec 14. Není totiž těžké všimnout si, že derivace jmenovatele je $(x^3 + x + 2)' = 3x^2 + 1$, což je právě čítec. Tedy

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} dx = \ln|x^3 + x + 2| + c. \quad \blacktriangle$$

V dalších příkladech použijeme navíc i větu 2.4, s jejíž pomocí převedeme složitější integrál na výpočet několika jednodušších.

Příklad 2.7. Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\text{a) } \int (2x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2) dx, \quad \text{b) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx,$$

$$\text{c) } \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{2x/3} \right) dx.$$

Řešení.

a) Jde o integraci mnohočlenu, což je s pomocí vzorce 3 a vztahu (2.4) snadné:

$$\begin{aligned} \int (2x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2) dx &= \\ &= 2 \int x^5 dx - \int x^4 dx + 3 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 2x + c = \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + 2x + c. \end{aligned}$$

b) Integrál rozdělíme na dva a použijeme vzorce 10 a 11.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}. \quad (2.5)$$

Protože před použitím zmíněných vzorců je třeba integrandy upravit, spočítáme každý integrál pro větší přehlednost samostatně (integrační konstantu doplníme až na závěr):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3(4/3-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{4/3-x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(ve vzorci 10 bylo $a^2 = 4/3$, tj. $a = 2/\sqrt{3}$) a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3(4/3+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{4/3+x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x + \sqrt{4/3+x^2}|. \end{aligned}$$



Všimněte si, že funkce se liší v jediném znaménku, ale jejich integrály jsou zcela odlišné. Dosazením do (2.5) dostaneme

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx = \sqrt{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln|x + \sqrt{4/3 + x^2}| + c.$$

Integrační konstantu jsme doplnili až k celkovému výsledku.

c) Integrál rozdělíme na několik jednodušších a použijeme (po případných malých úpravách) potřebné vzorce.

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{2x/3} \right) dx = \\ & = 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 3 \int \sin 5x dx + 2 \int \cos \frac{x}{2} dx + \int 3^x dx - \\ & \quad - 7 \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx - 4 \int \frac{dx}{x-3} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2/3} + 2 \int e^{2x/3} dx = \\ & = 2 \operatorname{tg} x - 3 \frac{-\cos 5x}{5} + 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 7 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} - 4 \ln|x-3| - \\ & \quad - \frac{2}{3} \ln|x+2/3| + 2 \frac{e^{2x/3}}{\frac{2}{3}} + c = \\ & = 2 \operatorname{tg} x + \frac{3}{5} \cos 5x + 4 \sin \frac{x}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{7}{2^x \ln 2} - 4 \ln|x-3| - \\ & \quad - \frac{2}{3} \ln|x+2/3| + 3e^{2x/3} + c. \end{aligned}$$

▲

Všimněte si, že integrační konstantu při výpočtu neurčitého integrálu musíme napsat v okamžiku, kdy byl určen poslední integrál. Při následujících úpravách ji pak opisujeme.



Příklad 2.8. Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\text{a) } \int \operatorname{tg}^2 au du, \quad a \neq 0, \quad \text{b) } \int \operatorname{tg} bs ds, \quad b \neq 0, \quad \text{c) } \int \frac{dt}{\sin t}.$$

Řešení. Všechny tři příklady převedeme vhodnými úpravami na tabulkové integrály. Musíme dávat pozor, jak je označená proměnná, tentokrát to není x .

a) Úprava je velmi jednoduchá, použijeme vztah $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, platný pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, a vzorec 12.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 au du &= \int \frac{\sin^2 au}{\cos^2 au} du = \int \frac{1 - \cos^2 au}{\cos^2 au} du = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 au} - \frac{\cos^2 au}{\cos^2 au} \right) du = \int \left(\frac{1}{\cos^2 au} - 1 \right) du = \frac{1}{a} \operatorname{tg} au - u + c. \end{aligned}$$

b) V tomto příkladu použijeme vzorec 14. Platí $\operatorname{tg} bs = \frac{\sin bs}{\cos bs}$ a derivace (podle proměnné s) jmenovatele je $(\cos bs)' = -b \sin bs$. V čitateli nám tudíž chybí $-b$. Protože jde o konstantu, snadno to napravíme s ohledem na vzorec (2.4). Vyjde

$$\int \operatorname{tg} bs \, ds = \int \frac{\sin bs}{\cos bs} \, ds = -\frac{1}{b} \int \frac{-b \sin bs}{\cos bs} \, ds = -\frac{1}{b} \ln |\cos bs| + c.$$

c) I tentokrát použijeme vzorec 14 (hned dvakrát), ale až po několika úpravách pomocí vzorců pro goniometrické funkce $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ a $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, které platí pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Přitom zvolíme $\alpha = t/2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sin t} &= \int \frac{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt = \int \left(\frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2}} + \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) dt = -\int \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} dt + \int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= -\ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| + c = \ln \left| \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \right| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + c, \end{aligned}$$

kde jsme v průběhu úprav do čitatele doplnili chybějící -1 obdobně jako v předchozím příkladu. ▲

V dosud řešených příkladech jsme se úmyslně nezabývali definičním oborem, abychom neodváděli pozornost od vlastní integrace. V některých příkladech by bylo jeho určení jednoduché, v jiných složitější. Nikdy nesmíme zapomínat, že naše výsledky platí jen na intervalech, na nichž jsou všechny funkce definovány.

Upozorníme, že ve výsledcích všech cvičení týkajících se neurčitých integrálů v těchto skriptech pro stručnost *nejsou uváděny integrační konstanty*.

Příklady k procvičení



1. Integrujte dané funkce:

a) $\int 3x^{-1} dx,$

b) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{2} \right) dx,$

c) $\int x^{12} dx,$

d) $\int 5x^7 dx,$

e) $\int \frac{3}{4} dx,$

f) $\int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx,$

g) $\int 2,4x^{-0,16} dx,$

h) $\int 4x^{-3} dx,$

i) $\int x^{-a} dx, a \neq 1,$

j) $\int \frac{1,5}{x} dx,$

k) $\int \left(\frac{3,4}{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx,$

l) $\int \frac{4}{u^2} du.$

2. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int 4x^3 dx, & \text{b)} \int \frac{x^5 + 2x^4 - x^2}{x^3} dx, & \text{c)} \int \frac{3z}{4} dz, \\
 \text{d)} \int u^{-5} du, & \text{e)} \int z^{\sqrt{2}} dz, & \text{f)} \int 3\sqrt{\rho} d\rho, \\
 \text{g)} \int \frac{5}{R^6} dR, & \text{h)} \int 8m^{3/5} dm, & \text{i)} \int x^{-t} dt, \\
 \text{j)} \int \frac{3}{t} dt, & \text{k)} \int \left(\frac{3}{z^4} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz, & \text{l)} \int (3^5\sqrt{\eta} - 7\eta) d\eta.
 \end{array}$$

3. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx, & \text{b)} \int \frac{5}{\sqrt{M}} dM, \\
 \text{c)} \int \frac{5}{y^{2/7}} dy, & \text{d)} \int 4\sqrt[3]{x^2} dx, \\
 \text{e)} \int (4x^5 + x^3 - 5) dx, & \text{f)} \int \frac{1}{\sqrt{2gh}} dh, \quad g \neq 0, \\
 \text{g)} \int \frac{(R+1)^2}{\sqrt{R}} dR, & \text{h)} \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx, \\
 \text{i)} \int \frac{50}{(5t)^3} dt, & \text{j)} \int \frac{\sqrt{\tau}}{\tau^2} d\tau, \\
 \text{k)} \int \left(K + \frac{1}{K} + \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) dK, & \text{l)} \int \left(\frac{14\sqrt{u^3}}{3} - \frac{11}{u^{5/3}} - \frac{4}{3u^2} \right) du.
 \end{array}$$

4. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) dx, & \text{b)} \int \left(\frac{4x}{\sqrt{3x}} + (3-2x)^2 \right) dx, \\
 \text{c)} \int x(2x-5) dx, & \text{d)} \int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx, \\
 \text{e)} \int \left(\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx, & \text{f)} \int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx, \\
 \text{g)} \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx, & \text{h)} \int (1 + \sqrt{x})^2 dx, \\
 \text{i)} \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx, & \text{j)} \int \sqrt{x}(1-x^2) dx, \\
 \text{k)} \int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3} dx, & \text{l)} \int \frac{2-x^2}{x + \sqrt{2}} dx.
 \end{array}$$

5. Integrujte dané funkce:

a) $\int (8 \cos \alpha - 3 \sin \alpha) d\alpha,$	b) $\int \left[\frac{(2\sqrt{\sigma} + 1)^2}{\sigma^2} + \cos^{-2} \sigma \right] d\sigma,$
c) $\int \left(\sin x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$	d) $\int \frac{1}{3 \cos^2 x} dx,$
e) $\int \frac{a}{b \cdot \sin^2 \theta} d\theta,$	f) $\int \frac{\cos^3 \phi - 0,8}{\cos^2 \phi} d\phi,$
g) $\int \frac{5 \sin^2 \Omega + 3 \cos^2 \Omega}{2 \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega} d\Omega,$	h) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{tg}^{-2} x}{\cos^2 x} dx,$
i) $\int R \cdot 10^x dx,$	j) $\int 4^\lambda d\lambda,$
k) $\int (\sqrt{T})^x dx, T > 0,$	l) $\int 0,5 \sqrt{e^\rho} d\rho.$

6. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x} dx,$	b) $\int 3 \cdot 8^\tau d\tau,$	c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},$
d) $\int e^u \left(1 + \frac{e^{-u}}{\cos^2 u} \right) du,$	e) $\int \frac{e^{2t} - 1}{e^t - 1} dt,$	f) $\int \frac{e^{3\rho} + 1}{e^\rho + 1} d\rho,$
g) $\int \frac{4}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx,$	h) $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 3\theta^2}} d\theta,$	i) $\int \frac{3 - \sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} dz,$
j) $\int \frac{5}{9 + 9t^2} dt,$	k) $\int \frac{1}{x \ln x} dx,$	l) $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

7. Integrujte dané funkce:

a) $\int 2 \cdot 7^x dx,$	b) $\int e^x \left(1 + \frac{e^x}{3} \right) dx,$	c) $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx,$ $a > 0,$
d) $\int \frac{3 + e^{-x} \sin x}{e^{-x}} dx,$	e) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx,$	f) $\int B^{3x} dx, B > 0,$
g) $\int \frac{-4}{\sqrt{16 - 16x^2}} dx,$	h) $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx,$	i) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx,$
j) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx,$	k) $\int 4(2u^2 + 2)^{-1} du,$	l) $\int \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1} dh.$

8. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx,$	b) $\int \frac{\sin 2v}{\sin v} dv,$	c) $\int \frac{1}{w^2(1 + w^2)} dw,$
-----------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

$$\begin{array}{lll}
 \text{d) } \int \frac{\cos 2\beta}{1 - \sin^2 \beta} d\beta, & \text{e) } \int \frac{1}{1 + \cos 2\omega} d\omega, & \text{f) } \int \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi, \\
 \text{g) } \int \operatorname{tg}^2 \Psi d\Psi, & \text{h) } \int \frac{1}{\sin^2 2\tau} d\tau, & \text{i) } \int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)} dx, \\
 \text{j) } \int \frac{t}{t+4} dt, & \text{k) } \int \frac{3+U}{3-U} dU, & \text{l) } \int \frac{\eta+2}{2\eta-1} d\eta.
 \end{array}$$



Klíč k příkladům k procvičení

$$\begin{array}{llll}
 1. \text{ a) } 3 \ln|x|, & \text{b) } \frac{x^4}{4} - \ln|x| + \frac{2}{5}x^4\sqrt{x}, & \text{c) } \frac{x^{13}}{13}, & \text{d) } \frac{5}{8}x^8, \\
 \text{e) } \frac{3}{4}x, & \text{f) } x + 6 \ln|x| - \frac{12}{x} - \frac{4}{x^2}, & \text{g) } \frac{20}{7}x^{0,84}, & \text{h) } -2x^{-2}, \\
 \text{i) } \frac{x^{1-a}}{1-a}, & \text{j) } 1,5 \ln|x|, & \text{k) } -\frac{1,7}{x^2} + 18\sqrt[3]{x}, & \text{l) } -\frac{4}{u}. \\
 \\
 2. \text{ a) } x^4, & \text{b) } \frac{x^3}{3} + x^2 - \ln|x|, & \text{c) } \frac{3z^2}{8}, & \text{d) } -\frac{1}{4u^4}, \\
 \text{e) } \frac{z^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}, & \text{f) } 2\rho^{3/2}, & \text{g) } -\frac{1}{R^5}, & \text{h) } 5m^{8/5}, \\
 \text{i) } -\frac{x^{-t}}{\ln|x|}, & \text{j) } 3 \ln|t|, & \text{k) } -\frac{1}{z^3} + 2\sqrt{z}, & \text{l) } \frac{5\eta^{6/5} - 7\eta^2}{2}. \\
 \\
 3. \text{ a) } x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x}, & \text{b) } 10\sqrt{M}, & \text{c) } 7y^{5/7}, & \text{d) } 3x^{4/3}, \\
 \text{e) } \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - 5x, & \text{f) } \sqrt{\frac{2h}{g}}, & \text{g) } 2\sqrt{R} + \frac{2R^{5/2}}{5} + \frac{4R^{3/2}}{3}, & \\
 \text{h) } x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x}, & \text{i) } -\frac{1}{5t^2}, & \text{j) } -\frac{2}{\sqrt{\tau}}, & \\
 \text{k) } \frac{K^2}{2} + \ln|K| + \frac{2K\sqrt{K}}{3} + 2\sqrt{K}, & \text{l) } \frac{28u^{5/2}}{15} + \frac{33}{2u^{2/3}} + \frac{4}{3u}. & & \\
 \\
 4. \text{ a) } \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 7x, & \text{b) } \frac{8}{9}\sqrt{3x^3} + 9x - 6x^2 + \frac{4}{3}x^3, & \text{c) } \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2, & \\
 \text{d) } \frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x}, & \text{e) } 2\sqrt{2x}\left(\frac{x}{3} + 1\right), & \text{f) } 4(x - \sqrt{x}), & \\
 \text{g) } \frac{2}{5}x^{5/2} + x, & \text{h) } x + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2}, & \text{i) } x - 3x^{2/3} + 3x^{1/3}, & \\
 \text{j) } \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x^{7/2}, & \text{k) } \ln|x| - \frac{1}{4x^4}, & \text{l) } \sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}. &
 \end{array}$$

5. a) $8 \sin \alpha + 3 \cos \alpha$, b) $4 \ln |\sigma| - \frac{8}{\sqrt{\sigma}} - \frac{1}{\sigma} + \operatorname{tg} \sigma$, c) $-\cos x - \operatorname{tg} x$,
 d) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x$, e) $-\frac{a}{b} \operatorname{cotg} \theta$, f) $\sin \phi - 0,8 \operatorname{tg} \phi$,
 g) $\frac{5 \operatorname{tg} \Omega - 3 \operatorname{cotg} \Omega}{2}$, h) $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x$, i) $\frac{R \cdot 10^x}{\ln 10}$,
 j) $\frac{4^\lambda}{\ln 4}$, k) $\frac{(\sqrt{T})^x}{\ln \sqrt{T}}$, l) $\sqrt{e^\rho}$.
6. a) $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x$, b) $\frac{3 \cdot 8^x}{\ln 8}$, c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$,
 d) $e^u + \operatorname{tg} u$, e) $e^t + t$, f) $\frac{1}{2} e^{2\rho} - e^\rho + \rho$,
 g) $2 \arcsin x$, h) $\frac{1}{3} \sqrt{3} \arcsin \theta$, i) $-z + 3 \arcsin z$,
 j) $\frac{5}{9} \operatorname{arctg} t$, k) $\ln |\ln x|$, l) $\frac{12e^{2x}}{\ln 6} + \frac{9e^{2x}}{2 \ln 3} + \frac{2e^{2x}}{\ln 2}$.
7. a) $\frac{2 \cdot 7^x}{\ln 7}$, b) $e^x + \frac{e^{2x}}{6}$, c) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}}$,
 d) $3e^x - \cos x$, e) $e^x + e^{-x}$, f) $\frac{B^{3x}}{3 \ln B}$,
 g) $\arccos x$, h) $\frac{(\frac{2}{3})^x - (\frac{3}{2})^x}{\ln \frac{2}{3}} - 2x$, i) $\arcsin x$,
 j) $x + 2 \operatorname{arctg} x$, k) $2 \operatorname{arctg} u$, l) $h - 2 \operatorname{arctg} h$.
8. a) $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$, b) $2 \sin \nu$, c) $-\operatorname{arctg} w - \frac{1}{w}$,
 d) $2\beta - \operatorname{tg} \beta$, e) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega$, f) $-\cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2}$,
 g) $\operatorname{tg} \Psi - \Psi$, h) $-\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\tau$, i) $\ln |x| + 2 \operatorname{arctg} x$,
 j) $t - 4 \ln |t + 4|$, k) $-U - 6 \ln |U - 3|$, l) $\frac{\eta}{2} + \frac{5}{4} \ln |2\eta - 1|$.

2.2.2. Metoda per partes

Doposud jsme se naučili počítat tzv. tabulkové integrály a integrály, které na ně lze převést vhodnou úpravou. Z předchozího textu víme, že integrál ze součtu resp. rozdílu je součtem resp. rozdílem integrálů. Bohužel nic podobného však neplatí pro součin resp. podíl. Rozhodně tedy *není obecně pravda*, že integrál ze součinu resp. podílu je roven součinu resp. podílu integrálů. To nás nemůže překvapit, protože ani derivace součinu resp. podílu není obecně součinem resp. podílem derivací. Nicméně integrací rovnosti ze vzorce pro derivaci součinu dostaneme velmi užitečný vztah pro integraci součinu.

Věta 2.9. Necht' funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (2.6)$$

pokud aspoň jeden z integrálů v předchozím vztahu existuje.

Důkaz. Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ mající derivaci platí vztah $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Jeho integrací dostaneme

$$\int (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x) + c = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx.$$

Integrál $\int (uv' + u'v) dx$ tedy existuje. Pokud existuje aspoň jeden z integrálů $\int uv' dx$, $\int u'v dx$, necht' je to např. $\int uv' dx$, musí podle věty 2.4 existovat i integrál z rozdílu $\int ((uv' + u'v) - uv') dx = \int u'v dx$, což je druhý uvažovaný integrál, takže

$$u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

a odtud již dostáváme vztah (2.6). □

V příkladech, které budeme řešit, budou mít funkce spojité derivace, takže existence integrálů bude zaručena větou 2.3.

Integrační metoda založená na vztahu (2.6) se nazývá *metoda per partes* (česky *po částech*). Stručně ji zapisujeme

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Hodí se na integrály, jejichž integrand má tvar součinu. Abychom dokázali napsat pravou stranu vztahu (2.6), musíme jeden činitel v levé straně (v našem označení u) umět derivovat (abychom získali u'), což nebývá problém, a druhý činitel (v našem označení v') musíme umět integrovat (abychom získali v), což už může být problém. A konečně integrál na pravé straně by měl být jednodušší z hlediska další integrace. Postup si ukážeme na příkladu.



Příklad 2.10. Vypočítejte neurčitý integrál $\int x \sin x dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Součin v zadání je zřejmý. Můžeme si zvolit buď $u = x$ a $v' = \sin x$, nebo naopak $u = \sin x$ a $v' = x$.

Zkusíme nejprve první volbu. Je-li $u = x$, bude $u' = 1$. Dále $v' = \sin x$, tedy $v = \int \sin x dx = -\cos x$ (integrační konstantu volíme rovnu nule, stačí nám jedna konkrétní primitivní funkce). Ze vzorce (2.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c. \end{aligned}$$

Tato volba tedy vedla k cíli. Výpočet obvykle zapisujeme do jakési tabulky, takže zápis vypadá následovně:

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Při ručním zápisu píšeme tabulku buď pod integrál nebo vedle něho, zde budeme s ohledem na místo dávat přednost zápisu vedle integrálu a od zbytku výpočtu ji oddělíme svislými čarami.

Je dobré zvyknout si psát tuto pomocnou tabulku pořád stejně co do umístění u , u' , v a v' . Tento návyk vám umožní vyhnout se zbytečným chybám. Tedy v levém sloupci jsou funkce u a v' ze zadaného integrálu, na „hlavní diagonále“ tabulky máme u a v a v pravém sloupci máme funkce u' a v nového integrálu. Příslušné dvojice jsou ve vzorci (2.6) spolu vždy vynásobeny.

Zkusíme nyní ještě druhou volbu. Dostaneme

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \sin x - \int (\cos x) \frac{x^2}{2} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

Předchozí rovnost je sice správná, ale nový integrál je očividně složitější než výchozí, takže tato volba nevede k cíli. ▲

Než si ukážeme další příklady, uvedeme si tabulku typických funkcí, jejichž neurčité integrály lze spočítat metodou per partes. Zároveň bude řečeno, kterou funkci derivujeme a kterou integrujeme. Výčet pochopitelně není vyčerpávající, existují i další integrály, které lze vyřešit pomocí metody per partes. Nicméně je důležité tyto základní typy znát, abyste se bez váhání dokázali správně rozhodnout.

Integrály řešitelné metodou per partes

V následujících tabulkách je $P(x)$ mnohočlen a a je nenulová konstanta. V prvním sloupci je uveden integrand, ve druhém sloupci je uvedeno, kterou funkci budeme derivovat, a ve třetím, kterou funkci budeme integrovat. Přehled rozdělíme do dvou částí.

U první skupiny *derivujeme mnohočlen* a integrujeme druhý činitel. Nový integrál bude součinem mnohočlenu, jehož stupeň bude o jedničku menší, a druhé funkce, která bude obdobná jako ve výchozím integrálu (exponenciální funkce e^{ax} se zachová, funkce sinus a kosinus se prohodí).

U druhé skupiny *integrujeme mnohočlen* a derivujeme druhý činitel. Opačná volba by ani nebyla možná, protože logaritmickou funkci, funkci arkussinus atd. ani neumíme (zatím) integrovat. Derivací se naopak těchto „nepříjemných“ funkcí zbavíme. Jejich

Integrand	u	v'
$P(x) e^{ax}$	$P(x)$	e^{ax}
$P(x) \sin ax$	$P(x)$	$\sin ax$
$P(x) \cos ax$	$P(x)$	$\cos ax$

Tab. 2.2: Metoda per partes — první část

Integrand	u	v'
$P(x) \ln x$	$\ln x$	$P(x)$
$P(x) \arcsin ax$	$\arcsin ax$	$P(x)$
$P(x) \arccos ax$	$\arccos ax$	$P(x)$
$P(x) \operatorname{arctg} ax$	$\operatorname{arctg} ax$	$P(x)$
$P(x) \operatorname{arccotg} ax$	$\operatorname{arccotg} ax$	$P(x)$

Tab. 2.3: Metoda per partes — druhá část

derivace jsou totiž pro integraci „jednodušší“ ($(\ln x)' = 1/x$, $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(x^2+1)$ atd.).



Příklad 2.11. Vypočítejte neurčitý integrál $\int (x^2 + 1) e^{-x} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Jde o funkci typu „mnohočlen krát exponenciální funkce“, kterou najdeme v tabulce 2.2. Mnohočlen $x^2 + 1$ tedy budeme derivovat a exponenciální funkci e^{-x} integrovat. Zároveň si v tomto příkladu ukážeme typický rys metody per partes, a to *opakované použití*. Jak uvidíme, dostaneme integrál obdobného typu „mnohočlen krát exponenciální funkce“, ale mnohočlen bude mít nižší stupeň. Použijeme tedy metodu per partes ještě jednou. Obecně u této první skupiny funkcí uvedené v tabulce 2.2 pokračujeme tak dlouho, až se derivováním mnohočlen převede na konstantu (je-li jeho stupeň n , bude to po n -té derivaci). V našem případě postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 1) e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left[x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(x^2 + 1)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\
&= -(x^2 + 1)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x} + c. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Příklad 2.12. Vypočtěte neurčitý integrál $\int (2x - 1) \ln x dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jde o integrál z tabulky 2.3, mnohočlen $2x - 1$ tudíž budeme integrovat a logaritmickou funkci budeme derivovat. Následně vyjde

$$\begin{aligned}
\int (2x - 1) \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x - 1 & v = x^2 - x \end{array} \right| = \\
&= (\ln x)(x^2 - x) - \int \frac{1}{x} (x^2 - x) dx = \\
&= (x^2 - x) \ln x - \int (x - 1) dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + c. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Příklad 2.13. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arccotg} x dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Tento integrál zdánlivě nemá tvar součinu. Ale za druhý činitel si vždy můžeme představit jedničku, což je vlastně mnohočlen stupně nula. Jde tedy o integrál uvedený v tabulce 2.3. Derivovat tudíž budeme funkci arkuskotangens a integrovat jedničku. Vyjde tedy

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arccotg} x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arccotg} x & u' = -\frac{1}{x^2+1} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\
&= (\operatorname{arccotg} x)x - \int \left(-\frac{1}{x^2+1} \right) x dx = x \operatorname{arccotg} x + \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\
&= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.
\end{aligned}$$

K výpočtu posledního integrálu jsme použili vzorec 14. ▲

V následujících příkladech si ukážeme další obrat, který se v souvislosti s metodou per partes často používá. Tento obrat spočívá v tom, že po integraci per partes (případně opakované) a úpravách se nám znovu objeví výchozí integrál, který máme určit. Tím dostaneme pro tento integrál rovnici

$$\int f(x) dx = h(x) + \alpha \int f(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

(její levá strana je výchozí integrál a pravá strana je závěrečný výraz), z níž ho můžeme vypočítat (pokud se nezruší, tj. pokud $\alpha \neq 1$).



Příklad 2.14. Vypočtěte neurčitý integrál $\int e^x \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nejde o žádný z typů uvedených v tabulkách 2.2 a 2.3. Použijeme postupně dvakrát metodu per partes, přičemž vždy budeme exponenciální funkce derivovat a druhý činitel integrovat (jinak bychom se vrátili zpátky k samotnému zadanému integrálu). Dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

z níž již snadno vypočítáme, že

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + c, \\ \int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c. \end{aligned}$$

Někdo možná čekal ve výsledku hodnotu $\frac{c}{2}$, ale je-li c libovolná konstanta, je $\frac{c}{2}$ také libovolná konstanta (vlastně jsme provedli přeznačení zlomku $\frac{c}{2}$ a pro novou hodnotu jsme použili totéž písmeno). V dalším textu už tento obrat nebudeme komentovat. ▲



Příklad 2.15. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení. Opět nalezneme rovnici pro hledaný integrál. Za jeden činitel volíme jedničku. Vyjde tudíž

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & u' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \arcsin x. \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x,$$

z níž po jednoduché úpravě obdržíme, že

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

Tento příklad není typický pro použití metody per partes a lze použít i jiný postup — viz příklad 2.30 a text pro zájemce na str. 77. ▲

Příklad 2.16. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos^2 x dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Opět najdeme rovnici pro hledaný integrál. Za u i v' budeme tentokrát volit kosinus. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ v' = \cos x \end{array} \right| \begin{array}{l} u' = -\sin x \\ v = \sin x \end{array} = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \\ &= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx, \end{aligned}$$

což vede k rovnici

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx,$$

z níž vyjde

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c.$$

Při úpravách jsme použili známý vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. I tento integrál se často počítá jiným způsobem — viz příklad 2.46. ▲

Shrňme si návody, které se vyskytují v souvislosti s metodou per partes:

- Existuje jistá skupina neurčitých integrálů ze součinu dvou funkcí, pro jejichž výpočet je (aspoň jako výchozí krok) typické použití metody per partes — viz tabulky 2.2 a 2.3.
- Za jeden z činitelů se volí jednička.
- Pro hledaný integrál získáme po použití metody per partes a následných úpravách rovnici, z níž lze tento integrál určit.
- Pomocí této metody se odvozují rekurentní vzorce — viz např. vztah (2.15).
- Metoda se často používá opakovaně.

Samozřejmě existují i jiné integrály než typy uvedené v tabulkách 2.2 a 2.3, které lze s úspěchem řešit metodou per partes aniž se použijí předchozí obraty. Ukázkou je následující příklad. Rozhodnout, kdy tuto metodu použít, je pochopitelně věcí cviku.



Příklad 2.17. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Řešení. Budeme derivovat mnohočlen x a integrovat zlomek $1/\cos^2 x$. Vyjde

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x \end{array} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= x \operatorname{tg} x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c. \end{aligned}$$

Absolutní hodnotu v logaritmu je možné vynechat, protože funkce kosinus je na uvažovaném intervalu kladná. Při výpočtu jsme použili vzorec 14 stejně jako v příkladu 2.8 b). ▲



Průvodce studiem

Uvědomte si, že předchozí příklad není typem uvedeným v tabulce 2.2. Tam je zmíněn typ „mnohočlen krát $\cos ax$ “, kde a je konstanta. V našem případě máme „mnohočlen lomeno $\cos^2 x$ “. Místo součinu je tedy podíl a navíc kosinus je umocněn na druhou. Posluchači si často zmíněné typy pamatují jen přibližně, vědí, že je tam „nějaký mnohočlen“ a „nějaký kosinus“, zamění součin a podíl a pod. To pak může vést k naprosto nevhodné volbě integrační metody. Např. výraz $x e^{x^2}$ není typ z tabulky 2.2. Jeden činitel je sice mnohočlen, ale exponenciální funkce má být tvaru e^{ax} , kde a je konstanta, což v tomto případě není pravda. Použití per partes zde k ničemu nevede. V následujícím oddílu se dozvíme, že na integrál z tohoto výrazu je třeba použít zcela jiný postup.



Příklady k procvičení

1. Integrujte dané funkce:

- | | | |
|---|---|--------------------------------|
| a) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, | b) $\int t e^{2t} dt$, | c) $\int x \cos x dx$, |
| d) $\int R 3^R dR$, | e) $\int \theta \sin \theta d\theta$, | f) $\int (3n + 2) \cos n dn$, |
| g) $\int B^2 \sin B dB$, | h) $\int \varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon$, | i) $\int r \sin^2 r dr$, |
| j) $\int x^3 e^x dx$, | k) $\int x^2 \cos x dx$, | l) $\int t^2 \sin 2t dt$. |

2. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int \phi^2 e^{-2\phi} d\phi, & \text{b)} \int T^2 \cos^2 T dT, & \text{c)} \int (\rho^2 - 3\rho + 2) e^\rho d\rho, \\
 \text{d)} \int V \ln(V - 1) dV, & \text{e)} \int m^2 \ln m dm, & \text{f)} \int \frac{\ln R}{R^2} dR, \\
 \text{g)} \int \sqrt{w} \ln^2 w dw, & \text{h)} \int H \ln(H + 1) dH, & \text{i)} \int x \ln x dx, \\
 \text{j)} \int \frac{\ln^3 t}{t^2} dt, & \text{k)} \int 5V \operatorname{arctg} V dV, & \text{l)} \int \left(\frac{\ln K}{K}\right)^2 dK.
 \end{array}$$

3. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int z^3 \operatorname{arctg} z dz, & \text{b)} \int 4 \ln 2\Omega d\Omega, & \text{c)} \int \operatorname{arctg} \theta d\theta, \\
 \text{d)} \int t \arcsin t dt, & \text{e)} \int \frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} dy, & \text{f)} \int e^T \cos T dT, \\
 \text{g)} \int \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{e^{-\phi}} d\phi, & \text{h)} \int \frac{\ln K}{K} dK, & \text{i)} \int e^{-2h} \sin 3h dh, \\
 \text{j)} \int e^x \sin^2 x dx, & \text{k)} \int e^{-r/3} \sin \frac{r}{3} dr, & \text{l)} \int e^{3x} \cos^2 3x dx.
 \end{array}$$

Klíč k příkladům k procvičení

$$\begin{array}{ll}
 1. \text{ a)} \frac{(x^2 + 1)}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}, & \text{b)} \frac{e^{2t}}{4} (2t - 1), \\
 \text{c)} } x \sin x + \cos x, & \text{d)} \frac{3Re^R}{\ln 3} - \frac{3e^R}{\ln^2 3}, \\
 \text{e)} } \sin \theta - \theta \cos \theta, & \text{f)} } 3 \cos n + (3n + 2) \sin n, \\
 \text{g)} } (-B^2 + 2) \cos B + 2B \sin B, & \text{h)} } 4 \sin \frac{\varepsilon}{2} - 2\varepsilon \cos \frac{\varepsilon}{2}, \\
 \text{i)} } -\frac{r \sin 2r}{4} + \frac{r^2}{4} - \frac{\cos^2 r}{8}, & \text{j)} } x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x, \\
 \text{k)} } x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x, & \text{l)} } -\frac{t^2 \cos 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} + \frac{t \sin 2t}{2}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 2. \text{ a)} } -\frac{e^{-2\phi}}{4} (2\phi^2 + 2\phi + 1), & \text{b)} } \frac{T^3}{6} + \left(\frac{T^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2T + \frac{T}{4} \cos^2 T, \\
 \text{c)} } e^\rho (\rho^2 - 5\rho + 7), & \text{d)} } \frac{1}{2} (V^2 - 1) \ln(V - 1) - \frac{V^2}{4} - \frac{V}{2}, \\
 \text{e)} } \frac{1}{3} m^3 \ln m - \frac{m^3}{9}, & \text{f)} } -\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{R},
 \end{array}$$

- g) $\frac{w^{3/2}}{27} (18 \ln^2 w - 24 \ln w + 16)$, h) $\frac{1}{2} (H^2 + 1) \ln(H + 1) - \frac{H^2}{4} + \frac{H}{2}$,
- i) $\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$, j) $-\frac{1}{t} (\ln^3 t + 3 \ln^2 t + 6 \ln t + 6)$,
- k) $\frac{5}{2} (V^2 \operatorname{arctg} V - V + \operatorname{arctg} V)$, l) $-\frac{1}{K} (\ln^2 K + 2 \ln K + 2K)$.
3. a) $\frac{\operatorname{arctg} z}{4} (z^4 - 1) - \frac{z^3 - 3z}{12}$, b) $4\Omega \ln 2\Omega - 4\Omega$,
- c) $\theta \operatorname{arctg} \theta - \frac{1}{2} \ln(\theta^2 + 1)$, d) $\frac{t^2 \arcsin t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{4} - \frac{\arcsin t}{4}$,
- e) $\frac{1}{2} \arcsin^2 y$, f) $\frac{1}{2} e^T (\cos T + \sin T)$,
- g) $-\frac{2}{5} e^\phi \cos \frac{\phi}{2} + \frac{4}{5} e^\phi \sin \frac{\phi}{2}$, h) $\frac{1}{2} \ln^2 K$,
- i) $-\frac{e^{-2h}}{13} (3 \cos 3h + 2 \sin 3h)$, j) $\frac{(\sin x - 2 \cos x) e^x \sin x}{5} + \frac{2e^x}{5}$,
- k) $-\frac{3}{2} e^{-r/3} \left(\cos \frac{r}{3} + \sin \frac{r}{3} \right)$, l) $\frac{e^{3x}}{15} ((\cos 3x + 2 \sin 3x) \cos 3x + 2)$.

2.2.3. Substituční metoda

V tomto oddílu se seznámíme s další významnou metodou, která vznikne integrací rovnosti ze vzorce pro derivaci složené funkce. Připomeňme, že platí $(F[\varphi(x)])' = F'[\varphi(x)] \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$, kde jsme označili $F'(u) = f(u)$ a $u = \varphi(x)$. Princip je popsán v následující větě.

Věta 2.18. *Nechť funkce $f(u)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(u)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Pak má složená funkce $f[\varphi(x)] \varphi'(x)$ na intervalu I primitivní funkci a platí*

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + c. \quad (2.7)$$

Důkaz. Vše bezprostředně plyne z výše připomenutého vzorce pro derivaci složené funkce. Derivace pravé strany rovnosti (2.7) totiž dává integrand z levé strany této rovnosti. \square

Integrační metoda založená na předchozí větě se nazývá *první substituční metoda*. Popíšeme si, jak vypadá její praktické použití. Předpoklad o existenci primitivní funkce k funkci $f(u)$ lze zapsat takto:

$$\int f(u) du = F(u) + c.$$

Tvrzení věty potom zapisujeme následovně:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du, \quad (2.8)$$

kde do výrazu na pravé straně za u dosadíme $\varphi(x)$. Výpočet provádíme následovně:

- Označíme si substituci $\varphi(x) = u$ (označení nové proměnné je nepodstatné, jen to musí být jiné písmeno než stará proměnná, tj. v našem případě x).
- Rovnost $\varphi(x) = u$ diferencujeme. (Připomeňme, že diferenciál nějaké funkce $h(z)$ je roven součinu derivace této funkce a přírůstku dz , kde z je nezávisle proměnná této funkce, tj. $dh(z) = h'(z) dz$.) V našem případě je na levé straně nezávisle proměnná označena x a na pravé straně u , tudíž $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ a $u' = \frac{du}{du} = 1$. Dostaneme tedy rovnost $\varphi'(x) dx = 1 \cdot du$, tj. $\varphi'(x) dx = du$.
- V levém integrálu rovnosti (2.8) tedy nahradíme za funkci $\varphi(x)$ proměnnou u a za výraz $\varphi'(x) dx$ diferenciál du . Prakticky výpočet zapisujeme podobně jako u metody per partes do jakési tabulky. Vzorec (2.8) pak vypadá takto:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) dx = du \end{array} \right| = \int f(u) du, \quad (2.9)$$

kde do výsledné pravé strany musíme dosadit původní proměnnou, tj. $u = \varphi(x)$. Opět je rozumné tento zápis dodržovat a zmechanizovat si popsany postup.

Příklad 2.19. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. V zadání je zřetelně vidět složenou funkci $1/\sqrt{1 + \sin^2 x}$. Její vnější složka je $f(u) = 1/\sqrt{1 + u^2}$ a vnitřní složka je $\varphi(x) = \sin x$. Dále $\varphi'(x) = \cos x$. Tedy

$$f[\varphi(x)] \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2(x)}} \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}},$$

což je zadaný integrand. Je proto možné použít substituční metodu. Substituci zvolíme $\sin x = u$ a diferencováním této rovnosti dostaneme vztah $\cos x dx = du$. Výpočet zapíšeme následovně:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \\ &= \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + c = \ln|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}| + c. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili vzorec 11 z tabulky 2.1. ▲



Průvodce studiem

Než si ukážeme další příklady, zamysleme se nad tím, jak musí integrand vypadat, abychom mohli substituční metodu použít. Rozhodně to nemůže být libovolný výraz, naopak tvar integrandu je dost striktně vymezen. Musí jít o výraz, který je součinem nějaké složené funkce a derivace její vnitřní složky. Označme jako v předchozím vnější složku $f(u)$ a vnitřní složku $\varphi(x)$. Výraz pak musí mít tvar $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$. Uvedme si v následující tabulce několik takových funkcí. V prvním sloupci je dána složená funkce, ve druhém její vnější složka, ve třetím její vnitřní složka, ve čtvrtém derivace vnitřní složky a v pátém pak, jak by měl integrand vypadat.

$f[\varphi(x)]$	$f(u)$	$\varphi(x)$	$\varphi'(x)$	$f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$
$\sqrt{x^2 - 3}$	\sqrt{u}	$x^2 - 3$	$2x$	$\sqrt{x^2 - 3} \cdot 2x$
e^{-x^2}	e^u	$-x^2$	$-2x$	$e^{-x^2} \cdot (-2x)$
$\sin^6 x$	u^6	$\sin x$	$\cos x$	$\sin^6 x \cdot \cos x$
$(4 - 7x)^{10}$	u^{10}	$4 - 7x$	-7	$(4 - 7x)^{10} \cdot (-7)$
$(1 + \ln x)^4$	u^4	$1 + \ln x$	$\frac{1}{x}$	$(1 + \ln x)^4 \cdot \frac{1}{x}$
$\ln \operatorname{arctg} x$	$\ln u$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\ln \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$

Tab. 2.4: Příklady integrandů vhodných pro substituční metodu

Nemůžeme ovšem vždy očekávat, že zadání bude „naservírováno na talíři“ tak, jak by se nám to nejvíce líbilo. Např. poslední dva výrazy z předchozí tabulky by určitě byly zapsány spíše takto:

$$\frac{(1 + \ln x)^4}{x} \quad \text{resp.} \quad \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1}.$$

Podobně první dva výrazy by asi spíše vypadaly takto: $2x \sqrt{x^2 - 3}$ resp. $-2x e^{-x^2}$. Musíte být schopni „vidět“ v zadaném výrazu příslušnou složenou funkci a „hledat“ k ní v tomto výrazu derivaci její vnitřní složky. Právě tato věc činí posluchačům největší potíže. Proto je důležité znát bezpečně z paměti derivace a neurčité integrály základních funkcí, abyste ihned věděli, co hledáte (máme na mysli derivaci vnitřní složky), a dokázat přehodit pořadí činitelů a pod., abyste zvažili, zda tam potřebný výraz je nebo není. Je to věc cviku. Musíte-li hledat derivace v nějaké tabulce, sotva v zadaném výrazu něco „uvidíte“.

Konečně upozorníme ještě na jednu věc. Často se stane, že nám bude „chybět“ multiplikativní konstanta. Např. budeme mít zadaný výraz $x \sqrt{x^2 - 3}$, ale my

bychom potřebovali, jak jsme si právě vysvětlili, $2x\sqrt{x^2-3}$. To ovšem není problém, protože konstantu snadno doplníme díky vlastnosti (2.4) z věty 2.4. Je totiž

$$\int x\sqrt{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{x^2-3} dx,$$

což jsme chtěli. Prakticky budeme postupovat tak, že v pomocné tabulce, v níž si značíme substituci a počítáme diferenciály, přidáme další řádek, který dostaneme tak, že řádek udávající rovnost mezi diferenciály vhodně upravíme jako rovnici, abychom nalevo dostali přesně výraz, který máme k dispozici. Např. v případě funkce $x\sqrt{x^2-3}$ by tabulka vypadala takto:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 3 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right|$$

Zdůrazněme ale, že tímto způsobem můžeme doplnit **pouze** multiplikativní konstantu (tj. konstantu, kterou se násobí). Pokud nám chybí skutečně (nekonstantní) funkce, takto postupovat nelze. K tomu se ještě vrátíme níže.

Příklad 2.20. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jde o předposlední výraz z tabulky 2.4. Substituce tedy bude $u = 1 + \ln x$. Dostaneme

$$\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{array} \right| = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + c = \frac{(1 + \ln x)^5}{5} + c.$$

O správnosti výpočtu se snadno můžeme přesvědčit derivací. ▲

Příklad 2.21. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin x \cos^5 x dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Zde se nabízí složená funkce $\cos^5 x$ s vnitřní složkou $\cos x$. Její derivace je $-\sin x$, což je výraz, který v integrandu až na násobek -1 máme. Tedy

$$\int \sin x \cos^5 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \\ \sin x dx = -du \end{array} \right| = \int u^5 (-1) du = -\frac{u^6}{6} + c = -\frac{\cos^6 x}{6}.$$

Bylo jen třeba uvědomit si, že $\sin x \cos^5 x dx = \cos^5 x \sin x dx$. ▲



Příklad 2.22. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x e^{-x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Jde o modifikaci druhého příkladu z tabulky 2.4. Volíme substituci $u = -x^2$ a „doplňme“ chybějící konstantu -2 . Dostaneme

$$\int x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} -x^2 = u \\ -2x dx = du \\ x dx = -\frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} e^u + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

Při řešení opět stačilo „umět si představit“, že $x e^{-x^2} dx = e^{-x^2} x dx$. ▲



Příklad 2.23. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Zvolíme substituci $s = x^2$ a vyjde nám:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = s \\ 2x dx = ds \\ x dx = \frac{1}{2} ds \end{array} \right| = \int s e^{-s} \cdot \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} \int s e^{-s} ds =$$

(vzniklý integrál budeme řešit metodou per partes — viz tabulka 2.2; jde o typ mnohočlen krát exponenciála e^{as} , kde $a = -1$)

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} u = s \\ v' = e^{-s} \\ u' = 1 \\ v = -e^{-s} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(-s e^{-s} - \int (-e^{-s}) ds \right) = \\ &= \frac{1}{2} (-s e^{-s} - e^{-s}) + c = -\frac{1}{2} (s + 1) e^{-s} + c = -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} + c. \end{aligned}$$



Pro zájemce:

Zadání předchozího příkladu je podobné jako v příkladu 2.22, takže bychom mohli opět „vidět“ složenou funkci e^{-x^2} a zkusit substituci $u = -x^2$. Avšak $(-x^2)' = -2x$, takže (když pomíneme konstantu -2) nám přebývá v zadání $x^3 e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} x$ ještě výraz x^2 .

Lepší nápad tedy bude „vidět“ v zadání složenou funkci $f(x^2) = x^2 e^{-x^2}$, kde $f(s) = s e^{-s}$, s vnitřní složkou x^2 . Pak zvolíme substituci $s = x^2$ a vše již proběhne hladce, když si představíme, že $x^3 e^{-x^2} dx = x^2 e^{-x^2} x dx$.

Všimněte si, že v zadání by bylo rovněž možné „vidět“ jinou složenou funkci, a to $g(-x^2) = x^2 e^{-x^2}$, kde $g(s) = -s e^s$, s vnitřní složkou $-x^2$ a volit substituci $s = -x^2$. Výpočet by byl obdobný a výsledek samozřejmě stejný. Zkuste si sami tuto variantu.

V následujících dvou příkladech si všimneme velice jednoduchého, ale důležitého případu substituce. Jde o tzv. *lineární substituci* tvaru $u = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Protože $(ax + b)' = a$, bude platit $a dx = du$. Pokud nám konstanta chybí, vždy ji snadno již známým postupem doplníme.

Příklad 2.24. Vypočtete neurčitý integrál $\int (4 - 7x)^{10} dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. I tento příklad byl uveden v tabulce 2.4. Zvolíme substituci $u = 4 - 7x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int (4 - 7x)^{10} dx &= \left| \begin{array}{l} 4 - 7x = u \\ -7 dx = du \\ dx = -\frac{1}{7} du \end{array} \right| = \int u^{10} \left(-\frac{1}{7}\right) du = -\frac{1}{7} \int u^{10} du = \\ &= -\frac{1}{7} \frac{u^{11}}{11} + c = -\frac{1}{77} (4 - 7x)^{11} + c. \end{aligned}$$



Příklad 2.25. Vypočtete neurčitý integrál $\int \sqrt{2x - 5} dx$, $x \in \langle 5/2, +\infty \rangle$.



Řešení. Opět použijeme lineární substituci $u = 2x - 5$. Vyjde

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 5} dx &= \left| \begin{array}{l} 2x - 5 = u \\ 2 dx = du \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(2x - 5)^3} + c. \end{aligned}$$



Poznámka 2.26. U jednodušších příkladů lze při troše cviku lineární substituci provádět téměř z paměti, čímž se výpočet výrazně urychlí. Jestliže má funkce $f(u)$ primitivní funkci $F(u)$, tj.

$$\int f(u) du = F(u) + c,$$

platí, že

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Důkaz se provede buď substitucí $ax + b = u$, $a dx = du$, tj. $dx = \frac{1}{a} du$, anebo přímým derivováním pravé strany, protože $F'(u) = f(u)$. Vzorec samozřejmě platí na intervalech, kde je funkce $f(ax + b)$ definovaná.

Ukažme si použití na několika příkladech (nepíšeme integrační konstanty):

$$\int e^u du = e^u \quad \Rightarrow \quad \int e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} e^{2x-3} \quad (a = 2, b = -3),$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3} \ln |3x+4| \quad (a = 3, b = 4),$$

$$\int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 \quad \Rightarrow \quad \int (x+7)^4 dx = \frac{1}{5} (x+7)^5 \quad (a = 1, b = 7),$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u \quad \Rightarrow \quad \int \sin(3-5x) \, dx = -\frac{1}{5} [-\cos(3-5x)] =$$

$$= \frac{1}{5} \cos(3-5x) \quad (a = -5, b = 3),$$

$$\int \cos u \, du = \sin u \quad \Rightarrow \quad \int \cos \frac{2x-1}{3} \, dx = \int \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2/3} \sin \frac{2x-1}{3} = \frac{3}{2} \sin \frac{2x-1}{3}$$

$$(a = 2/3, b = -1/3).$$

Všimněte si, že jako speciální případ tohoto obratu dostaneme pro $b = 0$ obecnější verze vzorců 4, 5, 7, 8, 12 a 13 z tabulky 2.1 (pravý sloupec).



Průvodce studiem

Vraťme se ještě k mechanismu úpravy diferenciálu, který byl popsán na str. 30. Posluchači často mechanicky postupují takto:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = u & \quad \dots \text{ volba substitute} \\ \varphi'(x) \, dx = du & \quad \dots \text{ diferencování předchozí rovnosti} \\ dx = \frac{du}{\varphi'(x)} & \quad \dots \text{ osamostatnění diferenciálu staré proměnné} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pak bez přemýšlení automaticky za $\varphi(x)$ dosadí novou proměnnou u a za dx dosadí výraz $du/\varphi'(x)$.

Pokud je substitute dobře zvolena, nestane se nic hrozného, jak ukazuje následující příklad.

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} 2 + \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \\ dx = \frac{du}{\cos x} \end{array} \right| = \int \frac{\cos x}{u^2} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{u^2} =$$

$$= \int u^{-2} \, du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{2 + \sin x} + c.$$

Ve výpočtu se nám na chvíli objevila v jednom integrálu jak stará proměnná x tak nová proměnná u , přičemž diferenciál už byl du . Protože se však výraz obsahující x (v našem příkladu to byl $\cos x$) zkrátí, vše dobře dopadlo.

Katastrofa však obvykle nastane, pokud substitute není dobře zvolená. Ukážeme si to na následujícím odstrašujícím postupu „výpočtu“ neurčitého integrálu z funkce e^{x^2} .

$$\int e^{x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x \, dx = du \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array} \right| = \int e^u \frac{du}{2x}.$$

Nyní posluchači obvykle považují x za konstantu nezávislou na u , kterou lze při integraci vzhledem k proměnné u vytknout, a počítají dále

$$\int e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2x} \int e^u du = \frac{1}{2x} e^u + c = \frac{e^{x^2}}{2x} + c,$$



čímž je katastrofa dokonána. **Předchozí postup je naprosto chybný!**

Autoři takového postupu totiž zcela ignorují, že mezi starou a novou proměnnou je vazba daná rovnicí $u = \varphi(x)$, tj. v našem případě $u = x^2$, z čehož (pro $x > 0$) máme $x = \sqrt{u}$. Integrál vzniklý po substituci má tedy tvar

$$\int \frac{1}{2x} e^u du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} e^u du = \int \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du,$$

takže před integrál byla vlastně vytknuta funkce $1/(2\sqrt{u})$! Bohužel této hrubé chyby se posluchači často dopouštějí.

Abyste se něčemu takovému vyhnuli, nepoužívejte postup naznačený v (2.10), pokud je $\varphi(x)$ funkce. Vždy se snažte mít před očima, jaký tvar musí integrand mít, aby bylo možné použít substituční metodu, tj. $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$. Rozhodněte se, co budete považovat za složenou funkci $f[\varphi(x)]$, a hledejte derivaci vnitřní složky $\varphi'(x)$. Když derivaci nemůžete najít, asi nemáte substituci dobře vybránu. Možná příklad na substituci vůbec není vhodný, rozhodně ne na tu, kterou jste si zvolili.

Na závěr si všimneme toho, že vzorec (2.8) se někdy (méně často, ale zato jde o důležité případy) používá zprava doleva. Tedy jako bychom do „jednoduché“ funkce vložili vnitřní složku a dostali integrál ze složené funkce, který je zdánlivě komplikovanější. V konkrétních případech však tento integrál může být pro další výpočet jednodušší. Použití je obdobné, jen příslušná věta má trochu jiné předpoklady a důkaz je technicky složitější. Připomeňme, že φ^{-1} značí inverzní funkci k funkci φ .

Věta 2.27. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na otevřeném intervalu J . Nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na otevřeném intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J . Dále předpokládejme, že funkce $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(t)$.*

Pak funkce $f(x)$ má na intervalu J primitivní funkci $F[\varphi^{-1}(x)]$. Platí tudíž

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt, \quad (2.11)$$

jestliže do primitivní funkce na pravé straně dosadíme za t funkci $\varphi^{-1}(x)$.

Integrační metoda založená na předchozí větě se nazývá *druhá substituční metoda*.

Pro zájemce:

Důkaz. Protože $\varphi'(t) \neq 0$ na I , je podle Darbouxovy věty (viz [4, str. 188]) buď $\varphi'(t) > 0$ pro $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro $t \in I$, takže funkce $x = \varphi(t)$ je ryze monotónní na I , a tudíž k ní



existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Ta má derivaci na J , přičemž platí (viz [12])

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]}, \quad x \in J.$$

Dále podle předpokladu platí $F'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ pro $t \in I$, takže podle vzorce pro derivaci složené funkce a předchozího vztahu dostaneme pro $x \in J$ a $x = \varphi(t)$, že

$$(F[\varphi^{-1}(x)])' = F'[\varphi^{-1}(x)] \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi[\varphi^{-1}(x)])\varphi'[\varphi^{-1}(x)] \cdot \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]} = f(x),$$

což jsme měli dokázat. □

Použití je obdobné. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$, diferencováním dostaneme $dx = \varphi'(t) dt$ a dosadíme do levé strany (2.11) (tentokrát nemusíme dělat žádné úpravy se vztahem $dx = \varphi'(t) dt$). Do výsledku dosadíme za t inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$ (někdy tento vztah rovněž napíšeme pro přehlednost do pomocné tabulky).



Příklad 2.28. Vypočítejte neurčitý integrál $\int e^{\sqrt{x}} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

Řešení. Zvolíme substituci $x = t^2$, čímž odstraníme nepříjemnou odmocninu v exponentu. Protože $x > 0$, je v našem případě $J = (0, +\infty)$. Funkci $\varphi(t) = t^2$ tedy budeme uvažovat na intervalu $I = (0, +\infty)$ (je samozřejmě náhoda, že nám vyšlo $J = I$). Funkce $\varphi(t) = t^2$ je prostá na intervalu I a zobrazí ho na interval J (grafem je část paraboly). Protože $t > 0$, je $\sqrt{x} = \sqrt{t^2} = |t| = t$. Inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t) = t^2$ je tudíž $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Nyní již můžeme vypočítat daný integrál. Dostaneme (na výpočet vzniklého integrálu použijeme metodu per partes)

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int 2te^{\sqrt{t^2}} dt = \int 2te^t dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = 2t & u' = 2 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array} \right| = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = \\ &= 2(t - 1)e^t + c = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + c. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Je možné dokázat, že výsledek předchozího příkladu platí i na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Pokud bychom to ale chtěli ověřit z definice primitivní funkce, tj. derivovali bychom výsledek, museli bychom být dost opatrní, protože funkce \sqrt{x} a $e^{\sqrt{x}}$ mají v bodě $x = 0$ pouze derivaci zprava a navíc nevlastní. Není tudíž možné použít v tomto bodě standardní vzorec pro derivování součinu.

Protože tato situace se v souvislosti se substituční metodou dost často vyskytuje, uvedeme si jednoduchou větu, která ve většině případů tuto komplikaci snadno vyřeší. Formulace je uvedena pro ohraničené uzavřené intervaly, analogické tvrzení však platí i pro polouzavřené (ohraničené i neohraničené) intervaly.

Věta 2.29. Necht funkce $f(x)$ a $F(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na otevřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak je $F(x)$ primitivní k $f(x)$ i na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Důkaz. Plyne z [4, str. 111, cvičení 9]. K důkazu lze užít i l'Hospitalovo pravidlo. \square

Příklad 2.30. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2} dx$, $x \in (-1, 1)$.



Řešení. Tento integrál jsme již jednou spočítali metodou per partes — viz příklad 2.15. Tentokrát k jeho výpočtu použijeme substituci $x = \sin t$. Protože platí $J = (-1, 1)$, zvolíme $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Pak funkce $\varphi(t) = \sin t$ zobrazí interval I na interval J . Funkce $\varphi(t) = \sin t$ je na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ prostá a její inverzní funkce je $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, tj. $t = \arcsin x$.

Připravíme si ještě integrand po substituci. Vyjde $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, protože kosinus je na intervalu I kladný. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{t}{2} + c = \end{aligned}$$

(použili jsme výsledek příkladu 2.16)

$$= \frac{1}{2} \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{t}{2} + c = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c,$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 2.15. Protože jak integrand $\sqrt{1-x^2}$, tak výsledná primitivní funkce jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, platí podle věty 2.29 výsledek i na uzavřeném intervalu. Zkontrolovat to přímo výpočtem derivace by bylo opět obtížné, protože funkce $\sqrt{1-x^2}$ a $\arcsin x$ mají v bodech $x = \pm 1$ jednostranné nevlastní derivace. \blacktriangle

Příklady k procvičení



1. Integrujte dané funkce:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\int \sin^3 \omega \cos \omega d\omega$, | b) $\int 6t \sin 3t^2 dt$, | c) $\int \frac{4 \operatorname{tg}^3 \phi}{\cos^2 \phi} d\phi$, |
| d) $\int \cos \beta \sqrt{\sin \beta} d\beta$, | e) $\int -4\rho e^{-2\rho^2} d\rho$, | f) $\int 6r^2 e^{-2r^3} dr$, |
| g) $\int 2e^{2\sin t} \cos t dt$, | h) $\int \frac{3 \ln^2 W}{W} dW$, | i) $\int \frac{3\sqrt{\ln y}}{y} dy$, |
| j) $\int \frac{2C}{(1+C^2)^2} dC$, | k) $\int \frac{8s^2 ds}{\sqrt[3]{(8s^3+27)^2}}$, | l) $\int \frac{5W^4 dW}{2\sqrt{4+W^5}}$. |

2. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{(6p-5) dp}{2\sqrt{3p^2-5p+6}}, & \text{b)} \int \frac{3 \cos \phi}{\sin^4 \phi} d\phi, & \text{c)} \int \frac{\sin u}{2\sqrt{\cos^3 u}} du, \\ \text{d)} \int \frac{4 \cos t}{\sqrt[3]{1+2 \sin t}} dt, & \text{e)} \int \frac{\sin 2r dr}{2\sqrt{1+\cos^2 r}}, & \text{f)} \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}, \\ \text{g)} \int \frac{6v}{\sqrt{4-9v^4}} dv, & \text{h)} \int \frac{2e^t}{\sqrt{2-4e^{2t}}} dt, & \text{i)} \int 6 \operatorname{tg} 3x dx, \\ \text{j)} \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx, & \text{k)} \int \frac{30k}{3k^4+5} dk, & \text{l)} \int \frac{18q dq}{9+(3q^2+1)^2}. \end{array}$$

3. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{-2 d\theta}{\operatorname{tg} \theta \sin^2 \theta}, & \text{b)} \int 4 \sin x \cos^3 x dx, & \text{c)} \int \frac{2 \ln x}{x} dx, \\ \text{d)} \int \frac{2 \operatorname{arctg} \rho}{1+\rho^2} d\rho, & \text{e)} \int \sqrt{1+2x} dx, & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}, \\ \text{g)} \int \frac{3x dx}{(x^2+1)^2}, & \text{h)} \int x \sqrt{2x^2+7} dx, & \text{i)} \int 9x^2 \sqrt[3]{x^3+10} dx, \\ \text{j)} \int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{8-x^2}}, & \text{k)} \int \frac{7 dx}{(1+2x)^3}, & \text{l)} \int 3 \cos^4 t \sin t dt, \\ \text{m)} \int \frac{n}{n^2-1} dn, & \text{n)} \int \frac{d\phi}{\cos^2(1-\phi)}, & \text{o)} \int \frac{\cos y dy}{3 \sin^{2/3} y}. \end{array}$$

4. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}, & \text{b)} \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, & \text{c)} \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}, \\ \text{d)} \int (4\rho-3)^4 d\rho, & \text{e)} \int (2x+1)^3 dx, & \text{f)} \int \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\tau}{6}\right)^{-2} d\tau, \\ \text{g)} \int \frac{12}{(3x-7)^5} dx, & \text{h)} \int \frac{dp}{p^2-6p+9}, & \text{i)} \int 33(8-3x)^{6/5} dx, \\ \text{j)} \int \sqrt[3]{5-6x} dx, & \text{k)} \int \frac{1}{\sqrt{4m+9}} dm, & \text{l)} \int \frac{1}{\sqrt{3-2l}} dl. \end{array}$$

5. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \sin(2\omega-5) d\omega, & \text{b)} \int \frac{d\phi}{\sin^2(3\phi-7)}, \\ \text{c)} \int \frac{1}{\cos^2 8t} dt, & \text{d)} \int \frac{4 dv}{1-\cos 4v}, \\ \text{e)} \int 14e^{7r-8} dr, & \text{f)} \int 3e^{-3h+1} dh, \\ \text{g)} \int \frac{e^{2s}-1}{e^s} ds, & \text{h)} \int \frac{e^{q/2}-e^{-q/2}}{2} dq, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int \frac{1}{T^2 + 4T + 5} dT, & \text{j)} \int \frac{3}{x^2 + 3x + 3} dx, \\ \text{k)} \int \frac{2 dx}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}, & \text{l)} \int \frac{2}{b^2 - 2b + 5} db, \\ \text{m)} \int \frac{10}{2v^2 + 8v + 58} dv, & \text{n)} \int (3e^{-3\theta} - 8\sqrt[3]{5 - 6\theta}) d\theta. \end{array}$$

6. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}}, & \text{b)} \int \frac{50 dx}{\sqrt{1 - (25x)^2}}, & \text{c)} \int \frac{2}{\sqrt{3 + 2y - y^2}} dy, \\ \text{d)} \int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}, & \text{e)} \int \frac{3 dx}{\sqrt{2x - x^2}}, & \text{f)} \int \frac{5 dx}{\sqrt{36 - (5x)^2}}, \\ \text{g)} \int \frac{1}{1 + (x + 1)^2} dx, & \text{h)} \int \frac{2}{y^2 - 2y + 5} dy, & \text{i)} \int \frac{5 dz}{1 + (2 - 5z)^2}. \end{array}$$

Klíč k příkladům k procvičení



$$\begin{array}{lll} 1. \text{ a)} \frac{1}{4} \sin^4 \omega, & \text{b)} -\cos 3t^2, & \text{c)} \operatorname{tg}^4 \phi, \\ \text{d)} \frac{2(\sin \beta)^{3/2}}{3}, & \text{e)} e^{-2\rho^2}, & \text{f)} -e^{-2r^3}, \\ \text{g)} e^{2 \sin t}, & \text{h)} \ln^3 W, & \text{i)} 2 \ln^{3/2} y, \\ \text{j)} \frac{-1}{1 + C^2}, & \text{k)} (8s^3 + 27)^{1/3}, & \text{l)} \sqrt{4 + W^5}. \\ 2. \text{ a)} \sqrt{3p^2 - 5p + 6}, & \text{b)} -\frac{1}{\sin^3 \phi}, & \text{c)} \frac{1}{\sqrt{\cos u}}, \\ \text{d)} 3(1 + 2 \sin t)^{2/3}, & \text{e)} -\sqrt{1 + \cos^2 r}, & \text{f)} \ln |\ln \ln x|, \\ \text{g)} \arcsin \frac{3v^2}{2}, & \text{h)} \arcsin \sqrt{2} e^t, & \text{i)} -2 \ln |\cos 3x|, \\ \text{j)} \arcsin \ln x, & \text{k)} \sqrt{15} \operatorname{arctg} \frac{k^2 \sqrt{15}}{5}, & \text{l)} \operatorname{arctg} \left(q^2 + \frac{1}{3} \right). \\ 3. \text{ a)} \frac{1}{\sin^2 \theta}, & \text{b)} -\cos^4 x, & \text{c)} \ln^2 x, \\ \text{d)} \operatorname{arctg}^2 \rho, & \text{e)} \frac{(1 + 2x)^{3/2}}{3}, & \text{f)} -\frac{\sqrt{5 - 4x}}{2}, \\ \text{g)} -\frac{3}{2(x^2 + 1)}, & \text{h)} \frac{(2x^2 + 7)^{3/2}}{6}, & \text{i)} \frac{9(x^3 + 10)^{4/3}}{4}, \end{array}$$

- j) $-3(8 - x^2)^{2/3}$, k) $\frac{-7}{4(1 + 2x)^2}$, l) $-\frac{3}{5} \cos^5 t$,
 m) $\frac{1}{2} \ln |n^2 - 1|$, n) $\operatorname{tg}(\phi - 1)$, o) $\sin^{1/3} y$.
4. a) $\ln |\arcsin x|$, b) $\frac{-\operatorname{arctg}^2 x + \ln(1 + x^2)}{2}$, c) $\operatorname{arctg} \ln x$,
 d) $\frac{(4\rho - 3)^5}{20}$, e) $\frac{(2x + 1)^4}{8}$, f) $\frac{6}{6 - \tau}$,
 g) $-\frac{1}{(3x - 7)^4}$, h) $-\frac{1}{p - 3}$, i) $-5(8 - 3x)^{11/5}$,
 j) $-\frac{(5 - 6x)^{4/3}}{8}$, k) $\frac{\sqrt{4m + 9}}{2}$, l) $-\sqrt{3 - 2l}$.
5. a) $-\frac{\cos(2\omega - 5)}{2}$, b) $-\frac{1}{3} \operatorname{cotg}(3\phi - 7)$, c) $\frac{1}{8} \operatorname{tg} 8t$,
 d) $-\operatorname{cotg} 2v$, e) $2e^{7r-8}$, f) $-e^{-3h+1}$,
 g) $e^s + \frac{1}{e^s}$, h) $e^{q/2} + e^{-q/2}$, i) $\operatorname{arctg}(T + 2)$,
 j) $2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x + 3)}{3}$, k) $\frac{1}{(1 - x)^2}$, l) $\operatorname{arctg} \frac{b - 1}{2}$,
 m) $\operatorname{arctg} \frac{v + 2}{5}$, n) $-e^{-3\theta} + (5 - 6\theta)^{4/3}$.
6. a) $\frac{1}{2} \arcsin(2x + 3)$, b) $2 \arcsin 25x$, c) $2 \arcsin \frac{y - 1}{2}$,
 d) $\arcsin(x + 1)$, e) $3 \arcsin(x - 1)$, f) $\arcsin \frac{5x}{6}$,
 g) $\operatorname{arctg}(x + 1)$, h) $\operatorname{arctg} \frac{y - 1}{2}$, i) $\operatorname{arctg}(5z - 2)$.

2.3. Rozklad na parciální zlomky



Průvodce studiem

U mnohočlenů hrál důležitou roli rozklad na součin jednodušších (lineárních nebo kvadratických) činitelů. Podobně u racionálních lomených funkcí je v řadě aplikací důležité něco podobného. Na rozdíl od mnohočlenů, kde jde o rozklad na součin, zde však půjde o rozklad na součet jednodušších racionálních lomených funkcí, tzv. parciálních zlomků.

Připomeňme ve stručnosti základní poznatky, které budeme dále potřebovat:

- Racionální lomená funkce je podíl dvou mnohočlenů.
- Každou neryze lomenou racionální funkci (stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele nebo je mu roven) lze dělením převést na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce (stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele).
- Stupeň polynomu P budeme značit symbolem $\text{st}(P)$.

Parciální zlomky jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme dva typy:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}, \alpha, A \in \mathbb{R},$$

a

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}, M, N, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - 4q < 0.$$

U prvního typu je ve jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) lineárního mnohočlenu tvaru $x - \alpha$ a v čitateli je konstanta. U druhého typu je ve jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) kvadratického mnohočlenu tvaru $x^2 + px + q$ majícího komplexní kořeny (záporný diskriminant) a v čitateli je lineární mnohočlen (nebo konstanta, pokud M je nula). Parciální zlomky jsou vždy ryze lomené.

Věta 2.31. *Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomená funkce s reálnými koeficienty. Nechť rozklad jmenovatele $Q(x)$ na ireducibilní činitele v reálném oboru má tvar*

$$Q(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

Pak $R(x)$ lze napsat jako součet parciálních zlomků. Přitom k -násobnému reálnému kořenu jmenovatele α odpovídá k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{x - \alpha}, \frac{A_2}{(x - \alpha)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}$$

a l -násobné dvojici komplexně sdružených kořenů jmenovatele příslušejících trojčlenu $x^2 + px + q$ odpovídá l parciálních zlomků tvaru

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q}, \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2}, \dots, \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}.$$

V předcházející větě je podstatné, že racionální lomená funkce je ryze lomená. Pokud tomu tak není, je třeba ji nejprve převést na součet mnohočlenu a racionální ryze lomené funkce. Tu pak lze teprve rozkládat.

Poznámka 2.32.

- i) Lze ukázat, že rozklad z předchozí věty je až na pořadí sčítanců jednoznačný, tj. neznámé koeficienty jsou jediné.

- ii) V komplexním oboru (tj. koeficienty zadané racionální lomené funkce mohou být i komplexní) lze dokázat obdobnou větu, v níž ale vystačíme jen s parciálními zlomky prvního typu. To je dáno tím, že v komplexním oboru lze mnohočlen vždy rozložit na součin mocnin lineárních mnohočlenů. Samozřejmě koeficienty v rozkladu jsou obecně také komplexní čísla.

Postup nalezení koeficientů rozkladu

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomená. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet mnohočlenu a racionální ryze lomené funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomené funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny se rovnají právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají tytéž koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice ještě před roznásobením. Všechny členy s neznámými koeficienty až na jeden totiž vymizí, a tak snadno dostaneme za každý takový kořen jeden neznámý koeficient. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).
7. Jinou metodou nalezení koeficientů je do vzniklé rovnice dosadit libovolných $n + 1$ různých čísel, kde n je nejvyšší mocnina neznámé, která se v rovnici vyskytuje. Dostaneme opět soustavu lineárních rovnic, která má jediné řešení.



Příklad 2.33. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Řešení. Funkce je ryze lomená, takže není třeba dělit. Rozklad jmenovatele je $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Jmenovatel má tedy jednoduché kořeny -1 a 1 , kterým odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků prvního typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(x + 1)(x - 1)$ obdržíme rovnici

$$x = A(x - 1) + B(x + 1).$$

Dosadíme postupně oba reálné kořeny. Vyjde:

$$\begin{aligned} x = -1 &\implies -1 = -2A &\implies A = \frac{1}{2}, \\ x = 1 &\implies 1 = 2B &\implies B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rozklad tedy je

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}.$$

Příklad 2.34. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 + x^2}.$$



Řešení. Funkce je ryze lomená, takže není třeba dělit. Rozklad jmenovatele je zřejmě $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$. Jmenovatel má tedy dvojnásobný kořen 0 a dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů i a $-i$, kterým odpovídá mnohočlen $x^2 + 1$. Kořenu 0 odpovídá dvojčlenný řetězec parciálních zlomků prvního typu, mnohočlenu $x^2 + 1$ odpovídá jednočlenný řetězec parciálních zlomků druhého typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $x^2(x^2 + 1)$ obdržíme rovnici

$$2x^3 - x^2 + x - 2 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2.$$

Pravou stranu roznásobíme a sečteme. Vyjde:

$$2x^3 - x^2 + x - 2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B.$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice.

$$\begin{aligned} x^3 : & \quad 2 = A + C, & x : & \quad 1 = A, \\ x^2 : & \quad -1 = B + D, & x^0 : & \quad -2 = B. \end{aligned}$$

Je tedy $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$ a $D = 1$. Rozklad pak je

$$\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 + x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$



Příklad 2.35. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2}.$$

Řešení. Funkce není ryze lomená, takže je ji třeba nejprve vydělit. Podíl vyjde 1 a zbytek $3x^2 - x + 6$, což zapíšeme takto:

$$R(x) = 1 + \frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2}.$$

Nyní musíme rozložit jmenovatel, tj. najít kořeny rovnice $x^3 + x - 2 = 0$. Je zřejmé, že číslo 1 je kořenem této rovnice. Platí tedy $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$. Protože kvadratický trojčlen $x^2 + x + 2$ má komplexní kořeny (diskriminant je $D = -7 < 0$), je to již rozklad na ireducibilní činitele v reálném oboru. Jednoduchému kořenu 1 odpovídá parciální zlomek prvního typu, trojčlenu $x^2 + x + 2$ parciální zlomek druhého typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{3x^2 - x + 6}{(x - 1)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 2}.$$

Po vynásobení dostaneme rovnici

$$3x^2 - x + 6 = A(x^2 + x + 2) + (Bx + C)(x - 1).$$

Dosadíme reálný kořen $x = 1$. Vyjde nám $8 = 4A$, tj. $A = 2$. Pro zbývající dvě čísla dostaneme rovnice porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice. Po roznásobení a sloučení členů se stejnými mocninami neznámé obdržíme

$$3x^2 - x + 6 = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + 2A - C.$$

Vybereme libovolně dvě rovnice obsahující B a C .

$$x^2 : \quad 3 = A + B, \quad x^0 : \quad 6 = 2A - C.$$

Tedy $B = 1$ a $C = -2$. Rozklad má tvar

$$\frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}.$$

Pro zadanou neryze lomenou racionální funkci tedy vyjde

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} = 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}. \quad \blacktriangle$$

2.4. Integrace racionální lomené funkce

Průvodce studiem



Důležitou skupinu funkcí, které můžeme (aspoň teoreticky) integrovat v množině elementárních funkcí, tvoří racionální lomené funkce. K úspěšné integraci potřebujeme některé výsledky z algebry, se kterými jste se seznámili v předchozím studiu.

Z toho, co již bylo v předcházející kapitole řečeno, vyplývá, že každou racionální lomenou funkci $P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou mnohočleny, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + R_1(x) + \dots + R_s(x),$$

kde $S(x)$ je mnohočlen a $R_1(x), \dots, R_s(x)$ jsou parciální zlomky. Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$, jsou tyto funkce spojité, takže k nim existují primitivní funkce a platí:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int R_1(x) dx + \dots + \int R_s(x) dx.$$

Protože integrace mnohočlenu $S(x)$ je bezproblémová, stačí umět integrovat parciální zlomky.

2.4.1. Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

Nejprve si všimneme parciálních zlomků prvního typu, jejichž jmenovatele mají reálné kořeny. Jejich integrace je snadná. Pro $k = 1$ dostaneme podle vzorce 4 z tabulky 2.1

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c.$$

Pro $k \geq 2$ použijeme substituci a vzorec 3 z tabulky 2.1. Vyjde nám

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx &= \left| \begin{array}{l} x - \alpha = t \\ dx = dt \end{array} \right| = A \int \frac{dt}{t^k} = A \int t^{-k} dt = \\ &= A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}} + c = \frac{A}{(1-k)(x - \alpha)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

Použití si ukážeme na příkladech.



Příklad 2.36. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} dx$.

Řešení. Jde o racionální funkci, která je ryze lomená, protože platí $\text{st}(3x + 16) = 1 < \text{st}(x^2 - x - 6) = 2$. Rozložíme ji na parciální zlomky. K tomu potřebujeme kořeny jmenovatele:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2, \\ 3. \end{cases}$$

Platí tedy $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Oba kořeny jsou reálné a jednoduché. Ke každému kořenu tudíž přísluší jednočlenný řetězec parciálních zlomků. Tvar rozkladu je

$$\frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} = \frac{3x + 16}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2},$$

kde A a B jsou vhodné konstanty. Rovnost vynásobíme jmenovatelem $(x - 3)(x + 2)$ a dostaneme rovnost dvou mnohočlenů:

$$3x + 16 = A(x + 2) + B(x - 3).$$

Pro určení konstant A a B je nyní nejrychlejší do rovnosti dosadit postupně oba kořeny. Vyjde:

$$\begin{aligned} x = -2 : \quad 10 &= -5B & \Rightarrow & \quad B = -2, \\ x = 3 : \quad 25 &= 5A & \Rightarrow & \quad A = 5. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme vypočítat integrál. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} dx &= \int \left(\frac{5}{x - 3} - \frac{2}{x + 2} \right) dx = \\ &= 5 \int \frac{dx}{x - 3} - 2 \int \frac{dx}{x + 2} = 5 \ln |x - 3| - 2 \ln |x + 2| + c. \end{aligned}$$

Výsledek platí na kterémkoli z intervalů $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ a $(3, +\infty)$. ▲



Příklad 2.37. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x^5 - x^3} dx$.

Řešení. Jde o racionální ryze lomenou funkci, protože $\text{st}(1) = 0 < \text{st}(x^5 - x^3) = 5$. Jmenovatel snadno rozložíme na součin kořenových činitelů. Platí: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x - 1)(x + 1)$. Všechny kořeny jsou reálné: trojnásobný kořen 0, jemuž odpovídá trojčlenný řetězec parciálních zlomků, a jednoduché kořeny 1 a -1 , jimž odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků. Předpokládaný tvar rozkladu je tudíž

$$\frac{1}{x^5 - x^3} = \frac{1}{x^3(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x - 1} + \frac{E}{x + 1}. \quad (2.12)$$

Abychom určili neznámé konstanty A, B, C, D, E , vynásobíme předchozí rovnost jmenovatelem $x^3(x-1)(x+1)$. Dostaneme

$$1 = A(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + Cx^2(x^2 - 1) + Dx^3(x + 1) + Ex^3(x - 1). \quad (2.13)$$

Dosadíme reálné kořeny jmenovatele a určíme tři konstanty:

$$\begin{aligned} x = 0 : & \quad 1 = -A & \Rightarrow & \quad A = -1, \\ x = 1 : & \quad 1 = 2D & \Rightarrow & \quad D = 1/2, \\ x = -1 : & \quad 1 = 2E & \Rightarrow & \quad E = 1/2. \end{aligned}$$

Zbývá určit ještě konstanty B a C . K tomu porovnáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnosti (2.13). Po roznásobení a úpravách dostaneme

$$1 = (C + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (A - C)x^2 - Bx - A.$$

Stačí sestavit dvě vhodné rovnice:

$$\begin{aligned} x^1 : & \quad 0 = -B & \Rightarrow & \quad B = 0, \\ x^2 : & \quad 0 = A - C & \Rightarrow & \quad C = -1. \end{aligned}$$

Samozřejmě je možné určit všechny konstanty porovnáním koeficientů, ale kombinace této metody a dosazení reálných kořenů je obvykle rychlejší.

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu integrálu. Z (2.12) dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^3} dx &= \int \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

(U prvního integrálu si uvědomte, že $1/x^3 = x^{-3}$.) Výsledek platí na libovolném intervalu, který neobsahuje reálné kořeny jmenovatele, tj. čísla 0, 1 a -1 . ▲



Příklad 2.38. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$.

Řešení. Tentokrát nejde o ryze lomenou racionální funkci (stupeň čitatele je 5 a stupeň jmenovatele je 3), takže nejprve musíme mnohočleny vydělit. Vyjde nám:

$$\begin{array}{r} (x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1) : (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^2 - 2x + 1 \\ -(x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2) \\ \hline -2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 1 \\ -(-2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 2x) \\ \hline x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \\ -(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ \hline x^2 - x \end{array}$$

Platí tedy, že

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Vzniklou ryze lomenou funkci musíme rozložit na součet parciálních zlomků. K tomu potřebujeme najít kořeny jmenovatele. Je zřejmé, že platí $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$. Tedy jmenovatel má jediný kořen -1 , a to trojnásobný. Odpovídá mu řetězec tří parciálních zlomků. Tvar rozkladu bude

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{x^2 - x}{(x + 1)^3} = \frac{A}{(x + 1)^3} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(x + 1)^3$ a roznásobení pravé strany postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2 - x &= A + B(x + 1) + C(x + 1)^2, \\ x^2 - x &= Cx^2 + (2C + B)x + (A + B + C). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin vyjde:

$$\begin{aligned} x^2 : \quad 1 &= C & \Rightarrow & C = 1, \\ x^1 : \quad -1 &= 2C + B & \Rightarrow & B = -3, \\ x^0 : \quad 0 &= A + B + C & \Rightarrow & A = 2. \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$\frac{x^2 - x}{(x + 1)^3} = \frac{2}{(x + 1)^3} - \frac{3}{(x + 1)^2} + \frac{1}{x + 1}.$$

Dohromady máme

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{(x + 1)^3} = x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{(x + 1)^3} - \frac{3}{(x + 1)^2} + \frac{1}{x + 1},$$

takže

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx &= \\ &= \int (x^2 - 2x + 1) dx + 2 \int \frac{dx}{(x + 1)^3} - 3 \int \frac{dx}{(x + 1)^2} + \int \frac{dx}{x + 1}. \end{aligned}$$

Vypočítáme a upravíme integrály z prvních dvou parciálních zlomků (třetí je zřejmý).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)^3} &= \left| \begin{array}{l} x + 1 = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2(x + 1)^2}, \\ \int \frac{dx}{(x + 1)^2} &= \left| \begin{array}{l} x + 1 = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x + 1}. \end{aligned}$$

Celkový výsledek, platný na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, +\infty)$, je tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx &= \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{3}{x + 1} + \ln|x + 1| + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

2.4.2. Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

Nyní si všimneme parciálních zlomků druhého typu. Ty mají ve jmenovateli mocninu kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$, který má záporný diskriminant $p^2 - 4q < 0$, tj. má komplexní kořeny.

Nejprve si všimneme případu, kdy $p = 0$. Pak musí být $q > 0$, a můžeme položit $q = a^2$, kde $a > 0$. Půjde tedy o parciální zlomek tvaru

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + a^2)^n}, \quad \text{kde } M, N, a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \int \left(\frac{Mx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{N}{(x^2 + a^2)^n} \right) dx = \\ &= M \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx + N \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

První integrál zvládneme snadno. Pro $n = 1$ vyjde podle vzorce 14 z tabulky 2.1

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a^2| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c,$$

protože pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 + a^2 > 0$.

Pro $n \geq 2$ použijeme substituci. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + a^2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^n} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-n} du = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + c. \end{aligned}$$

Druhý integrál z (2.14) nám dá více práce. Označme

$$J_n(x, a) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx, \quad a > 0.$$

Metodou per partes odvodíme rekurentní vztah

$$\boxed{J_n(x, a) = \frac{1}{(2n-2)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} J_{n-1}(x, a),} \quad (2.15)$$

který vyjadřuje pro $n \geq 2$ integrál $J_n(x, a)$ pomocí $J_{n-1}(x, a)$. To nám umožní převést postupně $J_n(x, a)$ až na známý integrál $J_1(x, a)$, uvedený v tabulce 2.1 pod číslem 9:

$$J_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

Ukažme platnost vztahu (2.15). Metodou per partes vyjde, že pro $n \geq 2$ je

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} & u' = \frac{-(n-1)2x}{(x^2 + a^2)^n} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx - (2n-2)a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-2)J_{n-1} - (2n-2)a^2 J_n. \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici

$$J_{n-1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 2)J_{n-1} - (2n - 2)a^2 J_n,$$

z níž vypočítáme

$$(2n - 2)a^2 J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3)J_{n-1},$$

a odtud již po vydělení $(2n - 2)a^2$ plyne vztah (2.15).

Příklad 2.39. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



Řešení. Jde o parciální zlomek druhého typu, kde $p = 0$ a $q = a^2 = 2$, tj. $a = \sqrt{2}$. Budeme postupovat podle předchozího návodu. Nejprve

$$\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx = 3 \int \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx - 8 \int \frac{1}{(x^2 + 2)^3} dx.$$

Pro první integrál máme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4u^2} = -\frac{1}{4(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Na druhý integrál použijeme dvakrát vzorec (2.15) — nejprve pro $n = 3$ a pak pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 2)^3} dx &= J_3(x, \sqrt{2}) = \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{4 \cdot 2} J_2(x, \sqrt{2}) = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} J_1(x, \sqrt{2}) \right) = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3x}{32(x^2 + 2)} + \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Celkově tedy vyjde

$$\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx = -\frac{3}{4(x^2 + 2)^2} - \frac{x}{(x^2 + 2)^2} - \frac{3x}{4(x^2 + 2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c. \quad \blacktriangle$$

Na závěr si všimneme parciálních zlomků druhého typu v případě, že $p \neq 0$. Postup bude obdobný jako v případě $p = 0$, tj. parciální zlomek rozdělíme na dvě vhodné části, jen úpravy budou trochu složitější. Čitatel prvního zlomku vytvoříme tak, aby byl násobkem derivace trojčlenu $x^2 + px + q$, tj. dvojčlenu $2x + p$. Najdeme tudíž vhodná čísla r a s tak, aby

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{r(2x + p) + s}{(x^2 + px + q)^n} = r \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + s \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Pro čísla r a s musí platit

$$Mx + N = r(2x + p) + s = 2rx + (pr + s) \quad \Rightarrow \quad M = 2r, \quad N = pr + s,$$

z čehož dostáváme $r = M/2$, $s = N - pM/2$. Tyto vztahy si pochopitelně nebudeme pamatovat, na každém konkrétním příkladě čísla r a s porovnáním koeficientů snadno určíme.

Bude tedy

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = r \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + s \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

První integrál vypočítáme obdobně jako první integrál v (2.14). Pro $n = 1$ je

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \ln|x^2 + px + q| + c = \ln(x^2 + px + q) + c,$$

protože jmenovatel je vždy kladný (grafem funkce $y = x^2 + px + q$ je parabola rozevřená nahoru, která neprotne osu x , tedy příslušná kvadratická rovnice má komplexní kořeny).

Pro $n \geq 2$ použijeme substituci:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = u \\ (2x + p) dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^n} = \\ &= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + c. \end{aligned}$$

Druhý integrál převedeme substitucí na výpočet integrálu J_n . Nejprve doplníme trojčlen $x^2 + px + q$ na úplný čtverec:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Vzhledem k předpokladu, že diskriminant $p^2 - 4q$ je záporný, platí $(4q - p^2)/4 > 0$, takže můžeme položit $(4q - p^2)/4 = a^2$, kde $a > 0$. Nyní

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{1}{[(x + p/2)^2 + a^2]^n} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = u \\ dx = du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^n} du = J_n(u, a). \end{aligned}$$

Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.40. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



Řešení. Trojčlen $x^2 + x + 1$ ve jmenovateli má diskriminant $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, který je záporný, takže jeho kořeny jsou komplexní. Jde tudíž o parciální zlomek druhého typu. Derivace jmenovatele je $2x + 1$. Čitatel $5x + 1$ proto upravíme na tvar $r(2x + 1) + s$. Musí tedy platit

$$5x + 1 = r(2x + 1) + s = 2rx + (r + s) \quad \Rightarrow \quad 5 = 2r, \quad 1 = r + s.$$

To znamená, že $r = 5/2$ a $s = -3/2$. Zadání bude mít po rozdělení tvar

$$\frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{\frac{5}{2}(2x + 1) - \frac{3}{2}}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

a tedy

$$\int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx. \quad (2.16)$$

První ze vzniklých integrálů je snadný (v čitateli je derivace jmenovatele):

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \ln(x^2 + x + 1).$$

Před výpočtem druhého integrálu doplníme trojčlen $x^2 + x + 1$ na úplný čtverec:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Nyní dostaneme s použitím vzorce 9 z tabulky 2.1, kde $a = \sqrt{3}/2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dosazením dílčích výsledků do (2.16) dostaneme celkem, že

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

▲

2.4.3. Integrace parciálních zlomků s reálnými a komplexními kořeny ve jmenovateli



Příklad 2.41. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} dx$.

Řešení. Z příkladu číslo 2.35 víme, že rozklad na parciální zlomky bude vypadat následovně:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} = 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}.$$

Zlomek $\frac{x - 2}{x^2 + x + 2}$ před integrací upravíme následovně:

$$\frac{x - 2}{x^2 + x + 2} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 1)}{x^2 + x + 2} - \frac{\frac{5}{2}}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}.$$

Po integraci obdržíme:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} dx = x + 2 \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 2) + \frac{5}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + c.$$

▲



Příklad 2.42. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} dx$.

Řešení. Jmenovatel má dvojnásobný reálný kořen -3 a v reálném oboru nerozložitelný činitel $x^2 + 1$. Rozklad má tedy tvar:

$$\frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{(x + 3)^2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Po vynásobení vyjde:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= A(x^2 + 1) + B(x + 3)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 3)^2, \\ 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= Ax^2 + Ax + Bx^3 + 3Bx^2 + Bx + 3B + Cx^3 + 6Cx^2 + \\ &\quad + 9Cx + Dx^2 + 6Dx + 9D, \\ 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= x^3(B + C) + x^2(A + 3B + 6C + D) + \\ &\quad + x(A + B + 9C + 6D) + 3B + 9D. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů obdržíme: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -3$. Tedy

$$\frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} = \frac{2}{(x + 3)^2} + \frac{1}{x + 3} + \frac{x - 3}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x+3)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{(x+3)^2} dx + \int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{x-3}{x^2+1} dx.$$

Třetí integrál je třeba ještě upravit takto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

Po integraci obdržíme

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x+3)^2(x^2+1)} dx = \frac{-2}{(x+3)} + \ln|x+3| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 3 \operatorname{arctg} x + c.$$



Průvodce studiem



1) Integrace racionální lomené funkce sestává ze dvou částí:

- z rozkladu na parciální zlomky (a případně dělení u neryze lomené funkce),
- z integrace jednotlivých zlomků (a případně mnohočlenu u neryze lomené funkce).

Tyto části mohou být různě dlouhé. Často zabere první část většinu doby řešení příkladu a vlastní integrace je velmi rychlá. Je to typické, pokud má jmenovatel jen reálné kořeny. V případě komplexních kořenů, zejména pokud jsou násobné, může být integrace velmi zdlouhavá.

- 2) Uvědomte si, že prakticky můžeme integraci provést, jen když dokážeme najít rozklad na parciální zlomky, k čemuž potřebujeme kořeny jmenovatele. Avšak nalézt kořeny mnohočlenu vyšších stupňů obecně neumíme (umíme řešit kvadratickou rovnici, pro rovnice třetího a čtvrtého stupně existují vzorce, které jsou ale pro praktické použití příliš složité, pro rovnice stupně pět a více obecně tzv. řešení pomocí radikálů neexistuje — viz [12]). Uživatelé na tuto skutečnost často zapomínají a považují integraci racionálních lomených funkcí za bezproblémovou (maximálně zdlouhavou) záležitost. Pokud však nejde o školské úlohy nachystané tak, aby „pěkně vyšly“, ale o úlohy z praxe, kde koeficienty mnohočlenu jsou získány např. měřením, je opak pravdou.
- 3) Z předchozího je vidět, že výsledek neurčitého integrálu z racionální lomené funkce dostaneme při výše popsáních postupech ve tvaru součtu, kde jako sčítance se mohou objevit pouze určité funkce (pokud nesloučíme logaritmy a pod. nebo pokud neuděláme nějakou umělou úpravu, jako že např. místo x budeme psát $e^{\ln x}$). Jsou to
- mnohočleny,
 - racionální lomené funkce,

- logaritmy lineárních a kvadratických mnohočlenů,
 - arkustangenty lineárních mnohočlenů.
- 4) Nezapomínejte ověřit, zda trojčleny $x^2 + px + q$ ze jmenovatelů mají opravdu komplexní kořeny, tj. $p^2 - 4q < 0$ (a tudíž nejdou rozložit na součin dvou lineárních mnohočlenů majících reálné kořeny). Pokud to přehlédnete a budete takový „parciální zlomek“ upravovat postupy určenými pro parciální zlomky s komplexními kořeny ve jmenovateli, projde vše až na jeden krok. Po doplnění na úplný čtverec a substituci dostanete místo dvojčlenu $u^2 + a^2$ dvojčlen $u^2 - a^2$, $a > 0$. Integrál

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^n}$$

nelze řešit pomocí rekurentního vzorce (2.15) a nezbývá než použít na něho rozklad na parciální zlomky, což se mělo udělat rovnou. Takto se sice dopracujete ke správnému výsledku, ale zbytečnou oklikou, kterou jste si přidali práci. Šlo by sice odvodit analogii vzorce (2.15) pro tento případ a vypočítat, že pro $n = 1$ vede $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ na dva logaritmy, ale to není výhodné, integrace parciálních zlomků majících ve jmenovateli reálné kořeny je mnohem rychlejší.

- 5) U parciálních zlomků prvního typu tvaru $\frac{A}{x-\alpha}$ je v případě, že α je racionální číslo, které není celé, někdy výhodnější napsat zlomek v nepatrně odlišném tvaru. Např. je-li kořen $\alpha = \frac{1}{2}$, tj. kořenový činitel je $(x - \frac{1}{2})$, hledáme parciální zlomek ve tvaru

$$\frac{A}{2x - 1} \quad \text{místo} \quad \frac{A}{x - \frac{1}{2}}.$$

Pozor, uvědomte si, že A vyjde pokaždé jiné! Vlastně jsme druhý zlomek předchozího řádku rozšířili dvěma. Musíme však pak dát pozor, že při integraci se použije vzorec 14 z tabulky 2.1:

$$\int \frac{A}{2x - 1} dx = A \int \frac{1}{2x - 1} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2}{2x - 1} dx = \frac{A}{2} \ln |2x - 1|.$$



Příklady k procvičení

1. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx,$

b) $\int \frac{u}{2u^2 - 3u - 2} du,$

c) $\int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx,$

d) $\int \frac{33}{6h^3 - 7h^2 - 3h} dh,$

e) $\int \frac{dx}{x(2+x)},$

f) $\int \frac{12(y-1)}{(y+1)(y^2-4)} dy,$

$$\begin{array}{ll} \text{g)} \int \frac{32s}{(2s-1)(4s^2-16s+15)} ds, & \text{h)} \int \frac{6(x^3+1)}{x^3-5x^2+6x} dx, \\ \text{i)} \int \frac{dx}{6+x-x^2}, & \text{j)} \int \frac{18(3x^2+1)}{x^4-3x^2+2x} dx, \\ \text{k)} \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx, & \text{l)} \int \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} dx, \\ \text{m)} \int \frac{2(x^2-4x+5)}{x+3} dx, & \text{n)} \int \frac{x dx}{x^2-x-2}. \end{array}$$

2. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{(3+x)(1+2x+x^2)}, & \text{b)} \int \frac{x}{4-4x+x^2} dx, \\ \text{c)} \int \frac{dx}{x(16-24x+9x^2)}, & \text{d)} \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx, \\ \text{e)} \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx, & \text{f)} \int \frac{1}{2x^2+9x-5} dx, \\ \text{g)} \int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx, & \text{h)} \int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx, \\ \text{i)} \int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx, & \text{j)} \int \frac{x^4+x^3-2x^2+2x+3}{x^2+x-2} dx, \\ \text{k)} \int \frac{x+3}{(x^2-x+1)^2} dx, & \text{l)} \int \frac{3x+1}{(x^2+2)^3} dx, \\ \text{m)} \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^3} dx, & \text{n)} \int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx. \end{array}$$

3. Integrujte dané funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}, & \text{b)} \int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx, \\ \text{c)} \int \frac{4z^2}{1-z^4} dz, & \text{d)} \int \frac{10(7x^2+1)}{x^4+4x^2-5} dx, \\ \text{e)} \int \frac{6r}{r^3+1} dr, & \text{f)} \int \frac{4t^3}{t^4+1} dt, \\ \text{g)} \int \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}{x} dx, & \text{h)} \int \frac{2x}{x^4+1} dx, \\ \text{i)} \int \frac{4}{x(x^4+1)} dx, & \text{j)} \int \frac{8}{y^4+1} dy, \end{array}$$

Nápověda: $x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

$$\begin{array}{ll} \text{k)} \int \frac{v^2}{v^3+5v^2+8v+4} dv, & \text{l)} \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx, \\ \text{m)} \int \frac{x^2}{x^2+2} dx, & \text{n)} \int \frac{3x^4}{x^2+2} dx. \end{array}$$

4. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx,$

b) $\int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx,$

c) $\int \frac{6m}{m^3 - 1} dm,$

d) $\int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx,$

e) $\int \frac{4}{(z^2 + 1)(z^2 + z)} dz,$

f) $\int \frac{4}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} dx,$

g) $\int \frac{2(p^3 - 6)}{p^4 + 6p^2 + 8} dp,$

h) $\int \frac{6b}{b^2 + 2b + 4} db,$

i) $\int \frac{6(3x + 8)}{x^2 + 2x + 10} dx,$

j) $\int \frac{10}{(5x + 4)^3} dx,$

k) $\int \frac{28(-5u + 16)}{2u^2 + 7} du,$

l) $\int \frac{28}{2y^2 + 4y + 6} dy,$

m) $\int \frac{30}{4x^2 + 4x + 16} dx,$

n) $\int \frac{4p}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} dp.$



Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln|2x + 1|,$

b) $\frac{2}{5} \ln|u - 2| + \frac{1}{10} \ln|2u + 1|,$

c) $-\ln|x - 2| + 3 \ln|x - 1| - 2 \ln|x + 2|,$

d) $9 \ln|3h + 1| - 11 \ln|h| + 2 \ln|2h - 3|,$

e) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2 + x} \right|,$

f) $\ln|y - 2| + 8 \ln|y + 1| - 9 \ln|y + 2|,$

g) $\ln|2s - 1| + 5 \ln|2s - 5| - 6 \ln|2s - 3|,$

h) $6x - 27 \ln|x - 2| + \ln|x| + 56 \ln|x - 3|,$

i) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 + x}{3 - x} \right|,$

j) $\frac{-24}{x - 1} + \ln \frac{|x|^9 \cdot |x - 1|^4}{|x + 2|^{13}},$

k) $2 \ln|x| - \ln|x + 1| + \frac{6}{x + 1},$

l) $-\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^2},$

m) $x^2 - 14x + 52 \ln|x + 3|,$

n) $\frac{1}{3} \ln|x + 1| + \frac{2}{3} \ln|x - 2|.$

2. a) $\frac{-1}{2(1 + x)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 + x}{1 + x} \right|,$

b) $\frac{2}{2 - x} + \ln|2 - x|,$

c) $\frac{1}{16} \left(\frac{4}{4 - 3x} + \ln \left| \frac{x}{3x - 4} \right| \right),$

d) $\frac{-1}{x + 2} + 2 \ln \left| \frac{x + 4}{x + 2} \right| - \frac{4}{x + 4},$

- e) $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right|$, f) $\frac{1}{11} \ln \left| \frac{2x-1}{x+5} \right|$,
- g) $-\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln |(x-1)(x+1)^2|$,
- h) $\frac{2}{3(3x-1)} + \ln |3x-1|$, i) $\frac{x^2}{2} + x + \ln(|x^2-1| \cdot \sqrt{x^2+1}) + \operatorname{arctg} x$,
- j) $\frac{x^3}{3} + \ln \sqrt[3]{|x-1|^5 \cdot |x+2|}$, k) $\frac{7x-5}{3(x^2-x+1)} + \frac{14}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,
- l) $\frac{x-6}{8(x^2+2)^2} + \frac{3x}{32(x^2+2)} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$,
- m) $\frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3x-3}{16(x^2-2x+5)} + \frac{3}{32} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}$,
- n) $\frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x$.
3. a) $\ln |x+1| + \frac{4}{x+2}$, b) $\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{2}{x+1}$,
- c) $\ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - 2 \operatorname{arctg} z$, d) $12\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + 5 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$,
- e) $-2 \ln |r+1| + \ln(r^2-r+1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2r-1}{\sqrt{3}}$,
- f) $\ln(t^4+1)$, g) $\ln |x| - \frac{4}{x-1}$,
- h) $\operatorname{arctg} x^2$, i) $4 \ln |x| - \ln(x^4+1)$,
- j) $\sqrt{2} \ln \frac{y^2+y\sqrt{2}+1}{y^2-y\sqrt{2}+1} + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(y\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(y\sqrt{2}-1)$,
- k) $\ln |v+1| + \frac{4}{-v+2}$, l) $x - \ln |x| + \frac{1}{x} + 2 \ln |x-1|$,
- m) $x - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$, n) $x^3 - 6x + 6\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$.
4. a) $\frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$, b) $2 \ln |x| - \ln(x^2+1)$,
- c) $2 \ln |m-1| - \ln(m^2+m+1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2m+1}{\sqrt{3}}$,
- d) $4 \ln |x+1| - \ln |x| + 3 \ln |x-1|$,
- e) $4 \ln |z| - 2 \ln |z+1| - \ln(z^2+1) - 2 \operatorname{arctg} z$,

- f) $2 \ln |x + 1| - \frac{2}{x + 1} - \ln(x^2 + 1),$
- g) $3 \operatorname{arctg} \frac{p}{2} - \ln(p^2 + 2) - 3 \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{\sqrt{2}} + 2 \ln(p^2 + 4),$
- h) $3 \ln(b^2 + 2b + 4) - 2 \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{b + 1}{\sqrt{3}},$
- i) $9 \ln(x^2 + 2x + 10) + 10 \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3},$ j) $-\frac{1}{(5x + 4)^2},$
- k) $32 \sqrt{14} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{14}} - 35 \ln(2u^2 + 7),$ l) $7 \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{y + 1}{\sqrt{2}},$
- m) $\sqrt{15} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{15}},$ n) $\ln \left| \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right|.$

2.5. Integrace některých speciálních typů funkcí

V tomto oddílu se budeme zabývat integrály, které lze pomocí vhodných substitucí převést na integrály z racionální lomené funkce. Jde o jisté výrazy s goniometrickými funkcemi resp. s odmocninami. Vesměš jde o integrály, které se často vyskytují v aplikacích.

Abychom mohli popsat, o jaké integrály jde, budeme potřebovat pojem racionální funkce dvou a více proměnných. Zavedeme si proto následující označení:

Symbolem $R(u, v)$ budeme rozumět zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli jsou pouze konečné součty výrazů tvaru $au^m v^n$, kde a je reálná konstanta a m a n jsou nezáporná celá čísla, tj. $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zobrazení $(u, v) \rightarrow R(u, v)$ se nazývá *racionální funkce dvou proměnných*. Racionální funkce dvou proměnných u a v jsou např.

$$uv - 4, \quad \frac{u + v}{u - v}, \quad \frac{uv + 2}{u^2 - v^2}, \quad \frac{u^2 v^3 - 2uv + 1}{uv - u^4 v^2 - 3}.$$

Obdobně postupujeme pro tři a více proměnných. Proměnné můžeme značit různými písmeny. Tak např.

$$R(x, y, z) = \frac{xy^2 z^3 - xy - xz + 2x - 3z + 5}{x^5 z^7 - xyz + y - 4z}$$

je racionální funkce tří proměnných x, y a z .

2.5.1. Integrály obsahující goniometrické funkce

V tomto oddílu se budeme zabývat neurčitými integrály tvaru

$$\int R(\cos x, \sin x) dx. \tag{2.17}$$

Jde např. o integrály následujících funkcí:

$$R(\cos x, \sin x) = \cos^2 x \sin^3 x,$$

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x},$$

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{1 + 3 \cos^2 x}{2 - \cos x \sin x}.$$

Poznámka 2.43.

- 1) Integrujeme tedy funkce, které dostaneme z funkcí $\cos x$, $\sin x$ a reálných čísel pomocí *konečného počtu* aritmetických operací (sečítání, odčítání, násobení a dělení).
- 2) Pokud bychom mezi výchozí funkce přidali i $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, nedostali bychom nic nového. Dosadíme-li totiž $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, vyjde po úpravě opět racionální výraz vytvořený ze sinů a kosinů.
- 3) Obecněji bychom mohli použít funkce $\cos ax$ a $\sin ax$, kde $a \neq 0$. Postup při integraci je ale naprosto obdobný, proto se omezíme na případ $a = 1$.

Nejprve si všimneme velice často se vyskytujícího případu integrálů

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx, \quad \text{kde } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

Situace je jednoduchá, pokud je aspoň jedno z čísel m , n liché. Substituce

$$\begin{aligned} \sin x &= t, & \text{je-li } m \text{ liché,} \\ \cos x &= t, & \text{je-li } n \text{ liché,} \end{aligned}$$

převede integrál (2.18) na integrál z racionální lomené funkce. Pokud jsou samozřejmě obě čísla lichá, můžeme si vybrat.

Jeden takový integrál už jsme počítali — viz příklad 2.21. Ukážeme si další.

Příklad 2.44. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. V tomto případě je $m = 5$, $n = 2$, takže budeme volit substituci $\sin x = t$. Pro diferenciál dostaneme $\cos x \, dx = dt$. Z integrandu si „půjčíme“ tedy jeden kosinus a zbytek upravíme tak, aby obsahoval jen siny a bylo možné snadno dosadit. K tomu použijeme vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Dostaneme

$$\cos^4 x \sin^2 x = (\cos^2 x)^2 \sin^2 x = (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x.$$

Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int (1 - t^2)^2 t^2 \, dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt = \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Následující integrál jsme již jednou počítali — viz příklad 2.8 c). Tentokrát zvolíme jiný postup.



Příklad 2.45. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$.

Řešení. Tentokrát ve vztahu (2.18) máme $m = 0$, $n = -1$. Substituce tudíž bude $\cos x = t$. Po úpravě dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Vzniklou racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky. Jmenovatel má dva jednoduché kořeny $t = 1$ a $t = -1$. Rozklad bude mít proto tvar

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ dostaneme rovnici

$$1 = A(t + 1) + B(t - 1),$$

do níž dosadíme kořeny jmenovatele:

$$\begin{array}{llll} t = -1 : & 1 = -2B & \Rightarrow & B = -\frac{1}{2}, \\ t = 1 : & 1 = 2A & \Rightarrow & A = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Nyní můžeme dokončit výpočet integrálu:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \left(\frac{1/2}{t - 1} - \frac{1/2}{t + 1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{1}{2} \ln |t + 1| + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

Rozmyslete si, jak by se výsledek upravil na tvar, který nám vyšel v příkladu 2.8 c). ▲

Zbývá vyřešit případ, kdy v integrálu (2.18) jsou oba exponenty sudé. Obecný případ uvedeme níže na straně 67. V případě, že jsou obě čísla m, n nezáporná, je nejrychlejší úprava pomocí vzorců pro dvojnásobný úhel. Ty mají tvar

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Jejich použití si ukážeme na dvou příkladech.

Příklad 2.46. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \cos^2 x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Jde o integrál velice často se vyskytující v aplikacích, který jsme již jednou počítali — viz příklad 2.16. Jeho výpočet s pomocí předchozího vzorce je rychlejší. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c. \end{aligned}$$



Příklad 2.47. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Nejprve si integrand upravíme s pomocí vzorců (2.19), v nichž volíme $\alpha = x$:

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) = \frac{1}{8} (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x). \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \int \cos^2 2x \, dx - \int \cos^3 2x \, dx \right). \end{aligned}$$

Spočítáme vzniklé dva integrály. Na první opět použijeme vzorec (2.19), v němž zvolíme tentokrát $\alpha = 2x$. Vyjde nám

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x.$$

U druhého integrálu jde o typ (2.18), kde $m = 3$, $n = 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x \, dx &= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin 2x = t \\ 2 \cos 2x \, dx = dt \\ \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - t^2) \, dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x. \end{aligned}$$

Celkový výsledek je tudíž

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 2x + \\ &+ \frac{1}{48} \sin^3 2x + c = \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c. \end{aligned}$$





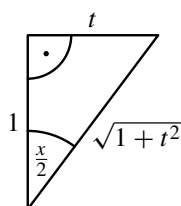
Průvodce studiem

Nyní již od speciálních případů integrálu $\int R(\cos x, \sin x) dx$ přejdeme k jeho obecnému výpočtu. Nejprve uvedeme univerzální substituci. Dále pak vyčleníme tři speciální typy, které jsou obvykle rychleji řešitelné pomocí jiných vhodných substitucí. Ve všech případech přejde zkoumaný integrál v integrál z racionální lomené funkce.

Univerzální substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Ukážeme, že substituce

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= t, & x &\in (-\pi, \pi), \\ x &= 2 \operatorname{arctg} t, & dx &= \frac{2}{1+t^2} dt, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$



Obr. 2.3

převéde integrál (2.17) na integrál z racionální lomené funkce. Uvedeme si mnemotechnickou pomůcku, jak tyto vztahy rychle odvodit. Použijeme k tomu pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden úhel bude mít velikost $x/2$. Velikost přilehlé odvěsny zvolíme rovnu jedné. Z definice funkce tangens (poměr velikostí protilehlé a přilehlé odvěsny) vyplývá, že protilehlá odvěsna má velikost t . Z Pythagorovy věty konečně dostaneme, že přepona má velikost $\sqrt{1+t^2}$ — viz obr. 2.3. Z definice funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé resp. přilehlé odvěsny a přepony) dostaneme

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (2.21)$$

S použitím vzorců pro poloviční úhel a vzorců (2.21), v nichž všude nahradíme x poloviční hodnotou $\frac{x}{2}$, dostaneme hledané vztahy:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Nyní integrál (2.17) obsahující sinus a kosinus převedeme pomocí věty 2.27 na integrál z racionální lomené funkce. Dostaneme

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Použití si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.48. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5}{4 + \sin x} dx$ na intervalu $x \in (-\pi, \pi)$.



Řešení. Použijeme substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{4 + \sin x} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{5}{4 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{t}{2} + 1} = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4(t + \frac{1}{4})}{\sqrt{15}} + c = \frac{10}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4t + 1}{\sqrt{15}} + c = \\ &= \frac{10}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Speciální typy substitucí $\sin x$, $\cos x$ a $\operatorname{tg} x$

Univerzální substitucí (2.20) lze sice řešit každý integrál typu (2.17), vzniklé racionální funkce jsou však často dost komplikované. Někdy lze integrand upravit na speciální tvar a je možné použít jinou substituci vedoucí na integrál z racionální lomené funkce. Jde zejména o následující případy ($S(w)$ je nějaká racionální lomená funkce jedné proměnné):

$$R(\cos x, \sin x) = S(\sin x) \cdot \cos x \quad \text{volíme substituci } \boxed{\sin x = t}, \quad (2.22)$$

$$R(\cos x, \sin x) = S(\cos x) \cdot \sin x \quad \text{volíme substituci } \boxed{\cos x = t}, \quad (2.23)$$

$$R(\cos x, \sin x) = S(\operatorname{tg} x) \quad \text{volíme substituci } \boxed{\operatorname{tg} x = t}. \quad (2.24)$$

U typů (2.22) a (2.23) se použije věta 2.18 a s náhradou nejsou problémy. U typu (2.24) se však použije věta 2.27. Univerzální návod, jak rozhodnout, kdy je možné kterou substituci použít, najdete v oddílu „Pro zájemce“ na konci této kapitoly. Použití si ukážeme na příkladech.

Příklad 2.49. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Jedná se o integrál typu (2.23). Po úpravě s použitím vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{4 + \cos^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4} dt = \int \frac{t^2 + 4 - 5}{t^2 + 4} dt = \int \left(1 - \frac{5}{t^2 + 4} \right) dt = \\ &= t - 5 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c = \cos x - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2} + c. \end{aligned}$$

Vzniklá racionální funkce byla neryze lomená, proto jsme ji převedli na součet mnohočlenu (v našem případě to byla konstanta 1) a ryze lomené racionální funkce. Použili jsme rovněž vzorec 9 z tabulky 2.1. ▲

Substituce $\operatorname{tg} x$

U substituce (2.24) je třeba před výpočtem diferenciálu vyjádřit starou proměnnou pomocí nové. Dále je třeba umět vyjádřit sinus a kosinus pomocí tangens — viz následující tabulka.

$\operatorname{tg} x = t,$	$x \in (-\pi/2, \pi/2),$	(2.25)
$x = \operatorname{arctg} t,$	$dx = \frac{1}{1+t^2} dt,$	
$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$	$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$	

Pro odvození těchto vzorců je opět možno použít mnemotechnickou pomůcku — pravoúhlý trojúhelník jako u substituce typu $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (2.20) s tím rozdílem, že velikost úhlu bude x .



Příklad 2.50. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$

Řešení. Jedná se o integrál typu (2.24). Nejprve integrand upravíme. Vyjde nám

$$\frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 \operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

Jde tedy o integrál typu (2.24). Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 \operatorname{tg}^2 x + 1} dx = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{t^2 + 1}{2t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} \operatorname{tg} x + c. \end{aligned}$$

Opět jsme použili vzorec 9 z tabulky 2.1. Funkce $\varphi(t) = \arctg t$ splňuje na intervalu $(-\infty, +\infty)$ předpoklady věty 2.27.

Výsledná primitivní funkce je definovaná jen na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Avšak integrand je spojitá funkce na \mathbb{R} . Jak lze zkonstruovat primitivní funkci na celé reálné ose si ukážeme v podkapitole 2.6.3. ▲

Mezi integrály typu (2.24) patří i integrál (2.18), v němž jsou m i n sudá čísla. Sudé mocniny sinu a kosinu lze vyjádřit pomocí racionálních funkcí proměnné t . Jak jsme již konstatovali, pokud jsou čísla m, n nezáporná, je rychlejší použití vzorců (2.19). Je-li aspoň jedno z nich záporné, použijeme substituci $\tg x = t$.

Příklad 2.51. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.



Řešení.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{l} \tg x = t \\ x = \arctg t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^4}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{(t^2+1)^2}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t^4}{t^2+1} dt = \\ &= \int \frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{t^2+1} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \arctg t + c = \frac{1}{3} \tg^3 x - \tg x + \arctg(\tg x) + c = \\ &= \frac{1}{3} \tg^3 x - \tg x + x + c. \end{aligned}$$

Nerzye lomenou racionální funkci jsme převedli na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce. (Stejný výsledek jsme mohli dostat vydělením $t^4 : (t^2 + 1)$.) Dále jsme využili toho, že na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ jsou funkce tangens a arkustangens vzájemně inverzní, takže platí $\arctg(\tg x) = x$.

Mohli jsme si všimnout, že integrand je vlastně $\tg^4 x$ a první úprava mohla být poněkud kratší. Na zbytek výpočtu by to ovšem nemělo vliv. ▲

Průvodce studiem



Často se stává, že konkrétní integrál odpovídá více typům. Důležité je pak zvolit ten, který vede na pokud možno co nejkratší výpočet. Obecná zásada je volit (pokud je to možné)

- nejprve typ (2.22) resp. (2.23), tj. substituci za sinus resp. kosinus,
- pak typ (2.24), tj. substituci za tangens,
- nakonec univerzální substituci (2.20) za tangens polovičního úhlu.

Samožřejmě žádné takové pravidlo neplatí absolutně a mohou nastat výjimky, jak ukazuje následující příklad.



Příklad 2.52. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$.

Řešení. Tento integrál jsme již dvakrát řešili — viz příklady 2.8 c) a 2.45. Nyní použijeme univerzální substituci (2.20) a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \\ &= \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c. \end{aligned}$$

Očividně ze všech tří postupů byl tento nejrychlejší. ▲



Pro zájemce:

U složitějších racionálních výrazů $R(\cos x, \sin x)$ obsahujících siny a kosiny někdy nemusí být na první pohled jasné, zda jde o některý ze speciálních typů (2.22)–(2.24), které obvykle vedou na jednodušší integraci. Tuto skutečnost lze určit z vlastností racionální funkce $R(u, v)$.

Řekneme, že racionální funkce funkce $R(u, v)$ je

$$\begin{aligned} &\text{lichá vzhledem k proměnné } u, \text{ jestliže } R(-u, v) = -R(u, v), \\ &\text{lichá vzhledem k proměnné } v, \text{ jestliže } R(u, -v) = -R(u, v), \\ &\text{sudá vzhledem k proměnným } u, v, \text{ jestliže } R(-u, -v) = R(u, v). \end{aligned}$$

Rovnost musí platit pro všechny hodnoty u, v , pro něž je funkce $R(u, v)$ definovaná.

Lze ukázat (viz [17, str. 25]), že integrand $R(\cos x, \sin x)$ je typu

(2.22), jestliže je funkce $R(u, v)$ lichá vzhledem k proměnné u (volíme $\sin x = t$),

(2.23), jestliže je funkce $R(u, v)$ lichá vzhledem k proměnné v (volíme $\cos x = t$),

(2.24), jestliže je funkce $R(u, v)$ sudá vzhledem k proměnným u, v (volíme $\operatorname{tg} x = t$).

Např. v příkladu 2.49 bylo

$$R(u, v) = \frac{v^3}{1 + 4u^2 + 3v^2},$$

tedy

$$R(u, -v) = \frac{(-v)^3}{1 + 4u^2 + 3(-v)^2} = \frac{-v^3}{1 + 4u^2 + 3v^2} = -R(u, v).$$

Šlo tudíž o funkci lichou vzhledem k proměnné v a mohla se použít substituce $\cos x = t$. Podobně v příkladu 2.50 bylo

$$R(u, v) = \frac{1}{1 + v^2}$$

(na u funkce přímo vůbec nezávisí), takže

$$R(-u, -v) = \frac{1}{1 + (-v)^2} = \frac{1}{1 + v^2} = R(u, v).$$

Šlo tedy o funkci sudou vzhledem k proměnným u, v a mohla se použít substituce $\operatorname{tg} x = t$.

Na závěr tohoto oddílu se zmíníme o integraci výrazů obsahujících rovněž goniometrické funkce, které však nejsou typu (2.17) na str. 60. Jde o integrály tvaru

$$\int \sin ax \cos bx \, dx, \quad \int \sin ax \sin bx \, dx, \quad \int \cos ax \cos bx \, dx,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Integrand se upraví pomocí vzorců

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Příklad 2.53. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin \sqrt{2}x \cos 3x \, dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



Řešení. S použitím příslušného vzorce ($a = \sqrt{2}$, $b = 3$, tj. volíme $\alpha = \sqrt{2}x$, $\beta = 3x$) dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{2}x \cos 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(\sqrt{2}x + 3x) + \sin(\sqrt{2}x - 3x)] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(\sqrt{2} + 3)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(\sqrt{2} - 3)x \, dx = \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{2} + 3)x}{2(\sqrt{2} + 3)} - \frac{\cos(\sqrt{2} - 3)x}{2(\sqrt{2} - 3)} + c. \end{aligned}$$



Příklady k procvičení



1. Integrujte dané funkce:

a) $\int \cos^2 \frac{\beta}{2} \, d\beta,$

b) $\int \sin^3 u \, du,$

c) $\int \sin^2 x \, dx,$

d) $\int \sin^5 x \, dx,$

e) $\int \cos^5 x \, dx,$

f) $\int \sin^6 x \, dx,$

g) $\int \frac{\sin^3 \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon + 1} \, d\varepsilon,$

h) $\int \frac{du}{(2 + \cos u) \sin u}.$

2. Integrujte dané funkce:

$$a) \int \frac{2}{\sin x \cos^3 x} dx,$$

$$c) \int 15 \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta,$$

$$e) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$$

$$g) \int \frac{\sin^3 y + 1}{\cos^2 y} dy,$$

$$i) \int 8 \cos^4 x dx,$$

$$b) \int 12 \sin^3 x \cos^3 x dx,$$

$$d) \int \cos^6 \rho \sin^5 \rho d\rho,$$

$$f) \int \frac{3 \sin^3 h}{\cos^4 h} dh,$$

$$h) \int 32 \sin^4 u \cos^2 u du,$$

$$j) \int 32 \cos^6 x dx.$$

3. Integrujte dané funkce:

$$a) \int 128 \cos^4 \beta \sin^4 \beta d\beta,$$

$$c) \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} dx,$$

$$e) \int \frac{1}{1 - \cos x} dx,$$

$$g) \int \frac{1}{\sin x - 1} dx,$$

$$i) \int \frac{3}{5 + 4 \sin x} dx,$$

$$k) \int \frac{2}{5 - 3 \cos x} dx,$$

$$b) \int 60 \sin^5 \alpha \cos^5 \alpha d\alpha,$$

$$d) \int \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} du,$$

$$f) \int \frac{1}{1 + \sin \alpha} d\alpha,$$

$$h) \int \frac{5 dx}{3 \sin x - 4 \cos x},$$

$$j) \int \frac{8 dx}{\sin 2x - 2 \sin x},$$

$$l) \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx.$$

4. Integrujte dané funkce:

$$a) \int \frac{3 dx}{5 - 4 \cos x + 3 \sin x},$$

$$c) \int \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z} dz,$$

$$e) \int \frac{\sin 2\omega}{\cos^4 \omega} d\omega,$$

$$g) \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx,$$

$$i) \int \frac{4}{1 + \operatorname{tg} x} dx,$$

$$k) \int \frac{3}{\cos^4 \alpha} d\alpha,$$

$$b) \int \frac{5 dx}{2 \sin x - \cos x + 5},$$

$$d) \int \frac{2(1 + \operatorname{tg} u)}{\sin 2u} du,$$

$$f) \int \frac{3 \cos^2 x}{\sin^4 x} dx,$$

$$h) \int \frac{6 \cos x}{(1 - \cos x)^2} dx,$$

$$j) \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx,$$

$$l) \int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx.$$

5. Integrujte dané funkce:

a) $\int \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{3x}{4} dx,$

b) $\int \sin 3x \sin x dx,$

c) $\int \cos 3x \cos 4x dx,$

d) $\int \sin 5x \cos 7x dx,$

e) $\int \sin \sqrt{3}x \cos x dx,$

f) $\int \cos \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x dx.$

Klíč k příkladům k procvičení



1. a) $\frac{\sin \beta}{2} + \frac{\beta}{2},$

b) $\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u,$

c) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x,$

d) $\frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} - \cos x,$

e) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x,$

f) $\frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48},$

g) $\cos \varepsilon - 2 \arctg(\cos \varepsilon),$

h) $\frac{1}{3} \ln \left| \left(\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} + 3 \right) \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right|.$

2. a) $\operatorname{tg}^2 x + 2 \ln |\operatorname{tg} x|,$

b) $3 \sin^4 x - 2 \sin^6 x,$

c) $5 \sin^3 \theta - 3 \sin^5 \theta,$

d) $\frac{2}{9} \cos^9 \rho - \frac{1}{11} \cos^{11} \rho - \frac{1}{7} \cos^7 \rho,$

e) $-\frac{1 + \sin^2 x}{\sin x},$

f) $\frac{1 - 3 \cos^2 h}{\cos^3 h},$

g) $\frac{1 + \sin y + \cos^2 y}{\cos y},$

h) $2u - \frac{\sin 4u}{2} - \frac{2}{3} \sin^3 2u,$

i) $2 \sin 2x + 3x + \frac{\sin 4x}{4},$

j) $\frac{3}{2} \sin 4x - \frac{2}{3} \sin^3 2x + 10x + 8 \sin 2x.$

3. a) $3\beta - \sin 4\beta + \frac{\sin 8\beta}{8},$

b) $10 \sin^6 \alpha - 15 \sin^8 \alpha + 6 \sin^{10} \alpha,$

c) $\frac{2}{3} \arctg \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$

d) $-\frac{4}{\operatorname{tg} \frac{u}{2} - 1} - u,$

e) $-\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}},$

f) $-\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1},$

g) $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1},$

h) $\ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right|,$

- i) $2 \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{3}\right)$, j) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$,
- k) $\operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$,
- l) $\ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3\right) - \ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.
4. a) $-\frac{2}{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}$, b) $\sqrt{5} \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)\right]$,
- c) $\ln|1 + \operatorname{tg} z| - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 z)$, d) $\operatorname{tg} u + \ln|\operatorname{tg} u|$,
- e) $\frac{1}{\cos^2 \omega}$, f) $-\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$,
- g) $-\operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1)$ resp. $\operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x$, h) $\frac{3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}}$,
- i) $2 \ln|1 + \operatorname{tg} x| - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x$, j) $\frac{-1}{\operatorname{tg} + 1}$,
- k) $\operatorname{tg}^3 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha$, l) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right)$.
5. a) $\frac{-\cos x}{2} + \cos \frac{x}{2}$, b) $\frac{1}{8} (2 \sin 2x - \sin 4x)$,
- c) $\frac{1}{14} (\sin 7x + 7 \sin x)$, d) $-\frac{\cos 12x}{24} + \frac{\cos 2x}{4}$,
- e) $-\frac{\cos(\sqrt{3} + 1)x}{2(\sqrt{3} + 1)} - \frac{\cos(\sqrt{3} - 1)x}{2(\sqrt{3} - 1)}$, f) $\frac{1}{4} (2 \sin x + \sin 2x)$.

2.5.2. Integrály obsahující odmocniny

Jako prvního si všimneme integrálu tvaru

$$\int R(x, \sqrt[s]{x}) dx, \quad \text{kde } s \in \mathbb{N}, s \geq 2. \quad (2.26)$$

Ukažme si několik příkladů takových integrálů.

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}, \quad R(x, \sqrt[4]{x}) = \frac{x^4 \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}, \quad R(x, \sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}.$$

Poznámka 2.54. Názorně řečeno, jde o funkce, které dostaneme z funkcí x a $\sqrt[s]{x}$ a reálných čísel pomocí *konečně mnoha* aritmetických operací (sečítání, odčítání, násobení a dělení).

Substituce $x = t^s$ převede integrál (2.26) na integrál z racionální lomené funkce. Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.55. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx$, $x \in (0, \infty)$.



Řešení. Zvolíme tedy substituci $x = t^2$, tj. $t = \sqrt{x}$. Vyjde nám:

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^4 + t + 1}{t^2 + t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^4 + t + 1}{t + 1} dt,$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Je tedy potřeba ji upravit na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce. To je možné udělat běžným algoritmem pro dělení mnohočlenů. Tedy

$$\frac{t^4 + t + 1}{t + 1} = t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t + 1}.$$

Celkový výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx &= 2 \int \left(t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \ln |t + 1| \right) + c = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

V předchozím příkladu figuroval pouze jeden typ odmocniny. V integrandu se však mohou vyskytnout odmocniny různých typů. Ty se však dají vyjádřit jako mocniny o stejném základu. Proto se integrál (2.26), tj. integrál typu $\int R(x, \sqrt[s]{x}) dx$, někdy píše ve tvaru

$$\int S(x, \sqrt[s_1]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}) dx, \quad (2.27)$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $s_1 \geq 2, \dots, s_k \geq 2$ jsou přirozená čísla a S je racionální funkce $k + 1$ proměnných. Tento integrál budeme řešit pomocí následující substituce.

Označíme-li s nejmenší společný násobek čísel s_1, \dots, s_k , je každá s_i -tá odmocnina přirozenou mocninou s -té odmocniny: $\sqrt[s_i]{x} = (\sqrt[s]{x})^{s/s_i}$, kde $i = 1, \dots, k$. Je tedy integrál typu (2.27), který je zdánlivě obecnější, protože obsahuje více různých odmocnin, ve skutečnosti naprosto rovnocenný integrálu typu (2.26) a lze ho opět řešit obdobnou substitucí $x = t^s$, kde s je zmíněný nejmenší společný násobek čísel s_1, \dots, s_k (nebo jakýkoli větší celočíselný násobek čísla s , ale tím bychom dostali zbytečně vysoké mocniny nové proměnné t a integrace vzniklé racionální lomené funkce by pravděpodobně byla daleko obtížnější).

Příklad 2.56. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jedná se o integrál typu (2.27). Zvolíme tedy substituci $x = t^6$, tj. $t = \sqrt[6]{x}$, splňující předpoklady věty 2.27. Vyjde

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{1 + t^3 - t^2}{t^6 + t^5} 6t^5 dt = \\ &= \int \frac{6t^5(t^3 - t^2 + 1)}{t^5(t+1)} dt = \int \frac{6t^3 - 6t^2 + 6}{t+1} dt, \end{aligned}$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Je tudíž potřeba upravit ji na součet mnohočlenu a rzye lomené racionální funkce. Běžným algoritmem pro dělení mnohočlenů dostaneme

$$\frac{6t^3 - 6t^2 + 6}{t+1} = 6t^2 - 12t + 12 - \frac{6}{t+1},$$

což je funkce, kterou můžeme rovnou integrovat. Celkový výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx &= \int \left(6t^2 - 12t + 12 - \frac{6}{t+1} \right) dt = \\ &= 2t^3 - 6t^2 + 12t - 6 \ln |t+1| + c = \\ &= 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Další typ, kterým se budeme zabývat, má tvar

$$\boxed{\int R(x, \sqrt[s]{ax+b}) dx,} \quad (2.28)$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že pokud $a = 1$ a $b = 0$ dostáváme integrál typu (2.26).

Substituce určená rovností $t^s = ax + b$ převede tento integrál na integrál z racionální lomené funkce. Musíme z této rovnosti nejprve osamostatnit proměnnou x a pak vypočítat diferenciál. Tedy

$$t^s = ax + b \Rightarrow x = \frac{t^s - b}{a} \quad \text{a} \quad dx = \frac{st^{s-1}}{a} dt.$$

Použití si opět ukážeme na příkladu.



Příklad 2.57. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Zavedeme substituci $x + 1 = t^2$, tj. $t = \sqrt{x+1}$. Dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot 2t dt,$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Po vydělení obdržíme

$$\frac{t^2 + t}{t - 1} = t + 2 + \frac{2}{t - 1}.$$

Výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx &= 2 \int \left(t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 2 \ln(t-1) \right) + c = \\ &= x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} - 1) + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Další typ, kterým se budeme zabývat, má tvar

$$\int R \left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \quad (2.29)$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

Podmínka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že se zlomek $\frac{ax+b}{cx+d}$ nevykrátí na konstantu jako např. $\frac{4x-2}{2x-1} = 2$.

Dále si všimněte, že pro $a = d = 1$ a $b = c = 0$ dostáváme integrál typu (2.26), jde tedy o jeho zobecnění.

Substituce určená rovností $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$ převede integrál (2.29) na integrál z racionální lomené funkce. Jde o substituci ve smyslu věty 2.27. Musíme tedy z této rovnosti nejprve osamostatnit starou proměnnou x a pak teprve počítat diferenciál:

$$\begin{aligned} t^s = \frac{ax+b}{cx+d} &\Rightarrow cxt^s + dt^s = ax + b \Rightarrow x(ct^s - a) = b - dt^s \\ &\Rightarrow \varphi: x = \frac{b - dt^s}{ct^s - a}, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{b - dt^s}{ct^s - a} \right)' dt = \frac{-sdt^{s-1}(ct^s - a) - (b - dt^s)sc t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt = \\ &= \frac{s(ad - bc)t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt. \end{aligned}$$

Výsledek si samozřejmě nebudeme pamatovat, ale na každém konkrétním zadání osamostatníme starou proměnnou x a spočítáme její diferenciál.

Do výsledného integrálu musíme dosadit za t inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$, jejíž určení je však snadné:

$$\varphi^{-1}: t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$



Příklad 2.58. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$, $x \in (1, +\infty)$.

Řešení. Jde o integrál typu (2.29). Zvolíme substituci, jež je určena rovností $\frac{x+1}{x-1} = t^2$, a osamostatníme x , tj. určíme funkci $\varphi(t)$:

$$\frac{x+1}{x-1} = t^2 \Rightarrow xt^2 - t^2 = x+1 \Rightarrow x(t^2-1) = t^2+1 \Rightarrow \varphi: x = \frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

Dále si připravíme diferenciál:

$$dx = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1} \right)' dt = \frac{2t(t^2-1) - (t^2+1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt.$$

Určíme ještě inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$ potřebnou pro použití věty 2.27:

$$\varphi^{-1}: t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(Podrobnějším rozbohem průběhu funkce $\varphi(t)$ lze ověřit, že při označení z věty 2.27 jsme volili $J = I = (1, +\infty)$. Jiná varianta by byla $J = (1, +\infty)$, $I = (-\infty, -1)$, pak by ovšem platilo, že $\varphi^{-1}(x) = -\sqrt{(x+1)/(x-1)}$.)

Nyní provedeme substituci. Dostaneme:

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{t^2-1}} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt,$$

což je integrál z ryze lomené racionální funkce.

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Rozklad jmenovatele na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru je zřejmě $(t-1)(t+1)(t^2+1)$, takže tvar rozkladu na součet parciálních zlomků bude

$$\frac{-4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

kde A , B , C a D jsou vhodné konstanty. Po vynásobení jmenovatelem obdržíme

$$-4t^2 = A(t+1)(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-1).$$

Nejprve dosadíme reálné kořeny 1 a -1 , čímž určíme dvě konstanty:

$$\begin{aligned} t = 1 : & \quad -4 = 4A & \Rightarrow & \quad A = -1, \\ t = -1 : & \quad -4 = -4B & \Rightarrow & \quad B = 1. \end{aligned}$$

Dále sestavíme ještě dvě rovnice porovnáním koeficientů u vhodných mocnin. I bez roznásobení je vidět, že platí:

$$\begin{aligned} t^3 : \quad 0 &= A + B + C & \Rightarrow & C = 0, \\ t^0 : \quad 0 &= A - B - D & \Rightarrow & D = -2. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\ &= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2 \operatorname{arctg} t + c = \\ &= -\ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| + \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c. \end{aligned}$$

Výsledek je možné zjednodušit. Zkuste si jako cvičení ověřit, že platí

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = 2 \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c$$

(konstanty c nejsou v obou výsledcích stejné, liší se o $\ln 2$).

První výsledek je platný i na intervalu $(-\infty, -1)$. Zkuste si rozmyslet, jak by na tomto intervalu vypadala upravená verze. ▲

I integrály typu (2.28) a (2.29) je možné zobecnit na případ, kdy integrand obsahuje více různých odmocnin z *téhož* lineárního členu resp. zlomku. O skutečné zobecnění ale nejde, situace je stejná jako u dvojice typů (2.26) a (2.27).

Dalším typem integrálů s odmocninami, které lze převést na integrály z racionálních lomených funkcí, je

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.30)$$

Zde R je racionální funkce dvou proměnných. Přitom předpokládáme, že kvadratický trojčlen nemá dvojnásobný kořen, tj. že platí $b^2 - 4ac \neq 0$ (jinak by se odmocnina zrušila).

Omezíme se na případ, kdy $b = 0$ (pak je nutně $c \neq 0$), a ukážeme si řešení pomocí *goniometrických substitucí*.

Pro zájemce:

Integrály typu (2.30) se obvykle řeší pomocí tzv. *Eulerových¹ substitucí* — viz např. [8, 17]. Z časových důvodů se jimi nebudeme zabývat. Pro naše účely z hlediska aplikací postačí dále

¹**Leonard Euler** (1707–1783) (čti ojler) — švýcarský matematik, fyzik, mechanik a astronom. Působil převážně v Petrohradě. Jeden z největších matematiků všech dob. Napsal kolem 850 prací (včetně mnohých monografií). Ovlivnil všechny základní matematické disciplíny. Od r. 1766 byl slepý (diktoval svým žákům).



uvedené speciální případy. Navíc obvykle půjde pouze o integrály ze samotných odmocnin, kdy goniometrické substituce vedou poměrně rychle k cíli. Mimoto doplněním kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ na úplný čtverec a pomocnou substitucí lze obecný případ převést na případ $b = 0$ — srv. postup při integraci parciálního zlomku $1/(x^2 + px + q)^n$ na str. 52.

Uvedeme jen pro představu, jak Eulerovy substituce vypadají. Jde o tři substituce (první dvě pokrývají všechny případy, ale třetí je někdy výhodnější). Novou proměnnou označíme t .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{|a|}t(x - \alpha), \quad \text{když } b^2 - 4ac > 0 \text{ } (\alpha \text{ je kořen } ax^2 + bx + c = 0),$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t, \quad \text{když } b^2 - 4ac < 0, \ a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{když } c > 0.$$

Příslušný vztah se vždy umocní a osamostatní se x (x^2 se zruší). Vztah mezi x a t je dán racionální funkcí. Pak se teprve vypočítá diferenciál dx . Integrál (2.30) přejde v integrál z racionální lomené funkce. Ukázky použití viz např. [17, 18].

V případě, že v integrálu typu (2.30) je $b = 0$, se (po vytknutí $|a|$) mohou podle znamének koeficientů vyskytnout celkem tři typy odmocnin. U každého typu současně uvedeme, pomocí jaké substituce lze daný integrál převést na integrál typu $S(\cos x, \sin x)$, kde $S(u, v)$ je racionální funkce dvou proměnných u, v , který už umíme řešit. V dalším $k > 0$ značí konstantu.

$$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx \quad x = k \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (2.31)$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + k^2}) dx \quad x = k \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (2.32)$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - k^2}) dx \quad x = \frac{k}{\sin t}, \quad t \in (-\pi/2, 0) \text{ nebo } t \in (0, \pi/2). \quad (2.33)$$

Jeden takový integrál typu (2.31) jsme již počítali — viz příklad 2.30 na str. 37. Nyní si ukážeme další.



Příklad 2.59. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad x \in (1, +\infty)$.

Řešení. Jedná se o integrál typu (2.33), přičemž $k = 1$. Po substituci a následných úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sin t} \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{\frac{1}{\sin t}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \sin t \sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = - \int \sin t \frac{|\cos t|}{|\sin t|} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \sin t \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = - \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 t} \right) dt = t + \operatorname{cotg} t + c. \end{aligned}$$

Protože $x \in (1, +\infty)$, volíme $t \in (0, \pi/2)$. Na tomto intervalu je $\sin t$ i $\cos t$ kladný, čehož jsme využili při odstraňování absolutních hodnot.

Dále musíme dosadit zpět původní proměnnou x . K tomu musíme vypočítat inverzní funkci. Vyjde nám

$$x = \frac{1}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin \frac{1}{x}.$$

Před dosazením ještě předchozí výsledek upravíme. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx &= t + \operatorname{cotg} t + c = t + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} + c = \\ &= \arcsin \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} + c = \arcsin \frac{1}{x} + x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} + c = \\ &= \arcsin \frac{1}{x} + x \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \arcsin \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1} + c. \end{aligned}$$

Podle věty 2.29 na str. 37 výsledek platí i na intervalu $(1, +\infty)$. ▲

Výpočet i zdánlivě jednoduchých integrálů typu (2.30) bývá technicky poměrně náročný a zdlouhavý, což ukazuje i předchozí příklad. Nejinak je tomu při použití Eulerových substitucí. Navíc je potřeba upozornit, že při řešení téhož integrálu jednou Eulerovými substitucemi a podruhé goniometrickými substitucemi (nebo dvěma různými Eulerovými substitucemi) můžeme dostat zdánlivě zcela odlišné výsledky. Často je dost netriviální ukázat pomocí úprav, že tyto výsledky jsou stejné (až na případnou konstantu).

2.6. Závěrečné poznámky

2.6.1. Dostaneme integraci elementární funkce opět elementární funkcí?

Na str. 10 jsme si připomněli, co rozumíme elementárními funkcemi. Není těžké si uvědomit, že z pravidel pro derivaci plyne, že derivováním elementární funkce vždy dostaneme opět elementární funkci.

Bohužel u neurčitého integrálu je situace komplikovanější. Protože elementární funkce jsou na intervalech, na nichž jsou definované, spojité, existují k nim podle věty 2.3 primitivní funkce. *Už ale není obecně pravda, že primitivní funkce k elementárním funkcím zase musí ležet v množině elementárních funkcí.* Tento poznatek však musíme správně interpretovat. V žádném případě neříkáme, že primitivní funkce k nějaké elementární funkci neexistuje. Jen tvrdíme, že ji nelze vyjádřit vzorcem takového tvaru, jak by se nám líbilo, tj. nelze ji vytvořit z jakýchkoli přesně vymezených základních funkcí (mnohočleny, goniometrické funkce atd.) pomocí konečného počtu aritmetických operací a skládání.

Takovéto funkce (tj. primitivní funkce k elementárním funkcím, které již nejsou elementární) se obvykle nazývají *vyšší transcendentní funkce*. (Exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce jsou tzv. *elementární transcendentní funkce*.) Naneštěstí neexistuje žádné jednoduché kritérium, jak rozhodnout, zda konkrétní neurčitý integrál vede na vyšší transcendentní funkci. V praxi se nám buď podaří konkrétní integrál spočítat (tj. nalézt primitivní funkci v množině elementárních funkcí) nebo ne. V případě neúspěchu ale nevíme, zda je to dáno jen naší nedostatečnou zkušeností, neznalostí nějakých metod, a tudíž má cenu se snažit dál, nebo zda to opravdu nejde, a proto nemá cenu ztrácet s daným integrálem čas. Ukázat o konkrétním integrálu, že vede na vyšší transcendentní funkci, je obecně velmi obtížné.

Na závěr si uvedeme několik velmi prostých neurčitých integrálů, o nichž je známo, že vedou na vyšší transcendentní funkce. Tato tvrzení se všeobecně tradují od 19. století, avšak jejich důkazy nenajdete v žádné z běžných (i velmi rozsáhlých) učebnic integrálního počtu. Důkazy vycházejí z tzv. Liouvilleovy¹ věty, udávající nutnou a postačující podmínku integrovatelnosti ve třídě elementárních funkcí. Poměrně přístupné důkazy, že některé z následujících integrálů vedou na vyšší transcendentní funkce, lze nalézt v [22, 23]. Některé z uvedených primitivních funkcí (jednoznačně určených předepsáním hodnot v určitých bodech) mají vzhledem k častému výskytu vlastní názvy.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{integrál sinus}), \quad \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (\text{integrál kosinus}),$$

$$\int \frac{1}{\ln x} dx \quad (\text{logaritmusintegrál}), \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx \quad (\text{Fresnelovy}^2 \text{ integrály}),$$

$$\int e^{-x^2} dx \quad (\text{Gaussova funkce}), \quad \int R(x, \sqrt{P(x)}) dx \quad (\text{eliptické integrály}).$$

Přitom v posledním integrálu $R(u, v)$ je racionální funkce a $P(x)$ je mnohočlen stupně tři nebo čtyři, který nemá násobné kořeny (název pochází od toho, že integrálem tohoto typu je vyjádřena délka elipsy). Ve speciálních případech lze eliptické integrály vyřešit pomocí elementárních funkcí (tzv. pseudoeliptické integrály), ale obecně to není možné (viz [9, 19, 22]). Důsledkem toho je, že pro délku obecné elipsy neexistuje „pěkný“ vzoreček (na rozdíl od kružnice).

Odhadnout podle „složitosti“ zadané funkce, zda je její primitivní funkce elementární nebo ne, je nemožné. Např. $\int \cos^2 x dx$ jsme snadno spočítali (příklad 2.16), zatímco integrál $\int \cos x^2 dx$ není elementární funkce. Přitom v obou dvou případech jde o složenou funkci se složkami „druhá mocnina“ a „kosinus“. Liší se jen pořadím složek. Obdobně integrál $\int e^{x^2} dx$ nevede (stejně jako Gaussova funkce) na elementární funkci, zatímco zdánlivě komplikovanější integrál $\int e^{\sqrt{x}} dx$ jsme vyřešili (příklad 2.28).

Otázka, kdy neurčitý integrál z elementární funkce vede zase na elementární funkci a kdy ne, je opravdu velmi složitá. Staré výsledky z 19. století neposkytují dostatečně

¹ **Joseph Liouville** (1809–1882) (čti liuvil) — významný francouzský matematik. Zabýval se mnoha oblastmi analýzy. Práce o integraci elementárních funkcí pocházejí z let 1833–1841.

² **Augustin Jean Fresnel** (1788–1827) (čti frenel) — francouzský matematik, fyzik a inženýr.

uspokojivé odpovědi z hlediska dnešních požadavků na přesnost a obecnost. Renesance zájmu o tuto problematiku souvisí právě s vývojem moderních matematických programů (tzv. programů symbolické algebry). Do takových programů je nutné zabudovat algoritmy, které dokážou v konečném počtu kroků rozhodnout, zda daný integrál vede na elementární funkci (popř. na další typy funkcí, které má program ve svém repertoáru), a pokud ano, vyjádřit pomocí nich výsledek. Informace o této problematice lze nalézt převážně v časopisecké literatuře, např. [1, 2, 15, 21, 23].

Příklad 2.60. Ukažte, že neurčitý integrál $\int \frac{e^x}{x} dx$, $x > 0$, není elementární funkce.



Řešení. Zadaný integrál upravíme pomocí substituce $x = \ln t$, $t > 1$. Vyjde nám

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int \frac{e^{\ln t}}{\ln t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{\ln t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{\ln t} dt,$$

což je integrál, o němž jsme si řekli, že není elementární funkcí. Označme $G(t)$ primitivní funkci k $1/\ln t$. Pokud by náš integrál měl primitivní funkci $F(x)$, která by byla elementární, platilo by $F(x) = G(e^x)$. Tedy $F(\ln t) = G(t)$ by byla rovněž elementární, což je spor. ▲

2.6.2. Využití systémů počítačové algebry při výpočtu integrálů

Systémy počítačové algebry jako jsou Maple, Mathematica, Matlab nebo Mathcad nám mohou při výpočtech integrálů velmi usnadnit práci. Někdy je nám zcela jasné, jak daný integrál počítat, ale čekají nás hodiny mechanické práce. Na rozdíl od nás zmíněné počítačové programy zvládnou výpočet řádově za sekundy. Je proto dobré mít takové programy k dispozici a umět s nimi zacházet. Ale také nepřeceňovat jejich možnosti a nedomnívat se, že není nutné znát potřebnou teorii. Výsledky, které nám dávají, je nutno umět správně interpretovat a kriticky hodnotit. Ukažme si na následujících příkladech některé problémy, s nimiž se při používání počítačových programů můžeme setkat.

Ukázka 1

Chceme-li např. po programu Maple, aby nám vypočítal integrál

$$\int 2x(x^2 + 1)^{24} dx,$$

dostaneme následující výsledek:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{25} x^{50} + x^{48} + 12 x^{46} + 92 x^{44} + 506 x^{42} + \frac{10\,626}{5} x^{40} + 7\,084 x^{38} + 19\,228 x^{36} \\ + 43\,263 x^{34} + 81\,719 x^{32} + \frac{653\,752}{5} x^{30} + 178\,296 x^{28} + 208\,012 x^{26} + 208\,012 x^{24} \end{aligned}$$

$$+ 178\,296x^{22} + \frac{653\,752}{5}x^{20} + 81\,719x^{18} + 43\,263x^{16} + 19\,228x^{14} + 7\,084x^{12} \\ + \frac{10\,626}{5}x^{10} + 506x^8 + 92x^6 + 12x^4.$$

Nepomůže ani zjednodušení, tj. užití příkazu *factor*:

$$\frac{1}{25}x^2(x^8 + 5x^6 + 10x^4 + 10x^2 + 5)(x^{40} + 20x^{38} + 190x^{36} + 1\,140x^{34} + 4\,845x^{32} \\ + 15\,505x^{30} + 38\,775x^{28} + 77\,625x^{26} + 126\,425x^{24} + 169\,325x^{22} + 187\,760x^{20} \\ + 172\,975x^{18} + 132\,450x^{16} + 84\,075x^{14} + 43\,975x^{12} + 18\,760x^{10} + 6\,425x^8 \\ + 1\,725x^6 + 350x^4 + 50x^2 + 5).$$

Kdybychom zadaný integrál vypočítali „ručně“ (výpočet je velmi jednoduchý), dostali bychom následující výsledek:

$$\frac{1}{25}(x^2 + 1)^{25}.$$

Jsou správné oba výsledky? Zkusíme-li od našeho výsledku odečíst výsledek, který nám předložil Maple, dostaneme konstantu rovnu číslu $1/25$. Z toho tedy plyne, že oba výsledky představují různé primitivní funkce k zadané funkci.

Ukázka 2

Chceme-li pomocí programu Maple vypočítat integrál

$$\int (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}) dx,$$

dostaneme následující výsledek

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2-4}).$$

Je správný? Odpověď zní NE. Definiční obor této funkce je prázdný, tedy výsledek je nesmyslný.

Ukázka 3

Chceme-li programem Maple vypočítat integrál

$$\int \sin x^2 dx,$$

dostaneme následující výsledek:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\operatorname{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Jak si poradíme s takovým výsledkem? Jedná se o Fresnelův integrál, o němž jsme se zmínili v předchozím odstavci. Jde o jeden ze známých integrálů, již vedou na vyšší transcendentní funkce.

Ukázka 4

Chceme-li spočítat programem Maple integrál

$$\int \frac{dx}{2 - \cos x},$$

dostaneme výsledek

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

Může být uvedená funkce primitivní funkcí k zadané funkci $f: y = \frac{1}{2 - \cos x}$?

Podívejme se nejprve na funkci f :

Funkce f je definována a tudíž spojitá na celé \mathbb{R} . Dle věty 2.3 tedy existuje na celé \mathbb{R} primitivní funkce k f . Vzhledem k tomu, že je každá primitivní funkce spojitá, musí tedy k naší funkci f existovat na celém \mathbb{R} spojitá primitivní funkce.

Nyní se podívejme na výslednou funkci, kterou si pracovně označme G :

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

Funkce G je definována pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$. Jedná se tedy o nespojitou funkci. Jako taková tedy nemůže být primitivní funkcí k funkci f .

Případy tohoto typu, kdy víme, že primitivní funkce existuje např. na celém \mathbb{R} , ale naše „výsledná“ funkce není definována na celém \mathbb{R} , řešíme tzv. technikou slepování, kterou si ukážeme dále.

Z předchozích příkladů plyne, že k tomu, abychom mohli efektivně využívat systémy počítačové algebry k výpočtu integrálů, je třeba znát přesné definice pojmů, vlastnosti těchto pojmů a všimnout si intervalů, na nichž jsou zadaná a výsledná funkce definovány. Obecně není dobré tyto programy přeceňovat a plně se na ně spoléhat. Je důležité umět kriticky zhodnotit, zda výsledek, který nám počítače vyrobí, může být správný.

2.6.3. Technika slepování

Příklad 2.61. Vypočtete neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{2 - \cos x}.$$



Řešení. Použijeme univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ — viz (2.20). Pomocí této substituce

můžeme daný integrál vypočítat na každém z intervalů $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{2}{3t^2 + 1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + c = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} t + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Nalezená funkce $G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ na každém otevřeném intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokud chceme nalézt primitivní funkci na celé \mathbb{R} , musíme postupovat metodou „slepování“, kterou si nyní ukážeme. ▲

Zamysleme se nad tím, jak vypadají primitivní funkce na jednotlivých otevřených intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, na nichž je funkce G spojitá.

- Pro každé $x \in (-\pi, \pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

Funkce f i funkce G jsou periodické s periodou 2π . Stačí se tedy zabývat těmito funkcemi na intervalu délky 2π , tj. např. na intervalu $(-\pi, \pi)$. Grafy těchto funkcí na dalších intervalech jsou kopií části grafu z intervalu $(-\pi, \pi)$. Tedy

- Pro každé $x \in (-3\pi, -\pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.
- Pro každé $x \in (\pi, 3\pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Atd. Utvořme nyní z těchto primitivních funkcí na jednotlivých intervalech funkci F , která bude primitivní k f na celém \mathbb{R} . Především nám jde o to, aby byla funkce F spojitá na \mathbb{R} . Zvolme tedy konstanty c_0, c_1, c_2, \dots tak, aby primitivní funkce na jednotlivých intervalech na sebe navazovaly.

- Vyjděme od intervalu $(-\pi, \pi)$ a položme $F(x) = G(x)$ pro každé $x \in (-\pi, \pi)$. (Zvolili jsme $c_0 = 0$).
- Podívejme se nyní na limitu funkce F v pravém krajním bodě tohoto intervalu — to je bod, v němž budeme muset kvůli spojitosti dodefinovat hodnotu. Tato limita nám také pomůže zjistit konstantu c_2 , abychom věděli, kterou z primitivních funkcí na intervalu $(\pi, 3\pi)$ vybrat, aby „spojitě navazovala“ na funkci F na intervalu $(-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že je třeba zvolit $c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Posouváme tedy funkci $G(x)$ na intervalu $(\pi, 3\pi)$ o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nahoru.

- Prozatím tedy máme spojitou primitivní funkci na intervalu $(-\pi, 3\pi)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (\pi, 3\pi). \end{cases} \quad (2.34)$$

- Obdobně se podíváme na limitu v bodě $x = -\pi$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \\ \lim_{x \rightarrow -\pi^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

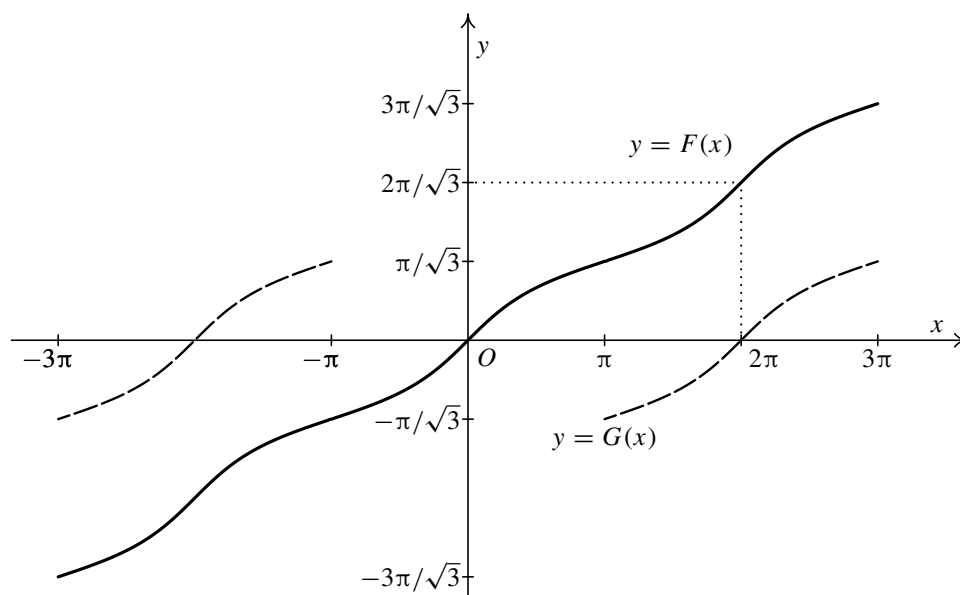
Vidíme, že je třeba zvolit $c_1 = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Posouváme tedy funkci $G(x)$ na intervalu $(-3\pi, -\pi)$ o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ dolů.

- Máme spojitou primitivní funkci na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (-3\pi, -\pi), \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = -\pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (\pi, 3\pi). \end{cases} \quad (2.35)$$

Obdobně bychom konstruovali funkci F na všech intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Z věty 2.29 vyplývá, že takto zkonstruovaná funkce bude mít derivaci i v bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (tj. v bodech, kde jsme funkci „slepovali“) a že i v nich bude platit, že $F'(x) = f(x)$. (Spočítat derivaci v těchto bodech standardně pomocí věty o derivaci složené funkce nelze, protože vnitřní složka $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ v nich není definovaná; výpočet přímo z definice derivace by byl značně obtížný.) Tato funkce je tedy primitivní k funkci $\frac{1}{2-\cos x}$.

Výsledek je znázorněn na obr. 2.4. Graf funkce F je znázorněn plnou čarou, graf funkce $G(x)$, která není definovaná v lichých násobcích π , je znázorněn čárkovaně. Všimněte si, že na intervalu $(-\pi, \pi)$ grafy $F(x)$ a $G(x)$ splývají. S podobnou situací („slepování“ grafů) se u integrálů obsahujících goniometrické funkce setkáváme velmi často. Pokud potřebujeme primitivní funkci na větším intervalu, musíme být velmi opatrní. Jinak můžeme dostat velmi snadno zcela nesmyslné výsledky (např. při výpočtu určitého integrálu pomocí neurčitého — viz příklad 3.18).



Obr. 2.4: Graf primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2-\cos x}$

Zamyslíme-li se na tím, co v předchozím příkladě způsobilo nutnost slepování, vidíme že je na vině substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Výhodou substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ je její univerzálnost, uvažovaný integrál převede vždy na integrál z racionální funkce. Má však dvě velké nevýhody. První z nich spočívá v tom, že konkrétní výpočty pomocí této substituce bývají většinou dost pracné, a druhou nevýhodou je, že k nalezení integrálu na maximálních intervalech, na nichž je integrovaná funkce spojitá, musíme často provádět „slepování“ — viz předchozí příklad. Proto, můžeme-li se této obecné substituci vyhnout, raději tak učiníme.



Průvodce studiem

V této kapitole jsme si kromě základních integračních metod ukázali, jak postupovat při výpočtu řady typů neurčitých integrálů, které vedou na elementární funkce. Takový výčet samozřejmě zdaleka nemohl být vyčerpávající. Pro běžné aplikace, které vás čekají v dalších kapitolách a rovněž v jiných matematických disciplínách či předmětech na ně navazujících, však tento rozsah stačí. Je to také dáno tím, že nám při mechanické integraci dnes mohou výrazně pomoci programy symbolické algebry. O to víc vzrůstá význam teorie a důkladného pochopení pojmů a předpokladů vět, abychom dokázali správně interpretovat výsledky těchto programů a vyhnuli se často i hrubým chybám, které jejich neopatrné a nekritické použití může snadno přinést.

Pojmy k zapamatování

- primitivní funkce
- neurčitý integrál
- integrand
- integrační konstanta
- parciální zlomky

Kontrolní otázky

1. Definujte neurčitý integrál.
2. Vysvětlete pojem primitivní funkce.
3. Uveďte základní vlastnosti neurčitého integrálu.
4. Uveďte podmínku existence primitivní funkce.
5. Vysvětlete princip metody per partes pro neurčitý integrál.
6. Vysvětlete princip substituční metody pro neurčitý integrál.
7. Co jsou to parciální zlomky a kolik typů těchto zlomků známe?
8. Popište rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků.
9. Vysvětlete princip integrace racionální lomené funkce.
10. Diskutujte možnosti integrace goniometrických funkcí — uveďte základní substituce.
11. Diskutujte možnosti integrace funkcí obsahujících odmocniny.

Příklady k procvičení

1. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx,$

b) $\int 15x\sqrt{a+x} dx,$

c) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx,$

d) $\int \frac{dp}{(2+p)\sqrt{p+1}},$

e) $\int \frac{35x^3}{\sqrt{x-1}} dx,$

f) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx,$

g) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx,$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt[4]{v}} dv,$

i) $\int \frac{\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1} - 1} dk,$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}}.$

2. Integrujte dané funkce (použijte Eulerovy substituce):

a) $\int 2\sqrt{b^2 - 6} db,$

b) $\int 6\sqrt{9x^2 - 15} dx,$

c) $\int \sqrt{4 - 3x^2 + 2x} dx,$

d) $\int 4\sqrt{p^2 - 2p - 1} dp,$

e) $\int \sqrt{5q^2 - 6q - 1} dq,$

f) $\int 8\sqrt{2 + x - x^2} dx,$

g) $\int 4\sqrt{3 + 2s - s^2} ds.$

3. Integrujte dané funkce:

a) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} dx,$

b) $\int \frac{4(x + 3)}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx,$

c) $\int \frac{2}{\sqrt{-4y^2 - 12y - 8}} dy,$

d) $\int \frac{35}{\sqrt{2 - 49x^2}} dx,$

e) $\int \frac{2}{\sqrt{-5 + 12w - 4w^2}} dw,$

f) $\int \frac{1}{\sqrt{-2p - p^2}} dp,$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1 + \sqrt[3]{x + 1}}} dx,$

h) $\int \frac{\sqrt[4]{\frac{x}{2-x}} + 3}{x^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}} dx,$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 2x - x^2}} dx,$

j) $\int \frac{2n}{\sqrt{10 - n - n^2}} dn,$

k) $\int \frac{3}{\sqrt{12k - 9k^2 + 4}} dk,$

l) $\int \frac{u}{\sqrt{27 - u^2 + 6u}} du,$

m) $\int \frac{8x - 3}{\sqrt{-4x^2 - 5 + 12x}} dx.$

Návod: V a), b), j), l) a m) postupujte podobně jako při integraci parciálního zlomku druhého typu — upravte čítec, aby obsahoval derivaci výrazu pod odmocninou ve jmenovateli, a rozdělte zlomek na dva.



Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x},$

b) $6(a + x)^{5/2} - 10a(a + x)^{3/2},$

c) $2\sqrt{x + 1} - 2 \ln(1 + \sqrt{x + 1}),$

d) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{p + 1},$

e) $10(x - 1)^{7/2} + 42(x - 1)^{5/2} + 70(x - 1)^{3/2} + 70\sqrt{x - 1},$

- f) $\frac{(3x+1)^{5/3}}{15} + \frac{(3x+1)^{2/3}}{3}$, g) $6 \ln \sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1)$,
- h) $2\sqrt{v} - 4\sqrt[4]{v} + 4 \ln(\sqrt[4]{v} + 1)$,
- i) $4\sqrt{k+1} + k + 1 + 4 \ln|\sqrt{k+1} - 1|$,
- j) $2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6 \ln(\sqrt[6]{x+2} + 1)$.
2. a) $b\sqrt{b^2-6} - 6 \ln|b + \sqrt{b^2-6}|$,
- b) $3x\sqrt{9x^2-15} - 5 \ln|9x + 3\sqrt{9x^2-15}|$,
- c) $-\frac{(-3x+1)\sqrt{4-3x^2+2x}}{6} + \frac{13}{18}\sqrt{3} \arcsin \frac{3x-1}{\sqrt{13}}$,
- d) $(-2+2p)\sqrt{p^2-2p-1} - 4 \ln|p-1 + \sqrt{p^2-2p-1}|$,
- e) $\frac{(5q-3)\sqrt{5q^2-6q-1}}{10} - \frac{7}{25} \ln|5q-3 + \sqrt{5(5q^2-6q-1)}|$,
- f) $(4x-2)\sqrt{2+x-x^2} + 9 \arcsin \frac{2x-1}{3}$,
- g) $(2s-2)\sqrt{3+2s-s^2} + 8 \arcsin \frac{s-1}{2}$.
3. a) $-2\sqrt{8-2x-x^2} - 5 \arcsin \frac{x+1}{3}$,
- b) $-\sqrt{3+4x-4x^2} + 7 \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right)$,
- c) $\arcsin(2y+3)$, d) $5 \arcsin \frac{7x}{\sqrt{2}}$,
- e) $\arcsin\left(w - \frac{3}{2}\right)$, f) $\arcsin(p+1)$,
- g) $\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - \frac{3(x+1)^{4/3}}{4} + \frac{6(x+1)^{7/6}}{7} - x - 1 + \frac{6(x+1)^{5/6}}{5} -$
 $-\frac{3(x+1)^{2/3}}{2}$,
- h) $-\frac{2}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{2-x}{x}\right)^5} - \sqrt{\left(\frac{2-x}{x}\right)^3}$, i) $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{6}}$,

$$\begin{aligned}
 \text{j)} \quad & -2\sqrt{10-n-n^2} - \arcsin \frac{2n+1}{\sqrt{41}}, & \text{k)} \quad & \arcsin \frac{\sqrt{2}(3k-2)}{4}, \\
 \text{l)} \quad & -\sqrt{27-u^2+6u} + 3 \arcsin \frac{u-3}{6}, \\
 \text{m)} \quad & -2\sqrt{-4x^2-5+12x} + \frac{9}{2} \arcsin\left(x - \frac{3}{2}\right).
 \end{aligned}$$

2.7. Závěrečná cvičení ke kapitole 2



Příklady k procvičení

1. Integrujte dané funkce:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \int \arcsin x \, dx, & \text{b)} \quad & \int \frac{\cos \eta}{1 - \sin \eta} \, d\eta, \\
 \text{c)} \quad & \int 4\sqrt{-x^2 + 2x + 3} \, dx, & \text{d)} \quad & \int \frac{B}{8 - 3B^2} \, dB, \\
 \text{e)} \quad & \int 2\sqrt{1 - x^2 - 2x} \, dx, & \text{f)} \quad & \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, dx, \\
 \text{g)} \quad & \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} \, dx, & \text{h)} \quad & \int \frac{1}{4 - x} \, dx, \\
 \text{i)} \quad & \int \frac{u}{\sqrt{4 - 9u^4}} \, du, & \text{j)} \quad & \int \cotg x \, dx, \\
 \text{k)} \quad & \int \frac{1}{\sqrt{3 - 9x^2}} \, dx, & \text{l)} \quad & \int \frac{1}{1 + \cos 4Y} \, dY, \\
 \text{m)} \quad & \int \arctg \sqrt{x} \, dx, & \text{n)} \quad & \int \frac{1}{5 + 3B^2} \, dB, \\
 \text{o)} \quad & \int \ln 5x \, dx, & \text{p)} \quad & \int \frac{x + 2}{x^4 + x^3} \, dx, \\
 \text{q)} \quad & \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1)} \, dx, & \text{r)} \quad & \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \, dx.
 \end{aligned}$$

2. Integrujte dané funkce:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \int \cos \ln x \, dx, & \text{b)} \quad & \int \sin \ln x \, dx, \\
 \text{c)} \quad & \int \sqrt{x^2 + 4} \, dx, & \text{d)} \quad & \int 2\sqrt{9 - x^2} \, dx, \\
 \text{e)} \quad & \int \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx, & \text{f)} \quad & \int 9(3\delta + 5)^{-1} \, d\delta, \\
 \text{g)} \quad & \int \frac{W + 2}{2W - 1} \, dW, & \text{h)} \quad & \int (4 - \cos 2\alpha) \, d\alpha,
 \end{aligned}$$

- i) $\int \frac{1}{1 + \cos \frac{u}{2}} du,$
- k) $\int \frac{144}{\sqrt{144x^2 - 52}} dx,$
- m) $\int 2(\sin^2 \omega + \cos 2\omega) d\omega,$
- o) $\int x^3 \ln^2 x^4 dx,$
- j) $\int \frac{21}{9 + 7r^2} dr,$
- l) $\int \frac{3}{\sqrt{3t^2 - 2}} dt,$
- n) $\int \cos 2\psi \sin \psi \cos \psi d\psi,$
- p) $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx.$

3. Integrujte dané funkce:

- a) $\int 8 \sin^4 x dx,$
- c) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$
- e) $\int \frac{1 + \cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta} d\theta,$
- g) $\int \frac{9(2p - 1)}{\sqrt{9p^2 - 4}} dp,$
- i) $\int \frac{1}{\sqrt{z^2 - 8}} dz,$
- k) $\int \frac{x}{\sqrt{8 - x^2}} dx,$
- m) $\int 2(3w^2 - w + 7)(6w - 1) dw,$
- o) $\int \frac{5e^{2x} + 4e^x}{e^{2x} + e^x + 4} dx,$
- b) $\int 2 \sin^2 \frac{t}{2} dt,$
- d) $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx,$
- f) $\int \frac{1}{\sqrt{y(1 - y)}} dy,$
- h) $\int \frac{2(3x - 1)}{x^2 + 9} dx,$
- j) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 32}} dx,$
- l) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx,$
- n) $\int \frac{4y - 8}{2y^2 - 8y + 7} dy,$
- p) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

4. Integrujte dané funkce:

- a) $\int (8 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx,$
- c) $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx,$
- e) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{cotg}^2 z}{\cos^2 z} dz,$
- g) $\int \frac{3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 5}{4 \cos^2 x} dx,$
- i) $\int \frac{1}{(\sin z \cos z)^2} dz,$
- b) $\int \frac{1}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$
- d) $\int \frac{5 \sin^2 \beta + 3 \cos^2 \beta}{2(\cos \beta \sin \beta)^2} d\beta,$
- f) $\int \operatorname{tg}^2 \varepsilon d\varepsilon,$
- h) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx,$
- j) $\int \frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} dt,$

$$\begin{array}{ll} \text{k) } \int \frac{4 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} d\alpha, & \text{l) } \int \frac{1 + \cos^2 y}{1 + \cos 2y} dy, \\ \text{m) } \int \frac{10}{\operatorname{tg} 5\lambda} d\lambda, & \text{n) } \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \\ \text{o) } \int \operatorname{arctg} 3x dx, & \text{p) } \int \frac{1}{(x-1)\sqrt[3]{x}} dx. \\ \text{q) } \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx, & \text{r) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x}} dx. \end{array}$$

5. Dokažte, že následující integrály vedou na vyšší transcendentní funkce:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int e^{e^x} dx, & \text{b) } \int \ln \ln x dx, & \text{c) } \int \frac{\sin x}{x^2} dx, & \text{d) } \int \frac{\cos x}{x^2} dx, \\ \text{e) } \int \frac{e^x}{x^2} dx, & \text{f) } \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, & \text{g) } \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, & \text{h) } \int \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx, \\ \text{i) } \int \frac{\ln x}{\ln x + 1} dx, & \text{j) } \int e^x \ln x dx, & \text{k) } \int \frac{\sin x}{x^3} dx, & \text{l) } \int e^{1/x} dx. \end{array}$$

Návod: Vhodnou úpravou převedte daný integrál na integrál, který není elementární, nebo na výraz, který je součtem elementární funkce a integrálu, který není elementární — viz kapitola 2.6 a příklad 2.60.



Klíč k příkladům k procvičení

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ a) } x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, & \text{b) } -\ln |1 - \sin \eta|, \\ \text{c) } (2x-2)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8 \arcsin \frac{x-1}{2}, & \text{d) } -\frac{1}{6} \ln |8 - 3B^2|, \\ \text{e) } (x+1)\sqrt{1-x^2-2x} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}, & \text{f) } -\ln |1 + \cos x|, \\ \text{g) } 2 \ln(x^2 + 5x + 7) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{3}}, & \text{h) } -\ln |4-x|, \\ \text{i) } \frac{1}{6} \arcsin \frac{3u^2}{2}, & \text{j) } \ln |\sin x|, \\ \text{k) } \frac{1}{3} \arcsin \sqrt{3}x, & \text{l) } \frac{1}{4} \operatorname{tg} 2Y, \\ \text{m) } x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}, & \text{n) } \frac{\sqrt{15}}{15} \operatorname{arctg} \frac{B\sqrt{15}}{5}, \end{array}$$

- o) $x \ln 5x - x$,
- q) $3(\sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} - 1|)$
2. a) $\frac{x}{2} \cos \ln x + \frac{x}{2} \sin \ln x$,
- c) $\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4})$,
- e) $2x\sqrt{x^2+9} - 18 \ln(x + \sqrt{x^2+9})$,
- g) $\frac{W}{2} + \frac{5}{4} \ln|2W - 1|$,
- i) $2 \operatorname{tg} \frac{u}{4}$,
- k) $12 \ln|6x + \sqrt{36x^2 - 13}|$,
- m) $\omega + \frac{1}{2} \sin 2\omega$,
- o) $x^4 \left(4 \ln^2 |x| - 2 \ln |x| + \frac{1}{2} \right)$,
3. a) $3x - 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x$,
- c) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right)$,
- e) $-\operatorname{cotg} \theta - \theta$,
- g) $2\sqrt{9p^2 - 4} - 3 \ln|3p + \sqrt{9p^2 - 4}|$,
- i) $\ln|z + \sqrt{z^2 - 8}|$,
- k) $-\sqrt{8 - x^2}$,
- m) $(3w^2 - w + 7)^2$,
- o) $\ln \sqrt{(e^{2x} + e^x + 4)^5} + \frac{\sqrt{15}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2e^x + 1}{\sqrt{15}}$,
- p) $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$,
- r) $-\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x} \right)^3}$.
- b) $-\frac{x}{2} \cos \ln x + \frac{x}{2} \sin \ln x$,
- d) $x\sqrt{9 - x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3}$,
- f) $3 \ln|3\delta + 5|$,
- h) $4\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}$,
- j) $\sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}r}{3}$,
- l) $\sqrt{3} \ln|\sqrt{3t} + \sqrt{3t^2 - 2}|$,
- n) $-\frac{\cos^4 \psi + \sin^4 \psi}{4}$,
- p) $\ln \left| \frac{x^3(x-1)}{x+1} \right|$.
- b) $-\sin t + t$,
- d) $-\frac{1}{2} \operatorname{cotg} x$,
- f) $\arcsin(2y - 1)$,
- h) $3 \ln(x^2 + 9) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$,
- j) $\sqrt{x^2 - 32}$,
- l) $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2}$,
- n) $\ln|2y^2 - 8y + 7|$,
- p) $\frac{-1}{x} (\ln x + 1)$.

4. a) $4 \sin 2x + \cos 3x$, b) $-\cotg \alpha$, c) $\sin x - \tg x$,
 d) $\frac{5}{2} \tg \beta - \frac{3}{2} \cotg \beta$, e) $3 \tg z + 2 \cotg z$, f) $\tg \varepsilon - \varepsilon$,
 g) $2 \tg x - \frac{5x}{4}$, h) $x + \cos x$, i) $\tg z - \cotg z$,
 j) $\sin t - \cos t$, k) $-\frac{2}{\sin 2\alpha}$, l) $\frac{1}{2} \tg y + \frac{y}{2}$,
 m) $2 \ln |\sin 5\lambda|$, n) $\ln(e^x + 1)$, o) $x \arctg 3x - \frac{1}{6} \ln(1 + 9x^2)$,
 p) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}{x - 1} \right| + \sqrt{3} \arctg \frac{2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{3}}$, q) $x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1)$,
 r) $3\sqrt[3]{x} + \ln \frac{(\sqrt[6]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1} - 2\sqrt{3} \arctg \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}}$.
5. a) sub. $x = \ln t$, b) p. p. $u = \ln \ln x$, c) p. p. $u = \sin x$,
 d) p. p. $u = \cos x$, e) p. p. $u = e^x$, f) sub. $x = t^2$,
 g) sub. $x = t^2$, h) sub. $x = t^2$, i) sub. $x = e^{t-1}$,
 j) sub. $x = \ln t$, k) p. p. $u = \sin x$, l) sub. $x = 1/t$.



Autotest

1. Vypočítejte následující neurčité integrály:

a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2 dx$, b) $\int \frac{3x - 5}{x^2 + 1} dx$, c) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx$.

2. Vypočítejte následující neurčité integrály:

a) $\int \sqrt{3x + 1} dx$, b) $\int \frac{5e^x}{e^x + 1} dx$,
 c) $\int \sin^2 x \cos x dx$, d) $\int x^2 \sqrt[5]{1 + x^3} dx$,
 e) $\int \frac{x \ln x}{4} dx$, f) $\int e^{3x} \sin x dx$,
 g) $\int \arctg \frac{x}{4} dx$, h) $\int x \tg^2 x dx$.

3. Integrujte a upravte:

a) $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$, b) $\int \frac{dx}{x^2(x - 1)}$,
 c) $\int \frac{(x + 1) dx}{(x - 2)(x^2 + 3)}$, d) $\int \frac{7 - 3x}{x^3 + x^2 + 9x + 9} dx$.

4. Integrujte a upravte:

a) $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} dx,$

b) $\int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx,$

c) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx,$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$

Klíč k autotestu



1. a) $\frac{x^2}{2} + \frac{12x\sqrt{x^5}}{11} + \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5},$

b) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - 5 \operatorname{arctg} x,$

c) $\frac{x^4 + 6x^2}{4} + 3 \ln|x| - \frac{1}{2x^2}.$

2. a) $\frac{2}{9}(3x + 1)\sqrt{3x + 1},$

b) $5 \ln(e^x + 1),$

c) $\frac{\sin^3 x}{3},$

d) $\frac{5}{18}(1 + x^3)\sqrt[5]{1 + x^3},$

e) $\frac{x^2}{16}(2 \ln x - 1),$

f) $\frac{e^{3x}(3 \sin x - \cos x)}{10},$

g) $x \operatorname{arctg} \frac{x}{4} - 2 \ln(16 + x^2),$

h) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x}{2}.$

3. a) $7 \ln|x - 2| - 4 \ln|x - 1|,$

b) $\frac{1}{x} + \ln|x - 1| - \ln|x|,$

c) $\frac{3}{7} \ln|x - 2| - \frac{3}{14} \ln(x^2 + 3) + \frac{1}{7\sqrt{3}},$

d) $\ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}.$

4. a) $\frac{1}{2}(1 + \cos x)^2,$

b) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$

c) $2\sqrt{1-x} + \ln|1 - \sqrt{1-x}| - \ln|1 + \sqrt{x-1}|,$

d) $6 \left(\frac{1}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{3} \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right).$

Kapitola 3

Určitý integrál



Průvodce studiem

V předchozí kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitého integrálu, který funkci přiřazoval opět funkci (přesněji celou množinu funkcí). Určitý integrál, kterým se budeme zabývat v této kapitole, bude naproti tomu funkci přiřazovat číslo. Podle toho, co bude vyjadřovat daná funkce, bude mít výsledné číslo různý význam. Může udávat např.

- obsah rovinného obrazce,
- délku křivky,
- obsah pláště rotačního tělesa,
- objem rotačního nebo obecněji libovolného tělesa,
- hmotnost rovinného obrazce,
- statické momenty rovinného obrazce, sloužící k výpočtu jeho těžiště,
- moment setrvačnosti rovinného obrazce,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci

a hodnoty desítek dalších geometrických a fyzikálních veličin.



Pro zájemce:

3.1. Od výpočtu obsahů a objemů k integrálnímu počtu

Chceme-li naznačit historický vývoj integrálního počtu, musíme začít od výpočtů obsahů a objemů. Na následujících stranách se pokusíme ukázat, kam až sahají kořeny dnes používaných postupů výpočtů a jak dlouhý byl jejich vývoj.

Matematika ve starém Egyptě a Řecku

Již staří Egypťané byli nuceni vyměřovat pole, tj. počítat obsahy. Znali obsah čtverce, obdélníku, trojúhelníka a tím i libovolného mnohoúhelníka. Mnohoúhelník rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Uměli počítat i objemy krychle, válce nebo komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramidy).

Velkého pokroku v měření obsahů a objemů bylo dosaženo ve starověkém Řecku v období let 350–200 před n. l. Z té doby pochází i známé Eukleidovy *Základy*, ve kterých jsou shrnuty téměř všechny v té době známé matematické poznatky.

Řeckými matematiky tohoto období, kteří se zabývali problematikou obsahů a objemů byli Hippokrates a Démokritos.

Hippokrates (asi 460–370 před n. l.) vyslovil domněnku, že kužel může být „vyčerpáván“ jehlaný s pravidelnou mnohoúhelníkovou základnou vepsanou do kruhové základny kužele. Domníval se, že objem kužele je jedna třetina válce s toutéž základnou a výškou. K tomuto výsledku dospěl podobnými úvahami i Démokritos. Avšak ani ten jej neopatřil důkazem. Teprve o padesát let později byly tyto výsledky dokázány Eudoxem.

Démokritos z Abdér (asi 460–370 před n. l.) je představitelem atomistů. Ve svých geometrických pracích vycházel z toho, že body jsou prostorové atomy mající konečný objem. Představoval si, že v každé úsečce existuje konečný, i když „větší než lze smysly poznat“ počet bodů. Této představy využil k určování obsahů a objemů velkého počtu útvarů. Tělesa si představoval, jako by byla „složena z rovnoběžných destiček“ silných jeden atom, a usuzoval z toho, že dvě tělesa „složená ze stejných destiček“ ve stejných výškách od základny by měla mít stejné objemy. Tento princip rozpracoval Cavalieri v 17. století.

Řekové se snažili plochu neznámého obrazce vypočítat pomocí obsahů mnohoúhelníků P_1 , P_2 , až P_n , kterými obrazec „vyčerpávali“. Podstatou jejich přístupu bylo to, že obsah tohoto mnohoúhelníku snadno vypočítali tím, že jej rozložili na vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky. Obsah mnohoúhelníku je pak roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Tuto metodu, která byla později nazvána *exhaustivní*, rozpracoval **Eudoxos** (asi 408–355 před n. l.).

Exhaustivní (vyčerpávací) metoda umožňuje již poměrně přesné výpočty obsahů a objemů a je považována za geniální předchůdkyni pozdějších infinitezimálních úvah. Zpočátku se exhaustivní metody využívalo pouze k důkazům vět, ke kterým se došlo jinými metodami.

Exhaustivní metoda je založena na nekonečném dělení veličiny a jejím základem je následující tvrzení:

(★) *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.*

Ilustrujme tuto metodu na výpočtu obsahu $S(A)$ nějakého útvaru A . Máme-li najít obsah útvaru A , budeme do něj vepisovat jiné útvary P_1, P_2, \dots, P_n , jejichž obsahy jsou známé. Tyto

obsahy tvoří monotónní posloupnost $S(P_1) < S(P_2) < \dots < S(P_n)$, pro kterou platí:

$$\begin{aligned} S(A) - S(P_1) &< \frac{S(A)}{2}, \\ S(A) - S(P_2) &< \frac{S(A) - S(P_1)}{2} < \frac{S(A)}{4}, \\ &\vdots \\ S(A) - S(P_n) &< \frac{S(A)}{2^n}. \end{aligned}$$

Při dostatečně velkém n je podle (\star) rozdíl $S(A) - S(P_n)$ menší než libovolná kladná veličina. Dnes bychom napsali, že $S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n)$. Pro Eudoxa byl však pojem limity neznámý; hledal tudíž takové B , aby rozdíl $B - S(P_n)$ byl menší než libovolná kladná veličina. K nalezení obsahu $S(A)$ zbývá dokázat, že $S(A) = B$. Tady Eudoxos využívá důkazu sporem. Necht' $S(A) \neq B$, tj. $S(A) < B$ nebo $S(A) > B$. V obou případech dojdeme ke sporu. V prvním případě položíme $B - S(A) = \varepsilon$. Víme však, že k ε lze najít takové n , že platí $B - S(P_n) < \varepsilon$. Odtud plyne $B - S(P_n) < B - S(A)$, tedy $S(P_n) > S(A)$, což je spor. Podobně lze postupovat ve druhém případě.

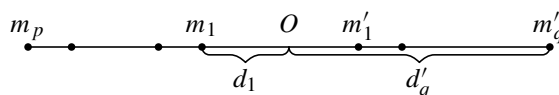
Archimédes (asi 287–212 před n. l.) byl největším matematikem helénistického období. Archimédovým nejvýznamnějším přínosem v matematice jsou věty o obsahu rovinných útvarů a o objemu těles. Archimédovy práce zabývající se obsahy, objemy a délkami jsou: *Měření kruhu*, *Kvadratura paraboly*, *O kouli a válci*, *O spirálách*, *O konoidech a sféroidech* a *Metoda*.

Prvních pět prací rozvíjí exhaustivní metodu, kterou Archimédes aplikoval na širokou škálu problémů, které jsou dnes typickými aplikacemi integrálního počtu. Šestá práce, neznámá do roku 1906, popisuje heuristickou infinitezimální metodu — metodu, pomocí níž objevoval nové výsledky dříve, než je opatřil důkazem.

Jedná se o tzv. metodu páky, podle které je konečný systém bodů o hmotnostech m_1, \dots, m_p na jedné straně páky ve vzdálenostech d_1, \dots, d_p od podpěry O vyvážen jiným systémem bodů o hmotnostech m'_1, \dots, m'_q ve vzdálenostech d'_1, \dots, d'_q na druhé straně páky. Pak v souladu s přirozenými zákony mechaniky platí rovnost

$$\sum_{i=1}^p m_i d_i = \sum_{j=1}^q m'_j d'_j.$$

Na základě tohoto vztahu se na jednu stranu páky umístí rovinný útvar (resp. těleso), jehož obsah (resp. objem) určujeme, a na druhou stranu páky rovinný útvar (resp. těleso), jehož obsah (resp. objem) a těžiště známe.



Obr. 3.1

Ilustrujme tuto metodu na jednoduchém příkladě určení obsahu oblasti ohraničené parabolou $y = x^2$ a přímkami $x = 1$, $y = 0$, viz obrázek 3.2. Označme tuto oblast R . Budeme se snažit určit

její obsah na základě znalosti obsahu a těžiště trojúhelníka Tr s vrcholy $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, -\frac{1}{2})$. Jeho obsah $S(Tr) = \frac{1}{2}$ a těžiště má v bodě $(\frac{2}{3}, 0)$.

Nejprve umístíme trojúhelník i parabolu na stejnou strany páky se středem O v bodě $(0, 0)$. Nyní využijeme následujícího Archimédova principu:

Předpokládejme, že existuje konstanta k tak, že pro každou svislou přímkou vedenou ve vzdálenosti x od středu páky O , vytínající na ploše R úsek r a na ploše Tr úsek t , platí

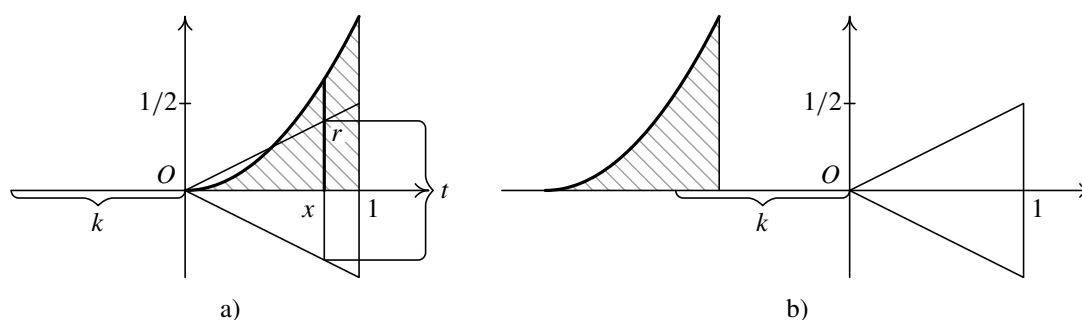
$$k \cdot r = x \cdot t. \quad (3.1)$$

Umístíme-li útvar R na druhou stranu páky tak, že těžiště je ve vzdálenosti k od středu O , pak „vyváží“ útvar Tr , který necháme na původním místě, a platí

$$k \cdot S(R) = x_{Tr} \cdot S(Tr), \quad (3.2)$$

kde x_{Tr} je vzdálenost těžiště útvaru Tr od středu O .

Přítom vztah (3.1) znamená, že úsečka délky r , umístěná svým těžištěm do vzdálenosti k od středu páky, bude v rovnováze s úsečkou délky t umístěnou na druhé straně páky ve vzdálenosti x . Podobnou úvahu lze provést pro všechny řezy trojúhelníka Tr a úseče R . Dále Archimédes vychází z toho, že trojúhelník je vyplněn všemi takovými řezy t a úseč paraboly všemi takovými řezy r . Nyní tedy vezmeme úseč paraboly a umístíme ji těžištěm do vzdálenosti k od středu páky. Takto umístěná úseč paraboly je nyní vyvážena trojúhelníkem, který necháme tam, kde je (vzdálenost těžiště od středu páky označíme $x_T Tr$). Tím jsme se dostali k vztahu (3.2).



Obr. 3.2

Aplikujme nyní tento princip na náš konkrétní případ. Protože trojúhelník Tr je rovnoramenný, řez ve vzdálenosti x od středu O má velikost x ($t = x$). Velikost řezu v oblasti R je x^2 ($r = x^2$). Dosazením do výše zmíněného vztahu dostáváme

$$k \cdot x^2 = x \cdot x, \quad \text{odkud vypočteme} \quad k = 1.$$

Pak pomyslně přesuneme oblast R na druhou stranu páky tak, aby vzdálenost těžiště této oblasti od středu O byla k . Pro obsahy obou oblastí pak platí:

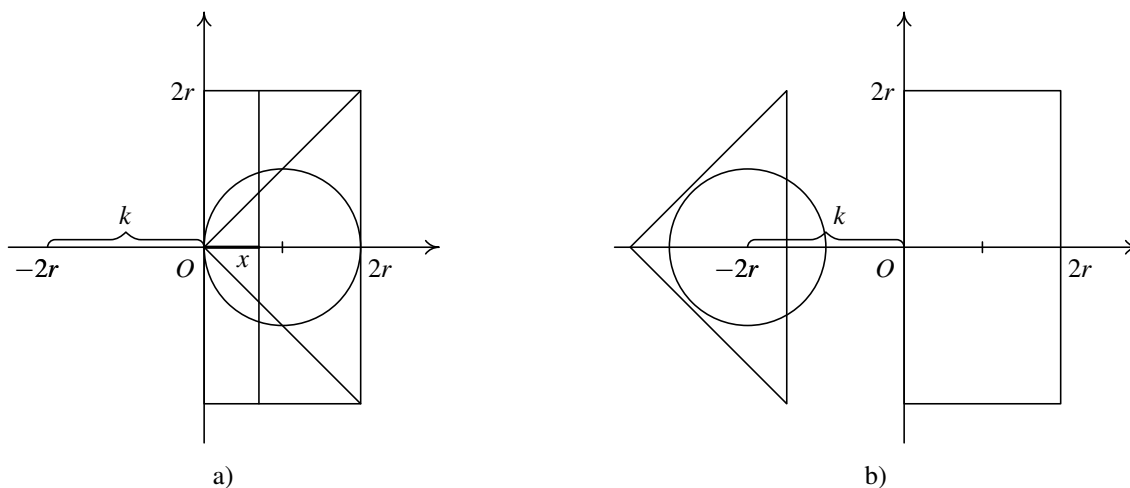
$$k \cdot S(R) = x_{Tr} \cdot S(Tr),$$

odkud dostáváme obsah oblasti R :

$$S(R) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Tímto způsobem Archimédes odvozuje nejenom obsahy plošných útvarů, ale i objemy těles. Např. objem koule určuje pomocí známých objemů válce a kužele. Ukažme si jeho postup.

Umístíme nejprve na jednu stranu páky všechny tři tělesa — kouli, kužel i válec s osou souměrnosti v souřadnicové ose x , podle následujícího obrázku.



Obr. 3.3

Ve vzdálenosti x od středu páky vedme řez těmito tělesy. Řezem koule A , kužele B i válce C bude kruh. Obsah řezu označme písmenem „ S “. Podle Archimédova principu existuje k tak, že platí:

$$\begin{aligned} k \cdot (S(A) + S(B)) &= x \cdot S(C), \\ k \cdot (\pi(r^2 - (r-x)^2) + \pi x^2) &= x \cdot \pi(2r)^2, \\ k\pi(r^2 - r^2 + 2rx - x^2 + x^2) &= 4\pi x r^2, \\ k &= 2r. \end{aligned}$$

Dále přesunme kouli a kužel na druhou stranu páky do vzdálenosti $k = 2r$. Tato dvě tělesa nyní „vyváží“ válec, který necháme tam, kde je. Těžiště válce je ve vzdálenosti r od středu páky. Objem tělesa označme V . Tedy

$$\begin{aligned} k \cdot (V(A) + V(B)) &= x_T \cdot V(C), \\ 2r \cdot (V(A) + V(B)) &= r \cdot V(C), \\ V(A) &= \frac{1}{2}V(C) - V(B), \\ V(A) &= \frac{1}{2}\pi(2r)^2 2r - \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2r, \\ V(A) &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Uvedli jsme si dvě ukázky toho, jak Archimédes objevoval své výsledky mechanickou metodou páky. Využíval přitom myšlenku rozřezání plochy na dále „nedělitelné úsečky“, případně rozřezání tělesa na dále „nedělitelné vrstvičky“. Tato metoda mu však byla pouze prostředkem,

kteřý mu pomáhal objevovat nová tvrzení. Nepokládal ji za důkaz. Důkazy takto objevených výsledků prováděl exhaustivní metodou, kterou za tímto účelem obohatil a vylepšil. Zavedl totiž kromě vepsaných mnohoúhelníků i mnohoúhelníky opsané a zkoumal jejich obsahy, které omezují hledaný obsah plochy. Jinými slovy, zabýval se zkoumáním dolního a horního součtu omezujícího danou veličinu. Při výpočtech objemů používal stejným způsobem vepsaných a opsaných mnohostěnů.

Archimédovy práce znamenaly obrovský krok ve výpočtech obsahů a objemů. Při výpočtech však vždy vychází z geometrických vlastností dané plochy nebo tělesa. To je charakteristické pro celou další etapu vývoje výpočtu obsahu plochy. Při určování obsahů a objemů různých ploch a těles se vždy využívaly nějaké charakteristické vlastnosti studovaného útvaru. Nejednalo se tedy o jednotný postup, který by se dal použít k určení obsahu, příp. objemu, libovolného útvaru.

Matematika v období renesance

Po plodném období řecké vědy ve 2. stol. př. n. l. následovalo mnoho století stagnace vědy, kdy se obzvláště v Evropě na poli matematiky nedělo nic. Teprve ve 12. a 13. století se začínají překládat stará řecká díla Eukleida, Archiméda, Apollónia atd. Začaly vznikat první univerzity. Ale teprve v 16. století se novodobá matematika dostává nad rámec řecké matematiky.

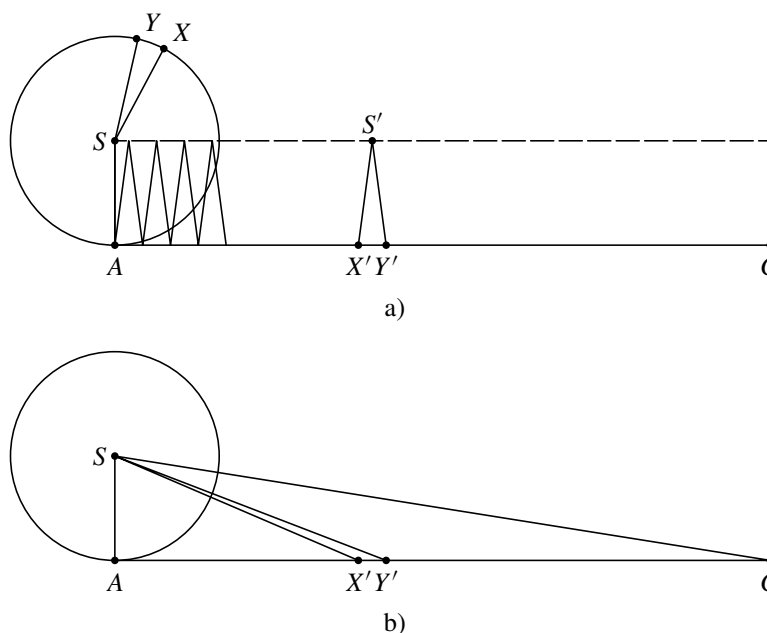
V druhé polovině 15. století začíná období renesance. Hlavními středisky kultury a vědy jsou italská města. V této době dochází hlavně k rozvoji trigonometrie a algebry. Rozšíření matematiky velmi ovlivnil vynález knihtisku, také bouřlivý rozvoj architektury a rozkvět výtvarného umění pomohl rozvoji a šíření matematiky. Jedním z malířů, jenž byl zároveň matematikem, byl **Leonardo da Vinci** (1452–1519). Zachovaly se nám jeho poznámkové sešity, které obsahují matematické a filozofické úvahy. Je například pozoruhodné, že při zkoumání těžišť obrazců a těles a také při určování obsahu elipsy Leonardo používal Archimédovu metodu, kterou matematikové při řešení podobných úloh začali užívat až v 17. století.

16. a 17. století bylo renesancí kultury a vědy, a tedy i matematiky. Popsat toto období by bylo tématem na samostatnou kapitolu. Připomeňme jen jména některých matematiků, kteří se zabývali určováním obsahů a objemů a tím významně přispěli k dalšímu vývoji diferenciálního a integrálního počtu. Byli to Johann Kepler, Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri, John Wallis, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Georg Riemann, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Augustin-Louis Cauchy, aj.

Johann Kepler (1571–1630) ve svém díle *Nová stereometrie vinných sudů* (1615) počítal objemy těles, které vznikly rotací částí kuželoseček kolem osy ležící v jejich rovině. Při svých výpočtech postupoval metodou rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých „kusů“, jejichž objem lze jednoduše určit. Použil tedy úvahu, které se říká infinitezimální. Např. při určování objemu koule při známém povrchu rozdělil kouli na nekonečně mnoho jehlanů s vrcholy ve středu koule a základnou na povrchu koule a výškou rovnou poloměru koule. Sečetl objemy těchto jehlanů a dostal $V = \frac{1}{3}Sr$, kde $S = 4\pi r^2$ je povrch koule. Odtud získal objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ještě známější je jeho určování obsahu kruhu. Každou z (nekonečně malých) částí ohraničující kružnice považuje za základnu rovnoramenného trojúhelníka s vrcholem ve středu kruhu. Obsah kruhu je pak roven součtu obsahů všech takových trojúhelníků. Představme si (viz obr. 3.4 a)), že kružnice se středem S je rozvinuta do úsečky AC (její délka je rovna obvodu o kruhu) tak, že poloměr SA je k ní kolmý. Nekonečně malému XY na kružnici odpovídá dílek $X'Y'$ na úsečce AC . Trojúhelníky $XY S$, $X'Y' S'$ mají výšku i základnu stejné délky, a tedy mají stejný obsah (Kepler

zde považuje délku oblouku XY a délku jemu odpovídající úsečky $X'Y'$ za stejné).



Obr. 3.4: Keplerův výpočet obsahu kruhu

Tyto trojúhelníky lze zaměnit jinými (viz obr. 3.4 b)), se stejnými základnami a výškou, přičemž „horní“ vrcholy všech trojúhelníků se posunou do středu kružnice S . Takto vzniklé trojúhelníky mají stejné obsahy jako původní trojúhelníky a dohromady vyplňují trojúhelník ACS .

Obsah kruhu je tedy roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami AC a AS , kde velikost strany AC je rovna velikosti obvodu o kruhu. Odtud plyne

$$S = \frac{1}{2}ro = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

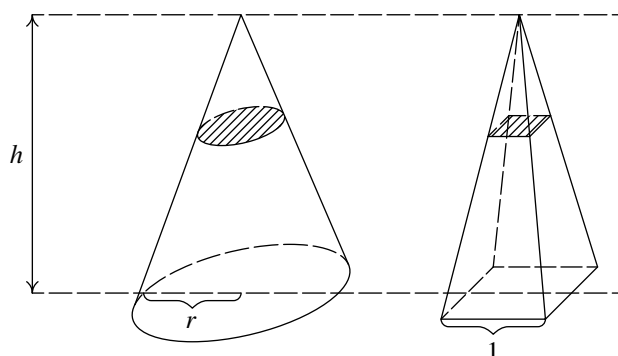
Kepler podobných úvah použil k výpočtům objemů velkého množství těles používaných v praxi. Z hlediska důkazových metod se Kepler rozešel s archimédovským požadavkem přesnosti. Prohlásil, že Archimédovy důkazy jsou absolutně přesné, že je však přenechává lidem, kteří si chtějí dopřát přesné důkazy. Za nepřesnosti tohoto typu bylo Keplerovo dílo ve své době velmi kritizováno. Dnes vidíme, že však znamenalo velký krok ke vzniku moderních integračních metod. Kepler pro řešení praktické úlohy vedl správné úvahy nového typu, chyběla mu však jejich odpovídající matematická formalizace, a proto i rigorózní důkazy.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) ve svém díle *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) vyložil jednoduchou formou metodu výpočtu objemu tělesa. Své výsledky shrnul ve formulaci, které dnes říkáme „Cavalieriho princip“: „Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají též poměr.“

Když budeme pomocí Cavalieriho principu určovat objem kužele s poloměrem podstavy r a s výškou h , můžeme jej porovnat s jehlanem o výšce h se čtvercovou podstavou, jejíž strana má délku 1 (viz obr. 3.5.). Roviny, které jsou rovnoběžné s podstavami obou těles a jsou vedeny ve stejné vzdálenosti od podstav, protínají tato tělesa v kruhu, resp. ve čtverci, jejichž obsahy jsou

v konstantním poměru πr^2 : 1. Podle Cavalieriho principu tedy platí $\frac{V_k}{V_j} = \pi r^2$, tedy $V_k = \pi r^2 V_j$, kde V_k je objem kužele a V_j objem jehlanu, pro nějž platí $V_j = \frac{1}{3}h$. Odtud plyne, že objem kužele je roven $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Cavalieriho metoda se liší od Keplerových postupů ve dvou aspektech. Za prvé, Kepler rozkládal těleso dané dimenze na nekonečně mnoho částí téže dimenze, kdežto Cavalieriho vrstvičky mají nižší dimenzi, než vyšetřovaný útvar. Za druhé, Kepler rozkládal dané těleso na infinitezimální části a sečtením jejich obsahů (resp. objemů) obdržel obsah (resp. objem) daného tělesa. Cavalieri potřeboval k výpočtu dvě tělesa a použil metodu porovnávání nekonečně malých částí těles, jakýchsi nedělitelných vrstviček.



Obr. 3.5: Cavalieriho princip

Praktický efekt Cavalieriho principu při výpočtu obsahů (resp. objemů) spočívá v tom, že odvozuje správné formule, aniž je nucen použít postupu, který dnes nazýváme výpočtem limity. I přes některé nedostatky měla Cavalieriho metoda velký vliv na jeho současníky i matematiky pozdějšího období.

Kromě této metody pro výpočet objemů dvou těles porovnáváním jejich řezů Cavalieri objevil i metodu pro výpočet obsahů a objemů jednoduchých útvarů pomocí tzv. příčných řezů. Ilustrujme tuto metodu na příkladu výpočtu objemu tělesa vzniklého rotací paraboly $y = x^2$ kolem osy x na intervalu $\langle A, B \rangle$.

Řezy ve vzdálenosti x od bodu A mají plochu πx^4 . Objem tohoto rotačního tělesa je pak

$$V = \pi \sum_A^B x^4.$$

Problémem nyní zůstává výpočet těchto sum. Cavalieri odvodil součty $\sum_A^B x^n$ pro $n = 1, 2, \dots, 9$.

Jestliže označíme $B - A = a$, pak došel ke vztahu

$$\sum_A^B x^n = \frac{1}{n+1} a^{n+1} \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, 9.$$

Z těchto výsledků Cavalieri usoudil, že lze předpokládat platnost vztahu pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, a tak mohl např. okamžitě napsat vztah pro výpočet obsahu plochy pod křivkou $y = x^n$ na

intervalu $(0, 1)$

$$s = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$$

nebo vztah pro objem tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy x

$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Jak uvidíme, Cavalieriho výsledek je ekvivalentní hodnotě určitého integrálu

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

což znamenalo obrovský krok v rozvoji algoritmických procedur pro výpočty obsahů a objemů.

K historickým poznámkám se ještě vrátíme na konci této kapitoly. Znalosti pojmů, se kterými se seznámíme v této kapitole, nám umožní tyto poznámky lépe chápat.

3.2. Konstrukce určitého integrálu



Průvodce studiem

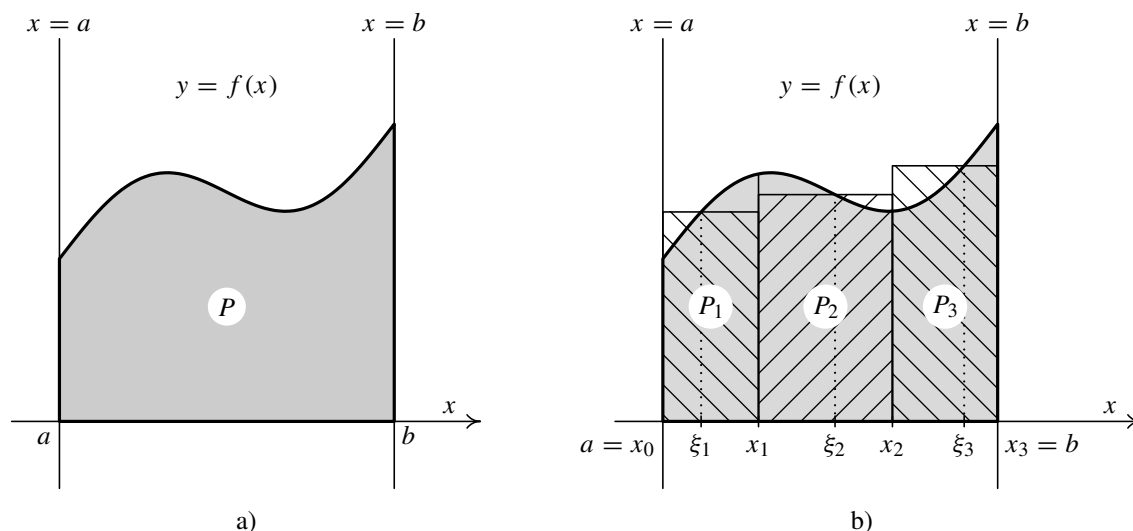
Než popíšeme formálně obecnou konstrukci určitého integrálu, vysvětlíme si na dvou příkladech myšlenku, která k této na první pohled poněkud komplikované konstrukci vede. Jeden příklad bude z geometrie, druhý z fyziky. Podobných motivačních úloh, pocházejících z geometrie, fyziky a dalších technických oborů, bychom mohli uvést mnoho.

Geometrická motivace

Představme si, že máme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$, která je pro jednoduchost spojitá. Graf této funkce společně se dvěma svislými přímkami $x = a$ a $x = b$ a osou x ohraničuje jistý rovinný obrazec P — viz obr. 3.6 a). Naším úkolem je určit jeho obsah.

Pomineme skutečnost, že veličina *obsah rovinné množiny* nebyla předem nějak matematicky přesně definovaná. Ze střední školy známe obsah trojúhelníka, obdélníku, kruhu a některých dalších jednoduchých obrazců. Pro složitější množinu je aspoň intuitivně zřejmé, co by toto číslo mělo vyjadřovat. (Obecně se touto problematikou zabývá tzv. *teorie míry* — viz např. [9].) Označíme-li obsah nějaké množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ symbolem $m_2(A)$ (m od slova míra, dvojka v indexu, protože jednotkami jsou délkové jednotky na druhou, např. cm^2), rozhodně by obsah měl mít následující vlastnosti:

- Je to nezáporné číslo, tj. $m_2(A) \geq 0$.



Obr. 3.6: Výpočet obsahu rovinné množiny

- Rozdělíme-li množinu A na dvě disjunktní části B a C , tj. $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, je obsah A roven součtu obsahů B a C , tj. $m_2(A) = m_2(B) + m_2(C)$.
- Obsah obdélníku O o velikostech stran a a b je roven číslu ab , tj. $m_2(O) = ab$.

Navrhne způsob, jak by se dalo při určení obsahu množiny P postupovat — viz obr. 3.6 b).

1. Rozdělíme množinu P rovnoběžkami s osou y na „pásky“ (na obrázku 3.6 b) jsou tři, označené P_1 , P_2 a P_3). Bude platit

$$m_2(P) = m_2(P_1) + m_2(P_2) + m_2(P_3).$$

2. Spočítáme obsahy jednotlivých „pásků“. To však bohužel obecně neumíme, neboť ze tří stran jsou ohraničené sice úsečkami, ale ze čtvrté grafem funkce $f(x)$. Uděláme to tedy přibližně. Uvnitř základny každého „pásku“ zvolíme bod (na našem obrázku jsou označené postupně ξ_1 , ξ_2 a ξ_3), vypočteme v něm funkční hodnotu a v této výšce ho zarovnáme rovnoběžkou s osou x na obdélník. Tím se samozřejmě dopustíme určité chyby — někde obdélník „pásek“ přesahuje, někde ho zase nepokrývá. Při označení z obr. 3.6 b) dostaneme přibližnou hodnotu obsahu množiny P :

$$m_2(P) \doteq (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + (x_3 - x_2)f(\xi_3). \quad (3.3)$$

(Uvědomte si, že $x_1 - x_0$ je délka základny prvního obdélníku, $f(\xi_1)$ je jeho výška atd.)

3. U „rozumných“ funkcí lze předpokládat, že čím více „pásků“ uděláme a čím budou užší, tím menší bude chyba, které se dopustíme nahrazením obdélníků za „pásky“. Provedeme-li tedy jakýsi limitní přechod, tj. budeme-li neomezeně zvětšovat počet „pásků“ a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota (daná součtem ploch obdélníků) čím dál víc přibližovat k přesné hodnotě obsahu $m_2(P)$. Zdá se tedy, že při

řešení této úlohy bude užitečné vyšetřovat součty mající tvar pravé strany (3.3), kde ovšem počet sčítanců bude neomezeně narůstat.

Fyzikální motivace

Uvažujme nehomogenní tyč T zanedbatelné tloušťky a šířky, která leží na ose x tak, že pokrývá interval (a, b) . Nechť $\rho(x)$ je její délková hustota v bodě x . Naším úkolem je určit hmotnost tyče $M(T)$. Situace je znázorněna na obr. 3.7.

Hmotnost má následující vlastnosti (všimněte si analogie s obsahem rovinné množiny):

- Je nezáporná, tj. $M(T) \geq 0$.
- Rozdělíme-li tyč na dvě disjunktní části T_1 a T_2 , tj. $T_1 \cup T_2 = T$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, je hmotnost celé tyče rovna součtu hmotností jednotlivých částí, tj. $M(T) = M(T_1) + M(T_2)$.
- Je-li tyč homogenní, tj. hustota je konstantní, rovná se hmotnost tyče součinu její délky a hustoty, tj. $M(T) = (b - a)\rho$.

Opět navrhneme postup, jak určit hmotnost tyče T — viz obr. 3.7.

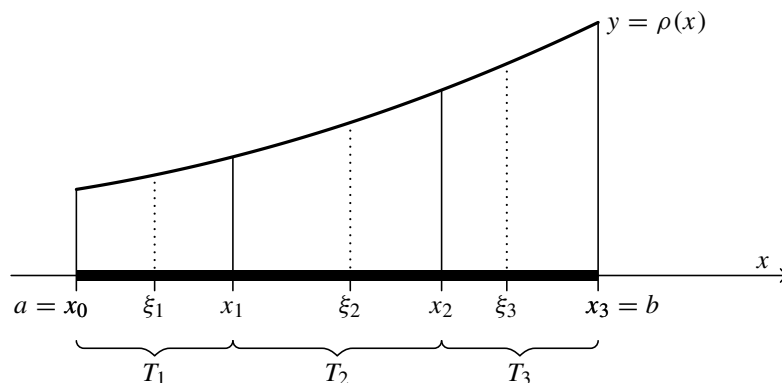
1. Rozdělíme tyč na několik disjunktních menších dílků (na ilustračním obrázku jsou tři, označené T_1 , T_2 a T_3). Bude platit

$$M(T) = M(T_1) + M(T_2) + M(T_3).$$

2. Určíme hmotnosti jednotlivých dílků. To neumíme udělat přesně, protože hustota není konstantní. Uděláme to tedy přibližně. Uvnitř každého dílku zvolíme bod (na našem obrázku jsou označeny ξ_1 , ξ_2 a ξ_3) a budeme předpokládat, že hustota je na celém dílku konstantní a rovna hustotě ve zvoleném pomocném bodě. Tak dostaneme přibližnou hodnotu hmotnosti tyče T :

$$M(T) \doteq (x_1 - x_0)\rho(\xi_1) + (x_2 - x_1)\rho(\xi_2) + (x_3 - x_2)\rho(\xi_3). \quad (3.4)$$

(Uvědomte si, že $x_1 - x_0$ je délka prvního „homogenizovaného“ dílku, $\rho(\xi_1)$ jeho konstantní hustota atd.)



Obr. 3.7: Určení hmotnosti tyče

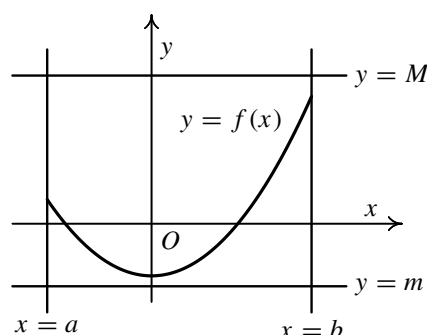
3. Lze předpokládat, že čím větší bude počet dílků a čím budou kratší, tím oprávněnější bude náš předpoklad, že hustota na takovém malém dílku je „téměř“ konstantní. Uděláme-li tudíž jakýsi limitní přechod, při němž budeme neomezeně zvyšovat počet dílků, na něž rozdělíme tyč, a budou-li tyto dílky čím dál kratší, lze očekávat, že se přibližná hodnota bude přibližovat přesné hodnotě hmotnosti tyče.

Podobně bychom mohli určit např. celkový elektrický náboj rozložený na tyči, pokud bychom znali jeho hustotu $\rho(x)$ v bodě x . V tomto případě by ovšem tato funkce mohla být i záporná.

Všimněte si, že až na označení funkcí (f resp. ρ) jsou součty z pravých stran (3.3) a (3.4) naprosto stejné. Obě dvě úlohy, v nichž šlo o určení zcela odlišných veličin, vedly tedy na vyšetřování naprosto stejných součtů. Podobných příkladů bychom mohli uvést mnoho. Všem by bylo společné, že určované veličiny by měly obdobné vlastnosti jako výše uvedené vlastnosti obsahu resp. hmotnosti. Klíčová je zejména druhá vlastnost (celková veličina je rovna součtu veličin odpovídajících disjunktním částem). Tím je motivována následující obecná konstrukce a z ní vyplývající definice.

Nejprve zavedeme několik potřebných pojmů a označení, abychom mohli definovat určitý integrál.

Uvažujme funkci $f(x)$, která je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a která je na tomto intervalu ohraničená. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$. Graf funkce je tedy uzavřen v obdélníku, jehož strany jsou určeny přímkami $x = a$, $x = b$, $y = m$ a $y = M$ — viz obr. 3.8. (Studenti často zapomínají na předpoklad ohraničenosti, který je pro konstrukci podstatný.)



Obr. 3.8

1. Posloupnost $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, nazveme *dělením intervalu* $\langle a, b \rangle$. Dělení budeme značit písmenem D . Interval $\langle a, b \rangle$ tedy bude rozdělen na n intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, kterým říkáme intervaly dělení D .

2. *Normou dělení* D nazveme číslo

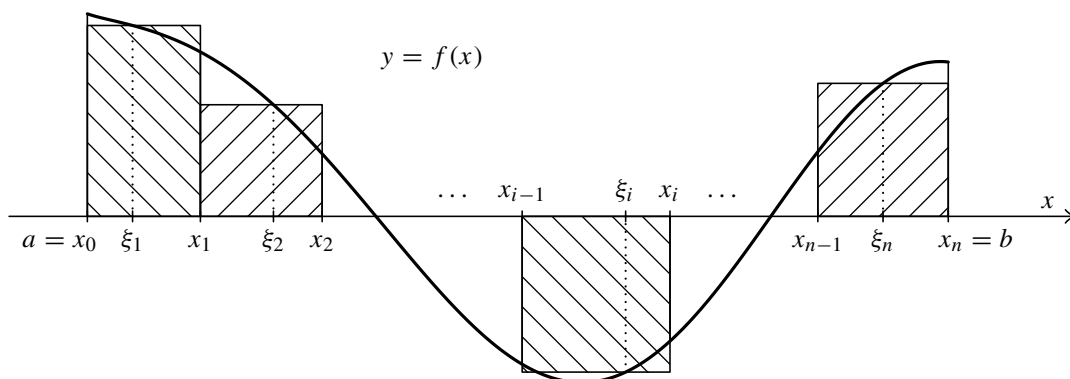
$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

které budeme značit $\nu(D)$. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu dělení. (Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být víc; zejména všechny intervaly mohou být např. stejně dlouhé — tzv. *ekvidistantní dělení*.) Norma tudíž charakterizuje, jak jemné je dělení D .

3. V každém intervalu dělení D vybereme jeden bod. Označíme-li bod vybraný v i -tém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, písmenem ξ_i , bude platit

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n.$$

Množinu $\mathcal{E} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ těchto bodů nazveme *výběrem reprezentantů dělení* D .



Obr. 3.9: Znárodnění integrálního součtu

4. Je-li D dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a \mathcal{E} výběr reprezentantů tohoto dělení, definujeme *integrální součet* $\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E})$ odpovídající funkci f , dělení D a výběru reprezentantů \mathcal{E} vztahem

$$\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

resp. rozepíšeme-li sumu,

$$\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Geometrický význam integrálního součtu je znázorněn na obr. 3.9. Vlastně jde o součet ploch obdélníků s délkami základen $x_i - x_{i-1}$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Pochopitelně pokud je $f(\xi_i) < 0$, je příspěvek daného obdélníku záporný. Integrální součet kromě funkce f závisí rovněž na konkrétním dělení a jeho výběru reprezentantů.

Nyní již můžeme vyslovit definici určitého integrálu.

Definice 3.1. Necht' $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, $a < b$.

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* neboli že má *určitý integrál* na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že $v(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů \mathcal{E} tohoto dělení platí $|\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E}) - I| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme

$$\int_a^b f(x) dx = I. \quad (3.5)$$

Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez*, interval $\langle a, b \rangle$ *integrační obor* a funkci f *integrand*. Horní a dolní mez nazýváme společně *integrační meze*.

Názorný význam předchozí definice je následující: Vytváříme-li integrální součty pro čím dál jemnější dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, pak se (při libovolných výběrech reprezentantů) hodnoty $\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E})$ „ustalují“ kolem čísla I . Pokud tomu tak není (integrální součty „oscilují“ i pro velmi jemná dělení), funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ určitý integrál nemá. Že tato situace může nastat, ukážeme níže v příkladu 3.4.

Poznámka 3.2.

- 1) Snadno se ukáže, že pokud číslo I s vlastností uvedenou v předchozí definici existuje, je jediné. Určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ je tudíž definován jednoznačně.
- 2) Integrál z definice 3.1 se nazývá *Riemannův*¹. Ukazuje se, že tento integrál nemá zcela ideální vlastnosti a pro některé teoretičtější úvahy jsou vhodné jiné, obecnější, ale složitější konstrukce. Takových konstrukcí existuje celá řada. Největší význam a rozšíření má asi *Lebesgueův*² integrál — viz [9]. Nejobecnější v tomto směru je asi *Henstockův-Kurzweilův* integrál — viz [13, 14, 24]. Pro běžné potřeby inženýrů je však Riemannův integrál zcela dostačující.
- 3) Často se Riemannův integrál zavádí jiným způsobem. Místo integrálních součtů se používají horní a dolní součty — viz např. [8, 17, 18]. Lze ukázat, že obě definice jsou ekvivalentní (viz např. [6], [17, str. 45]).
- 4) Diferenciál dx v označení určitého integrálu ve vztahu (3.5) nám říká, jak je označena nezávisle proměnná. Z konstrukce určitého integrálu je zřejmé, že označení nezávisle proměnné písmenem x není podstatné. Tedy $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt$.
- 5) Označení určitého a neurčitého integrálu je velmi podobné. U určitého integrálu jsou pouze navíc integrační meze. Tato podobnost má bohužel za následek, že u studentů často vzniká dojem, že oba tyto pojmy jsou v podstatě stejné. **To je však hrubé zkreslení.** Je třeba si uvědomit, že **neurčitý a určitý integrál se zásadně liší**. Stačí porovnat jejich definice 2.1 a 3.1. Oba integrály se sice dělají z funkce, avšak výsledek je naprosto odlišný:

- U neurčitého integrálu je to funkce (přesněji celá množina funkcí).
- U určitého integrálu je to číslo.

Níže uvidíme, že mezi těmito zcela odlišně definovanými pojmy je velice důležitý vztah (věta 3.14). Nic to však nemění na skutečnosti, že jde o dva různé pojmy.

- 6) Již dříve jsme se zmínili, že symbol \int vznikl protažením písmene S, značícího sumu. Nyní už je jasné, o jakou sumu (integrální součet) vlastně jde.

Příklad 3.3. Necht' $f(x)$ je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. $f(x) = c$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Vypočtete $\int_a^b c dx$.



¹**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti říman) — vynikající německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z největších matematiků všech dob. Jeho tzv. Riemannova hypotéza o rozložení nul ζ -funkce je dodnes nevyřešena a je považována za jeden z nejtěžších matematických problémů.

²**Henri Leon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — významný francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily moderní matematiku.

Řešení. Zvolme libovolné dělení $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a libovolný výběr reprezentantů \mathcal{E} tohoto dělení. Pak platí

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + \dots + c(x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Všechny integrální součty této funkce jsou tedy stejné a mají hodnotu $c(b - a)$. Z toho očividně vyplývá, že funkce je integrovatelná a že platí $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$.

Všimněte si, že pokud je $c > 0$, jde o obsah obdélníku o výšce c , sestrojeného nad intervalem $\langle a, b \rangle$. ▲

Ověřovat existenci a počítat určitý integrál přímo z definice tak, jak tomu bylo v předchozím příkladu, je obecně velmi obtížné. V dalším textu si uvedeme podstatně účinnější a jednodušší nástroje.

V následujících odstavcích si všimneme v souvislosti s pojmem Riemannova určitého integrálu tří okruhů otázek:

- Existence určitého integrálu.
- Vlastnosti určitého integrálu.
- Praktický výpočet určitého integrálu.

3.3. Existence určitého integrálu

Začneme příkladem, který nám ukáže, že ne každá funkce, která je ohraničená na ohraničeném uzavřeném intervalu, musí mít Riemannův integrál.



Příklad 3.4. Ukažte, že Dirichletova¹ funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro racionální } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{pro iracionální } x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

není na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ Riemannovsky integrovatelná, tj. že $\int_0^1 \chi(x) \, dx$ neexistuje.



Pro zájemce:

Řešení. Protože mezi libovolnými dvěma různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho racionálních čísel, tak nekonečně mnoho iracionálních čísel, je graf Dirichletovy funkce naprosto „roztrhán“ a nemůžeme ho namalovat.

Ukážeme, že existuje libovolně jemné dělení (tj. s libovolně malou normou) a k němu vhodný výběr reprezentantů takové, že příslušný integrální součet je roven předem danému číslu r , $0 \leq r \leq 1$. To ovšem znamená, že při zjemňování dělení se integrální součty nepřibližují žádné pevné hodnotě I , ale naopak „oscilují“ mezi hodnotami 0 a 1, tudíž integrál $\int_0^1 \chi(x) \, dx$ neexistuje.

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) (čti diriklé) — významný německý matematik. Zabýval se teorií čísel, matematickou analýzou a rovnicemi matematické fyziky.

Volme nejprve $r = 0$. Zvolíme libovolné dělení $D: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ a vybereme za všechny reprezentanty iracionální čísla, tj. $\chi(\xi_i) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\chi, D, \mathcal{E}) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Nechť nyní $r = 1$. Zvolíme opět libovolné dělení $D: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ a vybereme za všechny reprezentanty racionální čísla, tj. $\chi(\xi_i) = 1$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\chi, D, \mathcal{E}) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = 1. \end{aligned}$$

Nechť konečně $0 < r < 1$ je libovolné číslo. Nejprve rozdělíme libovolnými dělicími body interval $(0, r)$, tj. $x_0 < x_1 < \dots < x_k = r$. Pak libovolně rozdělíme interval $(r, 1)$, tj. $r = x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = 1$. V prvních k intervalech dělení vybereme racionální reprezentanty, ve zbývajících iracionální. Vyjde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\chi, D, \mathcal{E}) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \\ &\quad + f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) + \\ &\quad + 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = x_k - x_0 = r. \end{aligned}$$

Zřejmě dělení mohla být ve všech případech libovolně jemná, což dokazuje, že zmíněný integrál neexistuje. ▲

Potřebovali bychom tedy nějaké jednoduché, snadno ověřitelné podmínky, které nám zaručí, že Riemannův integrál existuje pro dostatečně širokou množinu funkcí, se kterými se v aplikacích běžně setkáváme. Ty jsou obsahem následující věty.

Věta 3.5. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť je splněna na tomto intervalu kterákoliv z následujících podmínek:*

- (1) $f(x)$ je monotónní.
- (2) $f(x)$ je spojitá.
- (3) $f(x)$ je ohraničená a má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti.

Pak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$.

Z podmínky (2) předchozí věty tedy vyplývá, že existují např. určité integrály $\int_0^\pi \sin x dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$, $\int_1^e \ln x dx$ a pod. U druhého a čtvrtého příkladu to plyne i z podmínky (1), protože jejich integrandy jsou monotónní.

Z podmínky (3) předchozí věty dostaneme, že existují také integrály $\int_0^\pi f(x) dx$ a $\int_0^{4,5} g(x) dx$, kde

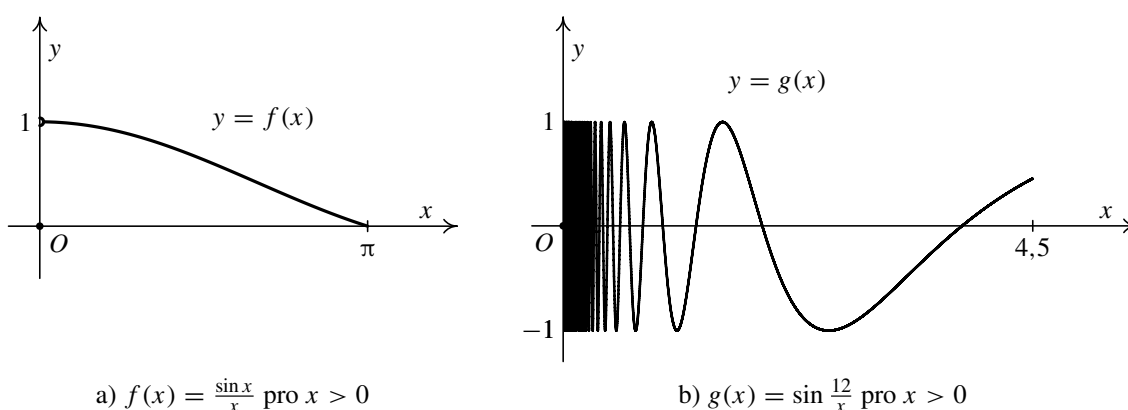
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{12}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Obě funkce jsou ohraničené a mají jediný bod nespojitosti v nule — viz obr. 3.10.

Pro $f(x)$ totiž vyjde l'Hospitalovým pravidlem $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 = f(0)$. Tedy je nespojitá v nule, ale má zde konečnou limitu. Všude jinde je spojitá, což s použitím Weierstrassovy věty (viz [12]) zaručuje ohraničenost.

U funkce $g(x)$ limita $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{12}{x}$ neexistuje (osciluje mezi ± 1), takže je nespojitá v nule. Všude jinde je spojitá. Ohraničenost plyne z toho, že $|\sin \frac{12}{x}| \leq 1$ pro $x \neq 0$.

Podobně existuje určitý integrál $\int_{-2}^3 \operatorname{sgn} x \, dx$ funkce signum, jejíž graf je na obr. 2.2. Funkce je zřejmě ohraničená a je nespojitá pouze v nule.



Obr. 3.10: Grafy nespojitých integrovatelných funkcí

S existencí určitého integrálu souvisí rovněž následující velmi užitečná věta.

Věta 3.6. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definované na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť se tyto funkce liší nejvýše v konečně mnoha bodech.*

Jestliže je funkce $f(x)$ integrovatelná na $\langle a, b \rangle$, je zde integrovatelná i funkce $g(x)$ a platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Z předchozí věty ihned vyplývá, že změnou funkce v konečně mnoha bodech se nemění její určitý integrál. Přesněji platí:

Nechť funkce $g(x)$ vznikne z funkce $f(x)$ změnou v konečně mnoha bodech.

- Je-li $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je na tomto intervalu integrovatelná i funkce $g(x)$ a platí $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$.
- Není-li $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, není na tomto intervalu integrovatelná ani funkce $g(x)$.

Předchozí poznatek nám dovoluje nestarat se o to, že při výpočtu určitého integrálu integrand není definován v konečně mnoha bodech. Funkční hodnoty v těchto bodech

můžeme stanovit libovolně. Nezáleží na tom totiž ani vlastnost „mít určitý integrál“, ani (pokud určitý integrál existuje) jeho hodnota. Tato vlastnost je velmi praktická při výpočtech. Např. u funkcí z (3.6) můžeme psát

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{resp.} \quad \int_0^{4,5} \sin \frac{12}{x} dx$$

a nezatěžovat se tím, že ani jeden z integrandů není definován v nule.

Pro zájemce:



Ve větě 3.5 jsme uvedli jednoduché postačující podmínky existence určitého Riemannova integrálu. Je možné nalézt i nutnou a postačující podmínku existence — viz např. [9]. Ukazuje se, že určitý Riemannův integrál existuje právě tehdy, když množina bodů, v nichž je integrand nespojitý, je „malá“. Přesný význam slova „malá“ je, že má tzv. Lebesgueovu míru na přímce nula (tato míra je zobecněním délky intervalu i pro mnohem složitější množiny na přímce).

Např. Dirichletova funkce z příkladu 3.4 je nespojitá v každém bodě integračního oboru $(0, 1)$. Délka tohoto intervalu je 1, není to tudíž „malá“ množina, což potvrzuje náš dřívější závěr, že Riemannův integrál této funkce neexistuje.

3.4. Základní vlastnosti určitého integrálu

V tomto oddílu uvedeme základní vlastnosti určitého integrálu, které budeme v dalším běžně využívat při praktickém výpočtu.

Věta 3.7. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde c je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \quad (3.7)$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \quad (3.8)$$

První vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k integrandu, druhá homogenita.

Všimněte si, že obdobné vlastnosti má i neurčitý integrál — viz věta 2.4. První tvrzení se snadno rozšíří na libovolný konečný počet sčítanců. Z hlediska existence opět musíme číst vzorce zprava doleva.

Pro zájemce:



Lze ukázat, že z integrovatelnosti funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ plyne i integrovatelnost jejich součinu $f(x)g(x)$ na tomto intervalu.

Složitější je situace s podílem. Předně musí být $g(x) \neq 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ s případnou výjimkou konečně mnoha bodů — viz věta 3.6, podle níž můžeme $g(x)$ v těchto bodech podle potřeby předefinovat, aniž se cokoli změní z hlediska integrovatelnosti a hodnoty integrálu. Avšak funkce $f(x)/g(x)$ nemusí být ohraničená (např. $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $g(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $g(0) = 1$; pak $f(0)/g(0) = 1$ a $f(x)/g(x) = 1/x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, což je shora neohraničená funkce — jejím grafem na $\langle 0, 1 \rangle$ je část hyperboly). Pokud však ohraničená bude, plyne z integrovatelnosti $f(x)$ a $g(x)$, že bude integrovatelný na intervalu $\langle a, b \rangle$ i podíl $f(x)/g(x)$ (důkaz lze provést s použitím nutné a postačující podmínky existence z textu pro zájemce na str. 113).

Bohužel na rozdíl od součtu, rozdílu a násobení konstantou ani pro součin ani pro podíl neexistuje žádný jednoduchý vztah, jak obecně vyjádřit určitý integrál z $f(x)g(x)$ resp. $f(x)/g(x)$ pomocí integrálů z $f(x)$ a $g(x)$.

Další skupina vlastností se týká změny integračního oboru.

Věta 3.8. *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak je integrovatelná i na libovolném podintervalu $\langle c, d \rangle$, kde $a \leq c < d \leq b$.*

Zmenšením integračního oboru se tedy vlastnost funkce „být integrovatelná“ zachovává.

Věta 3.9. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $a < c < b$. Pak funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ právě tehdy, když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. Přitom platí*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.9)$$

Tato vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k integračnímu oboru.

Předchozí věta bude v dalším užitečná zejména v případech, kdy integrand nebude mít na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ jednotný analytický předpis. Navíc se její tvrzení snadno indukcí zobecní. Je-li $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$, $n \in \mathbb{N}$, bude platit, že

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

Přitom integrovatelnost na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ je rovnocenná integrovatelnosti na všech intervalech vyskytujících se v integrálech na pravé straně předchozí rovnosti.



Příklad 3.10. Vypočtěte $\int_{-2}^4 f(x) dx$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle, \\ -1 & \text{pro } x \in \langle 1, 3 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle. \end{cases}$$

Řešení. Podle věty 3.9 a jejího zobecnění bude platit

$$\begin{aligned}\int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \\ &= \int_{-2}^1 2 dx + \int_1^3 (-1) dx + \int_3^4 1 dx.\end{aligned}$$

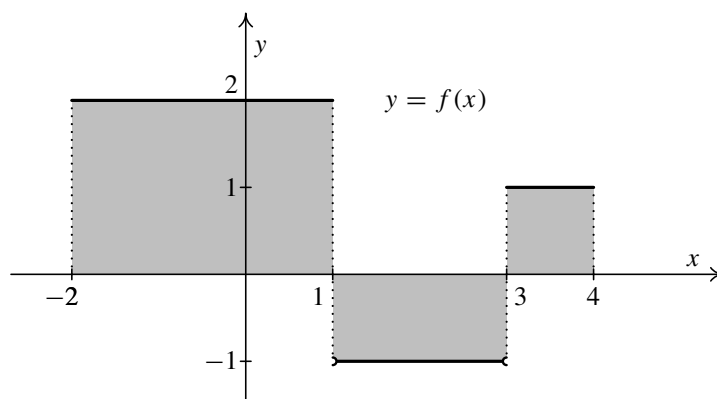
Integrály na pravé straně předchozí rovnosti existují, což jsme ukázali v příkladu 3.3, takže zmíněnou větu je možné použít. (Všimněte si, že u druhého z těchto integrálů jsme mlčky změnili hodnoty $f(x)$ v krajních bodech na -1 ; podle věty 3.6 a komentářů za ní to nemá z hlediska existence integrálu a jeho hodnoty na nic vliv.)

Jiný způsob, jak ověřit integrovatelnost, spočívá v použití věty 3.5 — naše funkce je ohraničená a spojitá s výjimkou dvou bodů $x = 1$ a $x = 3$.

Celkově tedy dostaneme s použitím výsledku příkladu 3.3, že

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = 2 \cdot (1 - (-2)) + (-1) \cdot (3 - 1) + 1 \cdot (4 - 3) = 5.$$

Graf funkce $f(x)$ je znázorněn na obr. 3.11. Výsledek je součtem ploch tří rovnoběžníků (dvou obdélníků a jednoho čtverce), plocha prostředního je ovšem brána záporně. ▲



Obr. 3.11: Graf po částech konstantní funkce

Dále si všimneme nerovností, které platí pro určitý integrál.

Věta 3.11. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Protože podle příkladu 3.3 je $\int_a^b 0 dx = 0$, plyne z předchozí věty, že pro nezápornou integrovatelnou funkci $g(x)$ platí, že $\int_a^b g(x) dx \geq 0$. Tuto skutečnost můžeme často využít k jisté hrubé kontrole výsledku. Je-li integrand očividně nezáporný, nemůže vyjít výsledek záporný.

Věta 3.12. *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak je na tomto intervalu integrovatelná rovněž funkce $|f(x)|$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Stručně řečeno: Absolutní hodnota z určitého integrálu je menší nebo rovna než určitý integrál z absolutní hodnoty.

Věta 3.13 (Věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$, kde m a M jsou konstanty.*

Pak existuje číslo c takové, že $m \leq c \leq M$ a že platí

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Je-li funkce $f(x)$ dokonce spojitá, lze za c volit vhodnou funkční hodnotu, tj. existuje $x_0 \in \langle a, b \rangle$ takové, že

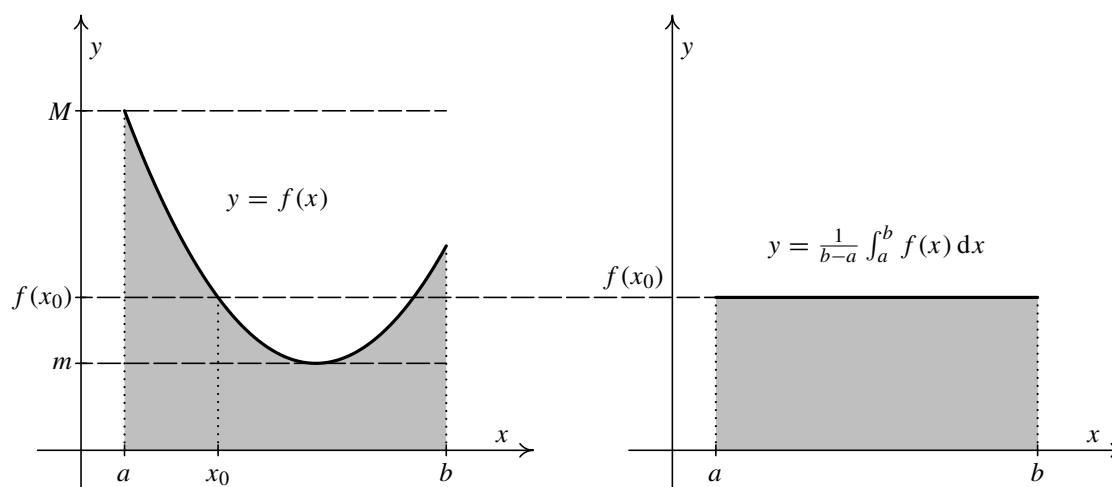
$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a).$$

Číslo c se nazývá střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Z věty 3.11 plyne, že $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$, tj. $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$. Platí tedy $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$, takže stačí položit $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Je-li funkce $f(x)$ spojitá, nabývá podle Weierstrassovy věty na intervalu $\langle a, b \rangle$ své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ taková, že $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ pro libovolné $x \in \langle a, b \rangle$. Můžeme tedy zvolit $m = f(x_1)$ a $M = f(x_2)$, takže $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$. Podle Cauchyovy-Bolzanovy věty proto lze najít x_0 ležící mezi x_1 a x_2 tak, že $f(x_0) = c$. \square

Předchozí věta má názorný geometrický význam. Předpokládejme pro jednoduchost, že funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná. Z dřívějšíka (geometrická motivace definice určitého integrálu) již víme, že $\int_a^b f(x) dx$ vyjadřuje obsah obrazce omezeného grafem funkce $f(x)$, osou x a rovnoběžkami s osou y procházejícími body a a b . Věta pak říká, že nad intervalem $\langle a, b \rangle$ lze sestavit obdélník o stejném obsahu (což samo o sobě je triviální konstatování), jehož výška je rovna funkční hodnotě ve vhodném bodě x_0 — viz obr. 3.12. Vlastně jde o graf konstantní funkce $y = f(x_0)$, kde $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Z obrázku je vidět, že bod x_0 není obecně určen jednoznačně. V našem případě přímka o rovnici $y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ protíná graf funkce $f(x)$ dvakrát.



Obr. 3.12: Geometrický význam věty o střední hodnotě integrálního počtu

3.5. Výpočet určitého integrálu

V předchozích oddílech jsme uvedli řadu vlastností určitého integrálu, ale kromě konstantní funkce (což je vlastně obsah obdélníku) jsme nebyli dosud schopni žádný určitý integrál spočítat. To nyní napravíme. Klíčovým prostředkem je následující věta. Ta obsahuje formuli pojmenovanou podle dvou matematiků, kteří se velkou měrou zasloužili o vybudování základů diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné — Newtona¹ a Leibnize². Tato formule je slíbeným vztahem mezi neurčitým a určitým integrálem.

Věta 3.14 (Newtonova-Leibnizova formule). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.10)$$

Důkaz. Ukážeme, že rozdíl $F(b) - F(a)$ je pro libovolné dělení $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$ roven integrálnímu součtu $\mathcal{S}(f, D, \mathcal{E})$ s vhodným výběrem reprezentantů.

Funkce $F(x)$ splňuje na libovolném intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Existují tedy čísla ξ_i , $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, taková, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Protože však $F'(x) = f(x)$, platí, že $F(x_i) -$

¹**Isaac Newton** (1643–1727) (čti njútn) — anglický matematik, fyzik, mechanik a astronom. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu, který potřeboval pro vybudování klasické mechaniky.

²**Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) (čti lajbnyc) — německý matematik, fyzik, filosof, vynálezce, právník, historik a jazykovědec. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu.

– $F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] = \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \mathcal{S}(f, D, \mathcal{E}), \end{aligned}$$

kde $\mathcal{E} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Funkce $f(x)$ je podle předpokladu integrovatelná, což znamená, že pro zjemňující se dělení jsou integrální součty při libovolných výběrech reprezentantů čím dál bližší jisté konstantě I (hodnotě integrálu $\int_a^b f(x) dx$). Dělení v předchozí konstrukci však mohlo být libovolně jemné, přičemž hodnota příslušného integrálního součtu byla vždy $F(b) - F(a)$. To je možné jedině tak, že $F(b) - F(a) = I$. \square

Poznámka 3.15.

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, takže rovnost (3.10) obvykle zapisujeme jako

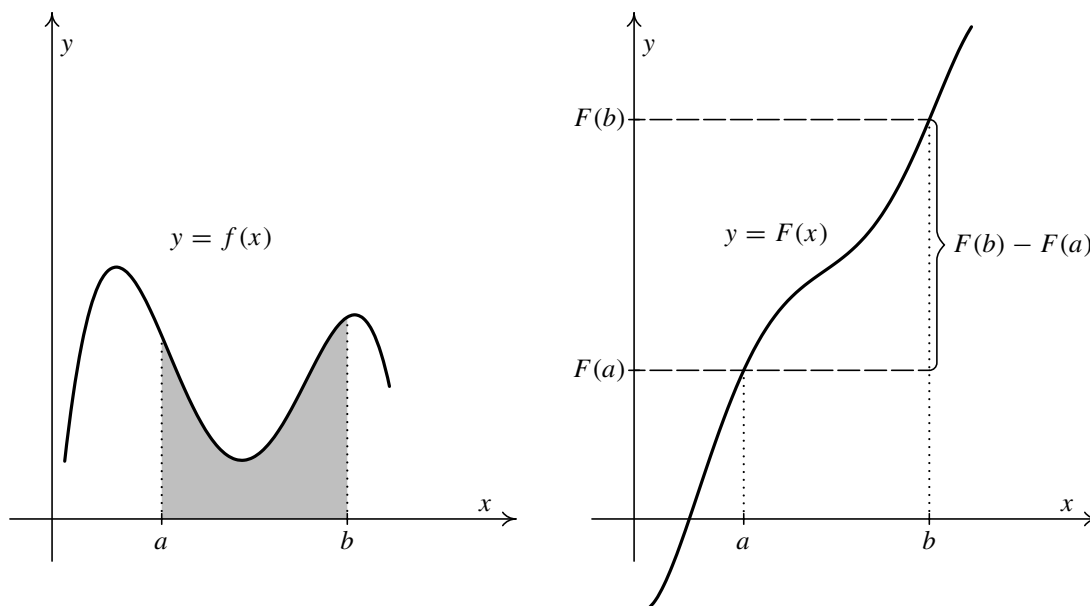
$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

2. Z první kapitoly víme, že pokud k funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$, není jediná. Na první pohled by se tedy mohlo zdát, že by vzorec (3.10) pro různé primitivní funkce mohl dát různé výsledky. Z věty 2.2 plyne, že tomu tak není, a tudíž vzorec dává stejný výsledek nezávisle na výběru konkrétní primitivní funkce. Je-li totiž $G(x)$ nějaká další primitivní funkce k $f(x)$, existuje konstanta c taková, že $G(x) = F(x) + c$. Tedy $G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$. Z toho důvodu nebudeme v dalších příkladech na určitý integrál připisovat k vypočtenému neurčitému integrálu obligátní konstantu c .
3. Na obr. 3.13 je znázorněna Newtonova-Leibnizova formule geometricky. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ je roven přírůstku primitivní funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ (obě funkce mohou být definovány na širším intervalu, než je $\langle a, b \rangle$, jako je tomu např. v tomto případě). Všimněte si, že důsledkem toho, že v tomto případě je $f(x)$ kladná, je, že primitivní funkce $F(x)$ je rostoucí. Platí totiž $F'(x) = f(x) > 0$ a z diferenciálního počtu víme, že kladná derivace na intervalu znamená, že funkce $F(x)$ roste. To je ve shodě s názorem, který nám říká, že při zafixované dolní mezi a a zvětšující se horní mezi b se plocha pod grafem musí zvětšovat, tj. $F(x)$ musí růst, aby se zvětšoval přírůstek $F(b) - F(a)$.



Příklad 3.16. S využitím Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtete určité integrály:

- a) $\int_1^2 x^2 dx$, b) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$, c) $\int_0^\pi \sin u du$, d) $\int_{-2}^1 \frac{dt}{t^2 + 1}$,
- e) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} - \frac{2}{x + 1} + \frac{4}{x^2 + 2} + \frac{x}{x^2 + 2} \right) dx$.



Obr. 3.13: Newtonova-Leibnizova formule

Řešení. Určité integrály existují, protože integrandy jsou spojité. Ve všech případech vystačíme při určování neurčitých integrálů se vzorci z tabulky 2.1 na str. 11.

a) Pomocí vzorce 3 vyjde:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

b) Pomocí vzorce 3 vyjde:

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} - 0 = \frac{16}{3}.$$

c) Pomocí vzorce 7 vyjde:

$$\int_0^\pi \sin u du = [-\cos u]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

d) Pomocí vzorce 9 vyjde (připomeňme, že arkustangens je lichá funkce):

$$\int_{-2}^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = [\arctg t]_{-2}^1 = \arctg 1 - \arctg(-2) = \frac{\pi}{4} + \arctg 2.$$

e) Nejprve daný integrál pomocí vztahů (3.7) a (3.8) převedeme na několik určitých integrálů. Ty pak vypočítáme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule s použitím vzorců 11, 4, 9 a 14.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx = \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} dx = \\
&= [\ln|x + \sqrt{x^2+3}|]_0^1 - 2[\ln|x+1|]_0^1 + 4 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 + \\
&+ \frac{1}{2} [\ln(x^2+2)]_0^1 = \ln 3 - \ln \sqrt{3} - 2(\ln 2 - \ln 1) + \\
&+ 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} 0 \right) + \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) = \\
&= \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Jinou možností, jak postupovat při výpočtu, bylo nedělit určitý integrál na součet čtyř integrálů, ale určit přímo primitivní funkci. Výpočet by pak vypadal takto:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx = \\
&= \left[\ln|x + \sqrt{x^2+3}| - 2 \ln|x+1| + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) \right]_0^1 = \\
&= \dots = \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$



Příklad 3.17. S využitím Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtěte určité integrály:

$$\text{a) } \int_{-\pi/2}^{\pi} (x-1) \sin x \, dx, \quad \text{b) } \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

Řešení. Určité integrály existují, protože integrandy jsou spojité. Tentokrát však nedokážeme určit primitivní funkce tak snadno, jako v předchozích příkladech. Spočítáme proto nejprve samostatně neurčité integrály.

a) Použijeme metodu per partes.

$$\begin{aligned}
\int (x-1) \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x-1 & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = \\
&= -(x-1) \cos x + \int \cos x \, dx = (1-x) \cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi} (x-1) \sin x \, dx &= [(1-x) \cos x + \sin x]_{-\pi/2}^{\pi} = \\ &= (1-\pi) \cos \pi + \sin \pi - \left[\left(1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= (1-\pi) \cdot (-1) + 0 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 - (-1) = \pi. \end{aligned}$$

b) Použijeme substituční metodu.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = u^2 \\ -2x \, dx = 2u \, du \\ x \, dx = -u \, du \end{array} \right| = - \int u \cdot u \, du = \\ &= -\frac{1}{3} u^3 = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangle$$

Ukazuje se, že postup z předchozího příkladu, kdy při určování primitivní funkce bylo nutné použít metodu per partes nebo substituční metodu, není výhodný. Vhodnější je zmíněné metody modifikovat přímo pro určitý integrál. Výpočet je pak obvykle podstatně rychlejší. Zmíněné úpravy budou obsahem následujících oddílů. Předtím však ještě ukážeme jeden příklad, který ilustruje situaci, v níž se při použití Newtonovy-Leibnizovy formule často dělají chyby.

Příklad 3.18. Vypočtete určitý integrál $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \cos x}$.



Řešení. Integrál existuje, protože integrand $\frac{1}{2-\cos x}$ je spojitá funkce. Příslušnou primitivní funkci na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsme našli v příkladu 2.61. Její tvar byl

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi). \quad (3.11)$$

My však pro použití Newtonovy-Leibnizovy formule potřebujeme primitivní funkci alespoň na uzavřeném intervalu $(0, 2\pi)$. Musíme tudíž použít konstrukci z kapitoly 2.6.3.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \cos x} &= [F(x)]_0^{2\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} 0 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 0 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 0 = 0 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Srovnajte výsledek s obrázkem 2.4. Z něho je ihned vidět, že $F(0) = 0$ a $F(2\pi) = 2\pi/\sqrt{3}$.

Kdybychom nedávali pozor a „slepě“ použili vzorec (3.11) i pro hodnotu 2π , dostali bychom

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} 0 = 0 - 0 = 0.$$

Vlastně jsme použili funkci $G(x)$ z obrázku 2.4, shodující se s $F(x)$ jen na $(-\pi, \pi)$, a vypočítali $G(2\pi) - G(0)$. Výsledek je očividně chybný, protože integrand $\frac{1}{2-\cos x}$ je kladná funkce, takže náš integrál musí mít kladnou hodnotu. ▲

3.5.1. Metoda per partes pro určitý integrál

Věta 3.19. *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx. \quad (3.12)$$

Důkaz. Z existence derivací vyplývá, že funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě. Podle textu pro zájemce na str. 113 jsou tudíž funkce $u(x)v'(x)$ a $u'(x)v(x)$ integrovatelné, takže podle věty 3.7 je integrovatelná i funkce $u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$. K ní primitivní funkce je $u(x)v(x)$. Podle Newtonovy-Leibnizovy formule platí

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)] dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Odsud s použitím věty 3.7 dostaneme po úpravě tvrzení. □

Později ve větě 3.30 uvedeme metodu per partes za obecnějších předpokladů.

Praktické použití je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu. Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná. Výhoda oproti postupu popsanému v příkladu 3.17 a) spočívá v tom, že meze průběžně dosazujeme do částečně určené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední, jak ukáží názorně následující příklady.



Příklad 3.20. Vypočtete určitý integrál $\int_1^2 (x^2 + 1) \ln x dx$.

Řešení. Integrovat budeme mnohočlen $x^2 + 1$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 + 1) \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 + 1 & v = \frac{1}{3}x^3 + x \end{array} \right| = \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{8}{3} + 2\right) \ln 2 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot 0 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \\
&= \frac{14}{3} \ln 2 - \left[\frac{1}{9}x^3 + x\right]_1^2 = \\
&= \frac{14}{3} \ln 2 - \left[\left(\frac{8}{9} + 2\right) - \left(\frac{1}{9} + 1\right)\right] = \frac{14}{3} \ln 2 - \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

Funkce $(x^2 + 1) \ln x$ je na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ kladná (kromě bodu $x = 1$), takže výsledek musí být kladný. Na kalkulačce si můžete ověřit, že jeho hodnota je přibližně 1,46. ▲

Příklad 3.21. Vypočtěte určitý integrál $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$.



Řešení. Derivovat budeme mnohočlen x^2 a metodu budeme muset použít dvakrát. Postupně dostaneme (pozor na změny znamének)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = [x^2 \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin x \, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad u' = 2 \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\
&= \pi^2 \cdot 0 - 0 - \left([-2x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2 \cos x \, dx \right) = \\
&= -(-2\pi \cdot (-1) - 0) - [2 \sin x]_0^\pi = -2\pi - (0 - 0) = -2\pi.
\end{aligned}$$

Zkuste nejprve spočítat celou primitivní funkci k $x^2 \cos x$ a pak teprve použijte Newtonovu-Leibnizovu formuli. Porovnejte, o kolik je takový výpočet delší. ▲

3.5.2. Substituční metoda pro určitý integrál

Než zformulujeme příslušnou větu, musíme rozšířit definici určitého integrálu. Doposud jsme předpokládali, že integrační obor je interval $\langle a, b \rangle$, tj. že $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Tento předpoklad nyní odbouráme a připustíme, že může být i $a \geq b$. Přitom klademe

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{pro } a > b. \quad (3.14)$$

V případě $a > b$ musí být samozřejmě funkce integrovatelná na intervalu $\langle b, a \rangle$. Stručně si zapamatujme, že *obrácení mezi znamená změnu znaménka určitého integrálu*.

Všimněte si, že platnost Newtonovy-Leibnizovy formule (3.10) se zachová i pro takto rozšířenou definici určitého integrálu. Rovněž platí věta 3.7 a metoda per partes pro určitý integrál.

Věta 3.22. *Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a < b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha < \beta$, která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ (tedy φ zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ do intervalu $\langle a, b \rangle$). Pak platí, že*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt. \quad (3.15)$$

Vzorec (3.15) připomíná substituci do neurčitého integrálu ve tvaru (2.8). Předpoklady jsou samozřejmě odlišné. Oba dva integrály jsou však nyní určité a obecně mají *různé meze*. Kromě zavedení správné substituce $\varphi(x) = t$ a vypočtení diferenciálů $\varphi'(x) dx = dt$ musíme tedy tentokrát ještě určit nové meze. „Staré“ meze α a β jsou pro původní proměnnou x , „nové“ meze $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$ jsou pro novou proměnnou t . V konkrétním případě se může stát, že $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$, což je vyřešeno rozšířeními (3.13) a (3.14).

Postup výpočtu a zápis je obdobný jako u neurčitého integrálu, jen přibude určení nových mezí. To vyznačíme v naší pomocné tabulce jako $\alpha \rightsquigarrow \varphi(\alpha)$ (staré dolní mezi α odpovídá nová dolní mez $\varphi(\alpha)$) resp. $\beta \rightsquigarrow \varphi(\beta)$ (staré horní mezi β odpovídá nová horní mez $\varphi(\beta)$).

Výhodou oproti postupu z příkladu 3.17 b) je, že se nemusíme po substituci vracet k původní proměnné, což bylo někdy dost nepříjemné, jak jsme viděli dříve — srovnejte třeba příklad 2.30. Vzorec (3.15) je možné použít v obou směrech. V následujícím příkladu ho použijeme zleva doprava.



Příklad 3.23. Vypočtěte určité integrály:

$$\text{a) } \int_0^1 x(x^2 - 1)^3 dx, \quad \text{b) } \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x} \cos x dx, \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt[4]{1 + \cos^3 x}} dx.$$

Řešení.

a) Příklad budeme řešit substitucí $x^2 - 1 = t$. Staré meze jsou pro proměnnou x , takže je do této rovnice dosadíme postupně za x a dostaneme hodnoty nových mezí pro proměnnou t (pokud by byl vztah složitější, muselo by se t osamostatnit). Pro dolní mez to bude $0^2 - 1 = -1$, pro horní $1^2 - 1 = 0$. Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule. Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\int_0^1 x(x^2 - 1)^3 dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ 0 \rightsquigarrow -1, 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} t^3 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{8}.$$

b) Tentokrát použijeme substituci $\sin x = t$. Pro novou dolní mez vyjde $\sin \pi = 0$ a pro novou horní mez vyjde $\sin 2\pi = 0$. Výpočet tedy bude velmi krátký:

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \pi \rightsquigarrow 0, 2\pi \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_0^0 e^t dt = 0.$$

Vždy, když nastane tato situace, tj. když nové meze splynou, nemusíme už ani upravovat nový integrand, výsledek je automaticky bez dalšího počítání nula, což nás většinou potěší. V tomto případě je zvlášť markantní zkrácení výpočtu oproti metodě z příkladu 3.17 b).

- c) Zvolíme substituci $1 + \cos^3 x$. Pro novou dolní mez vyjde $1 + \cos^3 0 = 1 + 1^3 = 2$ a pro novou horní mez vyjde $1 + \cos^3 \frac{\pi}{2} = 1 + 0^3 = 1$, takže nová dolní mez je větší než nová horní mez. Použijeme tudíž rozšíření ze vztahu (3.14) a obrátíme meze. Postupně dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt[4]{1 + \cos^3 x}} dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \cos^3 x = u \\ -3 \cos^2 x \sin x dx = du \\ \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3} du \\ 0 \rightsquigarrow 2, \pi/2 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_2^1 \frac{-1/3}{\sqrt[4]{u}} du =$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right) \int_1^2 u^{-1/4} du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^{3/4}}{3/4} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{u^3} \right]_1^2 = \frac{4}{9} (\sqrt[4]{8} - 1).$$

Při úpravách jsme využili jednoduše ověřitelné skutečnosti, že pro libovolnou konstantu c platí $[cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$. V dalším budeme tento obrat již bez komentáře používat, protože se tím často výpočty značně zpřehlední. ▲

V následujícím příkladu si ukážeme použití vzorce (3.15) zprava doleva. To odpovídá spíše substituci do neurčitěho integrálu typu (2.11). V tomto případě vlastně známe hodnoty $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$ (to jsou teď „staré meze“) a musíme správně zvolit α a β tak, aby byly splněny předpoklady věty 3.22. V praxi bývá funkce $\varphi(x)$ v těchto případech obvykle taková, že lze zvolit interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ tak, aby na něm byla ryze monotónní, tj. aby ho prostě zobrazila na zadaný integrační obor $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle$. Také je třeba smířit se s tím, že pokud je v zadání, tj. v pravé straně vzorce (3.15), použita proměnná x (což často bývá), jsou písmenka v tomto vzorci jiná. Je to ale jen věc zvyku.

Příklad 3.24. Vypočtete určité integrály:

a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} dx,$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} - x},$ c) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx.$



Řešení.

- a) Integrand je na daném intervalu spojitý, takže určitý integrál existuje. Příslušný neurčitý integrál je typu (2.26), takže použijeme substituci $x = u^2$. Funkce $\varphi(u) = u^2$, jejímž grafem je parabola, tedy není prostá. Musíme najít α a β tak, aby $\varphi(\alpha) = \alpha^2 = 1$ a $\varphi(\beta) = \beta^2 = 4$. Omezíme-li se na interval $\langle 0, +\infty \rangle$, kde je funkce $\varphi(u)$ rostoucí,

vyjde $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Přitom pro $u \in \langle 1, 2 \rangle$ je $\sqrt{u^2} = |u| = u$. Celkově vyjde:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u du \\ 1 \rightsquigarrow 1, 4 \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{u - 1}{u + 1} 2u du = \int_1^2 \frac{2u^2 - 2u}{u + 1} du = \\ &= \int_1^2 \left(2u - 4 + \frac{4}{u + 1} \right) du = [u^2 - 4u + 4 \ln |u + 1|]_1^2 = \\ &= (4 - 8 + 4 \ln 3) - (1 - 4 + 4 \ln 2) = 4 \ln 3 - 4 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Vzniklou neryze lomenou racionální funkci $\frac{2u^2 - 2u}{u + 1}$ bylo třeba převést na ryze lomenou:

$$\frac{2u^2 - 2u}{u + 1} = 2u - 4 + \frac{4}{u + 1}.$$

Jiná možnost při určování nových mezí by byla omezit se na interval $(-\infty, 0)$, kde je funkce $\varphi(u)$ klesající, a zvolit $\alpha = -1$, $\beta = -2$. Pak by ovšem pro $u \in \langle -2, -1 \rangle$ bylo $\sqrt{u^2} = |u| = -u$.

- b) Integrand je na daném intervalu spojitý, takže určitý integrál existuje. Příslušný neurčitý integrál je typu (2.32). Nejrychleji ho vyřešíme pomocí substituce, kterou určíme z rovnice $\sqrt{x^2 + 1} - x = t$ (jde o druhou Eulerovu substituci). Úpravou a umocněním z tohoto vztahu dostaneme

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x^2 + 2tx + t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Dále si připravíme derivaci:

$$\varphi(t) = \frac{1 - t^2}{2t} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t) = \frac{-2t \cdot 2t - (1 - t^2) \cdot 2}{4t^2} = -\frac{t^2 + 1}{2t^2}.$$

Konečně nalezneme nové meze. Do vztahu $\sqrt{x^2 + 1} - x = t$ dosadíme staré meze (jsou pro proměnnou x). Pro $x = 0$ vyjde $t = 1$, pro $x = 1$ vyjde $t = \sqrt{2} - 1$. Tedy $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2} - 1$ ve vzorci (3.15) (který používáme zprava doleva — zadaný integrál chápeme jako pravý — a označení proměnných x a t je zaměněno). Vyšlo $\alpha > \beta$.

Funkce $\varphi(t)$ není definovaná pro $t = 0$. Ze vztahu pro $\varphi'(t)$ je na první pohled vidět, že $\varphi'(t) < 0$ pro $t \neq 0$. Tedy funkce $\varphi(t)$ je na intervalu $(0, +\infty)$ klesající, a tudíž prostě zobrazuje interval $\langle \sqrt{2} - 1, 1 \rangle$ na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Postupně dostaneme (všimněte si záměny pořadí mezí, čímž se změní znaménko):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1-t^2}{2t} \\ dx = -\frac{t^2+1}{2t^2} dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, 1 \rightsquigarrow \sqrt{2}-1 \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{t^2+1}{2t^2} \right) dt = \\
&= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{t^2+1}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\ln|t| - \frac{1}{2t^2} \right]_{\sqrt{2}-1}^1 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{4(3-2\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

- c) Integrand je na daném intervalu spojitý, takže určitý integrál existuje. Příslušný neurčitý integrál je typu (2.32). Doporučenou substitucí bylo $x = \operatorname{tg} v$. Stejně tak lze ale použít substituci $x = \operatorname{cotg} v$, která se ukáže v našem případě vhodnější.

Určíme nové meze. Funkce $\varphi(v) = \operatorname{cotg} v$ je klesající na intervalu $(0, \pi)$. Má platit $\operatorname{cotg} \alpha = 0$, $\operatorname{cotg} \beta = 1$. Můžeme tedy zvolit $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$. Pak bude interval $\langle \pi/4, \pi/2 \rangle$ funkcí $\varphi(v)$ prostě zobrazen na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Na intervalu $\langle \pi/4, \pi/2 \rangle$ je $\sin v > 0$, takže $|\sin v| = \sin v$.

Provedením substituce dostaneme (opět se změnil pořadí mezí, čímž se změnil znaménko):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{cotg} v \\ dx = -\frac{1}{\sin^2 v} dv \\ 0 \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}, 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} + 1} \cdot \frac{-1}{\sin^2 v} dv = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{|\sin v|} \cdot \frac{1}{\sin^2 v} dv = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3 v} dv.
\end{aligned}$$

Vzniklý integrál budeme řešit opět substituční metodou. Jde o integrál typu (2.18), kde $m = 0$ a $n = -3$. Doporučená substituce je $t = \cos v$. My však dáme přednost univerzální substituci $t = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ — viz (2.20), která bude rychlejší, protože vede na jednodušší racionální lomenou funkci. (Právě proto jsme zvolili výchozí substituci $x = \operatorname{cotg} v$; přesvědčte se, že substituce $x = \operatorname{tg} v$ by vedla na integrál z $1/\cos^3 v$, jehož výpočet je o něco pracnější.)

V případě substituce $t = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ jde opět o použití vzorce (3.15) zprava doleva — nezapomeňte, že pro výpočet diferenciálu vycházíme ze vztahu $v = 2 \operatorname{arctg} t$. Avšak funkce $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ je prostá na intervalu $(-\pi, \pi)$, takže určení nových mezí je proto snadné. Dosazením za v vyjde, že dolní mez bude $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, horní mez bude $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. S použitím

vztahů (2.20) tudíž dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3 v} dv &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{v}{2} = t \\ v = 2 \operatorname{arctg} t \\ dv = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^1 \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^1 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2t^2} \right]_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^1 = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Výsledek vypadá ovšem dost „divoce“. Pokusíme se ho poněkud upravit. Hodnotu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ je možné vyjádřit jednodušeji. Ze vzorce pro tangens polovičního úhlu

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

platného pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$, dostaneme:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}} = \sqrt{2} - 1.$$

Po dosazení této hodnoty vyjde

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{8(\sqrt{2} - 1)^2} - \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{8} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Kdybychom pro výpočet integrálu z $1/\sin^3 x$ použili substituci $t = \cos v$, vyšla by nám složitější racionální lomená funkce, ale po její integraci bychom přímo dostali předchozí výsledek a vyhnuli se určování hodnoty $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$. Rovněž by bylo možné použít tutéž Eulerovu substituci jako u integrálu z části b) tohoto příkladu. Navíc si všimněte, že

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \sqrt{x^2 + 1} + x.$$

Protože oba integrály b) a c) tohoto příkladu mají tentýž integrační obor $\langle 0, 1 \rangle$, musí se výsledky lišit o $\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$, což lze jejich porovnáním snadno ověřit.

Každopádně nám ale tento příklad ukazuje, že výpočet určitého integrálu i ze zdánlivě velmi jednoduché funkce může být technicky značně komplikovaný a zdlouhavý. Je věcí cviku zvolit pokud možno co nejušpornější postup. Právě u takových příkladů nám mohou hodně pomoci vhodné počítačové programy. ▲

Pro zájemce:



Na závěr tohoto oddílu se ještě zmíníme o jistém zobecnění Newtonovy-Leibnizovy formule. Ve větě 3.14 se předpokládala existence primitivní funkce k integrandu na celém integračním oboru $\langle a, b \rangle$. Ukazuje se, že tento požadavek je poměrně silný. Např. pokud je integrand $f(x)$ v některém vnitřním bodě nespojitý a má různé jednostranné limity, primitivní funkce nemůže existovat — viz např. funkce signum na obr. 2.2 na str. 8. Přitom pokud je tento bod jediným bodem nespojitosti (nebo je takových bodů pouze konečně mnoho), určitý Riemannův integrál podle věty 3.5 existuje. Situaci obvykle řešíme rozdělením integračního oboru na několik částí podle věty 3.9. Někdy je však výhodnější zobecnit Newtonovu-Leibnizovu formuli.

Definice 3.25. Funkce $F(x)$ se nazývá *zobecněnou primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na intervalu I , jestliže

- $F(x)$ je spojitá na intervalu I ,
- platí $F'(x) = f(x)$ na intervalu I s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů.

Tedy zobecněná primitivní funkce nemusí mít v některých bodech derivaci nebo se tato derivace nemusí rovnat funkci $f(x)$. Podstatná je ale její spojitost. Lze ukázat, že spojitost zaručuje, že zobecněná primitivní funkce je podobně jako „normální“ primitivní funkce určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Věta 3.26 (Newtonova-Leibnizova formule). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je její zobecněná primitivní funkce. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \quad (3.16)$$

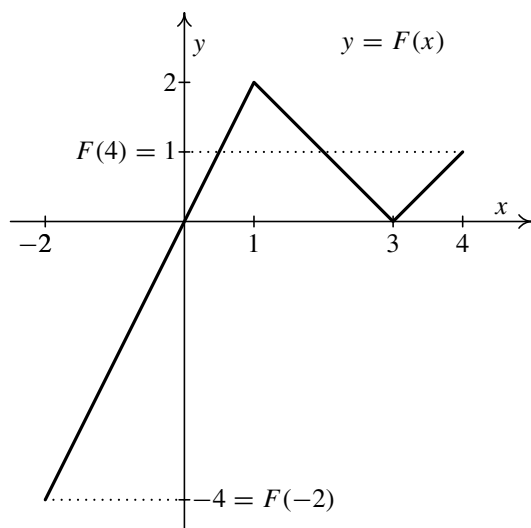
Důkaz je zcela analogický jako u věty 3.14. Uvažují se pouze ta dělení, která obsahují všechny body, v nichž neplatí $F'(x) = f(x)$, jichž je podle předpokladu pouze konečně mnoho.

Příklad 3.27. Vypočítejte určitý integrál z příkladu 3.10 pomocí zobecněné Newtonovy-Leibnizovy formule.



Řešení. Graf integrandu $f(x)$ je znázorněn na obrázku 3.11. Jde o funkci, která je na každém ze tří navazujících intervalů konstantní, avšak konstanty jsou navzájem různé. Nalézt zobecněnou primitivní funkci $F(x)$ je jednoduché. Stačí na každém intervalu nalézt „normální“ primitivní funkce, pak jednu zafixovat a ostatní posunout ve směru osy y (tj. zvolit vhodně integrační konstanty) tak, abychom dostali spojitou funkci. V našem případě dostaneme

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle, \\ -1 & \text{pro } x \in (1, 3), \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 2x + c_1 & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle, \\ -x + c_2 & \text{pro } x \in (1, 3), \\ x + c_3 & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle. \end{cases}$$



Obr. 3.14

Zbývá jen určit integrační konstanty c_1, c_2, c_3 tak, aby $F(x)$ byla spojitá. Zvolíme např. $c_1 = 0$. Vzorce musí dávat v krajních bodech sousedních intervalů touž hodnotu. Dosazením $x = 1$ dostaneme $2 \cdot 1 = -1 + c_2$, tedy $c_2 = 3$ a následně dosazením $x = 3$ dostaneme, že je $-3 + 3 = 3 + c_3$, takže $c_3 = -3$. Platí tudíž

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle, \\ -x + 3 & \text{pro } x \in (1, 3), \\ x - 3 & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle. \end{cases}$$

Jakákoli další zobecněná primitivní funkce se od této liší o konstantu. Graf funkce $F(x)$ je na obrázku 3.14. Pro náš integrál dostáváme

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = F(4) - F(-2) = 1 - (-4) = 5,$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 3.10. ▲

3.5.3. Určitý integrál jako funkce mezi



Pro zájemce:

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zvolme libovolně $c \in \langle a, b \rangle$, které ale bude v dalších úvahách pevné. Pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je pak korektně definován určitý integrál $\int_c^x f(t) dt$. Pro $c < x$ to plyne z věty 3.8, pro $c \geq x$ je třeba vzít navíc v úvahu vztahy (3.13) a (3.14). Všimněte si rovněž, že vzhledem k tomu, že jsme horní mez označili písmenem x , v integrandu jsme museli použít jiné písmeno, např. t . Jak víme, na hodnotu určitého integrálu to nemá vůbec vliv.

Takto získaná hodnota ovšem závisí na volbě x . Dostáváme tudíž novou funkci, označme ji např. F , která číslu x z intervalu $\langle a, b \rangle$ přiřazuje hodnotu určitého integrálu funkce f přes interval s koncovými body c a x , přičemž c považujeme za dolní mez a x za horní mez. Funkce F je tedy dána vztahem

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (3.17)$$

O tomto určitém integrálu říkáme, že je *funkcí své horní meze*.

Funkci $F(x)$ lze zavést vztahem (3.17) nejen pro ohraničený uzavřený interval $I = \langle a, b \rangle$, ale pro libovolný interval I (otevřený, uzavřený, polootevřený, ohraničený, neohraničený), pokud budeme předpokládat, že funkce $f(x)$ je riemannovsky integrovatelná na každém jeho uzavřeném ohraničeném podintervalu $\langle d, e \rangle \subset I$.

Je-li např. $f(x) = \cos x$, můžeme vzít $I = (-\infty, \infty)$, protože funkce kosinus je spojitá, a tudíž integrovatelná na libovolném ohraničeném uzavřeném intervalu. Ze vztahu (3.17) dostaneme, že v tomto případě je

$$F(x) = \int_c^x \cos t \, dt = [\sin t]_c^x = \sin x - \sin c, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Všimněte si, že výsledná funkce $F(x)$ je jednou z primitivních funkcí ke kosinu, tj. integrandu, a to tou, pro niž platí $F(c) = 0$.

Lze dokázat následující důležitou větu.

Věta 3.28. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a je riemannovsky integrovatelná na každém jeho ohraničeném uzavřeném podintervalu. Nechť $c \in I$. Pak platí:*

1. *Funkce $F(x)$ definovaná vztahem (3.17) je spojitá na intervalu I .*
2. *Je-li navíc $f(x)$ spojitá v některém bodě $x_0 \in I$, má v tomto bodě funkce $F(x)$ derivaci, přičemž platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Pokud má interval I krajní body, jde o jednostrannou spojitost resp. derivaci.

Z druhého tvrzení předchozí věty okamžitě dostáváme následující důsledek.

Důsledek 3.29. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I , pak funkce $F(x)$ definovaná vztahem (3.17) je k ní primitivní.*

Tím je vlastně dokázána věta 2.3 o existenci primitivní funkce ke spojitě funkci. Všimněte si, že ke konstrukci primitivní funkce, tj. v podstatě neurčitého integrálu, se použil určitý integrál. Tento výsledek má, jak již bylo zmíněno za větou 2.3, existenční charakter a neumožňuje nám konstruktivně v obecném případě nějakou primitivní funkci najít. Pro výpočet určitého integrálu máme totiž jediný prostředek — Newtonovu-Leibnizovu formuli. Její použití však předpokládá znalost primitivní funkce k integrandu, čím se dostáváme do kruhu.

Analogicky je možné zavést určitý integrál jako *funkci dolní meze* vztahem

$$G(x) = \int_x^c f(t) \, dt, \quad x \in I.$$

Funkce $G(x)$ má obdobné vlastnosti jako funkce $F(x)$, jen v bodech spojitosti integrandu $f(x)$ platí $G'(x) = -f(x)$. Tedy je-li integrand $f(x)$ spojitý na I , je $-G(x)$ jeho primitivní funkcí.

Určitý integrál, který je funkcí své horní resp. dolní meze, budeme potřebovat v následující kapitole 4 o nevlastním integrálu. Má ale důležité použití i v řadě jiných partií matematiky, např. v teorii vícenásobného integrálu, který je zobecněním jednoduchého určitého integrálu pro funkce více proměnných. Někteří z vás se s ním setkají rovněž při studiu Laplaceovy integrální transformace při zavádění tzv. konvoluce — viz [10]. My ho ještě využijeme v následujícím zobecnění metody per partes pro určitý integrál, které je často potřeba např. v důkazech z teorie integrálních transformací.

Věta 3.30. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $A, B \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + A, \quad G(x) = \int_a^x g(t) \, dt + B.$$

Pak platí, že

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx. \quad (3.18)$$

Důkaz viz [8, str. 195]. Skutečně jde o zobecnění metody per partes pro určitý integrál z věty 3.19. Její předpoklady totiž zajišťují, že můžeme (při označení ze zmíněné věty) položit $f(x) = u'(x)$, $g(x) = v'(x)$. Zvolíme-li ještě $A = u(a)$, $B = v(a)$, dostaneme s použitím Newtonovy-Leibnizovy formule, že

$$F(x) = \int_a^x u'(t) dt + u(a) = [u(t)]_a^x + u(a) = u(x) - u(a) + u(a) = u(x)$$

a analogicky $G(x) = v(x)$. Dosazením do rovnosti (3.18) okamžitě dostaneme nám známý vzorec per partes pro určitý integrál (3.12).

Poznámka 3.31. Kromě Riemannova integrálu se zavádí ještě tzv. *Newtonův integrál* — viz [18]. V jeho definici se předpokládá mimo jiné existence primitivní funkce. Newtonova-Leibnizova formule pak říká, že pokud má funkce Riemannův i Newtonův integrál, jsou jejich hodnoty stejné.

Metoda per partes z věty 3.30 se týká čistě Riemannova integrálu, zatímco v předpokladech věty 3.19 se vyžaduje nepřímo i existence Newtonova integrálu jisté funkce.



Příklady k procvičení

1. Vypočtěte určité integrály:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx,$ | b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx,$ | c) $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx,$ |
| d) $\int_0^{\pi} 5 \sin 4\phi d\phi,$ | e) $\int_0^3 e^{\frac{u}{3}} du,$ | f) $\int_0^3 \frac{12}{z^2} + 9 dz,$ |
| g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sin^2 2x dx,$ | h) $\int_0^4 \frac{x-1}{x+1} dx,$ | i) $\int_2^5 \frac{4}{x} dx,$ |
| j) $\int_{0,5}^2 \frac{1}{x^2} dx,$ | k) $\int_{-1}^1 2x^3 dx,$ | l) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x-4} dx,$ |
| m) $\int_2^3 \frac{1}{-V^2 + V} dV,$ | n) $\int_{-2}^2 \frac{6}{8 + 3t^2} dt,$ | o) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos y \sin y dy.$ |

2. Vypočtěte určité integrály:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4 \sin^2 x dx,$ | b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos 2\alpha} d\alpha,$ | c) $\int_{-0,5}^{0,5} \operatorname{tg} \beta d\beta,$ |
| d) $\int_1^4 3 \sqrt{x} dx,$ | e) $\int_1^{10} \frac{6}{9p} dp,$ | f) $\int_{-2}^2 \frac{n^2}{n^2 + 1} dn.$ |

3. Vypočtěte určité integrály:

- | | | |
|--|--|--------------------------------------|
| a) $\int_0^{\pi} 2\omega \sin^2 \omega d\omega,$ | b) $\int_0^1 v^2 e^{-\frac{v}{2}} dv,$ | c) $\int_0^3 x e^{-\frac{x}{2}} dx,$ |
|--|--|--------------------------------------|

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \int_{-1}^1 4x^2 e^{-2x} dx, & \text{e)} \int_0^\pi x \cos x dx, & \text{f)} \int_0^\pi x^2 \sin x dx, \\ \text{g)} \int_0^2 \operatorname{arctg} w dw, & \text{h)} \int_{-1}^1 4y \operatorname{arctg} 2y dy, & \text{i)} \int_0^1 6 \arcsin \frac{t}{2} dt. \end{array}$$

4. Vypočtěte určité integrály:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx, & \text{b)} \int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{u}}}{-u^2} du, & \text{c)} \int_0^3 \frac{3r}{\sqrt{4r+4}} dr, \\ \text{d)} \int_1^2 \frac{2(1+\ln Q)}{Q} dQ, & \text{e)} \int_2^4 \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}-1} dS, & \text{f)} \int_0^4 12\sqrt{x+\frac{1}{4}} dx, \\ \text{g)} \int_0^\pi \sin t \sqrt{1+\cos^2 t} dt, & \text{h)} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, & \text{i)} \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

5. Vypočtěte určité integrály:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^\pi 8 \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi, & \text{b)} \int_0^\pi 2(1-\cos \alpha)^3 d\alpha, & \text{c)} \int_1^2 \frac{6}{6x-1} dx, \\ \text{d)} \int_0^1 12\sqrt{s} \sqrt{\frac{4s+1}{4s}} ds, & \text{e)} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos \beta} d\beta, & \text{f)} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx, \\ \text{g)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sin 2\alpha d\alpha, & \text{h)} \int_0^{\pi/2} 16 \sin^4 x dx, & \text{i)} \int_0^1 \frac{16}{8-4x^2} dx, \\ \text{j)} \int_0^{\pi/2} 4 \sin \phi \cos^3 \phi d\phi, & \text{k)} \int_0^\pi 3 \sin^3 x dx, & \text{l)} \int_{-1}^1 \frac{2 dR}{\sqrt{16-4R^2}}, \\ \text{m)} \int_0^{1/2} \frac{2(1+r^2)}{1-r^2} dr, & \text{n)} \int_0^2 \frac{1}{(5+4k)^3} dk, & \text{o)} \int_0^3 3\sqrt{x+1} dx, \\ \text{p)} \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2-4} dx, & \text{q)} \int_1^2 e^t \left(1 + \frac{e^{-t}}{t}\right) dt, & \text{r)} \int_1^5 \frac{2 \ln y}{y} dy. \end{array}$$

6. Vypočtěte určité integrály:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 \frac{m-1}{m+1} dm, & \text{b)} \int_0^{\pi/8} (1+\operatorname{tg} 2\beta) d\beta, & \text{c)} \int_2^3 \frac{6p}{p^2-1} dp, \\ \text{d)} \int_4^9 \frac{3(z-1)}{\sqrt{z}+1} dz, & \text{e)} \int_0^{T/2} \pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt, & \text{f)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varepsilon}{1+\cos \varepsilon}, \\ \text{g)} \int_0^2 \frac{2x}{1+x^4} dx, & \text{h)} \int_1^2 \frac{2}{K} + K^3 dK, & \text{i)} \int_0^1 2\sqrt{2p+p^2} dp, \\ \text{j)} \int_0^{\pi/2} \frac{10 d\delta}{2 \cos \delta + 3}, & \text{k)} \int_0^{2\pi} \frac{2 dw}{5+3 \cos w}, & \text{l)} \int_0^\pi \frac{2 \sin \omega}{5+4 \cos \omega} d\omega, \\ \text{m)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{5+\sin \alpha} d\alpha, & \text{n)} \int_0^\pi \frac{10}{4+\cos^2 t} dt, & \text{o)} \int_{-2}^2 (4-y^2)^2 dy. \end{array}$$

7. Určete zobecněné primitivní funkce a pomocí nich vypočtěte určité integrály:

$$\text{a) } \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x \, dx, \quad \text{b) } \int_{-1}^4 f(x) \, dx, \quad \text{c) } \int_{-2}^3 e^{-|x|} \, dx, \quad \text{d) } \int_{-3}^5 g(x) \, dx,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ x^2 & \text{pro } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 1, 4 \rangle, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in \langle -3, -1 \rangle, \\ 4 & \text{pro } x \in (-1, 2), \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 2, 5 \rangle. \end{cases}$$



Klíč k příkladům k procvičení

1. a) 1, b) 2, c) -4, d) 0, e) $3e - 3$,
 f) π , g) π , h) $4 - 2 \ln 5$, i) $4 \ln \frac{5}{2}$, j) 1, 5,
 k) 0, l) $\ln \frac{3}{5}$, m) $-3 \ln 2 + 2 \ln 3$, n) $\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2}$, o) 0.
2. a) $-2 + \pi$, b) $2 \operatorname{tg} 1$, c) 0, d) 14, e) $\frac{2}{3} \ln 10$, f) $4 - 2 \operatorname{arctg} 2$.
3. a) $\frac{1}{2} \pi^2$, b) $-26e^{-1/2} + 16$, c) $-10e^{-3/2} + 4$,
 d) $-5e^{-2} + e^2$, e) -2, f) $\pi^2 - 4$,
 g) $2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 5$, h) $5 \operatorname{arctg} 2 - 2$, i) $\pi + 6\sqrt{3} - 12$.
4. a) $4 - \pi$, b) $-e^{1/3} + e^{1/2}$, c) 4,
 d) $\ln^2 2 + 2 \ln 2$, e) $6 - 2 \ln(\sqrt{2} - 1) - 2\sqrt{2}$, f) $17\sqrt{17} - 1$,
 g) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$, h) $\arcsin \ln 2$, i) $4 - 2 \ln 3$.
5. a) π , b) 5π , c) $\ln \frac{11}{5}$,
 d) $5\sqrt{5} - 1$, e) $4\sqrt{2}$, f) $2 - \sqrt{3}$,
 g) $\frac{1}{2}$, h) 3π , i) $\sqrt{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$,
 j) 1, k) 4, l) $\frac{\pi}{3}$,
 m) $-1 + 2 \ln 3$, n) $\frac{18}{4225}$, o) 14,
 p) $-\ln 3$, q) $e^2 + \ln 2 - e$, r) $\ln^2 5$.

6. a) $1 - 2 \ln 2$, b) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$, c) $9 \ln 2 - 3 \ln 3$,
 d) 23 , e) T , f) 1 ,
 g) $\arctg 4$, h) $3 \ln 2 - \ln 5$, i) $2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$,
 j) $4\sqrt{5} \arctg \frac{\sqrt{5}}{5}$, k) π , l) $\ln 3$,
 m) $\ln 6 - \ln 5$, n) $\sqrt{5} \pi$, o) $\frac{512}{15}$.

7. a) $|x|$, b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ \frac{x^3}{3} & \text{pro } x \in (0, 1), \\ x - \frac{2}{3} & \text{pro } x \in \langle 1, 4 \rangle, \end{cases}$
 c) $H(x) = \begin{cases} e^x & \text{pro } x \leq 0, \\ 2 - e^{-x} & \text{pro } x > 0, \end{cases}$ d) $G(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in \langle -3, -1 \rangle, \\ 4x + 2 & \text{pro } x \in (-1, 2), \\ x + 8 & \text{pro } x \in \langle 2, 5 \rangle, \end{cases}$
 a) 1 , b) $\frac{17}{6}$, c) $2 - e^{-2} - e^{-3}$, d) 19 .

3.6. Aplikace určitého integrálu

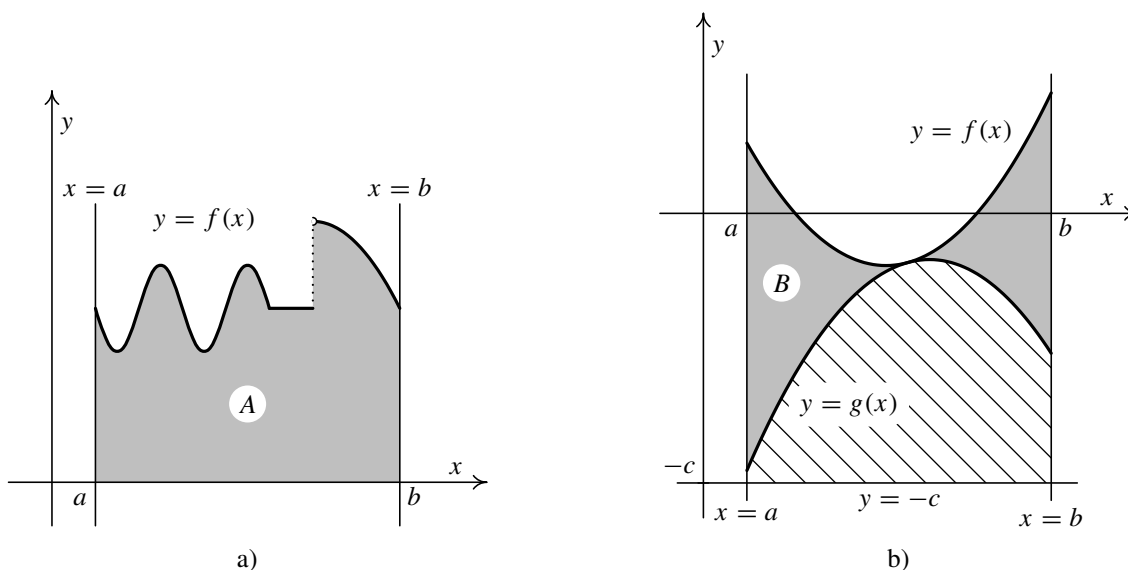
V závěrečném oddílu této kapitoly si uvedeme několik ukázek použití určitého integrálu. Půjde o nejjednodušší geometrické a fyzikální aplikace.

3.6.1. Geometrické aplikace

Všimneme si výpočtu délek, obsahů a objemů. Každý z vás má určitě představu, co tyto pojmy znamenají pro některé jednoduché útvary. Např. délka úsečky nebo kružnice, obsah čtverce, obdélníku, lichoběžníku nebo kulové plochy, objem kvádru, kužele nebo koule atd. Podobně asi máte intuitivní představu, co je to délka např. nějaké prostorové spirály a dokážete si představit, jak by se změřila přiložením ohebného krejčovského metru. Obdobně máte jistě představu, že např. elipsa má nějaký obsah, i když třeba nevíte, jak by se určil. Pokud bychom se však zeptali, jaká je třeba délka množiny racionálních čísel ležících mezi nulou a jedničkou, asi byste s odpovědí hodně váhali. Potíž je v tom, že pojmy délka, obsah a objem nebyly nijak precizně zavedeny.

Vzhledem k rozsahu a určení těchto skript není možné potřebné pojmy přesně zavádět. Šlo by o poměrně komplikovaný a rozsáhlý výklad z teorie míry a dalších náročných matematických partií. Pro naše potřeby se bez těchto precizních matematických definic obejdeme, jelikož se omezíme na jednoduché objekty, u nichž bude intuitivně jasné, že mají nějakou délku, obsah resp. objem. Níže uvedené vzorce nám řeknou, jak se potřebná hodnota určí.

Je-li A nějaká množina, označíme jí příslušnou hodnotu $m(A)$, kde písmeno m jsme



Obr. 3.15: Výpočet obsahu množiny

použili, aby nám připomínalo slovo „míra“. Musíme však ještě rozlišit, zda jde o délku, obsah nebo objem. K tomu použijeme index, který odpovídá tomu, v jakých jednotkách (délkových, plošných, objemových) se daná veličina měří. Tedy $m_1(A)$ bude značit *délku*, $m_2(A)$ *obsah* a $m_3(A)$ *objem* množiny A (samozřejmě pokud má příslušná veličina pro danou množinu A rozumný smysl — u křivek budeme počítat délku, u ploch obsah a u těles objem; avšak co je to křivka, plocha resp. těleso chápeme pouze intuitivně, přesné definice nemáme k dispozici).

Obsah rovinné množiny

Výpočet obsahu rovinné množiny jako speciálního případu plochy patří k nejdůležitějším aplikacím určitého integrálu. Použili jsme ho také jako hlavní motivaci.

Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Množina v rovině definovaná vztahem

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

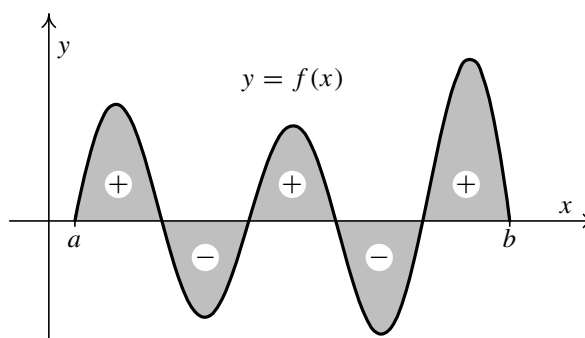
se obvykle nazývá *podgrafem funkce* $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Vlastně jde o množinu bodů v rovině, která je ohraničená osou x , rovnoběžkami s osou y o rovnicích $x = a$ a $x = b$ a grafem funkce $f(x)$. Funkce nemusí být spojitá — viz obr. 3.15 a).

Věta 3.32. *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a je zde nezáporná. Pak pro obsah množiny A platí:*

$$m_2(A) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.19)$$

Zdůrazněme, že funkce musí být na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná. Je však celkem zřejmé, že pro funkci $f(x)$, která je naopak nekladná, bude integrál $\int_a^b f(x) dx$ roven obsahu množiny omezené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ (ležící tentokrát pod osou x), avšak opatřenému znaménkem mínus. K důkazu stačí zaměnit $f(x)$ funkcí $-f(x)$, která bude nezáporná (množina A se překloupí kolem osy x), a vytknout číslo -1 .

Z předchozí úvahy a aditivity určitého integrálu vzhledem k integračnímu oboru vyplývá, že v obecném případě, kdy funkce $f(x)$ může libovolně měnit znaménko, je $\int_a^b f(x) dx$ názorně řečeno roven ploše omezené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$, přičemž části ležící nad osou x se berou kladně, zatímco části ležící pod osou x se berou záporně — viz obr. 3.16.



Obr. 3.16

Tudíž např. z tvaru grafu funkce sinus resp. kosinus je zřejmé, že musí platit $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ resp. $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$. Nakreslete si příslušné obrázky.

Předchozí větu 3.32 lze snadno zobecnit na případ množiny znázorněné na obr. 3.15 b). Předpokládejme, že graf funkce $f(x)$ leží na intervalu $\langle a, b \rangle$ nad grafem funkce $g(x)$ (připouští se i rovnost, tj. musí být $g(x) \leq f(x)$). Označme

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Jde tedy o množinu ohraničenou přímkami $x = a$ a $x = b$ a dvojicí grafů funkcí. Někdy se pro ni používá název *křivočarý obdélník* nebo *křivočarý lichoběžník*.

Věta 3.33. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak pro obsah množiny B platí:*

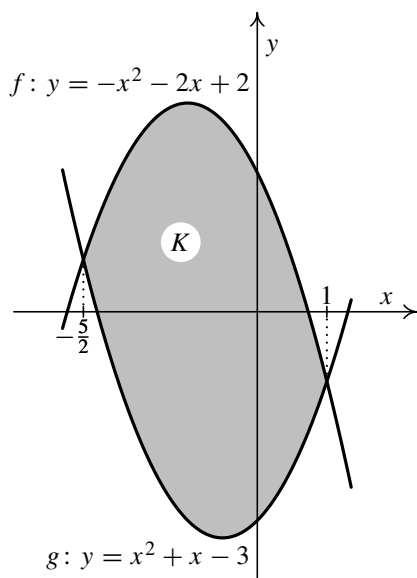
$$m_2(B) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (3.20)$$

Platnost vzorce je celkem zřejmá. Stačí množinu B posunout o vhodnou konstantu nahoru tak, aby funkce $g(x) + c$ (a tudíž samozřejmě i funkce $f(x) + c$) byla na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná. To je určitě možné, protože funkce $g(x)$ je integrovatelná, a tedy i zdola ohraničená. Obsah se tím nezmění. Přímka $y = -c$ v obr. 3.15 b) pak hraje roli nové osy x .

Nyní je jasné, že posunutá množina B je množinovým rozdílem podgrafu funkce $f(x) + c$ a podgrafu funkce $g(x) + c$ (je šrafován). Její obsah bude proto rozdílem obsahů těchto podgrafů. Tedy $m_2(B) = \int_a^b [f(x) + c] dx - \int_a^b [g(x) + c] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$. Věta 3.32 je speciálním případem pro $g(x) = 0$.



Příklad 3.34. Vypočítejte obsah množiny K ohraničené grafy funkcí $g: y = x^2 + x - 3$ a $f: y = -x^2 - 2x + 2$.



Obr. 3.17

Řešení. U příkladů tohoto typu se často neobejdeme bez náčrtku. Nejprve musíme určit meze. K tomu musíme najít průsečíky grafů zadaných funkcí, tj. musíme řešit rovnici $f(x) = g(x)$. V našem případě je $x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2$, odkud

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\frac{5}{2}, \\ 1. \end{cases}$$

Protože jde o kvadratické funkce, grafy jsou paraboly. Podle znaménka u x^2 rozhodneme, která parabola je otočená nahoru a která dolů. Výsledek je na obr. 3.17. Na intervalu $\langle -5/2, 1 \rangle$ je skutečně $f(x) \geq g(x)$. Pokud by tomu tak nebylo, museli bychom ve vzorci (3.20) funkce prohodit.

Pro obsah množiny K tudíž platí:

$$\begin{aligned} m_2(K) &= \int_{-5/2}^1 [(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 + x - 3)] dx = \\ &= \int_{-5/2}^1 (-2x^2 - 3x + 5) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_{-5/2}^1 = \\ &= \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 \right) - \left(\frac{250}{24} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2} \right) = \frac{343}{24}. \end{aligned}$$

▲

Na základní a střední škole jste se seznámili se vzorci pro délku kružnice, obsah kruhu a kulové plochy a objem koule. Vzhledem k tomu, jaký aparát jste měli k dispozici, jste nemohli tyto vzorce pochopitelně dokázat. V tomto oddílu si zmíněné vzorce postupně všechny dokážeme. První na řadě bude obsah kruhu.



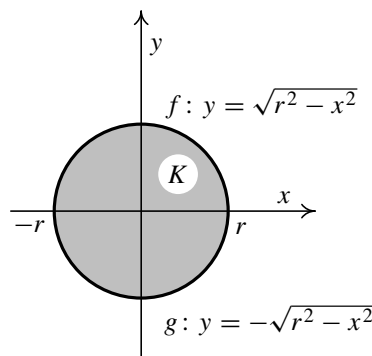
Příklad 3.35. Vypočítejte obsah kruhu K o poloměru $r > 0$.

Řešení. Střed kruhu si umístíme do počátku, na obsah to nemá vliv. Rovnice hraniční kružnice pak je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud máme $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Označíme si

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{a} \quad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r, r \rangle$$

— viz obr. 3.18. Pro obsah kruhu tudíž platí

$$\begin{aligned} m_2(K) &= \int_{-r}^r [f(x) - g(x)] dx = \\ &= \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})] dx = \\ &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$



Obr. 3.18

Podobný neurčitý integrál jsme již počítali — srovnejte příklad 2.30. Šlo o typ (2.31). Použijeme proto substituční metodu z věty 3.22 (jde opět o směr zprava doleva). Zvolíme $\varphi(t) = r \sin t$, tudíž $x = r \sin t$. Funkce $\sin t$ zobrazuje prostě interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$, takže funkce $\varphi(t)$ zobrazí interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ na interval $\langle -r, r \rangle$. Pro hledanou hodnotu $m_2(K)$ tedy dostaneme

$$\begin{aligned} m_2(K) &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ -r \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2}, r \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r |\cos t| \cdot r \cos t dt = \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) \right] = \pi r^2. \end{aligned}$$

Při úpravě jsme využili toho, že na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ je $\cos t \geq 0$, a použili jsme vzorec (2.19).

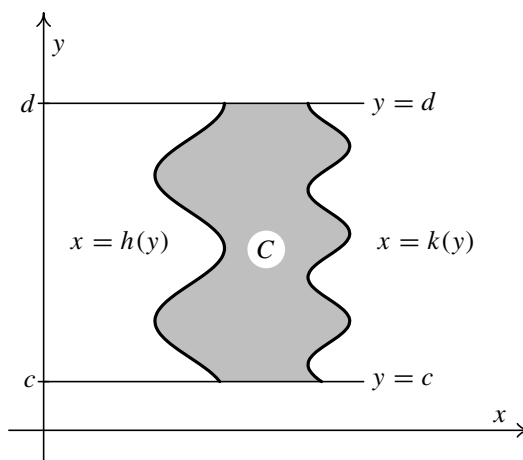
Vzhledem k symetrii bylo rovněž možné určit obsah čtvrtiny kruhu v prvním kvadrantu a výsledek vynásobit čtyřmi. Dolní ohraničující funkce by byla $g(x) = 0$ a integrační obor by byl $\langle 0, r \rangle$, tedy $m_2(K) = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$. ▲

Poznámka 3.36. Někdy množina C , jejíž obsah máme určit, není ohraničena dvěma vhodnými grafy funkcí nezávisle proměnné x , abychom mohli použít vzorec (3.20). Může mít ale vhodný tvar, když otočíme obrázek o 90° , tj. zaměníme x a y . Jinými slovy existují funkce $x = h(y)$, $x = k(y)$, $h(y) \leq k(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$, takové, že

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\}.$$

Tedy množina C je ohraničena grafy funkcí $h(y)$ a $k(y)$ a rovnoběžkami s osou x o rovnicích $y = c$ a $y = d$ — viz obr. 3.19. Pro její obsah platí:

$$m_2(C) = \int_c^d [k(y) - h(y)] dy. \quad (3.21)$$



Obr. 3.19

U ještě složitějších množin je obvykle možné rozdělit je na jednodušší disjunktní části (přesněji řečeno, překrývají se křivkami, které je ohraničují), jejichž obsah lze určit pomocí některého ze vzorců (3.20) nebo (3.21).

Délka křivky

Další důležitou aplikací určitého integrálu je výpočet délky rovinné křivky (definice délky viz např. [11, str. 22]). Omezíme se nejprve na případ, kdy jde o graf funkce $y = f(x)$.

Věta 3.37. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro délku jejího grafu G platí:*

$$m_1(G) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.22)$$



Příklad 3.38. Určete délku grafu G funkce $f: y = \ln x, x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \rangle$.

Řešení. Zadaná funkce má derivaci, přičemž platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Podle vzorce (3.22) platí:

$$\begin{aligned} m_1(G) &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} \cdot x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 \\ x dx = t dt \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2, \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2 - 1} \cdot t dt = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2 - 1} dt. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili substituci určenou vztahem $x^2 + 1 = t^2$, tj. $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $\langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \rangle$ a převádí ho na interval $\langle 2, 4 \rangle$. Obdrželi

jsme určitý integrál z racionální neryze lomené funkce. Platí

$$\frac{t^2}{t^2 - 1} = \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} = 1 + \frac{1}{t^2 - 1}.$$

Vyniklou ryze lomenou funkci musíme rozložit na parciální zlomky. Jmenovatel má jednoduché reálné kořeny ± 1 , takže

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(t + 1) + B(t - 1).$$

Dosazením kořenů určíme konstanty A a B :

$$\begin{aligned} t = 1 : \quad 1 &= 2A & \Rightarrow & \quad A = \frac{1}{2}, \\ t = -1 : \quad 1 &= -2B & \Rightarrow & \quad B = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Celkem dostaneme

$$\begin{aligned} m_1(G) &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1} \right) dt = \left[t + \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| \right]_2^4 = \\ &= \left(4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 \right) - \left(2 + \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Nyní si všimneme obecnějšího případu, kdy křivka nemusí být grafem funkce. Vzhledem k rozsahu nemůžeme obecně zavádět pojem křivky, zájemcům o tuto problematiku doporučujeme např. [11, str. 15]. Pro názornost nám postačí představa, že jde vlastně o trajektorii, kterou nakreslí bod, jenž se v čase spojitě pohybuje v rovině. Musíme tedy zadat polohu bodu v rovině v daný okamžik. To uděláme pomocí dvou spojitých funkcí $\varphi(t)$ a $\psi(t)$, udávajících x -ovou a y -ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Dostaneme tzv. *parametrické rovnice křivky*. Ty mají tedy tvar

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (3.23)$$

Proměnnou t nazýváme *parametr* (nemusí mít nutně význam času, může to být např. délka). Speciální případ — parametrické rovnice úsečky — znáte z analytické geometrie. Z fyzikálního pohledu je délka křivky vlastně drahou, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β . Pro délku křivky lze dokázat následující tvrzení.

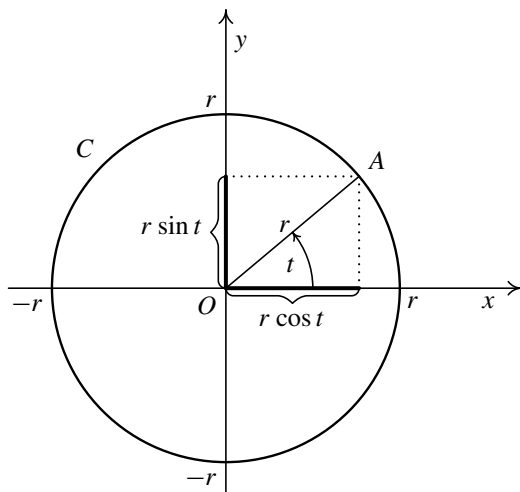
Věta 3.39. *Nechť křivka C je dána parametrickými rovnicemi (3.23), přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojitě derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak platí:*

$$m_1(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (3.24)$$

Graf libovolné funkce $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ lze parametrizovat např. rovnicemi $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, takže $\varphi'(t) = 1$, $\psi'(t) = f'(t)$. Po dosazení do (3.24) ihned vidíme, že jde skutečně o zobecnění vztahu (3.22).



Příklad 3.40. Vypočtěte délku kružnice C o poloměru $r > 0$.



Obr. 3.20

Řešení. Bez újmy na obecnosti lze kružnici umístit středem do počátku. Na délku to nemá vliv. Její rovnice je pak $x^2 + y^2 = r^2$. Nyní bychom mohli určit vzorec např. horní půlkružnice, což je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in \langle -r, r \rangle$, pomocí vzorce (3.22) spočítat její délku a výsledek vynásobit dvěma. Potíž ovšem je, že derivace této funkce má tvar $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, a není tudíž definovaná pro $x = -r$ a $x = r$ (v těchto bodech existují nevlastní jednostranné derivace). Předpoklady věty 3.37 nejsou tedy splněny. Dokonce funkce $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ není na intervalu $(-r, r)$ ohraničená.

Zkusíme tedy najít parametrické rovnice kružnice C . To není nijak obtížné. Z definice funkcí sinus a kosinus je vidět (viz obr. 3.20), že poloha libovolného bodu $A = (x, y)$ je dána takto: $A = (r \cos t, r \sin t)$, kde t je úhel, který svírá průvodič bodu A s kladnou částí osy x . Měníme-li úhel t od nuly do 2π , proběhne bod A celou kružnicí. Označme $\varphi(t) = r \cos t$, $\psi(t) = r \sin t$. Hledané parametrické rovnice jsou:

$$C: \quad \begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Protože $\varphi'(t) = (r \cos t)' = -r \sin t$ a $\psi'(t) = (r \sin t)' = r \cos t$, vyjde ze vzorce (3.24), že platí:

$$\begin{aligned} m_1(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} r dt = r[t]_0^{2\pi} = 2\pi r. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 3.41.

1. Zcela analogicky je možné postupovat v případě prostorové křivky, přibude jen třetí souřadnice polohy bodu. Parametrické rovnice křivky K budou mít tvar

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \omega(t), \end{aligned} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

a pro její délku bude platit (za předpokladu existence spojitých derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ a $\omega'(t)$)

$$m_1(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt.$$

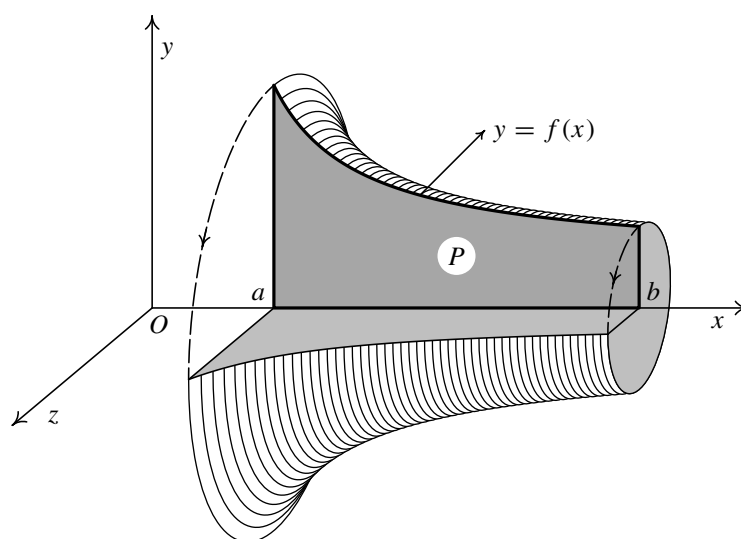
2. Při fyzikální interpretaci, kdy rovnice (3.23) popisují polohu hmotného bodu, má $(\varphi'(t), \psi'(t))$ význam vektoru okamžité rychlosti v čase t . Z analytické geometrie víme, že $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ je velikost tohoto vektoru. Vzorec (3.24) tudíž vyjadřuje, že určitý integrál z velikosti okamžité rychlosti přes interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ udává dráhu, kterou tento bod urazí od časového okamžiku α do časového okamžiku β . Totéž platí v případě prostorové křivky.
3. Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto i pro velmi jednoduché funkce se často stane, že neumíme příslušný neurčitý integrál spočítat pomocí elementárních funkcí. Pak nezbyvá než použít nějakou přibližnou metodu — viz kapitola 5. To je např. případ elipsy, kdy lze ukázat, že její délka je vyjádřena pomocí tzv. eliptického integrálu — viz str. 80.

Objem rotačního tělesa a obsah pláště rotačního tělesa

Uvažujme spojitou nezápornou funkci $f(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Ta nám určí křivočarý obdélník (podgraf funkce f)

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}. \quad (3.25)$$

Jeho rotací kolem osy x vznikne *rotační těleso* V — viz obr. 3.21. Povrch tohoto tělesa je tvořen *pláštěm* Q a dvěma postranními kruhy. Naším cílem je vypočítat objem rotačního tělesa V a obsah jeho pláště Q .



Obr. 3.21: Rotační těleso

Pro objem rotačního tělesa platí následující věta:

Věta 3.42. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak pro objem rotačního tělesa V , které vznikne rotací křivočarého obdélníku P daného vztahem (3.25), platí:*

$$m_3(V) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3.26)$$

V případě obsahu pláště nestačí předpokládat spojitost funkce $f(x)$, předpoklady na tuto funkci je třeba zesílit, aby existovala dvourozměrná míra pláště. Platí tato věta:

Věta 3.43. *Nechť funkce $f(x)$ je nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah pláště Q rotačního tělesa V , které vznikne rotací křivočarého obdélníku P daného vztahem (3.25), platí:*

$$m_2(Q) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.27)$$

Všimněte si pro zajímavost, že v předchozím vzorci pro obsah pláště se vyskytuje odmocnina ze stejného výrazu, jako ve vzorci (3.22) pro výpočet délky křivky.

Chceme-li určit obsah celého povrchu, stačí k obsahu pláště přičíst obsah obou postranních „pokliček“, což jsou kruhy o poloměrech $f(a)$ a $f(b)$.

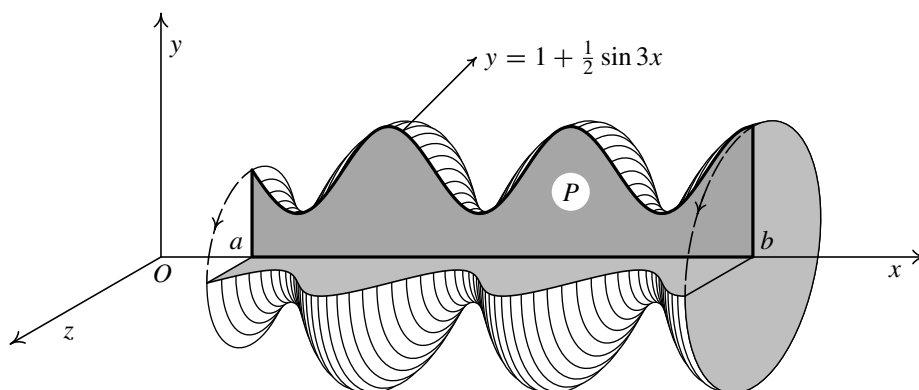
Nyní si použití obou vět ilustrujeme na příkladech. Zatímco objem lze spočítat pro poměrně složité funkce určující křivočarý obdélník, u obsahu pláště i v případě velmi jednoduchých funkcí mohou nastat problémy s integrací výrazu obsahujícího odmocninu (podobná je situace u délky křivky — srovnejte poznámku 3.41). Výsledek pak musíme určit pouze přibližně — viz kapitola 5.

Poznámka 3.44. V následujících příkladech využijeme jednoduchou, ale velmi užitečnou vlastnost, která platí pro určité integrály ze sudých funkcí. Je-li funkce $f(t)$ sudá na symetrickém intervalu $\langle -r, r \rangle$, $r > 0$, platí, že $\int_{-r}^r f(t) dt = 2 \int_0^r f(t) dt$. Tento fakt je zřejmý — pravá a levá polovina grafu jsou souměrné podle osy x . Přesný důkaz se provede rozdělením na dva integrály a substitucí do prvního z nich:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r f(t) dt &= \int_{-r}^0 f(t) dt + \int_0^r f(t) dt = \left| \begin{array}{l} t = -s \\ dt = -ds \\ -r \rightsquigarrow r, 0 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= - \int_r^0 f(-s) ds + \int_0^r f(t) dt = \\ &= \int_0^r f(s) ds + \int_0^r f(t) dt = 2 \int_0^r f(t) dt, \end{aligned}$$

protože $f(-s) = f(s)$ a na označení integrační proměnné nezáleží.

Analogicky pro liché funkce platí, že $\int_{-r}^r f(t) dt = 0$. Geometricky pravou polovinu grafu dostaneme z levé překlopením kolem osy x a pak ještě kolem osy y .



Obr. 3.22

Příklad 3.45. Určete objem rotačního tělesa V , které vznikne rotací podgrafu P funkce $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin 3x$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6} \rangle$, kolem osy x .



Řešení. Těleso V je znázorněno na obr. 3.22, kde $a = \frac{\pi}{3}$ a $b = \frac{13\pi}{6}$. Podle vzorce (3.26) pro jeho objem dostaneme:

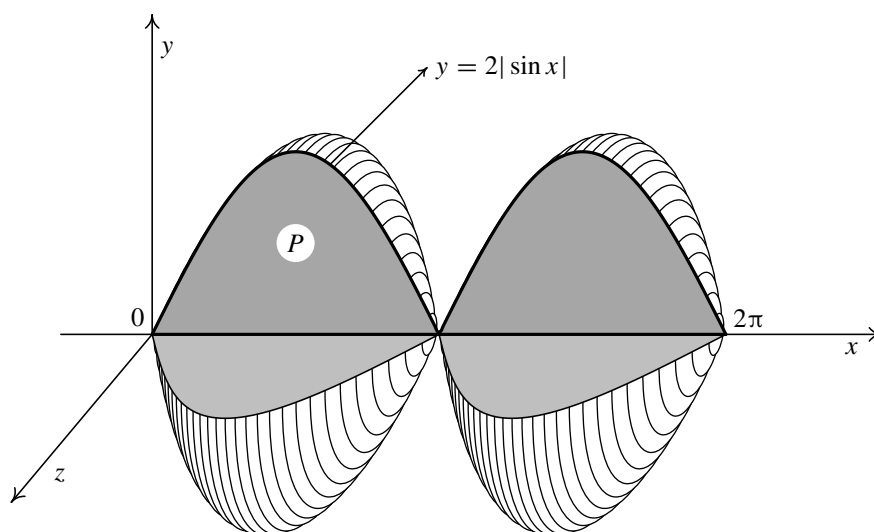
$$\begin{aligned} m_3(V) &= \pi \int_{\pi/3}^{13\pi/6} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 3x\right)^2 dx = \pi \int_{\pi/3}^{13\pi/6} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{4} \sin^2 3x\right) dx = \\ &= \pi \int_{\pi/3}^{13\pi/6} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{8} (1 - \cos 6x)\right) dx = \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{48} \sin 6x \right]_{\pi/3}^{13\pi/6} = \\ &= \pi \left(\frac{13\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{13\pi}{2} + \frac{13\pi}{48} - \frac{1}{48} \sin 13\pi \right) - \\ &\quad - \pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos \pi + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{48} \sin 2\pi \right) = \\ &= \pi \left(\frac{13\pi}{6} + \frac{13\pi}{48} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{33\pi^2}{16} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili vzorec $\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)$. ▲

Příklad 3.46. Určete objem rotačního tělesa V a obsah jeho pláště Q . Těleso vznikne rotací podgrafu P funkce $f(x) = 2|\sin x|$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kolem osy x .



Řešení. Těleso V je znázorněno na obr. 3.23. Vzhledem ke tvaru funkce sinus je zřejmé, že stačí uvažovat interval $\langle 0, \pi \rangle$, kde $\sin x \geq 0$, tj. $|\sin x| = \sin x$, a výsledek vynásobit dvěma.



Obr. 3.23

Pro objem tělesa V dostaneme použitím vzorce (3.26), že

$$\begin{aligned} m_3(V) &= 2 \cdot \pi \int_0^\pi 4 \sin^2 x \, dx = 8\pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \\ &= 4\pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = 4\pi(\pi - 0) - 4\pi(0 - 0) = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Pro obsah pláště Q dostaneme použitím vzorce (3.27), že

$$\begin{aligned} m_2(Q) &= 2 \cdot 2\pi \int_0^\pi 2 \sin x \sqrt{1 + 4 \cos^2 x} \, dx = \left. \begin{array}{l} 2 \cos x = t \\ -2 \sin x \, dx = dt \\ 2 \sin x \, dx = -dt \\ 0 \rightsquigarrow 2, \quad \pi \rightsquigarrow -2 \end{array} \right| = \\ &= -4\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} \, dt = 8\pi \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} \, dt. \end{aligned}$$

Integrál, který vznikl po substituci, jsme upravili. Předně jsme zaměnili meze, čímž se změnilo znaménko. Dále jsme využili toho, že funkce $\sqrt{1 + t^2}$ je sudá na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$, takže podle poznámky 3.44 je možné vzít dvakrát integrál na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Vzniklý integrál můžeme řešit substitucí podobně jako v příkladu 3.24 c) na str. 127. Abychom si však procvičili i jiný postup, integrál upravíme, rozdělíme na dva integrály a na druhý z nich použijeme metodu per partes pro určitý integrál (srovnejte postup výpočtu neurčitého integrálu z obdobného integrandu v příkladu 2.15). Postupně dostaneme (s použitím vzorce 11 z tabulky 2.1):

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt &= \int_0^2 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt + \int_0^2 t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & v = \sqrt{1+t^2} \end{array} \right| = \\
&= \left[\ln|t + \sqrt{1+t^2}| \right]_0^2 + \left[t\sqrt{1+t^2} \right]_0^2 - \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt = \\
&= \ln(2 + \sqrt{5}) - \ln 1 + 2\sqrt{5} - 0 - \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt.
\end{aligned}$$

Z této rovnice vypočítáme:

$$2 \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt = \ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}.$$

Tento postup je určitě rychlejší než substituce použitá v příkladu 3.24 c).

Celkově tedy platí

$$m_2(Q) = 8\pi \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi \ln(2 + \sqrt{5}) + 8\pi\sqrt{5}. \quad \blacktriangle$$

Na závěr si dokážeme poslední dva slíbené vzorce — objem koule a obsah kulové plochy.

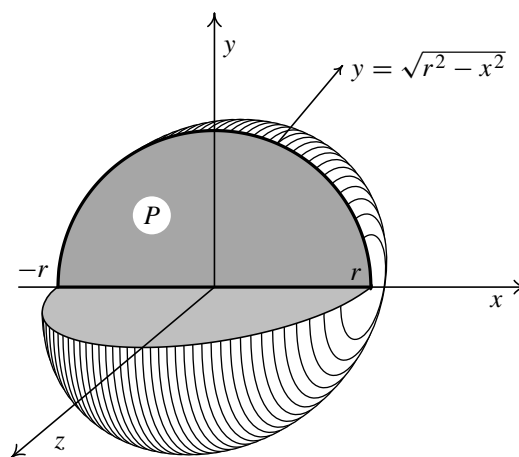
Příklad 3.47. Vypočítejte objem koule a obsah kulové plochy o poloměru $r > 0$.



Řešení. Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Rotací horního půlkruhu P kolem osy x dostaneme kouli — viz obr. 3.24. Rovnice horní půlkružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r \rangle$.

Podle vzorce (3.26) tedy pro objem koule V platí:

$$\begin{aligned}
m_3(V) &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \\
&= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \\
&= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \\
&= \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \pi \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.
\end{aligned}$$



Obr. 3.24

Před dalším výpočtem si připravíme výraz $1 + y'^2$:

$$y' = \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Nyní podle vzorce (3.27) pro obsah pláště Q , tj. pro obsah kulové plochy, vyjde

$$m_2(Q) = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 4\pi r^2.$$

Předchozí výpočet nebyl korektní. Derivace y' není definovaná pro $\pm r$ (v tomto bodě existují nevlastní jednostranné derivace). Po zkrácení sice vznikl integrand, který už byl definovaný i v těchto bodech (zbyla jednička), nicméně předpoklady věty 3.43 nebyly splněny. Mohli bychom ale vypočítat integrál na intervalu $\langle -r + \delta, r - \delta \rangle$, kde $\delta > 0$ je malé (vlastně bychom odřízli po stranách dva malé kulové vrchlíky). Jeho hodnota by byla $4\pi r(r - \delta)$. Pak bychom provedli limitní přechod pro $\delta \rightarrow 0^+$. Dostali bychom stejný výsledek. Pro naše účely to však takto stačí. ▲



Pro zájemce:

Uvedeme několik možných zobecnění předchozích výsledků.

1. Uvažujme zobecněný obdélník určený funkcemi $f(x)$ a $g(x)$, ležící nad osou x . Tedy $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Rotací kolem osy x vznikne prstencovité těleso V , mající plášť Q . Označme V_f resp. V_g rotační těleso určené podgrafem funkce $f(x)$ resp. $g(x)$ a Q_f resp. Q_g jeho plášť. Z názoru je zřejmé, že platí (představte si třeba záchranné kolo, které vznikne rotací kružnice; $f(x)$ odpovídá horní půlkružnici a $g(x)$ dolní půlkružnici):

$$m_3(V) = m_3(V_f) - m_3(V_g), \quad m_2(Q) = m_2(Q_f) + m_2(Q_g).$$

Chceme-li určit velikost celého povrchu tělesa V , musíme k obsahu pláště přičíst ještě obsah dvou postranních mezikruží.

2. Často se vyskytuje situace, kdy graf G nezáporné funkce $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, je popsán parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Ukážeme, jak lze pro tuto situaci upravit vzorce (3.19), (3.26) a (3.27).

Budeme předpokládat, že funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná a funkce $\varphi(t)$ je ryze monotónní a má spojitou derivaci na $\langle \alpha, \beta \rangle$. K funkci $\varphi(t)$ pak existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Vyloučením parametru t dostaneme explicitní vyjádření funkce $f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$. Do uvedených vzorců nyní zavedeme substituci $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ (v případě posledního vzorce je třeba navíc předpokládat, že $\varphi'(t) \neq 0$ a $\psi(t)$ má spojitou derivaci, protože při výpočtu $f'(x)$ musíme použít vzorec pro derivaci inverzní funkce).

Po úpravách dostaneme následující zobecnění vzorců pro výpočet obsahu podgrafu P funkce $f(x)$, objemu rotačního tělesa V a obsahu jeho pláště Q , kde těleso V vznikne rotací podgrafu P kolem osy x :

$$m_2(P) = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot |\varphi'(t)| dt,$$

$$m_3(V) = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt,$$

$$m_2(Q) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Spočítejme pomocí těchto vzorců ještě jednou obsah kruhu, objem koule a obsah kulové plochy. Uvidíme, že výpočet je rychlejší. Horní půlkružnice kruhu K se středem v počátku a poloměrem $r > 0$ má (viz příklad 3.40) parametrické rovnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Podgrafem P je horní půlkruh. Protože na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ je $\sin t \geq 0$, je $|\varphi'(t)| = | -r \sin t | = r \sin t$. Postupně dostaneme:

$$m_2(K) = 2 m_2(P) = 2 \int_0^{\pi} r \sin t \cdot r \sin t dt = 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = r^2 \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \pi r^2,$$

$$m_3(V) = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \cdot r \sin t dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \\ \sin t dt = -du \\ 0 \rightsquigarrow 1, \pi \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = -\pi r^3 \int_1^{-1} (1 - u^2) du = \pi r^3 \left[u - \frac{1}{3} u^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$m_2(Q) = 2\pi \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt =$$

$$= 2\pi r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi r^2.$$

Příklady k procvičení



1. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami:

a) $y = 0, x = -1, y = x^2,$

b) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1,$

c) $y = 4 - x^2, y = 0,$

d) $yx = 1, x = 1, x = 3, y = 0$

e) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0,$

f) $y(1 + x^2) = 1, y = \frac{x^2}{2},$

g) $y = \ln x, x = 5, x = 7, y = 0,$

h) $y = |\log x|, x = \frac{1}{10}, x = 10, y = 0,$

i) $y = -x^2 + 4x - 2, x + y = 2,$

j) $y = \arcsin x, x = 0, x = 1,$

k) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4, x = -1, x = 2, y = 0,$

l) $x = \frac{4}{y}, y = 1, y = 4, x = 0,$

m) $y = \ln x, y = \ln 9, y = \ln 3, x = 0,$

n) $y = x \sin x, x \in \langle k\pi, (k+1)\pi \rangle, y = 0.$

2. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $y = 1 - x, y^2 + x^2 = 1, 0 \leq x, y > 0,$ | b) $x^2 = y, y^2 = x,$ |
| c) $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14,$ | d) $yx = 4, x + y = 5,$ |
| e) $y = 0, y = e^{-x} \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle,$ | f) $y = \ln^2 x, y = \ln x,$ |
| g) $y = \ln x , x = \frac{1}{e}, x = e^2, y = 0,$ | h) $y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2,$ |
| i) $y = x^3 + x^2 - 6x, y = 0, x \in \langle -3, 3 \rangle,$ | j) $4x^2 + 9y^2 = 36,$ |
| k) $y = \frac{x^2 - 10x + 34}{5}, y = \frac{10 - 3x^2 + 18x}{5},$ | l) $y = 6x - x^2, y = 0,$ |
| m) $x^2 + y^2 = 16, y^2 = 6x, x \geq 0,$ | n) $y = x^2 + 4x, y = x + 4,$ |
| o) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0,$ | p) $y^2 = x^3, y = 8.$ |

3. Určete délku oblouku rovinné křivky:

- | | |
|--|---|
| a) $y = \frac{5(e^{x/5} + e^{-x/5})}{2}, x \in \langle 0, 10 \rangle,$ | b) $y^3 = x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle,$ |
| c) $y = \sqrt{x - x^2} - \arcsin \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$ | d) $y = \arcsin e^{-x}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$ |
| e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0,$ (cykloida), | |
| f) $x = r(\cos t + t \sin t), y = r(\sin t - t \cos t), r > 0, t \in \langle 0, \pi \rangle,$ | |
| g) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0,$
(asteroida), | h) $y^2 = (x + 1)^3, x \leq 4,$
(semikubická parabola), |
| i) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \langle 1, 2 \rangle,$ | j) $y = \ln \sin x, x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$ |
| k) $x = 2a(1 + \cos t) \cos t, y = 2a(1 + \cos t) \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$
(kardioida), | |
| l) $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4},$ mezi průsečíky s osami souřadnic. | |

4. Určete délku oblouku prostorové křivky:

- | |
|--|
| a) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a, b > 0,$
(jeden závit šroubovice), |
| b) $x = t, y = \frac{1}{3} \sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2} t^2, t \in \langle 0, 1 \rangle,$ |
| c) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}, t \in \langle 0, \pi \rangle,$ |
| d) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, t \in \langle 0, 1 \rangle.$ |

5. Určete objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu dané funkce k či plochy P kolem osy x :

- a) $k: y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}), a > 0, y = 0, x \in \langle -4, 4 \rangle$, (rotace řetězovky),
 b) $P: xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$,
 c) $P: y = -x^2 + 1, y = -2x^2 + 2$,
 d) $P: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, a, b > 0, y \geq 0$,
 e) $k: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, (cykloida),
 f) $P: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, y \geq 0$, (asteroida),
 g) $k: y = \frac{1}{1+x^2}, x = -1, x = 1$,
 h) $P: y^2 = 5x, x = 8$,
 i) $k: x = t^2 - 1, y = t - t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle$,
 j) $k: y = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$,
 k) $k: x^2 + y^2 = 25, y \geq 0$,
 l) $P: y^2 = x, y = x^2, y \geq 0$.

6. Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu dané funkce k či plochy P kolem osy x :

- a) $P: y^2 = 4ax, y \geq 0, x = 3a, a > 0$,
 b) $P: y^2 = x, y = x^3$,
 c) $k: y = 4 + x, x \in \langle -4, 2 \rangle$,
 d) $k: y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle$,
 e) $P: (y - 1)^2 + x^2 = 1$, (povrch anuloidu),
 f) $P: 9ay^2 = x(3a - x)^2, a > 0, y \geq 0$, (mezi průsečíky s osou x).

7. Vypočítejte obsah pláště a objem následujících rotačních těles:

- a) rotační válec o poloměru podstavy $r > 0$ a výšce $v > 0$,
 b) rotační kužel o poloměru podstavy $r > 0$ a výšce $v > 0$,
 c) rotační komolý kužel o poloměrech podstav $r_1 > r_2 > 0$ a výšce $h > 0$,
 d) kulová úseč o výšce $v > 0$ z koule o poloměru $r > 0, 0 < v < 2r$,
 e) dutý válec o vnějším poloměru r_1 a vnitřním poloměru $r_2, r_1 > r_2 > 0$, a výšce $v > 0$,
 f) anuloid (vznikne rotací kruhu o poloměru r a středu $[0, R], R > r > 0$, kolem osy x).

Klíč k příkladům k procvičení



1. a) $\frac{1}{3}$, b) $e + \frac{1}{e} - 2$, c) $\frac{32}{3}$, d) $\ln 3$,
 e) $\frac{16}{3}$, f) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$, g) $7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 2$, h) $\frac{9,9 \ln 10 - 8,1}{\ln 10}$,
 i) $\frac{9}{2}$, j) $\frac{\pi}{2} - 1$, k) $\frac{9}{4}$, l) $8 \ln 2$,
 m) 6, n) $(2k + 1)\pi$.

2. a) $\frac{\pi - 2}{4}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{343}{3}$, d) $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$,
 e) $\frac{1 + e^{-\pi}}{2}$, f) $3 - e$, g) $2 - \frac{2}{e} + e^2$, h) $\pi - \frac{2}{3}$,
 i) 18, j) 6π , k) $\frac{50}{3}$, l) 36,
 m) $\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi)$, n) $\frac{125}{6}$, o) $\frac{16}{3}$, p) 19,2.
3. a) $\frac{5}{2}(e^2 - e^{-2})$, b) $\frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right)$, c) 2,
 d) $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$, e) $8a$, f) $\frac{\pi^2 r}{2}$,
 g) $6a$, h) $\frac{670}{27}$, i) $\ln \frac{e^2 + 1}{e}$,
 j) $\frac{1}{2} \ln 3$, k) $16a$, l) $\frac{13}{3}$.
4. a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$, b) $\frac{3}{2}$, c) 2π , d) $e - e^{-1}$.
5. a) $\frac{\pi a^3}{4}(e^{8/a} - e^{-8/a}) + 4\pi a^2$, b) 12π , c) $\frac{16}{15}\pi$, d) $\frac{4}{3}\pi ab^2$,
 e) $5\pi^2 a^3$, f) $\frac{32a^3}{105}\pi$, g) $\frac{\pi}{4}(\pi + 2)$, h) 160π ,
 i) $\frac{\pi}{12}$, j) $\frac{\pi^2}{2}$, k) $\frac{500}{3}\pi$, l) $\frac{3}{10}\pi$.
6. a) $\frac{56\pi a^2}{3}$, b) $\frac{\pi}{54}(20\sqrt{10} + 45\sqrt{5} - 11)$, c) $36\sqrt{2}\pi$,
 d) $\frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$, e) $4\pi^2$, f) $3\pi a^2$.
7. a) $f(x) = r, x \in \langle 0, v \rangle, m_2(Q) = 2\pi r v, m_3(V) = \pi r^2 v$,
 b) $f(x) = \frac{r}{v}x, x \in \langle 0, v \rangle, m_2(Q) = \pi r \sqrt{r^2 + v^2} = \pi r s$, kde $s = \sqrt{r^2 + v^2}$,
 $m_3(V) = \frac{1}{3}\pi r^2 v$,
 c) $f(x) = \frac{r_1 - r_2}{v}x + r_2, x \in \langle 0, v \rangle, m_2(Q) = \pi(r_1 + r_2)s$, kde
 $s = \sqrt{v^2 - (r_1 - r_2)^2}, m_3(V) = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$,
 d) $f(x) = \sqrt{r^2 - v^2}, x \in \langle r - v, r \rangle, m_2(Q) = 2\pi r v, m_3(V) = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$,

$$e) \quad f(x) = r_1, g(x) = r_2, x \in (0, v), m_2(Q) = 2\pi v(r_1 + r_2),$$

$$m_3(V) = \pi v(r_1^2 - r_2^2),$$

$$f) \quad f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, m_2(Q) = 4\pi^2 r R,$$

$$m_3(V) = 2\pi^2 R r^2.$$

Pro lepší geometrickou představu uvádíme obrázky některých křivek a jedné plochy, které se vyskytly v předchozích cvičeních a nejsou známé ze střední školy — viz obr. 3.25. Označení v obrázcích odpovídá rovnicím v zadáních.

3.6.2. Fyzikální aplikace

Jak již bylo řečeno v úvodu kapitoly je možné uvést stovky příkladů, kdy se pomocí určitého integrálu z jistých „lokálních“ veličin určují veličiny „globální“ (např. z hustoty hmotnost). V obecném případě, kdy lokální veličiny závisí na dvou nebo třech souřadnicích (rovinné nebo prostorové případy), je k výpočtu třeba dvojný nebo trojný integrál, se kterým se seznámíte až později. Proto se omezíme pouze na jednoduché ukázky z mechaniky. Půjde o výpočet hmotnosti a určení souřadnic těžiště.

Rovněž nemůžeme potřebné fyzikální veličiny nějakým způsobem zavádět, to je úkolem jiných předmětů. V našem případě ovšem jde o veličiny a pojmy, které jsou absolventům středních škol dobře známé. S řadou dalších ukázek použití určitého integrálu se setkáte v mnoha předmětech během dalšího studia.

Hmotnost a souřadnice těžiště rovinné křivky

Představme si, že máme kus drátu, který je v obecném případě nehomogenní. Naším cílem bude vypočítat jeho hmotnost a určit souřadnice těžiště. Matematickým modelem drátu je křivka. Budeme předpokládat, že máme nezápornou funkci ρ , definovanou v bodech křivky, která každému bodu přiřazuje délkovou hustotu v tomto bodě. Označme $T = [\xi, \eta]$ těžiště této křivky.

Nejprve si všimneme případu, kdy křivka C je dána parametrickými rovnicemi

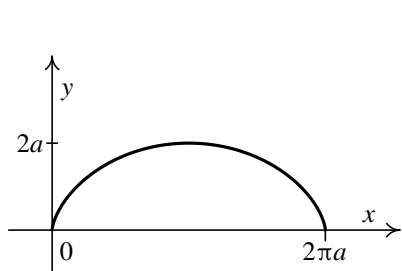
$$C: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (3.28)$$

Funkce $\rho(t)$ udává délkovou hustotu v bodě křivky $[\varphi(t), \psi(t)]$.

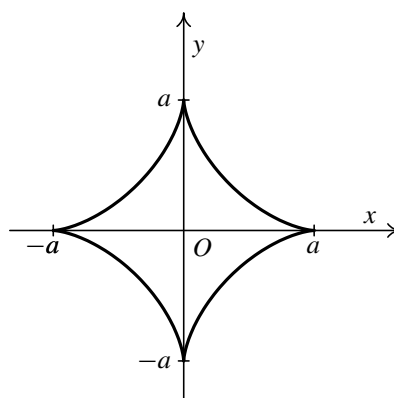
Věta 3.48. *Nechť funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce $\rho(t)$ je na tomto intervalu spojitá a nezáporná.*

Pak křivka C mající parametrické rovnice (3.28) a délkovou hustotu $\rho(t)$ má hmotnost

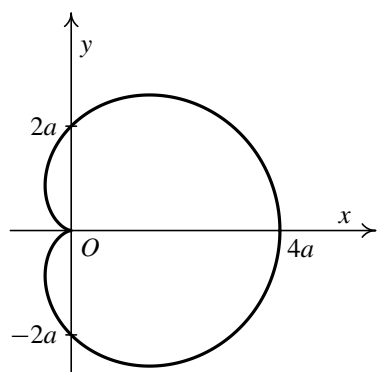
$$M(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (3.29)$$



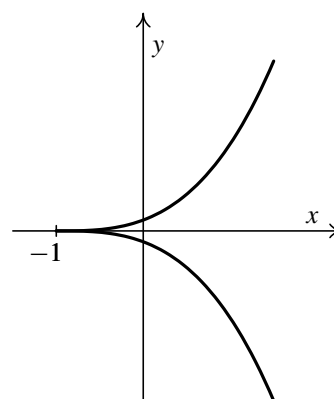
a) cykloida



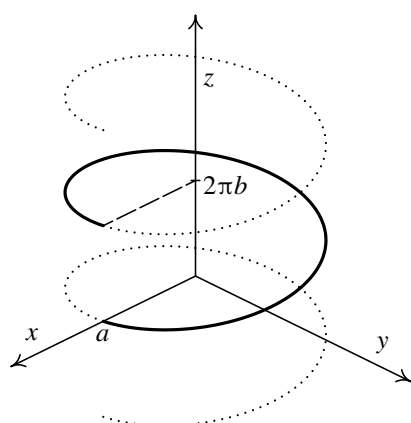
b) asteroida



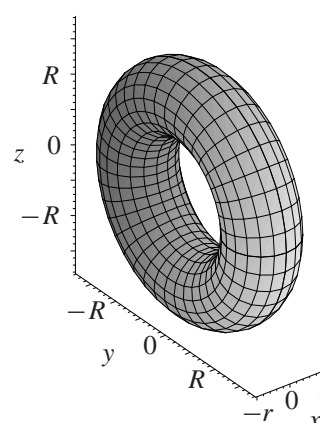
c) kardioida



d) semikubická parabola



e) šroubovice



f) anuloid

Obr. 3.25

Pro souřadnice jejího těžiště platí

$$T = \left[\frac{S_y(C)}{M(C)}, \frac{S_x(C)}{M(C)} \right], \quad (3.30)$$

kde

$$S_x(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad (3.31)$$

$$S_y(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (3.32)$$

Veličiny $S_x(C)$ a $S_y(C)$ se ve statice někdy nazývají *statické momenty* křivky C vzhledem k ose x resp. y .

Pro zájemce:



Označíme-li $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ interval dělení použitý v konstrukci určitého integrálu, z konstrukce tohoto pojmu plyne, že výraz $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \Delta t$, kde $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, vyjadřuje přibližně délku malého kousku křivky. Tedy výraz $\rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \Delta t$ v integrálu pro hmotnost je součinem hustoty a délky, tj. udává přibližně hmotnost tohoto kousku. Pak výraz $\psi(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \Delta t$ v integrálu pro $S_x(C)$ je součinem hmotnosti tohoto kousku a jeho vzdálenosti od osy x ($\psi(t)$ je y -ová souřadnice bodu křivky, tj. orientovaná vzdálenost tohoto bodu od osy x). Odtud název statický moment vzhledem k ose x . Analogicky je tomu v integrálu pro $S_y(C)$ ($\varphi(t)$ je x -ová souřadnice bodu křivky, tj. orientovaná vzdálenost tohoto bodu od osy y). Podrobněji o podobných úvahách viz text pro zájemce na str. 158.

Je-li speciálně křivka C grafem funkce $f(x)$ a $\rho(x)$ udává její délkovou hustotu v bodě $[x, f(x)]$, dostaneme z předchozí věty následující zjednodušenou verzi.

Důsledek 3.49. *Nechť funkce $f(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce $\rho(x)$ je na tomto intervalu spojitá a nezáporná.*

Pak pro souřadnice těžiště grafu G funkce $f(x)$ s délkovou hustotou $\rho(x)$ platí vzorec (3.30), kde:

$$M(G) = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (3.33)$$

$$S_x(G) = \int_a^b f(x) \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (3.34)$$

$$S_y(G) = \int_a^b x \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.35)$$

Příklad 3.50. Určete hmotnost a souřadnice těžiště homogenní horní půlkružnice $K: x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0, r > 0$.



Řešení. Parametrické rovnice půlkružnice K jsou $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ (viz příklad 3.40). Protože křivka je homogenní, bude hustota konstantní, tj. $\rho(t) = c$, $c > 0$. Použijeme vzorce z věty 3.48. Pro urychlení výpočtu si výraz $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ připravíme předem. Vyjde $\sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} = \sqrt{r^2} = r$. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} M(K) &= \int_0^\pi cr \, dt = rc[t]_0^\pi = \pi rc, \\ S_x(K) &= \int_0^\pi cr \sin t \cdot r \, dt = cr^2[-\cos t]_0^\pi = 2r^2c, \\ S_y(K) &= \int_0^\pi cr \cos t \cdot r \, dt = cr^2[\sin t]_0^\pi = 0, \end{aligned}$$

takže souřadnice těžiště jsou

$$T = \left[\frac{0}{\pi rc}, \frac{2r^2c}{\pi rc} \right] = \left[0, \frac{2r}{\pi} \right]. \quad \blacktriangle$$



Příklad 3.51. Určete hmotnost a souřadnice těžiště křivky G , která je grafem funkce $y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, je-li délková hustota $\rho(x) = x$.

Řešení. Tentokrát jde o graf funkce (oblouk paraboly), takže použijeme vzorce z důsledku 3.49. Je $y' = x$, takže $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^2}$. Pro hmotnost a první statický moment dostaneme s použitím substituce $x^2 + 1 = t^2$, tj. $\sqrt{x^2 + 1} = t$, že

$$\begin{aligned} M(G) &= \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t^2 \\ x \, dx = t \, dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 1 \rightsquigarrow \sqrt{2} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot t \, dt = \\ &= \frac{1}{3} [t^3]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}, \\ S_x(G) &= \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t^2 \\ x \, dx = t \, dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 1 \rightsquigarrow \sqrt{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t \cdot t \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2} + 1}{15}. \end{aligned}$$

Zbývající statický moment nám dá více práce. Výpočet integrálu bude téměř analogický jako v příkladu 3.24 c) na str. 127, takže jednotlivé kroky nebudeme detailně komentovat. Využijeme i rovnost, kterou jsme tam odvodili, a to, že $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Dostaneme

$$S_y(G) = \int_0^1 x \cdot x \sqrt{1 + x^2} \, dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{cotg} v \\ dx = -\frac{1}{\sin^2 v} \, dv \\ 0 \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}, \quad 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} + 1} \cdot \frac{-1}{\sin^2 v} dv = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{|\sin v|} \cdot \frac{\cos^2 v}{\sin^4 v} dv = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 v}{\sin^5 v} dv = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{v}{2} = t \\ v = 2 \operatorname{arctg} t \\ dv = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \sqrt{2} - 1, \quad \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{\left(\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^5} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
&= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{1-2t^4+t^8}{16t^5} dt = \frac{1}{16} \int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t} + t^3\right) dt = \\
&= \frac{1}{16} \left[-\frac{1}{4t^4} - 2 \ln t + \frac{t^4}{4} \right]_{\sqrt{2}-1}^1 = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště tudíž jsou:

$$T = \left[\frac{S_y(C)}{M(C)}, \frac{S_x(C)}{M(C)} \right] = \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} \right]. \quad \blacktriangle$$

Poznámka 3.52. Obdobným způsobem lze postupovat i u prostorové křivky. Při označení z poznámky 3.41 bude platit

$$T = \left[\frac{S_{yz}(K)}{M(K)}, \frac{S_{xz}(K)}{M(K)}, \frac{S_{xy}(K)}{M(K)} \right],$$

kde

$$\begin{aligned}
M(K) &= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt, \\
S_{yz}(K) &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt, \\
S_{xz}(K) &= \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt, \\
S_{xy}(K) &= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(t) \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt.
\end{aligned}$$

Veličiny S_{yz} , S_{xz} a S_{xy} se po řadě nazývají *statické momenty* vzhledem k souřadným rovinám $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$.

Hmotnost a souřadnice těžiště rovinné množiny

Obdobně nyní popíšeme, jakým způsobem lze určit souřadnice těžiště $T = [\xi, \eta]$ nehomogenní rovinné desky. Obecný případ však určitým integrálem, který máme k dispozici

(tzv. jednoduchým určitým integrálem) neovládáme. Musíme se omezit na speciální případ, kdy plošná hustota ρ v bodě $[x, y]$ závisí jen na souřadnici x . Tedy v bodech, které mají touž x -ovou souřadnici, tj. leží na rovnoběžce s osou y , je hustota stejná.

Dále budeme předpokládat, že uvažovaná deska má tvar zobecněného obdélníku (viz obr. 3.15 b))

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}. \quad (3.36)$$

Věta 3.53. *Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ a $\rho(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.*

Pak hmotnost křivočarého obdélníku B popsaného v (3.36) s plošnou hustotou $\rho(x)$ je

$$M(B) = \int_a^b \rho(x)[f(x) - g(x)] dx. \quad (3.37)$$

Pro souřadnice jeho těžiště platí

$$T = \left[\frac{S_y(B)}{M(B)}, \frac{S_x(B)}{M(B)} \right], \quad (3.38)$$

kde tzv. statické momenty vzhledem k osám x a y jsou dány vzorci

$$S_x(B) = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x)[f^2(x) - g^2(x)] dx, \quad (3.39)$$

$$S_y(B) = \int_a^b x\rho(x)[f(x) - g(x)] dx. \quad (3.40)$$



Pro zájemce:

Vysvětlíme si z fyzikálního pohledu, jak se k předchozím vzorcům dojde. Označíme-li $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ interval dělení použitý v konstrukci určitého integrálu, vyjadřuje hodnota $[f(x) - g(x)] \Delta x$, kde $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, přibližně obsah úzkého křivočarého obdélníku, který je shora resp. zdola ohraničen grafy funkcí $f(x)$ resp. $g(x)$ a má základnu Δx . Protože obdélník je ve vertikálním směru homogenní a v horizontálním směru je úzký, je na něm plošná hustota $\rho(x)$ zhruba konstantní. Pak výraz $\rho(x)[f(x) - g(x)] \Delta x$ (tj. součin hustoty a obsahu) je přibližně jeho hmotností. Limitním přechodem (uděláme integrální součty a zjemňujeme neomezeně dělení) dojdeme formálně ke vzorcům pro hmotnost $M(B)$.

Představme si, že tento křivočarý obdélník nahradíme jeho těžištěm, do něhož soustředíme celou jeho hmotnost. Vzdálenost bodů tohoto křivočarého obdélníku (a tedy i těžiště) od osy y je přibližně x , protože obdélník je úzký, což znamená, že $x\rho(x)[f(x) - g(x)] \Delta x$ je součin hmotnosti a vzdálenosti těžiště od osy y . Protože statický moment bodu vzhledem k přímce se definuje jako součin hmotnosti soustředěné v tomto bodě a vzdálenosti bodu od této přímky, zdůvodňuje předchozí úvaha vzorec pro statický moment $S_y(B)$.

V případě osy x musíme uvažovat jinak. Náš křivočarý obdélník je ve vertikálním směru homogenní, těžiště bude proto zhruba uprostřed, tedy ve vzdálenosti $\frac{f(x)+g(x)}{2}$ od osy x . Součin hmotnosti a této vzdálenosti proto bude $\frac{f(x)+g(x)}{2} \cdot \rho(x)[f(x) - g(x)] \Delta x = \frac{1}{2} \rho(x)[f^2(x) - g^2(x)] \Delta x$, což vysvětluje vzorec pro statický moment $S_x(B)$.

Ve fyzice, ale i v jiných disciplínách, se často uvažuje podobným způsobem. Z fyzikálních zákonů se formálně odvodí vztah, které platí přibližně pro „malé“ rozměry. Výsledek se pak integrací globálně rozšíří. Z matematického hlediska jde o limitní přechod v integrálním součtu, který vede na příslušný určitý integrál. Symbol diferenciálu dx má pak význam jakéhosi „nekonečně malého“ přírůstku. Takovým způsobem postupovali tvůrci integrálního počtu Newton a Leibniz. Teprve později byla celá konstrukce zbavena tajemných „nekonečně malých veličin“ a zpřesněna použitím limit. Z motivačního hlediska jsou nicméně podobné úvahy cenné a i my jsme je použili v úvodu této kapitoly jako motivaci zavedení určitého integrálu.

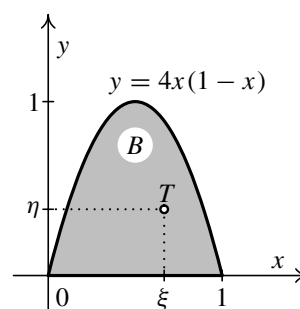
Informace o vzniku a historii integrálu a různých zajímavostech s tím spjatých můžete najít v oddílech 3.1 a 3.7. Zájemcům lze rovněž doporučit knihy [25, 26].

Příklad 3.54. Určete hmotnost a souřadnice těžiště podgrafu funkce $y = 4x(1 - x)$, je-li plošná hustota $\rho(x) = x^2$.



Řešení. Označme daný podgraf B . Jde o úseč paraboly — viz obr. 3.26. Použijeme vzorce z věty 3.53. V našem případě je $f(x) = 4x(1 - x)$, $g(x) = 0$. Pro hmotnost dostaneme:

$$\begin{aligned} M(B) &= \int_0^1 x^2 \cdot 4x(1 - x) dx = 4 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = \\ &= 4 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$



Obr. 3.26

Dále vypočteme statické momenty:

$$\begin{aligned} S_x(B) &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot [4x(1 - x)]^2 dx = 8 \int_0^1 x^4(1 - 2x + x^2) dx = \\ &= 8 \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6) dx = 8 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \\ &= 8 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{105}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(B) &= \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot 4x(1 - x) dx = 4 \int_0^1 (x^4 - x^5) dx = \\ &= 4 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Pro souřadnice těžiště $T = [\xi, \eta]$ tedy platí:

$$T = \left[\frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{5}}, \frac{\frac{8}{105}}{\frac{4}{5}} \right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{21} \right].$$

Všimněte si, že těžiště je posunuto doprava od osy souměrnosti podgrafu B . To je důsledek toho, že podgraf B není homogenní. Jinak by muselo být $\xi = \frac{1}{2}$. ▲



Příklady k procvičení

- Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště křivky s délkovou hustotou ρ :
 - polovina asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, která leží nad osou x , $\rho(t) = 1$,
 - půlkružnice o poloměru $r > 0$ se středem v počátku, $\rho(x) = 1$,
 - oblouk řetězovky $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ mezi body $x = -1$, $x = 1$, $\rho(x) = 1$,
 - oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\rho(t) = 1$,
 - $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, $\rho(x) = 1$,
 - $y = x^2$, $x \in \langle -4, 4 \rangle$, $\rho(x) = |x|$,
 - oblouk asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $x, y \geq 0$, kde délková hustota $\rho(t)$ je v bodě $[x(t), y(t)]$ přímo úměrná x -ové souřadnici tohoto bodu,
 - $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, kde délková hustota oblouku je v bodě $[x, y]$ rovna součinu jeho souřadnic.
- Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště prostorové křivky s délkovou hustotou $\rho(t)$:
 - jednoho závitu šroubovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a, b > 0$, $\rho(x) = 1$,
 - jednoho závitu šroubovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a, b > 0$, $\rho(x) = 2\pi - t$.
- Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy omezené:
 - křivkou $y = \frac{x^2}{8}$, osou x a přímkou $x = 8$,
 - křivkami $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$,
 - křivkou $y = 4 - x^2$ a osou x ,
 - křivkami $y^2 = x$, $y = x^3$.
- Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště nehomogenní rovinné plochy A , mající hustotu ρ :
 - $A: 0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $\rho(x) = |\cos x|$,
 - $A: x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq x \leq y$, $\rho(x) = x$,
 - $A: x^2 + y^2 = ay$, $a \geq 0$, $\rho(y) = y$,
 - $A: -1 \leq x \leq |y - 1|$, $0 \leq y \leq 2$, $\rho(y) = y^2$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $M = 3a, T = \left[0, \frac{2a}{5}\right],$ b) $M = \pi r, T = \left[0, \frac{2r}{\pi}\right],$
- c) $M = e - \frac{1}{e}, T = \left[0, \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e(e^2 - 1)}\right],$ d) $M = 8a, T = \left[\pi a, \frac{4}{3}a\right],$
- e) $M = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2, T = \left[\frac{20}{6 \ln 2 + 9}, \frac{27 - 4 \ln^2 2 - 16 \ln 2}{16 \ln 2 + 24}\right] \doteq [1,52; 0,40],$
- f) $M = \frac{65 \sqrt{65} - 1}{6}, T = \left[0, \frac{6175 \sqrt{65} - 1}{650 \sqrt{65} - 10}\right] \doteq [0; 9,52],$
- g) $M = \frac{3ka^2}{5}, T = \left[\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256}\right], \rho(t) = ka \cos^3 t, k > 0,$
- h) $M = \frac{r^3}{2}, T = \left[\frac{2r}{3}, \frac{2r}{3}\right], \rho(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}.$
2. a) $M = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}, T = [0, 0, \pi b],$
- b) $M = 2\pi^2 \sqrt{a^2 + b^2}, T = \left[0, 0, \frac{2}{3} b\pi\right].$
3. a) $M = \frac{64}{3}, T = \left[6, \frac{12}{5}\right],$ b) $M = \frac{16}{3}, T = \left[\frac{9}{5}, \frac{9}{5}\right],$
- c) $M = \frac{32}{3}, T = \left[0, \frac{8}{5}\right],$ d) $M = \frac{5}{12}, T = \left[\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right].$
4. a) $M = 1, T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right],$ b) $M = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}, T = \left[\frac{3(\pi - 2)}{8(2 - \sqrt{2})}, \frac{3}{4(2 - \sqrt{2})}\right],$
- c) $M = \frac{\pi a^3}{8}, T = \left[0, \frac{5a}{8}\right],$ d) $M = \frac{25}{6}, T = \left[-\frac{24}{125}, \frac{39}{25}\right].$

Pro zájemce:

Vraťme se k historii a navažme na str. 96. Pojďme se nyní podívat na období, které znamenalo přechod od jednotlivých vzorců na výpočet obsahů a objemů konkrétních ploch a těles k ucelené teorii výpočtu integrálu.

Prakticky všichni autoři formulí pro výpočty obsahů, objemů a případně těžišť se v letech 1630–1660 zaměřují na problémy týkající se tzv. algebraických křivek, zvláště těch, jejichž rovnice má tvar $a^m y^n = b^n x^m$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Každý došel svým vlastním způsobem k výsledkům, které jsou ekvivalentní výpočtu integrálu $\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$. Tato řešení byla nalezena nejprve pro kladná celočíselná m , později i pro záporné a racionální exponenty.

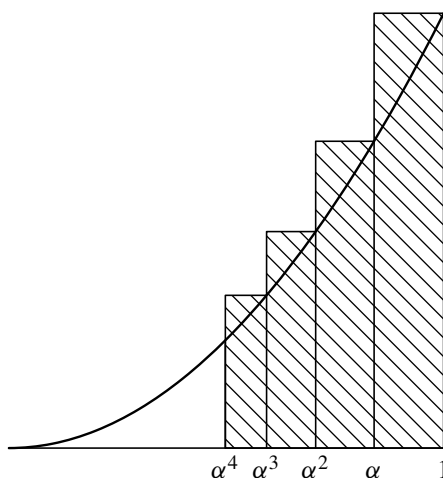


Pro zájemce:

3.7. Počátky infinitezimálního počtu

Práci matematiků té doby ilustrujme na díle **Pierra de Fermata** (1601–1665). Stejně jako všichni matematikové této doby se i Fermat věnoval kvadraturám hyperbol a parabol zadaných rovnicemi $y^n = kx^{\pm m}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Ukažme, jak Fermat postupoval při výpočtu obsahu plochy ohraničené parabolou $y = x^2$, osou x a přímkou $x = 1$.



Obr. 3.27

Nejdříve zvolil libovolné číslo $\alpha \in (0, 1)$ a sestrojil posloupnost čísel $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$. Uvažovanou plochu pokryl nekonečně mnoha obdélníky s výškami rovnými funkčním hodnotám funkce $y = x^2$ v bodech $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$, tj. s výškami $1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \dots$ a šířkami $1 - \alpha, \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha^3, \dots$. Součet obsahů těchto obdélníků je

$$\begin{aligned} 1(1 - \alpha) + \alpha^2(\alpha - \alpha^2) + \alpha^4(\alpha^2 - \alpha^3) + \dots &= \\ &= 1 - \alpha + \alpha^3(1 - \alpha) + \alpha^6(1 - \alpha) + \dots = \\ &= (1 - \alpha)(1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \dots) = \\ &= \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^3} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)} = \frac{1}{1 + \alpha + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Jestliže nyní zmenšujeme základny obdélníčků, tj. číslo α se přibližuje k číslu jedna, pak se podíl $\frac{1}{1 + \alpha + \alpha^2}$ bude blížit k $\frac{1}{3}$.

Obdobně Fermat postupoval při určování kvadratury paraboly $y = x^{\frac{p}{q}}$ pro $p > 0$ a $q > 0$ na intervalu $(0, b)$.

Zapsáno dnešním matematickým jazykem, dospěl k výsledku

$$\int_0^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p + q} b^{\frac{p+q}{q}}.$$

Fermat se zabýval i kvadraturami hyperbol, určováním tečen ke křivkám, vypočítal nevlastní integrál $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0}$, využíval záměny proměnných a integrace po částech.

On i další matematikové této doby již tušili, že existuje souvislost mezi derivováním a integrováním. Dokázat tuto souvislost se však podařilo až Issacu Newtonovi a Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi, kteří jsou proto považováni za zakladatele diferenciálního a integrálního počtu. Nezávisle na sobě a každý jinou cestou našli propojení mezi integrováním a derivováním. Vybudovali ucelenou teorii, do které zahrnuli všechny rozříštěné objevy svých předchůdců.

Newton a Leibniz — zakladatelé infinitezimálního počtu

Všimněme si, co vytvoření této teorie předcházelo. V 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek. Byly zkoumány plošné i prostorové křivky (spirály, řetězovky, ...), tvary čoček a zrcadel s požadovanými vlastnostmi a mnoho dalších objektů. Pomocí infinitezimálních metod se studovaly konstrukce tečen, obsahy úsečí, objemy a povrchy těles vzniklých rotací úsečí, byla určována těžiště těchto útvarů. Významnou roli v pohledu na křivky sehrálo v 17. století oživení kinematických představ. Zkoumaly se dráhy pohybujících se bodů a vržených těles, studovaly se pojmy rychlosti, zrychlení, dráhy, času a vznikaly i základní představy o proměnné veličině a funkci.

V roce 1638 studoval G. Galilei stejnoměrně zrychlený přímočarý pohyb a došel ke vztahu pro dráhu tohoto pohybu ($x = \frac{1}{2}gt^2$, když $\frac{dx}{dt} = gt$), a tím vlastně k výpočtu jistého neurčitěho integrálu. Torricelli uvažoval obecněji; určil dráhu jako „integrál“ rychlosti. Úloha měření dráhy v závislosti na čase si vynutila přenesení integrálních postupů ze statických úloh na úlohy dynamické a posléze poskytla i ideu a metodu, jak svázat pojem derivace (tečny, rychlosti) s pojmem integrálu (obsahu, dráhy).

Isaac Newton (1643–1727) vytvořil svou teorii v letech 1665–1666, avšak publikoval ji daleko později. V pozadí Newtonovy analýzy byly mechanické představy o křivce, kterou chápal jako dráhu pohybujícího se bodu.

Newton formuloval základní úlohy své matematické analýzy takto:

- ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase,
- ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas.

První z těchto úloh je výpočtem derivace, druhá vede k výpočtu integrálu. Newton tyto úlohy vyřešil a odvodil formuli, která svazuje integrál s derivací a dává do souvislosti problémy kvadratur s určováním tečen ke křivkám.

Ukažme, jak Newton přistupoval k řešení druhé úlohy.

Úloha spočívá v nalezení funkce y dané rovnicí $f(x, y) = 0$, je-li znám např. poměr $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$. Ze současného pohledu se jedná o vyřešení diferenciální rovnice typu $g(x, y, \frac{y}{x}) = 0$. Tato úloha v sobě skrývá problém hledání primitivní funkce. Je-li znám například vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = f(x),$$

jde o určení $y(x) = F(x)$, tj. o určení primitivní funkce F k funkci f .

V této souvislosti pak Newton diskutoval výpočet obsahů ploch některých útvarů pomocí „antiderivování“, tj. pomocí primitivní funkce.

Jestliže pro danou kladnou funkci $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ označíme $F(z)$ obsah útvaru vymezeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, z \rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = z$, pak můžeme Newtonův výsledek z r. 1666 zapsat tak, že pro výše popsanou funkci F platí

$$\frac{dF}{dx} = f \text{ neboli } F'(x) = f(x).$$

(Zde dnes musíme být trochu opatrní a zjišťovat, pro které hodnoty $x \in \langle a, b \rangle$ poslední vztah platí. Pro spojitou funkci f , a jiné si patrně Newton ani nepřipouštěl, problém nenastane a vztah $F'(x) = f(x)$ platí všude na intervalu $\langle a, b \rangle$.)

Užijeme-li dnešní symboliky, pak pro výše zmíněný obsah platí $F(z) = \int_a^z f(x) dx$. Pokud lze nějakým jiným způsobem určit funkci F , pro níž je $F'(x) = f(x)$ na $\langle a, b \rangle$, pak lze s její pomocí vyjádřit i plošnou velikost útvaru vymezeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, tj. integrál $\int_a^b f(x) dx$. V této situaci pak je $\int_a^b f(x) dx = F(b)$, poněvadž je možné předpokládat, že je $F(a) = 0$.

Napsáno dnešním jazykem, Newton dospěl k následujícímu výsledku:

Je-li $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která má primitivní funkci $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, tj. platí-li $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak existuje *Newtonův integrál* $(N) \int_a^b f(x) dx$ funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ a je definován vztahem

$$(N) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.41)$$

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zformuloval základy svého infinitezimálního počtu v roce 1675. Předložil pravidla pro řešení úloh tečen a kvadratur, vztah mezi integrováním a derivováním a zavedl novou symboliku. Svoji teorii založil na myšlence charakteristického trojúhelníka. Vycházel z analyticko-geometrických představ, které vyjadřoval aritmetickým a algebraickým jazykem.

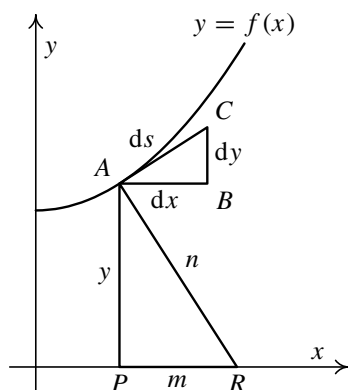
Věnujme se Leibnizově konstrukci podrobněji.

Nechť je dána křivka pomocí funkce $y = f(x)$ a nechť je na ní dán bod A , kterým prochází tečna ke grafu zmíněné funkce. Utvořme pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož jeden vrchol je dán bodem A , přepona ds je dána úsečkou s krajním bodem A a leží na tečně ke křivce ($ds = |AC|$), odvěsny dx a dy jsou rovnoběžné s odpovídajícími osami souřadnic ($dx = |AB|$, $dy = |BC|$). V bodě dotyku A tečny ke křivce uvažujme kolmici k této tečně. Touto kolmicí, osou x a přímkou procházející bodem A , která je rovnoběžná s osou y , je vytvořen pravoúhlý trojúhelník APR ($|AP| = y$, $|PR| = m$ a $|AR| = n$), který je podobný trojúhelníku ABC , viz obr. 3.28.

Trojúhelník APR je právě onen charakteristický trojúhelník, který byl předmětem mnoha spekulací v souvislosti s infinitezimálními veličinami. Už označením dx , dy a ds pro strany trojúhelníka ABC je svým způsobem naznačeno, že na ně budeme hledět jako na infinitezimální veličiny; můžeme si například představit, že strana dx bude konvergovat k nule, trojúhelník ABC se tak bude zmenšovat a přitom se stále zachová jeho podobnost s charakteristickým trojúhelníkem APR . Z podobnosti výše popsaných trojúhelníků dostaneme vztah

$$\frac{m}{y} = \frac{dy}{dx} \text{ neboli } m dx = y dy. \quad (3.42)$$

Leibniz zkoumal i význam dalších vztahů plynoucích z podobnosti zmíněných trojúhelníků. My však zůstaneme jen u vztahu (3.42). Leibnizova představa skutečně vycházela z představy,



Obr. 3.28: Leibnizův charakteristický trojúhelník

že trojúhelník je infinitezimální, tj. že např. dx je nekonečně malé (dnes bychom mohli říci, že veličina dx konverguje k nule). Situaci popsanou výše si představil v každém bodě křivky a veličiny vystupující na obou stranách vztahu (3.42) sečetl. Těmto součtům (nekonečně mnoha nekonečně malých) veličin říkal integrál a dospěl tak ke vztahu

$$\int m \, dx = \int y \, dy. \quad (3.43)$$

Dále z (3.42) dostal rovnost $m = y \frac{dy}{dx}$ a vztah (3.43) přepsal do tvaru

$$\int y \frac{dy}{dx} \, dx = \int y \, dy. \quad (3.44)$$

Ve formě určitého integrálu pak platí

$$\int_a^b y \frac{dy}{dx} \, dx = \int_{y(a)}^{y(b)} y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2} [y(b)^2 - y(a)^2].$$

Když v této situaci chtěl Leibniz například určit integrál $\int_a^b x^n \, dx$, vedl úvahy tak, aby určit funkci y , pro kterou by bylo $y \frac{dy}{dx} = x^n$. Za tím účelem položil $y(x) = \alpha x^k$ a hledal odpovídající hodnoty α a k . Po dosazení dostal

$$y(x) \frac{dy}{dx}(x) = \alpha x^k \cdot \alpha k x^{k-1} = \alpha^2 k x^{2k-1} = x^n$$

a odtud pak $\alpha^2 k = 1$, $2k - 1 = n$, tj. $k = \frac{n+1}{2}$ a $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$. Hledaná funkce y má proto tvar $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} x^{\frac{n+1}{2}}$. S touto funkcí pak Leibniz z výše uvedeného vztahu pro integrál dostal známý vztah

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{2} [y^2]_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n+1} b^{n+1} - \frac{2}{n+1} a^{n+1} \right] = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Uvedené „leibnizovské“ úvahy jsou z dnešního hlediska velmi nepřesné, i když jsme se zde snažili užívat dnešních symbolů a způsobu vyjadřování.

V práci z roku 1693 Leibniz ukázal, že problém kvadratur se převádí na problém nalezení funkce, která má dán „zákon sklonu“, tj. strany jejího charakteristického trojúhelníka jsou v daném poměru. Odvodil tedy vztah

$$\int_0^x f(s) ds = F(x), \text{ když } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

za předpokladu, že $F(0) = 0$. V tomto tvrzení se skrývají dvě důležitá fakta: souvislost mezi integrálem a derivací a vztah pro výpočet určitého integrálu jako rozdílu funkčních hodnot primitivní funkce.

V souvislosti s výpočtem neurčitého integrálu řešil Leibniz diferenciální rovnici $y' = f(x)$ a ukázal, že řešením je nekonečně mnoho křivek, z nichž lze vybrat jednu procházející daným bodem, tj. splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Na základě souvislosti mezi diferencováním a integrováním vypracoval Leibniz tzv. teorii transmutace, která v sobě obsahuje integrování, rozklad do řad i metodu charakteristického trojúhelníka. Obsahem transmutační věty je rovnost

$$\int_a^b y dx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x dy,$$

jenž je zárodkem metody integrace per partes.

Leibniz kladl velký důraz na symboliku; vytvářel ji tak, aby usnadňovala pochopení podstaty jeho algoritmů a podpořila algoritmizaci nových poznatků. V Paříži dne 29. října 1675 napsal, že *bude užitečné místo „součtu všech l“ psát od nynějška $\int l$* (znak \int je odvozen z prvního písmene slova summa), *a že vzniká nový druh počtu, nová početní operace, která odpovídá sčítání a násobení. Druhý druh počtu vzniká, když z výrazu $\int l = a$ získáme $l = a \frac{d}{da}$* (d je první písmeno slova differentia). *Jako totiž operace \int zvětšuje rozměr, tak jej d zmenšuje. Znak \int znamená pak součet, d diferenci.* Svou symboliku Leibniz neustále vylepšoval, např. už v dopise z 11. listopadu 1675 změnil $\frac{d}{da}$ na dy. V pozdějším období už užívá nám velmi blízkého zápisu, např. v práci z roku 1686 čteme *... jestliže $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, pak $d(\frac{x^2}{2}) = x dx$...*

Leibniz sice zavedl operační symbol pro integrování, název *integrál* však pochází od Jakoba Bernoulliho.

Celé toto období lze stručně charakterizovat těmito nejvýznamnějšími výsledky:

- Došlo k vzájemnému propojení metod integrování a diferencování. Diferenciální metody se staly prvotními, z nich se při infinitezimálních úvahách nadále vycházelo. Integrál funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ se začal počítat na základě fundamentálního vztahu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce primitivní k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. taková, že platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.

- „Statický“ určitý integrál se propojil s „dynamickým“ neurčitým integrálem zejména pod vlivem mechanických představ o pohybu.
- Matematické metody byly přímo odvozeny z potřeb fyziky a byly s ní těsně svázány.
- Vytvořil se základní názor na pojem funkce, která se tak stala hlavním objektem zkoumání nové vědní disciplíny (matematické analýzy).

- Byla vytvořena promyšlená symbolika a bohatý algoritmický aparát.

V souvislosti s těmito výsledky zavládlo všeobecné přesvědčení, že dříve či později bude dořešeno vše, co s matematickou analýzou souvisí. Projevilo se to například v přesvědčení, že funkci bude *vždy* možné derivovat a že ji bude možné *vždy* integrovat tak, že se užije výše uvedeného fundamentálního vztahu. Jestliže se nám dnes takové přesvědčení zdá být poněkud přehnané, je to zejména tím, že máme jinou představu o tom, co je to funkce. Newtonovo přesvědčení se opíralo o to, že „jeho“ funkce byly v podstatě polynomy.

18. století bylo obdobím nakupení velkého množství nových poznatků, které však nestály na pevném základě. Nejasnosti a problémy se objevily kolem nekonečně malých veličin, konvergence řad, limity, ale i derivace a integrálu. V 19. století nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, jejímiž představiteli byli B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass.

Toto období bylo završeno vybudováním známého „ ε - δ “ jazyka současné matematické analýzy. Klíčové bylo především zavedení pojmu limita (kolem r. 1820).

Vraťme se ale k pojmu integrálu. Až do začátku 19. století bylo integrování považováno za inverzní operaci k derivování a funkce se integrovaly pomocí Newtonova fundamentálního vztahu. Tento vztah byl však do jisté míry pouze zavedením symbolu na levé straně rovnosti (3.41). Na Eudoxovu exhaustivní metodu se jakoby zapomnělo, byla však občas užita při aproximaci velikosti plochy pod křivkou v kartézském systému souřadnic v rovině, když k dané funkci nebylo možné určit primitivní funkci.

Jedním z matematiků, kteří se věnovali upřesnění pojmu integrálu, byl **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857), který položil základy matematické analýzy v dnešní podobě. Učinil tak zejména ve svých učebnicích *Cours d'Analyse* z roku 1821 a *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal* z roku 1823. Definované pojmy a matematické metody buduje na analytickém základě.

V roce 1823 Cauchy formuloval novou definici integrálu a zabýval se jeho existencí pro poměrně širokou třídu funkcí. Cauchy se snažil pro funkci $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ určit obsah plochy vymezené osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f .

Pro spojitou funkci $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ postupoval Cauchy takto:

Rozdělil interval $\langle a, b \rangle$ na n částí pomocí bodů $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Tomuto dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ přiřadil aproximující součet

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \quad (3.45)$$

kterým vyjádřil součet obsahů obdélníků se základnou $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a výškou, která je dána funkční hodnotou $f(x_{i-1})$. Cauchyovým úmyslem bylo definovat integrál $\int_a^b f(x) dx$ jako limitu součtů tvaru (3.45), když maximum délek „dělicích“ intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ bude konvergovat k nule. Jde tedy o aproximaci integrálu, tj. obsahu výše vymezené plochy v rovině, pomocí součtu ploch obdélníků. Za pozornost stojí i ta skutečnost, že při vytváření součtu S použil Cauchy pro interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ funkční hodnoty funkce f v *levém* bodě tohoto intervalu. Podobně lze použít funkční hodnoty $f(x_i)$ v *pravém* koncovém bodě. Obdobné pojmy se užívají dodnes pod názvem *levý* resp. *pravý Cauchyův integrál*.

Vcelku lze konstatovat, že Cauchy završil teorii integrálu pro spojitě funkce jedné proměnné.

Další významný pokrok v teorii integrálu znamenala Riemannova práce z roku 1854.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) znovu nastolil otázku, co vlastně je $\int_a^b f(x) dx$. Ptal se, jak se má chápat to, s čím se už více než jedno století pracovalo a co přinášelo užitečné poznatky a bylo běžně užíváno ve fyzice.

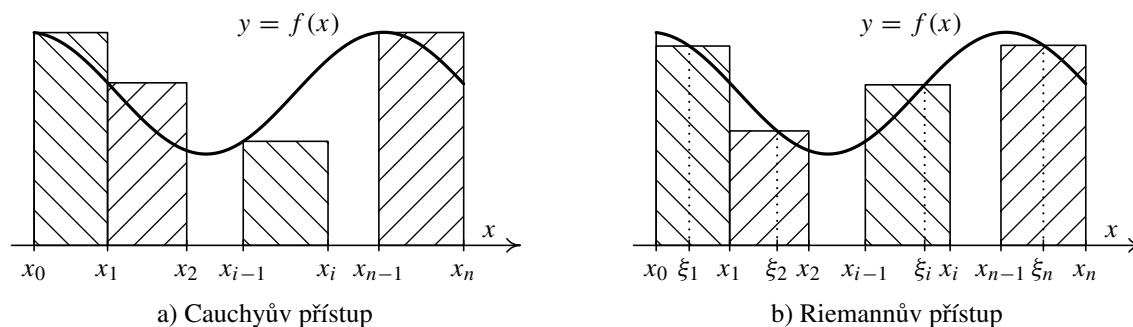
Riemann volí *libovolný* bod $\xi_i = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$ v i -tém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ v dělení D intervalu (a, b) a podobně jako Cauchy definuje integrál vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde δ znamená maximum délek δ_i intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ v dělení D . Na rozdíl od Cauchyho, který potřeboval spojitost funkce f , Riemann na funkci f nemá žádné požadavky. Tím přímo zobecnil to, jak integrál chápal Cauchy. V Cauchyově případě totiž bylo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

a to, co Cauchy potřeboval k výkladu své definice (pracoval se spojitou funkcí!), se stává pro Riemanna definicí.



Obr. 3.29

Riemann ve svém spise píše:

Vyšetřujeme nyní za druhé rozsah platnosti tohoto pojmu (rozuměj pojmu integrálu) neboli otázku: ve kterých případech připouští funkce integraci, a ve kterých nikoli?

Způsob, jakým tuto otázku Riemann položil, je typický pro novou matematiku, která se v 19. století formovala. Riemannova definice se totiž týká *libovolné* funkce a jím položená otázka směřuje k vymezení třídy funkcí, pro které má jím zavedená definice integrálu smysl, tj. ptá se po dosahu nového pojmu.

Riemann ve své definici nikterak nespécifikoval funkce, pro které svůj integrál definoval. Hovoří o funkcích, které připouštějí integraci; řečeno dnešními slovy, o *integrovatelných funkcích*. Zavádí tak novou třídu funkcí, které je vhodné a účelné zkoumat. Sám k tomu říká toto:

Poté, co jsme vyšetřili podmínky pro možnost určitého integrálu obecně, tj. bez zvláštních předpokladů o povaze integrované funkce, budiž nyní toto vyšetřování ve zvláštních případech zčásti použito, zčásti dále rozvinuto, a sice pro funkce, které jsou mezi dvěma jakkoli blízkými hranicemi (body) nekonečně často nespojitě.

Dále uvádí příklad poměrně divoce nespojitě funkce a ukazuje, že integrál z této funkce existuje přes každý omezený interval. Tímto příkladem Riemann ukázal, že dosah jím zavedeného

integrálu jde dosti za třídu spojitých funkcí, tj. že do třídy riemannovsky integrovatelných funkcí patří i „velmi silně“ nespojitě funkce. Tím se dostal daleko za Cauchyovy představy o tom, že je rozumné integrovat jenom funkce po částech spojitě.

Z dalších teorií integrálu jmenujme Lebesgueův integrál, Perronův integrál nebo Kurzweilův integrál, které byly vytvořeny ve 20. století. Jejich popis však překračuje možnosti tohoto textu.

Podrobnější informace o historickém vývoji integrálního počtu od starého Egypta až po současnost lze nalézt např. v publikaci [25].

Pojmy k zapamatování



- Určitý integrál
- Newton-Leibnizova formule
- norma dělení
- integrální součet
- integrační meze
- podgraf

Kontrolní otázky



1. Popište konstrukci určitého integrálu.
2. Uveďte podmínky integrovatelnosti funkce.
3. Uveďte základní vlastnosti určitého integrálu.
4. Vysvětlete princip metody per partes pro určitý integrál.
5. Vysvětlete princip substituční metody pro určitý integrál.
6. Popište možnosti geometrických aplikací určitého integrálu.
7. Popište možnosti fyzikálních aplikací určitého integrálu.

Autotest



1. Vypočítejte následující určité integrály:

- | | |
|--|---|
| a) $\int_0^1 x e^{2x^2} dx,$ | b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx,$ |
| c) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} dt,$ | d) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x}.$ |

2. Vypočítejte následující určité integrály:

- | | |
|-----------------------------|--|
| a) $\int_0^1 \arcsin x dx,$ | b) $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}} dx,$ |
| c) $\int_0^1 \ln(x+1) dx,$ | d) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{4-x^2} dx.$ |

3. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami $y = \frac{x^2}{4}$ a $y = \frac{x}{2} + 2$.
4. Určete délku oblouku rovinné křivky $y = \ln x$ na intervalu $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}$.
5. Určete objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $k: 3y - x^3$ okolo osy x , pro $x \in (0, 1)$.
6. Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací plochy P ohraničené křivkami $y^2 = 2x$ a $2x = 3$ okolo osy x .
7. Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště homogenní rovinné plochy, která je ohraničená parabolou $y = 2x - x^2$ a osou x .



Klíč k autotestu

1. a) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$, b) $\frac{3}{16}$, c) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$, d) $\ln\frac{3}{2}$.
2. a) $\frac{\pi}{2} - 1$, b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, c) $\ln\frac{4}{e}$, d) 1.
3. 9, 4. $\frac{27}{20} + \ln 2$, 5. $\frac{\pi}{63}$, 6. $\frac{14\pi}{3}$, 7. $M = \frac{4}{3}, T = \left[1, \frac{2}{5}\right]$.

Kapitola 4

Nevlastní integrál

Při definici Riemannova určitého integrálu jsme kladli na funkci, kterou jsme integrovali, dvě podstatná omezení:

- integrační obor byl *ohraničený uzavřený* interval,
- integrand byla funkce, která byla na tomto intervalu (oboustranně, tj. shora i zdola) *ohraničená*.

Naším cílem bude aspoň částečně tato omezení oslabit a pojem určitého integrálu zobecnit. To provedeme ve dvou směrech. Nejprve připustíme, že integrační obor bude jednostranně neohraničený uzavřený interval, tj. $(-\infty, b)$ nebo $(a, +\infty)$. Pak budeme uvažovat případ, kdy interval bude ohraničený a polootevřený. Na závěr popíšeme určité zobecnění, které vznikne kombinací obou předchozích případů. Tyto zobecněné určité integrály se nazývají *nevlastní*. Ve zbývajících oddílech této kapitoly se pak budeme zabývat tzv. *kritérii konvergence* a otázkou *absolutní a relativní konvergence*.

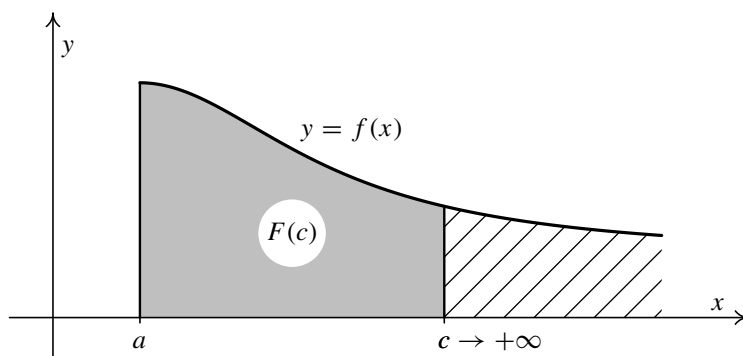
4.1. Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, takovou, že pro každé $c > a$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x) dx$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx, \quad c \geq a.$$

Podle věty 3.28 je tato funkce spojitá na intervalu $(a, +\infty)$, ale tento fakt není pro následující definici podstatný.

Nyní budeme předpokládat, že horní mez c se neomezeně zvětšuje, a budeme sledovat chování veličiny $F(c)$.



Obr. 4.1: Definice nevlastního integrálu na neohraněčeném intervalu

Definice 4.1. Necht' za uvedených předpokladů existuje $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = I, I \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *konverguje* a jeho hodnota je I . Tedy

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx. \quad (4.1)$$

V opačném případě, tj. když $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$ je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *diverguje*.

Situace je znázorněna na obr. 4.1. Šedá plocha znázorňuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x) dx$. Horní mez c pak neomezeně zvětšujeme a zajímá nás, zda se hodnota tohoto integrálu v závislosti na c blíží k nějakému konečnému číslu I (tj. zda existuje konečná limita), nebo se nekonečně zvětšuje resp. zmenšuje (limita je $\pm\infty$), nebo osciluje (limita neexistuje). V prvním případě říkáme, že integrál konverguje (tj. má konečnou hodnotu, a to číslo I), ve zbývajících dvou případech říkáme, že integrál diverguje (nemá konečnou hodnotu).



Příklad 4.2. Vyšetřete následující nevlastní integrály:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, c) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$.

Řešení. Budeme postupovat podle definice 4.1. Nejprve najdeme vzorec pomocné funkce $F(c)$, která je funkcí horní meze, a pak spočítáme její limitu pro $c \rightarrow +\infty$.

a) Dostaneme

$$F(c) = \int_0^c \frac{dx}{x^2 + 1} = [\arctg x]_0^c = \arctg c - \arctg 0 = \arctg c,$$

takže

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \arctg c = \frac{\pi}{2}.$$

Integrál tedy konverguje a platí:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Tentokrát je

$$F(c) = \int_1^c \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^c = \ln c - \ln 1 = \ln c,$$

takže

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln c = +\infty.$$

Integrál tedy diverguje.

c) V tomto případě je

$$F(c) = \int_0^c \sin x \, dx = [-\cos x]_0^c = -\cos c + \cos 0 = 1 - \cos c,$$

takže

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} (1 - \cos c) \quad \text{neexistuje.}$$

Integrál tudíž rovněž diverguje.

Průběh funkcí f i F je znázorněn na obr. 4.2. V každé dvojici vždy horní obrázek znázorňuje integrand f , dolní pak funkci F , která udává hodnotu určitého integrálu z funkce f v závislosti na horní mezi.

Obsah šedé plochy udává hodnotu integrálu $\int_a^c f(x) \, dx$. Všimněte si, že zatímco v prvních dvou příkladech, kdy je integrand f kladná funkce, hodnota $F(c)$ s rostoucím c evidentně musí narůstat, ve třetím případě tomu tak není.

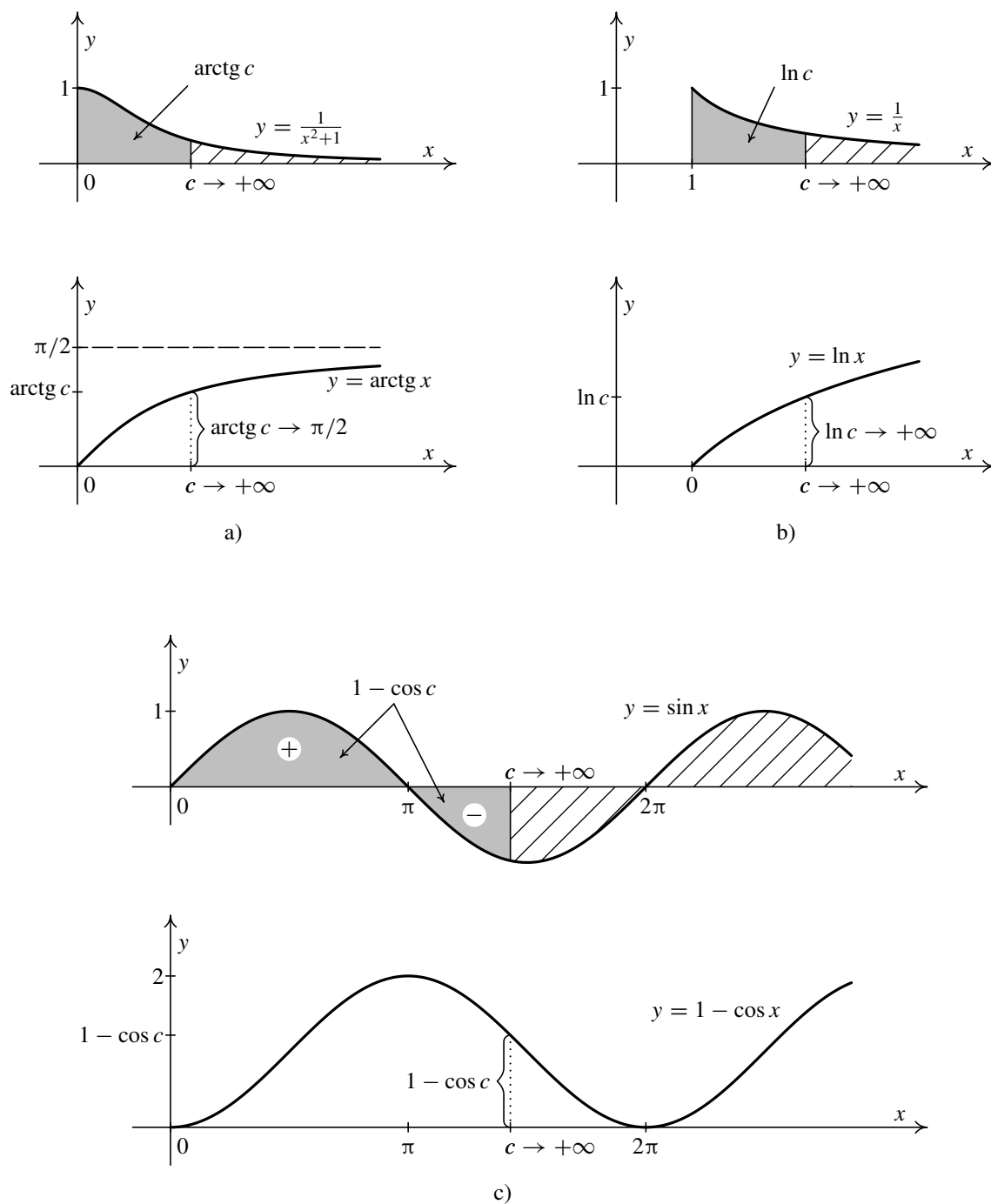
Na obr. 4.2 a) je vidět, že s rostoucím c se hodnota $F(c) = \arctg c$ zvětšuje a blíží se k číslu $\pi/2$, což je hodnota tohoto nevlastního integrálu.

Situace na obr. 4.2 b) je obdobná, avšak tentokrát hodnota $F(c) = \ln c$ neomezeně roste nad všechny meze (i když velmi pomalu).

Na obr. 4.2 c) integrand $f(x) = \sin x$ mění znaménko. V tomto případě je tedy veličina $F(c)$ rovna rozdílu obsahu šedé plochy ležící nad osou x a obsahu šedé plochy ležící pod osou x . Pro $c = 0$ je hodnota $F(0) = 0 = \int_0^0 \sin x \, dx$. Pak tato hodnota narůstá až do $F(\pi) = 2 = \int_0^\pi \sin x \, dx$. Potom se začne zmenšovat, protože se bude odečítat obsah plochy ležící pod osou x . Klesá až na hodnotu $F(2\pi) = 0 = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$. Pak se celý průběh opakuje. Tedy hodnota $1 - \cos c$ „osciluje“ pro c jdoucí do $+\infty$. ▲

Naprostu analogicky se zavádí nevlastní integrál na intervalu $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x)$ musí být taková, aby pro každé $c < b$ existoval určitý integrál $\int_c^b f(x) \, dx$. Pak označíme

$$G(c) = \int_c^b f(x) \, dx, \quad c \leq b,$$



Obr. 4.2

a vyšetřujeme limitu $\lim_{c \rightarrow +\infty} G(c)$. Terminologie je stejná jako v definici 4.1. Tento integrál značíme

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx.$$

Příklad 4.3. Vyšetřete nevlastní integrál $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.



Řešení: Určíme funkci $G(c)$, která závisí na dolní mezi, a pak spočítáme její limitu pro $c \rightarrow -\infty$. Postupně dostaneme:

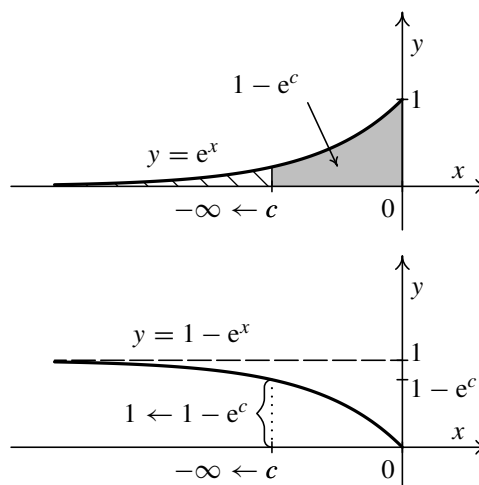
$$\begin{aligned} G(c) &= \int_c^0 e^x dx = [e^x]_c^0 = \\ &= e^0 - e^c = 1 - e^c, \end{aligned}$$

takže

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} G(c) = \lim_{c \rightarrow -\infty} (1 - e^c) = 1 - 0 = 1.$$

Integrál proto konverguje a platí

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$



Obr. 4.3

Situace je znázorněna na obr. 4.3. Protože integrand $f(x) = e^x$ je kladný, se zmenšujícím se c se hodnota $G(c) = 1 - e^c$ zvětšuje a přibližuje se k číslu 1, což je hodnota nevlastního integrálu. ▲

Ze všech dosavadních příkladů na nevlastní integrál je zřejmé, že při jejich vyšetřování kromě znalosti určitého integrálu je třeba umět počítat limity. Je potřeba spolehlivě znát grafy běžných elementárních funkcí a z nich umět tyto limity určit. Ve složitějších případech samozřejmě dojde např. i na použití l'Hospitalova pravidla.

Poznámka 4.4. Uvažujme nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ a necht' $d > a$. Protože pro $c > d$ je $\int_a^c f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^c f(x) dx$, bude existovat konečná limita $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$ právě tehdy, když bude existovat konečná limita $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_d^c f(x) dx$. Z toho plyne, že integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ bude *konvergentní* právě tehdy, když bude *konvergentní* integrál $\int_d^{+\infty} f(x) dx$. Jejich hodnoty se budou pochopitelně lišit o $\int_a^d f(x) dx$.

Z této úvahy vyplývá, že o konvergenci resp. divergenci integrálu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ nerozhoduje, jak vypadá funkce $f(x)$ na sebedelším konečném počátečním intervalu $\langle a, d \rangle$, ale to, jak se chová pro $x \rightarrow +\infty$. (Samozřejmě máme na mysli, že funkce $f(x)$ splňuje předpoklady uvedené před definicí 4.1.)

Např. změníme-li funkci $f(x)$ na nějakém intervalu $\langle a, d \rangle$ (tak, aby se na něm zachovala její integrovatelnost), nezmění se vlastnost, zda integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konverguje nebo diverguje.

Obdobné tvrzení platí pro integrál $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ — o jeho konvergenci resp. divergenci rozhoduje jen chování funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow -\infty$.

V příkladu 4.3 jsme zjistili, že integrál $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ konverguje. Z předchozího plyne, že konvergovat budou také např. integrály $\int_{-\infty}^2 e^x dx$ nebo $\int_{-\infty}^{-3} e^x dx$. Jejich hodnoty se však budou lišit.

Následující příklad bude velmi důležitý v souvislosti s tzv. kritérii konvergence.

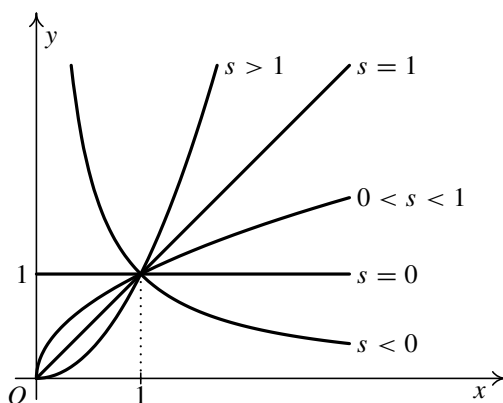


Příklad 4.5. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{R}$ je integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$ konvergentní.

Řešení. V příkladu 4.2 b) jsme zjistili, že integrál je divergentní pro $k = 1$. Necht' tedy $k \neq 1$. Pak

$$F(c) = \int_1^c \frac{dx}{x^k} = \int_1^c x^{-k} dx = \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right]_1^c = \frac{1}{-k+1} (c^{-k+1} - 1) = \frac{1 - c^{-k+1}}{k-1}.$$

Musíme tedy určit limitu $\lim_{c \rightarrow +\infty} c^{-k+1}$. Jde o mocninou funkci s exponentem $-k+1$. Připomeňme si grafy mocninné funkce $y = x^s$ v závislosti na exponentu s .



Obr. 4.4: Graf funkce $y = x^s$, $s \in \mathbb{R}$, $x > 0$

Z průběhu této funkce vyplývá, že limita je nulová pro záporný exponent, tj. pro $-k+1 < 0$, a je rovna $+\infty$ pro kladný exponent, tj. pro $-k+1 > 0$. Celkově tedy vyjde:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1 - c^{-k+1}}{k-1} = \frac{1-0}{k-1} = \frac{1}{k-1} && \text{pro } k > 1, \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1 - c^{-k+1}}{k-1} = \frac{1-\infty}{k-1} = +\infty && \text{pro } k < 1. \end{aligned}$$

Vzmemme-li v úvahu i případ $k = 1$, dostaneme, že

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } k > 1, \\ \text{diverguje} & \text{pro } k \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

V konvergentním případě $k > 1$ platí

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1},$$

ale tento výsledek není zdaleka tak důležitý, jako skutečnost, že hranicí mezi konvergencí a divergencí tohoto integrálu je hodnota $k = 1$.

Z poznámky 4.4 navíc plyne, že odpověď bude stejná, když v (4.2) nahradíme dolní mez 1 libovolným kladným číslem d .

Ze srovnávacího kritéria — viz důsledek 4.19 — uvidíme, že tvrzení o divergenci je v případě $k \leq 0$, tj. když integrand $f(x) = 1/x^k$ je kladný a neklesající (pro $k < 0$ dokonce rostoucí), triviální. Zajímavý je proto pouze případ $k > 0$, kdy je tento integrand kladný a klesající. ▲

4.2. Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, takovou, že pro každé $c \in (a, b)$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x) dx$. Dále budeme předpokládat, že funkce f není na intervalu (a, b) ohraničená. Pak říkáme, že bod b je *singulárním bodem* funkce f . Tedy v žádném levém δ -okolí $(b - \delta, b)$ bodu b , $0 < \delta < b - a$, není funkce f ohraničená.

Nyní můžeme opět definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx, \quad a \leq c < b,$$

a vyšetřovat, co se děje s hodnotou $F(c)$, když se c neomezeně přibližuje zleva k b — viz obr. 4.5.

Definice 4.6. Necht' za uvedených předpokladů existuje $\lim_{c \rightarrow b^-} F(c) = I$, $I \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x) dx$ *konverguje* a jeho hodnota je I . Tedy

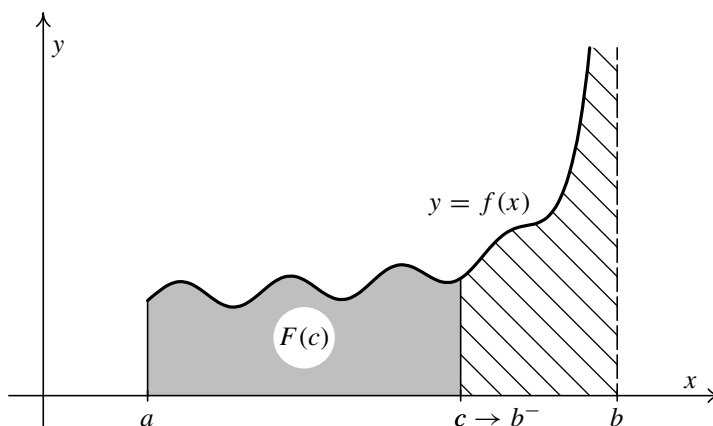
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} F(c) = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx. \quad (4.3)$$

V opačném případě, tj. když $\lim_{c \rightarrow b^-} F(c)$ je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x) dx$ *diverguje*.

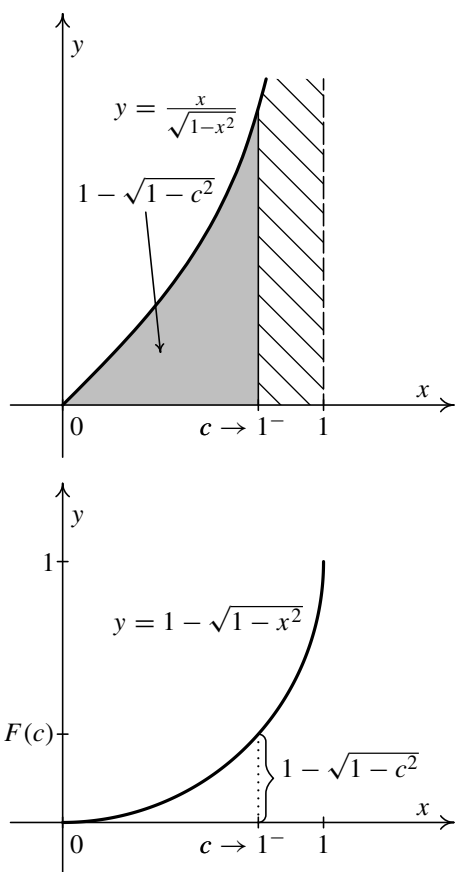
Protože situace je velmi podobná jako u nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu, který byl zaveden v definici 4.1, budeme v dalším výkladu postupovat rychleji.

Příklad 4.7. Vyšetřete nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.





Obr. 4.5: Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce



Obr. 4.6

Integrál je tedy konvergentní a platí:

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Situace je znázorněna na obr. 4.6. ▲

Řešení: Integrand je funkce spojitá na intervalu $(0, 1)$. V bodě $x = 1$ není definovaná. Dále

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Jedná se tedy skutečně o nevlastní integrál z neohraničené funkce. (Funkce má asymptotu bez směrnice $x = 1$.) Nejprve proto vypočteme určitý integrál na intervalu $(0, c)$, $0 \leq c < 1$:

$$\begin{aligned} F(c) &= \int_0^c \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x \, dx = dt \\ x \, dx = -\frac{1}{2} dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad c \rightsquigarrow 1-c^2 \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^{1-c^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int_1^{1-c^2} t^{-1/2} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_1^{1-c^2} = \left[\sqrt{t} \right]_{1-c^2}^1 = \\ &= 1 - \sqrt{1-c^2}. \end{aligned}$$

Dále vypočteme limitu pro $c \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} F(c) = \lim_{c \rightarrow 1^-} (1 - \sqrt{1-c^2}) = 1 - 0 = 1.$$

Obdobně se postupuje, je-li funkce f definovaná na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a je integrovatelná na každém intervalu (c, b) , kde $c \in (a, b)$. Opět budeme předpokládat, že funkce f není ohraničená na intervalu (a, b) . Tedy a je její *singulární bod*. Definujeme funkci

$$G(c) = \int_c^b f(x) dx, \quad a < c \leq b,$$

a vyšetřujeme limitu pro $c \rightarrow a^+$. Terminologie a označení jsou stejné jako v definici 4.6.

Příklad 4.8. Vyšetřete nevlastní integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x}$.



Řešení: Integrand je funkce spojitá na intervalu $(0, 2)$. V bodě $x = 0$ není definovaná. Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

jde skutečně o nevlastní integrál. (Funkce, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola, má asymptotu bez směrnice $x = 0$.)

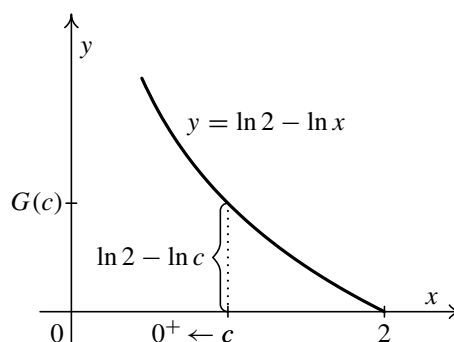
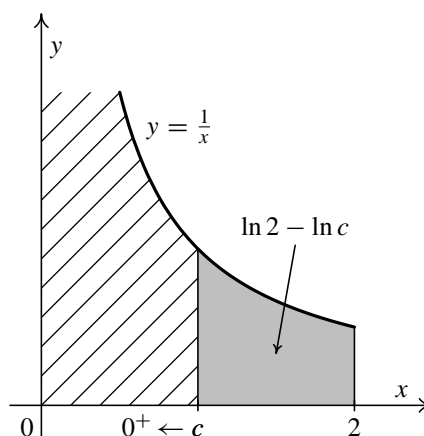
Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $(c, 2)$, $0 < c \leq 2$:

$$\int_c^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_c^2 = \ln 2 - \ln c.$$

Dále vypočteme limitu pro $c \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (\ln 2 - \ln c) = \ln 2 - (-\infty) = +\infty.$$

Integrál je tedy divergentní. Situace je znázorněna na obr. 4.7. Hodnota $G(c) = \ln 2 - \ln c$ se neomezeně zvětšuje pro $c \rightarrow 0^+$. ▲



Obr. 4.7

Poznámka 4.9.

1. Nevlastní integrál z neohraničené funkce má obdobné vlastnosti jako nevlastní integrál na neohraničeném intervalu. Zejména o konvergenci resp. divergenci rozhoduje průběh funkce v okolí singulárního bodu.

2. Nevlastní integrál z neohraničené funkce má pro studenty jednu velmi nepříjemnou vlastnost. Zatímco nevlastní integrál na neohraničeném intervalu na první pohled poznají, protože v mezích figuruje symbol $+\infty$ nebo $-\infty$, označení nevlastního integrálu z neohraničené funkce je stejné jako označení obyčejného určitého integrálu. V důsledku toho studenti často přehlédnou, že jde o nevlastní integrál, a při výpočtu postupují, jako by šlo o obyčejný určitý integrál, což může vést k fatálním nesmyslům. V následujícím oddílu — viz příklad 4.13 — si ukážeme, k čemu takové přehlédnutí může vést.

Uvidíme-li proto od této chvíle symbol $\int_a^b f(x) dx$, musíme zvažovat, zda je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ ohraničená a jde tudíž o obyčejný určitý integrál, nebo zda ohraničená není, má singulární bod a jde o nevlastní integrál.

Typickým příznakem je, že funkce není v některém bodě definovaná. Nejčastěji jde o dělení nulou. To ovšem pořád neznamená, že musí jít o nevlastní integrál. Srovnajte integrál $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ — viz obr. 3.10 a) na str. 112. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ sice není definovaná pro $x = 0$, ale je ohraničená, takže jak jsme ukázali na str. 112, jde o běžný určitý integrál. Obdobně je tomu s integrálem z funkce na obr. 3.10 b).

3. Položme si otázku, co se naopak stane, když při výpočtu běžného určitého integrálu omylem postupujeme, jako by šlo o nevlastní integrál. Ukazuje se, že naštěstí se nestane nic. To plyne z vlastností určitého integrálu jako funkce mezí — viz oddíl 3.5.3.

Předpokládejme, že např. bod b omylem považujeme za singulární bod. Pak funkce $F(c) = \int_a^c f(x) dx$ je podle věty 3.28 spojitá na celém intervalu $\langle a, b \rangle$. Protože u spojitě funkce je limita rovna funkční hodnotě, platí

$$\lim_{c \rightarrow b^-} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

což je správný výsledek.

Dokonce je někdy výhodné takto postupovat. Typickým příkladem je třeba určitý integrál $\int_0^1 x \ln x dx$. Funkce $x \ln x$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$. Pomocí l'Hospitalova pravidla určíme limitu zprava v bodě $x = 0$. Vyjde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Funkce je tedy ohraničená na intervalu $(0, 1)$, takže je riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnotu v bodě $x = 0$ můžeme zvolit libovolně, na výsledek to nemá vliv (srovnajte příklady z obr. 3.10 na str. 112). Chceme-li nyní použít Newtonovu-Leibnizovu formuli na celý integrační obor $\langle 0, 1 \rangle$, budeme mít problém s nalezením primitivní funkce v bodě $x = 0$. Šlo by např. použít větu 2.29. Jiná možnost je postupovat podle předchozího návodu. Tímto způsobem dostaneme:

$$\begin{aligned} G(c) &= \int_c^1 x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} [x^2 \ln x]_c^1 - \frac{1}{2} \int_c^1 x dx = \\ &= -\frac{1}{2} c^2 \ln c - \frac{1}{4} [x^2]_c^1 = -\frac{1}{2} c^2 \ln c - \frac{1}{4} + \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

Nyní vypočteme limitu. Po úpravě a použití l'Hospitalova pravidla vyjde:

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0^+} G(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} c^2 \ln c - \frac{1}{4} + \frac{c^2}{4} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} c^2 \ln c - \frac{1}{4} + 0 = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\ln c}{\frac{1}{c^2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{-\frac{2}{c^3}} = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \lim_{c \rightarrow 0^+} c^2 = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

takže

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}.$$

Ještě jednou však zdůrazněme, že tento integrál není nevlastní.

Na závěr uvedeme příklad, jehož výsledek opět podstatně využijeme v souvislosti s kritérii konvergence.

Příklad 4.10. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, je integrál $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ konvergentní.



Řešení. Funkce $1/x^k = x^{-k}$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$. Z grafů mocninných funkcí na obr. 4.4 je vidět, že pro $k > 0$ platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-k} = +\infty$, takže jde o nevlastní integrál. (Pro $k \leq 0$ jde naopak o normální určitý integrál.)

Z příkladu 4.8 víme, že integrál diverguje pro $k = 1$. Nechť tedy $k \neq 1$. Postupně dostaneme:

$$G(c) = \int_c^1 \frac{dx}{x^k} = \int_c^1 x^{-k} \, dx = \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right]_c^1 = \frac{1}{-k+1} (1 - c^{-k+1}) = \frac{1 - c^{-k+1}}{1 - k}.$$

Nyní vypočítáme limitu. S pomocí obr. 4.4 je snadno vidět, že

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0^+} G(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1 - c^{-k+1}}{1 - k} = \frac{1 - 0}{1 - k} = \frac{1}{1 - k} && \text{pro } 0 < k < 1, \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} G(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1 - c^{-k+1}}{1 - k} = \frac{1 - \infty}{1 - k} = +\infty && \text{pro } k > 1.\end{aligned}$$

Zahrneme-li i případ $k = 1$, dostaneme, že

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k} \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } 0 < k < 1, \\ \text{diverguje} & \text{pro } k \geq 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

V konvergentním případě $0 < k < 1$ platí

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{1 - k},$$

ale opět tento výsledek není tak důležitý, jako skutečnost, že hranicí mezi konvergencí a divergencí tohoto integrálu je hodnota $k = 1$. ▲

Posunutím funkce $1/x^k$ o číslo α vpravo nebo vlevo a případným překlopením kolem přímky $x = \alpha$ se snadno zvaží, že rovněž integrály

$$\int_d^\alpha \frac{dx}{(\alpha-x)^k}, \quad d < \alpha, \quad \text{resp.} \quad \int_\alpha^d \frac{dx}{(x-\alpha)^k}, \quad d > \alpha, \quad (4.5)$$

konvergují pro $0 < k < 1$ a divergují pro $k \geq 1$ — viz obr. 4.8 a) a 4.8 b).

Konečně z příkladů 4.5 a 4.10 je vidět, že nevlastní integrály

$$\int_0^d \frac{dx}{x^k} \quad \text{a} \quad \int_d^{+\infty} \frac{dx}{x^k},$$

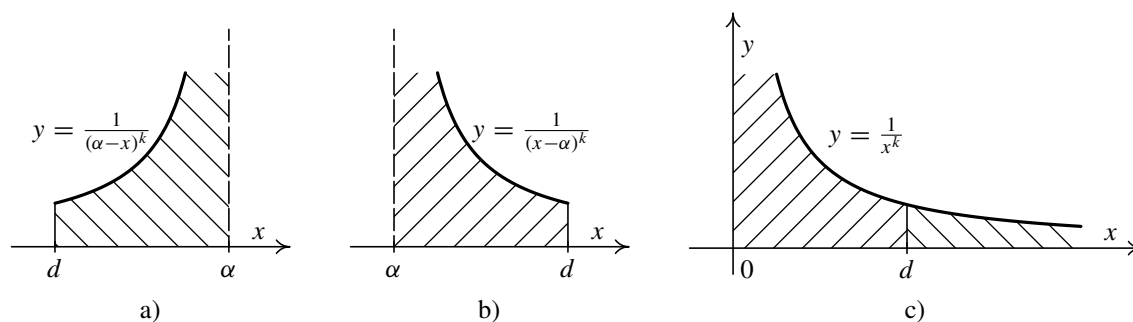
kde $d > 0$, pro $k = 1$ oba divergují a pro $k > 0$, $k \neq 1$ právě jeden z nich konverguje a právě jeden diverguje — viz obr. 4.8 c). Konkrétně platí:

	$\int_0^d \frac{dx}{x^k}$	$\int_d^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$
$0 < k < 1$	konverguje	diverguje
$k = 1$	diverguje	diverguje
$k > 1$	diverguje	konverguje

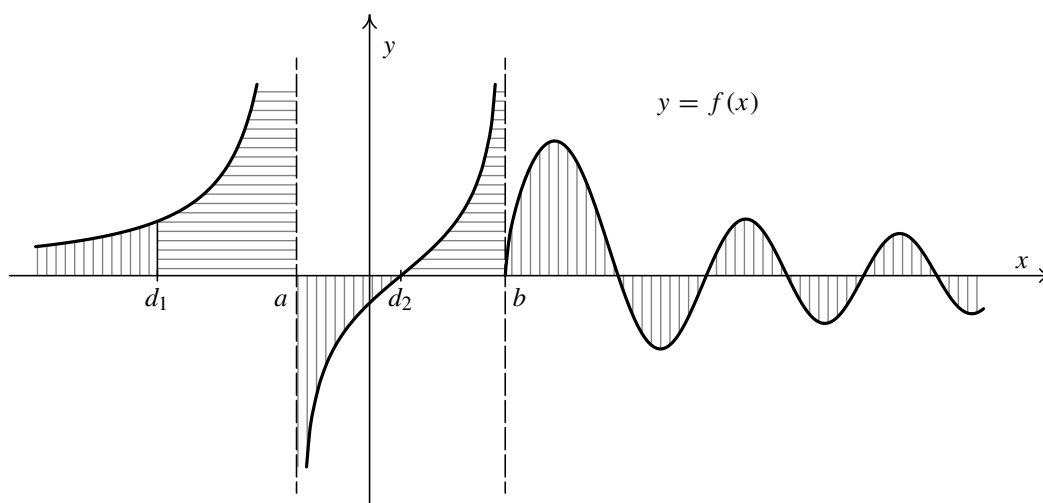
4.3. Zobecnění nevlastního integrálu

Při zavádění nevlastního integrálu z funkce f jsme doposud předpokládali, že interval, na němž jsme integrovali, obsahoval právě jeden „špatný“ bod, tj. bod, který způsoboval, že neexistoval obyčejný určitý integrál. Navíc vždy šlo o koncový bod integračního oboru. Buď to byl symbol $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo to byl tzv. singulární bod, v jehož žádném okolí nebyl integrand f ohraničený. Tento „špatný“ konec integračního oboru jsme „odřízli“ přímkou $x = c$ a integrovali funkci f přes zbývající ohraničený uzavřený interval. Pak jsme limitním přechodem zmenšovali „odříznutou“ část integračního oboru.

Nyní dovolíme, aby integrační obor J (vždy půjde o interval) obsahoval takových „špatných“ bodů více, ale *konečný* počet. Tedy např. může být neohraničený na obě strany,



Obr. 4.8



Obr. 4.9: Zobecnění nevlastního integrálu

tj. může to být interval $(-\infty, +\infty)$. Nebo mohou být v obou koncích singulární body. Nebo může být singulární bod i uvnitř integračního oboru; *singulárním bodem* v tomto případě rozumíme takový bod, v jehož žádném oboustranném okolí není integrand f ohraničený. V singulárních bodech integrand f obvykle nebude definovaný, to však nemá na nic vliv. Tedy J bude interval s koncovými body α a β , kde $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Postupovat budeme tak, že mezi „špatné“ body vložíme pomocné body a rozdělíme pomocí nich a singulárních bodů integrační obor J tak, aby jeho jednotlivé díly neobsahovaly uvnitř už žádný singulární bod, tj. všechny singulární body budou krajními body některých vzniklých podintervalů. Přitom každý podinterval bude mít „špatný“ právě jeden konec.

Pak budeme vyšetřovat integrály na jednotlivých podintervalech. Budeme předpokládat, že pro libovolný ohraničený uzavřený interval $\langle a, b \rangle$, který je částí integračního oboru J a neobsahuje žádný singulární bod, existuje určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$. Půjde tudíž o nevlastní integrály předchozích dvou typů.

Princip celého postupu si ukážeme na funkci f s integračním oborem $(-\infty, +\infty)$, jejíž graf je uveden na obr. 4.9. „Špatné“ body jsou zřejmě $\pm\infty$ a body a a b , které jsou singulární (přímky $x = a$ a $x = b$ jsou asymptotami bez směrnice ke grafu funkce f). Vložíme tedy pomocný bod d_1 mezi $-\infty$ a a a pomocný bod d_2 mezi a a b . Mezi b a $+\infty$ pomocný bod vkládat nemusíme, protože v pravém okolí bodu b je integrand f ohraničený. Dostaneme pět nevlastních integrálů

$$\int_{-\infty}^{d_1} f(x) dx, \quad \int_{d_1}^a f(x) dx, \quad \int_a^{d_2} f(x) dx, \quad \int_{d_2}^b f(x) dx, \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Definice 4.11. Za výše uvedených předpokladů řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ *konverguje* právě tehdy, když *konvergují všechny* dílčí nevlastní integrály. Jeho hodnota je potom součtem hodnot jednotlivých integrálů. V opačném případě, tj. pokud *alespoň jeden* dílčí integrál *diverguje*, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ *diverguje*.

Pokud by tedy všech pět dílčích integrálů v našem ilustračním příkladu konvergovalo, konvergoval by i integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ a platilo by:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{d_1} f(x) dx + \int_{d_1}^a f(x) dx + \int_a^{d_2} f(x) dx + \\ + \int_{d_2}^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Narazíme-li při vyšetřování dílčích nevlastních integrálů na divergentní, výpočet končí a výchozí integrál je rovněž divergentní. Proto je v konkrétním případě výhodné začít s těmi dílčími integrály, o nichž si myslíme, že divergují. Pokud bude náš odhad správný, výpočet bude kratší.

Na závěr je třeba zmínit se ještě o tom, jakou roli hrají pomocné dělicí body. Problém by byl, kdyby při jiném výběru mohl být odlišný výsledek, tj. odpověď na otázku, zda integrál konverguje nebo diverguje a kolik je jeho hodnota v konvergentním případě, by mohla být jiná. Z aditivity určitého integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 3.9) a poznámky 4.4 vyplývá, že nic takového se nemůže stát. Pomocné dělicí body si tedy můžeme vybrat libovolně. Dokonce by ani nevadilo, kdybychom přidali nějaké zbytečně navíc, takže by některé dílčí integrály nebyly nevlastní. Samozřejmě, pokud je to možné, je výhodné je volit tak, aby se využila případná symetrie integrandu (sudá a lichá funkce), souměrnost grafu vzhledem k nějaké rovnoběžce s osou y a pod., aby se výpočty co nejvíce usnadnily.

Popsaný postup si ukážeme na několika příkladech.



Příklad 4.12. Vypočtete následující nevlastní integrály:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx,$

b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)},$

d) $\int_0^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx.$

Řešení.

a) Integrand $\frac{x^2}{x^6+1}$ je spojitý na celé reálné ose, takže stačí vložit jeden pomocný bod, který oddělí $-\infty$ a $+\infty$. Vzhledem symetrii (funkce je sudá) je vhodné zvolit nulu — viz obr. 4.10 a). Dostaneme dva nevlastní integrály na neohrazených intervalech

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^6 + 1} dx \quad \text{a} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx. \quad (4.6)$$

Začneme např. druhým z nich. „Odřízneme“ pravý konec, tj. vypočítáme pro $c \geq 0$ s použitím substituční metody pro určitý integrál, že

$$F(c) = \int_0^c \frac{x^2}{x^6+1} dx = \left| \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \\ 0 \rightsquigarrow 0, c \rightsquigarrow c^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^{c^3} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3} [\operatorname{arctg} t]_0^{c^3} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} c^3 - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} c^3.$$

Dále určíme limitu pro $c \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} c^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}.$$

Protože integrand je sudá funkce, musí být nutně vzhledem k symetrii i první integrál v (4.6) konvergentní a nabývat stejné hodnoty. Nemusíme ho tedy počítat. Celkově tudíž náš integrál konverguje a platí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^6+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Integrand $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je spojitý na intervalu $(-1, 1)$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

jsou oba konce singulárními body (jsou zde asymptoty bez směrnice). Vložíme mezi ně dělicí bod, nejlépe zase nulu, protože integrand je sudou funkcí. Dostaneme dva nevlastní integrály z neohrazených funkcí — viz obr. 4.10 b):

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.7)$$

Opět začneme např. s druhým z nich. „Odřízneme“ pravý konec, tj. vypočítáme pro $0 \leq c < 1$, že

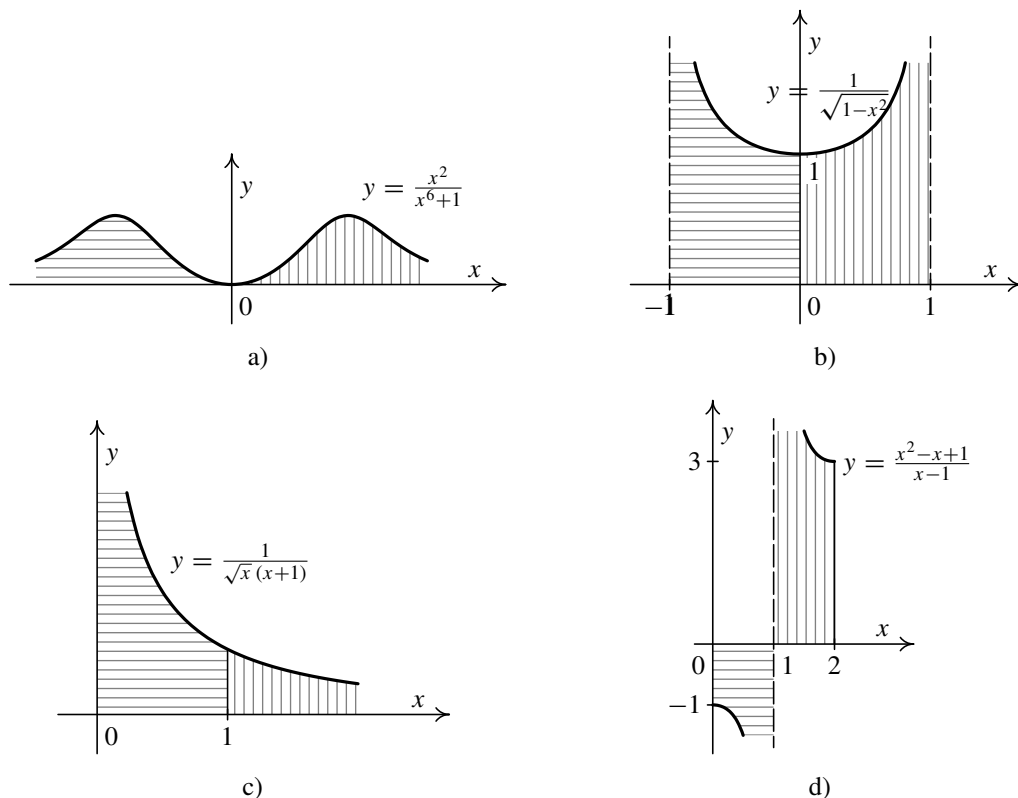
$$F(c) = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\operatorname{arcsin} x]_0^c = \operatorname{arcsin} c - \operatorname{arcsin} 0 = \operatorname{arcsin} c.$$

Dále určíme limitu pro $c \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} \operatorname{arcsin} c = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Díky souměrnosti musí být první integrál v (4.7) také konvergentní a mít stejnou hodnotu. Celkově proto náš integrál konverguje a platí:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



Obr. 4.10: Nevlastní integrály

c) Integrand $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ je spojitý na intervalu $(0, +\infty)$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

je v levém konci singulární bod (je zde asymptota bez směrnice). Mezi něho a $+\infty$ vložíme jeden dělicí bod, např. jedničku. Dostaneme dva nevlastní integrály, první z neohraničené funkce a druhý na neohraničeném intervalu — viz obr. 4.10 c):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \quad \text{a} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}. \quad (4.8)$$

Vyšetříme první z nich. „Odřízneme“ levý konec, tj. vypočítáme pro $0 < c \leq 1$ s použitím substituční metody pro určitý integrál, že

$$\begin{aligned}
 G(c) &= \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ c \rightsquigarrow \sqrt{c}, 1 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{c}}^1 \frac{2t dt}{t(t^2+1)} = \\
 &= 2 \int_{\sqrt{c}}^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2[\operatorname{arctg} t]_{\sqrt{c}}^1 = 2 \operatorname{arctg} 1 - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} = \\
 &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c}.
 \end{aligned}$$

Určíme limitu pro $c \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} \right) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Nyní vyšetříme druhý integrál z (4.8). „Odřízneme“ pravý konec, tj. vypočítáme pro $c \geq 1$, že

$$\begin{aligned}
 F(c) &= \int_1^c \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ 1 \rightsquigarrow 1, c \rightsquigarrow \sqrt{c} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{c}} \frac{2t dt}{t(t^2+1)} = \\
 &= 2 \int_1^{\sqrt{c}} \frac{dt}{t^2+1} = 2[\operatorname{arctg} t]_1^{\sqrt{c}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} - 2 \operatorname{arctg} 1 = \\
 &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Určíme limitu pro $c \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{c} - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Protože oba dílčí integrály konvergují, konverguje i náš integrál a platí

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

d) Integrand $\frac{x^2-x+1}{x-1}$ je spojitý na intervalu $(0, 2)$ s výjimkou bodu $x = 1$, v němž není definovaný. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

jde o singulární bod (je zde asymptota bez směrnice). Integrační obor $(0, 2)$ tedy rozdělíme v tomto singulárním bodě. Dostaneme dva nevlastní integrály z neohrazených funkcí — viz 4.10 d):

$$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x-1} dx \quad \text{a} \quad \int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x-1} dx. \quad (4.9)$$

Vyšetříme např. druhý z nich. „Odřízneme“ levý konec, tj. vypočítáme, že pro $1 < c \leq 2$ je

$$\begin{aligned} G(c) &= \int_c^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx = \int_c^2 \left(x + \frac{1}{x - 1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| \right]_c^2 = \\ &= 2 + \ln 1 - \frac{c^2}{2} - \ln|c - 1| = 2 - \frac{c^2}{2} - \ln|c - 1|. \end{aligned}$$

Určíme limitu pro $c \rightarrow 1^+$:

$$\lim_{c \rightarrow 1^+} \left(2 - \frac{c^2}{2} - \ln|c - 1| \right) = 2 - \frac{1}{2} - (-\infty) = +\infty.$$

Tento dílčí integrál diverguje, takže diverguje i náš integrál. Na prvním integrálu z (4.9) už nezáleží (snadno se ověří, že také diverguje). ▲

V podkapitole 3.6.1 jsme se zabývali geometrickými aplikacemi určitého integrálu. Ukazuje se, že vzorce tam uvedené platí, i když vedou na konvergentní nevlastní integrály. Např. integrandy v prvních třech nevlastních integrálech z obr. 4.10 jsou nezáporné. Protože tyto integrály konvergovaly, udávají jejich hodnoty obsahy příslušných podgrafů. Naopak obr. 4.8 c) a za ním následující tabulka říkají, že obsah podgrafu funkce $1/x^k$, kde $k > 0$, není na intervalu $(0, +\infty)$ nikdy konečný.

Podobně v příkladu 3.40 jsme zavrhlí výpočet délky půlkružnice, vycházející z funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, protože vedl na integrál z neohrazené funkce

$$\int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx,$$

a použili místo toho parametrické vyjádření kružnice. Nyní již víme, že jde o nevlastní integrál, který má singulární body v obou koncích integračního oboru $\langle -r, r \rangle$. Snadno si můžete ověřit, že tento integrál konverguje a dává správný výsledek pro délku půlkružnice πr — v podstatě jde o integrál znázorněný na obr. 4.10 b); tam bylo $r = 1$, takže výsledek byl π .

Nevlastní integrál má značný význam i pro fyzikální aplikace.

Na závěr spočítáme jeden jednoduchý příklad, na němž si ukážeme hrubou chybu, které se studenti bohužel někdy dopouštějí.



Příklad 4.13. Vypočtete integrál $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Řešení: Integrand $\frac{1}{x^2}$ je spojitý na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ s výjimkou bodu $x = 0$, kde není definovaný. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

jde o singulární bod (je zde asymptota bez směrnice). Integrační obor $\langle -1, 1 \rangle$ rozdělíme v tomto singulárním bodě a dostaneme dva nevlastní integrály z neohrazených funkcí — viz obr. 4.11:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Vyšetříme první integrál. „Odřízneme“ pravý konec, tj. vypočítáme pro $-1 \leq c < 0$, že

$$\int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^c x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^c = -\frac{1}{c} - 1.$$

Určíme limitu pro $c \rightarrow 0^-$:

$$\lim_{c \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1 \right) = -(-\infty) - 1 = +\infty,$$

takže integrál je divergentní. Rychleji jsme to mohli zjistit ze vzorce (4.4). Ze symetrie je zřejmé, že i druhý dílčí integrál dá stejný výsledek, ale to už nehraje roli. Každopádně náš integrál na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ diverguje.

Studenti někdy ignorují, že jde o nevlastní integrál, a použijí formálně Newtonovu-Leibnizovu formuli, jako by šlo o běžný určitý integrál. Jejich výpočet pak vypadá nějak takto:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2. \quad !$$

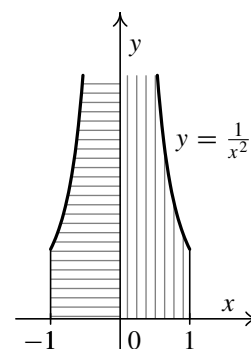
To je samozřejmě úplně špatně! Místo správné odpovědi, že integrál je divergentní, autoři takového „postupu“ dojdou k závěru, že se jedná o konvergentní integrál (přesněji řečeno, oni ho považují za obyčejný určitý integrál). Přitom by jim mělo přinejmenším být divné, že z jasně kladné funkce $1/x^2$, obsah jejíhož podgrafu tudíž musí být kladné číslo nebo $+\infty$, dostali záporný výsledek. ▲

Pro zájemce:

V definicích 4.1 a 4.6 jsme pod pojem divergentního integrálu zahrnuli dvě možnosti — buď limita daného výrazu byla nevlastní, nebo neexistovala. Někdy se tyto možnosti ještě podrobněji rozlišují a pro případ, kdy limita vyjde $\pm\infty$, se používá termín *určitě divergentní integrál*.

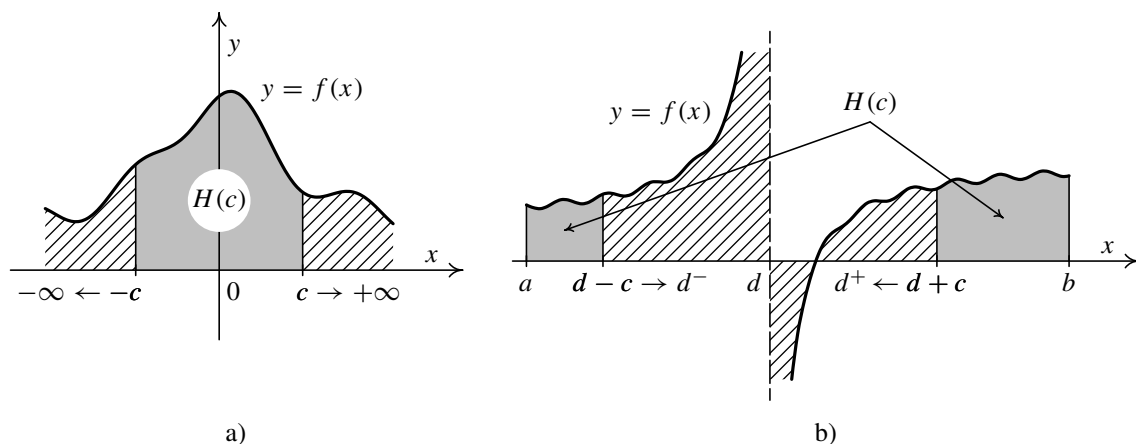
V případě zobecnění nevlastního integrálu z definice 4.11 se tento nevlastní integrál nazývá *určitě divergentní*, jestliže není konvergentní a všechny dílčí integrály, které divergují, divergují určitě a dávají nekonečno téhož znaménka. Výsledný integrál má potom za hodnotu nekonečno stejného znaménka.

Poznámka 4.14. V řadě důležitých aplikací, jako např. výpočet inverzní Laplaceovy nebo Fourierovy transformace — viz [10] — má velký význam jiné rozšíření nevlastního integrálu, než bylo



Obr. 4.11





Obr. 4.12: Hlavní hodnota integrálu

uvedené v definici 4.11. Jde o tzv. *hlavní hodnotu* nevlastního integrálu. Ta se značí v.p. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Symbol v.p. je zkratkou francouzských slov *valeur principale* (čti *valer prensipal*), která znamenají právě hlavní hodnotu.

Ukážeme si dvě varianty tohoto pojmu. Nejprve budeme uvažovat funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $(-\infty, +\infty)$, která zde nemá žádný singulární bod a je integrovatelná na každém ohraničeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro libovolné $c \geq 0$ definujeme funkci

$$H(c) = \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Z integračního oboru $(-\infty, +\infty)$ jsme tedy „uřízli“ souměrně oba konce — viz obr. 4.12 a). Nyní budeme současně posouvat *stejně rychle* oba konce od sebe, tj. určíme limitu

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} H(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Pokud je tato limita konečná a rovná nějakému číslu I , říkáme, že *existuje hlavní hodnota nevlastního integrálu* funkce f na intervalu $(-\infty, +\infty)$, a píšeme

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I.$$

Jako druhou variantu budeme uvažovat funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$, který uvnitř obsahuje jeden singulární bod d , přičemž $f(x)$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$, který neobsahuje d . Pro libovolné malé $c > 0$ definujeme funkci

$$H(c) = \int_a^{d-c} f(x) dx + \int_{d+c}^b f(x) dx.$$

Z integračního oboru jsme tedy „vyřízli“ symetrické okolí bodu d o délce $2c$ — viz obr. 4.12 b). Nyní budeme konce tohoto okolí posouvat *stejně rychle* k sobě, tj. určíme limitu

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} H(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{d-c} f(x) dx + \int_{d+c}^b f(x) dx \right).$$

Pokud je konečná a rovná číslu I , říkáme, že *existuje hlavní hodnota nevlastního integrálu* funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, a píšeme

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = I.$$

Snadno můžeme ověřit, že jestliže nevlastní integrál konverguje ve smyslu definice 4.11, existuje i ve smyslu hlavní hodnoty a oba výsledky jsou stejné. Opak však obecně neplatí, pouze za jistých dodatečných předpokladů, např. nemění-li integrand znaménko. Hlavní hodnota je tedy zajímavá, když integrand nemá pořád stejné znaménko.

Např. pro libovolnou lichou funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $(-\infty, +\infty)$ existuje hlavní hodnota nevlastního integrálu na tomto intervalu (samozřejmě předpokládáme, že existuje určitý integrál $f(x)$ na každém intervalu $\langle a, b \rangle$). Je totiž (viz poznámka 3.44)

$$H(c) = \int_{-c}^c f(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} H(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Ale např. pro funkci $f(x) = x$ integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ diverguje, protože, jak se lze snadno přesvědčit, divergují oba dílčí integrály: $\int_{-\infty}^0 x dx = -\infty$ a $\int_0^{+\infty} x dx = +\infty$.

Zkusme ještě určit hlavní hodnotu divergentního nevlastního integrálu z příkladu 4.12 d), znázorněného na obr. 4.10 d). Funkce $\frac{x^2-x+1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1}$ má na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ vnitřní singulární bod $x = 1$. Pro malé $c > 0$ je:

$$\begin{aligned} H(c) &= \int_0^{1-c} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx + \int_{1+c}^2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right]_0^{1-c} + \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right]_{1+c}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (1-c)^2 + \ln|-c| - 0 - 0 + 2 + 0 - \frac{1}{2} (1+c)^2 - \ln|c| = 2 - 2c. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2c) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{v.p.} \int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx = 2.$$

Poznámka 4.15. Uvažujme dva nevlastní integrály $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ a $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ libovolných typů, ale na témž integračním oboru, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Jsou-li oba dva konvergentní (tento předpoklad je podstatný), snadno se odvodí, že i integrály ze součtu $f(x) + g(x)$ a násobku $cf(x)$, kde c je konstanta, jsou konvergentní a platí:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx, \\ \int_{\alpha}^{\beta} cf(x) dx &= c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \end{aligned}$$

Tedy konvergentní integrály jsou aditivní a homogenní vzhledem k integrandům — srovnejte větu 3.7 pro určitý integrál. Podotkněme, že integrál $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx$ nemusí být nevlastní.



Příklady k procvičení

1. Vypočtěte následující nevlastní integrály:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx,$ | b) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{y^5}} dy,$ | c) $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{t^2+1} dt,$ |
| d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{w\sqrt{1+w^2}} dw,$ | e) $\int_0^{+\infty} \frac{4}{1+x^4} dx,$ | f) $\int_0^{+\infty} \frac{8}{8+2x^2} dx,$ |
| g) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2+2x+2} dx,$ | h) $\int_0^{+\infty} 3e^{-0,3\phi} d\phi,$ | i) $\int_0^{+\infty} 4e^{-2t} \sin 2t dt,$ |
| j) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x+1} dx,$ | k) $\int_0^{+\infty} r e^{-r^2/2} dr,$ | l) $\int_1^{+\infty} x \sin x dx,$ |
| m) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)},$ | n) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{u} du,$ | o) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx,$ |
| p) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)},$ | q) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2} du,$ | r) $\int_0^{+\infty} \frac{2z}{2z^2+3} dz,$ |
| s) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+3)},$ | t) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 u}{u^2} du,$ | u) $\int_2^{+\infty} \frac{du}{u \ln^2 u}.$ |

2. Vypočtěte následující nevlastní integrály:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int_0^{+\infty} \frac{2m}{(1+m)^3} dm,$ | b) $\int_1^{+\infty} \frac{4 \operatorname{arctg} x}{x^2} dx,$ | c) $\int_0^{+\infty} 2\rho^3 e^{-\rho^2} d\rho,$ |
| d) $\int_0^{+\infty} \frac{9}{1+x^3} dx,$ | e) $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} dy,$ | f) $\int_1^{\infty} \frac{\cos \ln x}{x} dx,$ |
| g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha,$ | h) $\int_0^2 (2r-1) \ln^2 r dr,$ | i) $\int_0^2 \frac{1}{2-x} dx,$ |
| j) $\int_0^2 \frac{3t^3}{\sqrt{4-t^2}} dt,$ | k) $\int_0^1 \ln x dx,$ | l) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$ |
| m) $\int_0^1 \frac{1}{p^2-4p+3} dp,$ | n) $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{x-1}} dx,$ | o) $\int_1^2 \frac{1}{s \ln s} ds,$ |
| p) $\int_1^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} z}{z^3} dz,$ | q) $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2(1+x^2)} dx,$ | r) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \ln x}{x^2} dx.$ |

3. Vypočtěte následující nevlastní integrály:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$,	b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cos^2 \beta} d\beta$,	c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$,
d) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,	e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$,	f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$,
g) $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$,	h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$,	i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } dx$,
j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$,	k) $\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4-1} dx$,	l) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$,
m) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$,	n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2+x^2} dx$,	o) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ x }{x^4+1} dx$.

Klíč k příkladům k procvičení



Označení D ve výsledcích znamená, že daný integrál diverguje, ale ne určitě.

1. a) 1, b) 2, c) $+\infty$, d) $\ln(1 + \sqrt{2})$,
 e) $\pi\sqrt{2}$, f) π , g) $\pi - 2 \operatorname{arctg} 2$, h) 10,
 i) 1, j) $+\infty$, k) 1, l) D,
 m) $\frac{2 \ln 2 - \pi}{8}$, n) $+\infty$, o) $-\ln 2 + 1$, p) $\frac{\pi}{12}$,
 q) 1, r) D, s) $-\frac{1}{4} \ln 3$, t) 2,
 u) $-\frac{1}{\ln 2}$.
2. a) 1, b) $\pi + 2 \ln 2$, c) 1, d) $2\pi\sqrt{3}$, e) π , f) D,
 g) $+\infty$, h) $2 \ln^2 2 - 2$, i) $+\infty$, j) 16, k) -1 , l) 2,
 m) $+\infty$, n) 8, o) $+\infty$, p) 1, q) $4 - \pi$, r) $\frac{1}{2}$.
3. a) π , b) není def., c) D, d) $\frac{\pi}{4}$, e) π , f) $\frac{\pi^3}{12}$,
 g) $+\infty$, h) D, i) 2, j) D, k) D, l) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$,
 m) D, n) πa^2 , o) $\frac{\pi}{2}$.

4.4. Kritéria konvergence nevlastních integrálů

Chceme-li s našimi dosavadními znalostmi rozhodnout, zda daný nevlastní integrál konverguje nebo diverguje, musíme spočítat jistý pomocný určitý integrál, který závisí na dolní resp. horní mezi, a pak zkoumat jeho limitu, když se mez přibližuje k jisté hodnotě. Tento postup má jedno podstatné úskalí. Určitý integrál umíme spočítat v podstatě jedině pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule. K tomu potřebujeme najít primitivní funkci k integrandu. Jak už víme z předchozího textu, i v případě poměrně jednoduchého integrandu z množiny elementárních funkcí to může být velice pracná záležitost, nebo, což je daleko horší, primitivní funkce v množině elementárních funkcí vůbec neexistuje. V takových případech pak nemáme analytický vzorec výrazu, jehož limitu máme počítat, a o zadaném nevlastním integrálu nejsme schopni nic říci.

V tomto oddílu se budeme zabývat otázkou, jak vyšetřovat daný nevlastní integrál, aniž bychom k tomu potřebovali primitivní funkci k integrandu. Zatímco při způsobu popsaném v předchozím odstavci (pokud se nám ho podařilo zrealizovat), jsme v případě konvergentního integrálu dostali i hodnotu nevlastního integrálu, nám nyní půjde *jen* o odpověď na otázku, zda integrál konverguje, nebo diverguje. Zato však získání tohoto poznatku bude daleko snazší.

Samozřejmě je přirozené zamyslet se nad tím, zda nám v případě konvergentního integrálu takováto „slabší“ informace vůbec k něčemu je, když cílem je obvykle určit jeho hodnotu. Ukazuje se, že i tato informace je velmi užitečná. Vysvětlíme si to např. na nevlastním integrálu na neohrazeném intervalu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, pro další typy nevlastních integrálů je situace obdobná.

V poznámce 4.4 jsme si ukázali, že pro $d > a$ z konvergence zmíněného integrálu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ vyplývá i konvergence integrálu $\int_d^{+\infty} f(x) dx$ a že platí

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^{+\infty} f(x) dx. \quad (4.10)$$

Z definice nevlastního integrálu a předchozí rovnosti vyplývá, že

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^d f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_d^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Zvolíme-li tedy d dostatečně velké, je integrál $\int_d^{+\infty} f(x) dx$ hodně malý, takže jeho zanedbáním v (4.10) dostaneme, že

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \doteq \int_a^d f(x) dx.$$

Je tedy možné pro určení hodnoty nevlastního integrálu použít s jistou chybou určitý integrál, jehož přibližnou hodnotu (bez znalosti primitivní funkce) lze nalézt celkem snadno a přesně — viz kapitola 5.

Je ale nutné zdůraznit, že *podstatný předpoklad* byl, že integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *konvergoval*! To totiž zaručovalo, že pro velká d byl integrál $\int_d^{+\infty} f(x) dx$ malý. V případě

určitě divergentního integrálu má rovnost (4.10) sice smysl, ale oba nevlastní integrály v ní představují symbol ∞ stejného znaménka. Tedy zanedbáním $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ bychom v (4.10) zanedbali „nekonečně veliké číslo“ vůči konečné hodnotě $\int_a^d f(x) dx$.

Jestliže integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverguje, ale ne určitě, pak tento integrál ani integrál $\int_d^{+\infty} f(x) dx$ vůbec nemají přiřazenou žádnou hodnotu (konečnou ani nekonečnou) a jejich symboly nelze v rovnosti podobného typu použít.

V dalším textu si uvedeme kritéria, která nám umožní za jistých předpokladů rozhodnout, zda daný nevlastní integrál konverguje nebo diverguje. Je třeba říci, že neexistuje žádné univerzální kritérium. Omezíme se na nevlastní integrály na neohrazeném intervalu $\langle a, +\infty \rangle$. Na ostatní typy nevlastních integrálů se příslušné výsledky snadno přenesou. Dále abychom zkrátili formulace příslušných vět, budeme ve zbytku kapitoly předpokládat, že integrandy jsou funkce mající určitý integrál na každém intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $b > a$.

4.4.1. Kritéria konvergence nezáporných funkcí

Situace je jednodušší u integrandů, které nemění znaménko na $\langle a, +\infty \rangle$. Stačí se omezit na nezáporné funkce (nekladnou funkci f nahradíme funkcí $-f$). Je-li f nezáporná, pak pomocná funkce $F(c) = \int_a^c f(x) dx$ je na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ neklesající a má proto pro $c \rightarrow +\infty$ vlastní nebo nevlastní limitu, takže integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ buď konverguje, nebo určitě diverguje. Odpadá tedy třetí možnost, že limita funkce $F(c)$ neexistuje, tj. že zmíněný integrál diverguje, ale ne určitě.

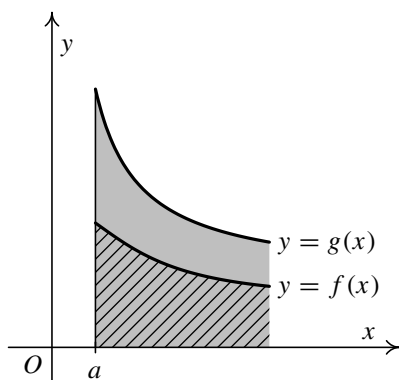
Věta 4.16 (Srovnávací kritérium). *Nechť na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ jsou splněny nerovnosti $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Pak platí:*

- i) *Jestliže konverguje $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, konverguje i $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.*
- ii) *Jestliže diverguje $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, diverguje i $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.*

O větší funkci g z předchozí věty říkáme, že je *majorantou* funkce f . Podobně o menší funkci f říkáme, že je *minorantou* funkce g . Předchozí tvrzení pak lze zformulovat takto:

- i) Konverguje-li integrál z majoranty, konverguje i integrál z minoranty.
- ii) Diverguje-li integrál z minoranty, diverguje i integrál z majoranty.

Situace je znázorněna na obr. 4.13. Podgraf majoranty g je vyznačen šedě, podgraf minoranty f je šrafovaný. Názorně řečeno: Je-li obsah větší plochy (podgrafu funkce g) konečný, musí být konečný i obsah menší plochy (podgrafu funkce f). Naopak, je-li obsah menší plochy nekonečný, musí být nekonečný i obsah větší plochy.



Obr. 4.13

Lze ještě doplnit, že je-li obsah menší plochy konečný, nelze obecně o obsahu větší plochy nic říct, a je-li obsah větší plochy nekonečný, nelze zase nic říct o obsahu menší plochy (mohou být konečné i nekonečné).

Pro úspěšné použití srovnávacího kritéria je důležité mít co největší zásobu funkcí, o nichž víme, že jejich integrály konvergují resp. divergují, abychom měli s čím srovnávat. Studentům obvykle dělá problém správně si „tipnout“, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje. Pokud si vyberou špatně, samozřejmě se jim nedaří najít větší funkci, jejíž integrál konverguje, nebo menší funkci, jejíž integrál diverguje. Také se nesmí zapomínat, že funkce musí být nezáporné.



Příklad 4.17. Rozhodněte, zda integrál $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1} dx$ konverguje nebo diverguje.

Řešení. Pomocí srovnávacího kritéria ukážeme, že integrál konverguje. Exponenciála nabývá pouze kladných hodnot, takže integrand je kladný. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $-1 \leq \sin x \leq 1$. Protože exponenciála e^u roste a funkce $\frac{1}{x^2+1}$ je kladná, postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} \sin x &\leq 1, \\ e^{\sin x} &\leq e, \\ 0 < \frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1} &\leq \frac{e}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Za majorantu tedy zvolíme funkci $g(x) = \frac{e}{x^2+1}$. V příkladu 4.2 a) jsme zjistili, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ je konvergentní. Podle poznámky 4.15 je konvergentní i integrál ze zvolené majoranty $\int_0^{+\infty} \frac{e}{x^2+1} dx$, z čehož plyne, že daný integrál konverguje.

Postup založený na nalezení primitivní funkce a tudíž i určení přesné hodnoty by selhal, protože primitivní funkce k integrandu $\frac{e^{\sin x}}{x^2+1}$ určitě není elementární. ▲

Následující limitní podoba předchozího kritéria je pro studenty obvykle snazší na použití.

Věta 4.18 (Limitní srovnávací kritérium). *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou nezáporné na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ a existuje limita*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 \leq L \leq +\infty. \quad (4.11)$$

Potom platí:

i) *Je-li $L < +\infty$ a integrál $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ konverguje, pak konverguje i integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.*

ii) Je-li $L > 0$ a $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverguje, pak diverguje i integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Pokud je tedy v předchozí větě limita L kladná a konečná, integrály z $f(x)$ a $g(x)$ současně buď konvergují nebo divergují.

Ke srovnání se často používají funkce $1/x^k$, o nichž víme, pro která k konvergují — viz (4.2). Podobně se pro nevlastní integrály z neohrazených funkcí používají funkce $1/|x - \alpha|^k$ — viz (4.5). V tomto případě je samozřejmě v (4.11) limita uvažována v singulárním bodě a je jednostranná.

Než si ukážeme použití na příkladech, uvedeme jeden užitečný důsledek limitního srovnávacího kritéria.

Důsledek 4.19 (Nutná podmínka konvergence). *Nechť integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konverguje a předpokládejme, že existuje limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Pak platí, že $L = 0$.*

Důkaz. Připusťme, že např. $L > 0$. Z definice limity vyplývá, že pro dostatečně velké $d > a$ je pak $f(x) > 0$ pro $x \geq d$. Integrál $\int_d^{+\infty} f(x) dx$ bude opět konvergentní (poznámka 4.4), a protože integrand je na intervalu $\langle d, +\infty \rangle$ kladný, je možné použít limitní srovnávací kritérium. Za funkci $g(x)$ zvolíme $g(x) = 1$. Pak $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Protože $\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^{+\infty} dx = +\infty$, musí podle limitního srovnávacího kritéria divergovat i $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, což je spor.

Je-li $L < 0$, budeme uvažovat funkci $-f(x)$ a dostaneme obdobně spor. Tím je tvrzení dokázané. \square

Integrand konvergentního integrálu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ale nemusí mít limitu pro $x \rightarrow +\infty$, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 4.20. Vypočtěte $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \geq 0, x \notin \mathbb{N}, \\ x & \text{pro } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Řešení. Pro $c > 0$ je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, c \rangle$ ohraničená a spojitá s výjimkou přirozených čísel, kterých je v takovém intervalu pouze konečně mnoho. Existuje tedy její určitý integrál a podle věty 3.6 platí:

$$F(c) = \int_0^c f(x) dx = \int_0^c 0 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = 0,$$

takže

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Integrál tedy konverguje. Přitom $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ očividně neexistuje, dokonce funkce $f(x)$ není na integračním oboru $\langle 0, +\infty \rangle$ shora ohraničená. \blacktriangle





Příklad 4.21. Rozhodněte o konvergenci resp. divergenci následujících nevlastních integrálů:

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(x^3 + x^2 + 1)} dx, \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg} x dx, \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}} dx.$$

Řešení. Ve všech případech použijeme limitní srovnávací kritérium.

a) Pro $x \geq 1$ jsou všechny členy čitatele i jmenovatele integrandu kladné, tedy integrand je kladný. V čitateli je mnohočlen stupně 2. Ve jmenovateli je mnohočlen stupně 3, který je vynásobený $\sqrt{x} = x^{1/2}$, takže nejvyšší mocnina ve jmenovateli je $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Rozdíl mezi nejvyšší mocninou jmenovatele a čitatele je proto $\frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$. Zvolíme tedy $g(x) = x^{-3/2}$. Vyjde:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x}(x^3+x^2+1)}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^3 + x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 + 0} = 1. \end{aligned}$$

Protože podle (4.2) je integrál $\int_1^{+\infty} x^{-3/2} dx$ konvergentní, je i zadaný integrál konvergentní.

b) Funkce $\operatorname{arccotg} x$ je kladná dokonce pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Na srovnání zkusíme použít funkci $g(x) = \frac{1}{x}$. S použitím l'Hospitalova pravidla vyjde:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Protože podle (4.2) integrál $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverguje, diverguje i $\int_1^{+\infty} \operatorname{arccotg} x dx$, a tedy také $\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg} x dx$.

c) Jedná se o nevlastní integrál z neohrazené funkce, protože

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

V $x = \frac{\pi}{2}$ je tudíž singulární bod. Pro srovnání použijeme funkci $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/2-x}}$. Vyjde:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{\pi/2-x}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi/2-x}}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sin x = 1.$$

Podle (4.5) integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\pi/2-x}}$ konverguje, konverguje tedy i zadaný integrál. \blacktriangle

4.4.2. Absolutní a relativní konvergence

Pro zájemce:

V obecném případě, kdy limita pomocné funkce $F(c) = \int_a^c f(x) dx$ nemusí pro $c \rightarrow +\infty$ existovat, je situace daleko složitější a rozhodnout o konvergenci takového integrálu může být někdy dost obtížné.

Nejprve si uvedeme jednu důležitou větu.

Věta 4.22. *Nechť $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ konverguje. Pak konverguje také integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.*

Vyšetřujeme-li tedy integrál, jehož integrand $f(x)$ mění znaménko, můžeme ho zkusit nahradit absolutní hodnotou $|f(x)|$, což je nezáporná funkce. Na takové integrály už lze použít kritéria z předchozího oddílu.

Ukazuje se, že vztah konvergence integrálů $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ a $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ hraje důležitou roli. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možné kombinace konvergence resp. divergence, které mohou mezi těmito dvěma integrály nastat (K značí konvergenci, D divergenci).

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$	$\int_a^{+\infty} f(x) dx$	označení $\int_a^{+\infty} f(x) dx$
K	K	konverguje absolutně
K	D	konverguje relativně
D	K	nemůže nastat podle věty 4.22
D	D	diverguje

Tab. 4.1: Absolutní a relativní konvergence nevlastních integrálů

Vzhledem k tomu, že nás nezajímá případ, kdy oba integrály divergují, zbývají pouze dvě kombinace. Tím je motivovaná následující definice.

Definice 4.23. Řekneme, že integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje i integrál $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Řekneme, že integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *konverguje neabsolutně* neboli *relativně*, jestliže on sám konverguje, ale integrál $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ diverguje.

Existence absolutně konvergentních integrálů je zřejmá. Je-li totiž integrand nezáporný, rovná se své absolutní hodnotě, takže integrály jsou stejné a konvergence v tomto případě znamená absolutní konvergenci. Totéž platí pro nekladné integrandy. Oba pojmy zavedené v předchozí definici jsou tudíž zajímavé pro funkce měnící znaménko. Že existují i neabsolutně konvergentní integrály, ukážeme později.

Příklad 4.24. Dokažte, že integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \ln x}{x^2} dx$ konverguje absolutně.

Řešení. Musíme vyšetřit integrál z nezáporné funkce $\frac{|\cos \ln x|}{x^2}$. Protože pro libovolné u je $|\cos u| \leq 1$, platí

$$0 \leq |\cos \ln x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{|\cos \ln x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \geq 1.$$



Majoranta $g(x) = \frac{1}{x^2}$ je podle (4.2) konvergentní, takže ze srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos \ln x|}{x^2} dx$ konverguje, což znamená, že zadaný integrál konverguje absolutně. ▲

Doposud nám chyběl vhodný nástroj, pomocí kterého bychom mohli dokazovat neabsolutní konvergenci. Nyní si takové kritérium uvedeme.

Věta 4.25 (Dirichletovo kritérium). *Nechť pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ definované na intervalu $(a, +\infty)$ platí:*

- 1) *Existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|\int_a^b f(x) dx| \leq K$ pro libovolné $b \geq a$.*
- 2) *Funkce $g(x)$ je monotónní a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.*

Pak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ konverguje.



Příklad 4.26. Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ neabsolutně konverguje.

Řešení. Připomeňme nejprve, že v $x = 0$ není singulární bod — viz obr. 3.10 a). Jedná se tedy o základní typ nevlastního integrálu na neohrazeném intervalu.

V Dirichletově kritériu zvolíme $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Ověříme předpoklady. Platí:

$$\int_0^b \sin x dx = [-\cos x]_0^b = -\cos b + \cos 0 = 1 - \cos b.$$

S využitím tohoto výsledku dostaneme

$$-1 \leq \cos b \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq -\cos b \geq -1 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq 1 - \cos b \geq 0.$$

Tedy $|1 - \cos b| \leq 2$, takže můžeme zvolit $K = 2$.

Funkce $\frac{1}{x}$ je na intervalu $(0, +\infty)$ klesající a platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Všechny předpoklady jsou proto splněny a zadaný integrál konverguje.

Abychom ukázali, že konverguje neabsolutně, musíme ověřit, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ je divergentní. To je trochu obtížnější a dokážeme to sporem.

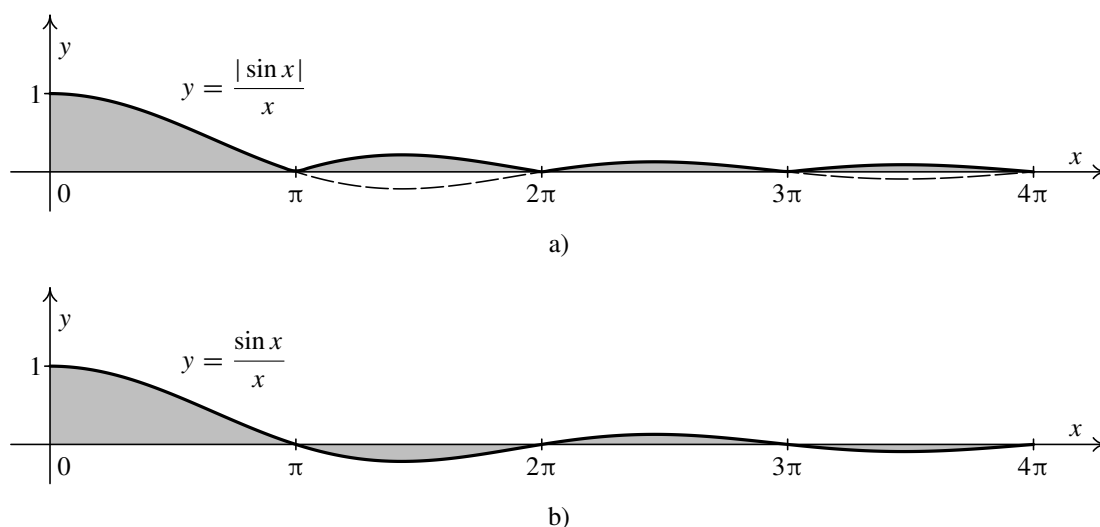
Připustíme tedy, že zmíněný integrál, a tudíž také integrál $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ konverguje. Protože pro libovolné číslo $x \in \mathbb{R}$ je $0 \leq |\sin x| \leq 1$, po vynásobení nezáporným číslem $|\sin x|$ dostaneme, že $0 \leq |\sin x|^2 = \sin^2 x \leq |\sin x|$. Pro $x \geq 1$ máme tudíž nerovnost $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}$. Ze srovnávacího kritéria nyní vyplývá, že rovněž integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ konverguje. Ukážeme, že to není možné.

Platí $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. O integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ se naprosto analogicky jako na počátku tohoto důkazu pomocí Dirichletova kritéria ověří, že konverguje. Podle poznámky 4.15 bude konvergentní také integrál

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$$

což je vzhledem k (4.2) spor. Výchozí předpoklad o konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ byl tudíž chybný.

Je možné ukázat, že hodnota integrálu je $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, tento výsledek ale nelze získat elementárními metodami, protože neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{x} dx$ vede na vyšší transcendentní funkci — viz kapitola 2.6.



Obr. 4.14: Neabsolutně konvergentní integrál

Výsledek je znázorněn na obr. 4.14. Integrál $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverguje, což znamená, že obsah podgrafu funkce $\frac{|\sin x|}{x}$ na obr. 4.14 a) na intervalu $(0, +\infty)$ je nekonečně velký.

V případě konvergentního integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ je situace jiná. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ mění na integračním oboru $(0, +\infty)$ znaménko — viz obr. 4.14 b). To má za následek, že se hodnota funkce $F(c) = \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx$ s rostoucím c nemění monotónně. Na intervalu $(0, \pi)$ roste (graf funkce $\frac{\sin x}{x}$ leží nad osou x , takže plocha se přičítá), na intervalu $(\pi, 2\pi)$ klesá (graf funkce $\frac{\sin x}{x}$ leží pod osou x , takže plocha se odčítá), na intervalu $(2\pi, 3\pi)$ opět roste, na intervalu $(3\pi, 4\pi)$ zase klesá atd. Ale její „rozkmit“ je čím dál menší, protože podle Dirichletova kritéria existuje limita $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$. Jak již bylo řečeno, lze dokázat, že hodnota $F(c)$ se čím dál tím víc přibližuje k číslu $\frac{\pi}{2}$. ▲

Příklady k procvičení

1. Rozhodněte o konvergenci resp. divergenci následujících integrálů:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x} dx,$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx,$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+1} dx,$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1} dx,$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx,$

f) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x^2+1) dx}{x^2 \sqrt{x^4+1}},$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x^3+1}} dx,$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(x+1)\sqrt{x}} dx,$

i) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx,$

j) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx,$

k) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

l) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx,$

m) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx,$

n) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx,$

o) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 e^{-x}}{\sqrt{x+1}} dx.$



2. Rozhodněte o konvergenci resp. divergenci následujících integrálů:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-1}^0 \frac{x^2 e^{-x}}{(x+1)^2} dx, & \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx, & \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \\ \text{d)} \int_0^\pi \frac{1}{\sin x} dx, & \text{e)} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx, & \text{f)} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 x} dx, \\ \text{g)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx, & \text{h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + \sin x} dx, & \text{i)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \end{array}$$

3. Dokažte, že následující integrály konvergují absolutně:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos x dx, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 e^{-x^2} dx, \\ \text{d)} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-x} dx, & \text{e)} \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, & \text{f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos e^x}{1+x^4} dx, \\ \text{g)} \int_{-1}^0 \frac{\cos \frac{1}{x} dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{h)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x^3+1}} dx, & \text{i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{|x|} dx}{x^4 + 2x^2 + 3}. \end{array}$$

4. Dokažte, že následující integrály konvergují:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, & \text{b)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, & \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx, \\ \text{d)} \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, & \text{e)} \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, & \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \\ \text{g)} \int_1^{+\infty} \frac{(x-1) \sin x}{x(x+1)} dx, & \text{h)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}, & \text{i)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x e^{\cos x}}{\sqrt[4]{x^2+1}} dx. \end{array}$$

Návod: V d) a e) nejprve integrály upravte substitucí $x^2 = t$.

5. Určete hlavní hodnotu integrálů:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-|x|} + x^3) dx, & \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}, & \text{c)} \int_0^2 \frac{1}{x^2-1} dx, \\ \text{d)} \int_{-2}^2 \frac{3}{x(x+3)} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x dx, & \text{f)} \int_0^3 \frac{4}{x^2-4} dx, \\ \text{g)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x e^{|x|} + x^2 e^{-|x|}) dx, & \text{h)} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cos x dx, & \text{i)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}. \end{array}$$

Klíč k příkladům k procvičení

Označení D ve výsledcích znamená, že daný integrál diverguje, K že konverguje.

1. a) D, b) D, c) K, d) K, e) D,
 f) K, g) K, h) K, i) D, j) K,
 k) K, l) K, m) D, n) K, o) K.
2. a) D, b) K, c) D, d) D, e) K,
 f) D, g) D, h) D, i) K.
5. a) 2, b) 0, c) $-\frac{1}{2} \ln 3$, d) $-\ln 5$, e) 0,
 f) $-\ln 5$, g) 4, h) 0, i) neex.

Autotest

1. Vypočítejte nevlastní integrály:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, d) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

2. Vypočítejte nevlastní integrály:

a) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$, b) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$, c) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

3. Vypočítejte nevlastní integrály:

a) $\int_0^1 \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2}$, c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + 2}$,
 d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x}$, e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$, f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$.

Klíč k autotestu

1. a) 2, b) ∞ , c) 1, d) 6.
2. a) $\frac{1}{2}$, b) $6\sqrt[3]{2}$, c) 1.
3. a) $\frac{32}{5}$, b) $\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, c) ∞ ,
 d) $\frac{-1}{e}$, e) π , f) $a^3 \pi$.

Kapitola 5

Numerické metody řešení určitého integrálu

Jediným prostředkem, který máme dosud k dispozici pro určení hodnoty určitého integrálu, je Newtonova-Leibnizova formule (3.10). Jak jsme se již ale v předchozím textu několikrát zmiňovali, její použití má řadu úskalí. Připomeňme si hlavní z nich.

- Primitivní funkce k integrandu neexistuje v množině elementárních funkcí.
- Primitivní funkci sice teoreticky umíme nalézt, ale praktický výpočet je velice komplikovaný a zdlouhavý.
- Primitivní funkce i k jednoduchému integrandu nemusí vůbec existovat (vadí např. body, v nichž existují různé jednostranné limity). Někdy to lze obejít rozdělením integračního oboru nebo použitím zobecněné Newtonovy-Leibnizovy formule (3.16).

Konečně je třeba vzít v úvahu, že v aplikacích je často integrand získán měřením např. v diskrétních časových okamžicích, takže máme pouze konečnou tabulku hodnot funkce, kterou máme integrovat, tj. známe pouze několik bodů grafu této funkce, ale vůbec nemáme její vzorec. Pak je použití Newtonovy-Leibnizovy formule zcela vyloučené.

Cílem této kapitoly bude seznámit se s tzv. *metodami numerické kvadratury*, které nám i za této situace (kdy eventuelně nemáme vzorec integrandu) umožní s jistou přesností určit hodnotu určitého integrálu. V praxi nám obvykle nebude vadit, že výsledek neznáme zcela přesně, protože často jsou naměřené hodnoty stejně zatíženy jistou chybou, a tudíž už to, z čeho vycházíme, není přesné.

V dnešní době, kdy máme běžně k dispozici výkonné počítače a kvalitní programy jako již zmiňované Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad a řadu dalších, které dokážou s velkou přesností určit přibližnou hodnotu určitého integrálu, by se mohlo zdát zbytečné mluvit o této problematice. Je však potřeba uvědomit si, že tyto programy musí obsahovat nějaké algoritmy, pomocí kterých se určité integrály přibližně počítají. Pro uživatele je dobré mít aspoň informativní představu, jak takové metody vypadají, aby věděli, co od nich mohou očekávat. Obecně se jedná o dost složitou problematiku, která tvoří rozsáhlou partii numerické matematiky. My si uvedeme jen tři jednoduché metody, které je možné

snadno použít i při ručním výpočtu na kalkulačce popř. je naprogramovat. Zájemci, kteří např. potřebují vytvořit program, jehož součástí je integrace „divoce“ se chovajících funkcí, se musí obrátit na speciální literaturu.

Princip numerického výpočtu integrálu $\int_a^b f(x) dx$ je založen na tom, že se funkce $f(x)$ nahradí jinou funkcí $g(x)$, která má *přibližně stejné funkční hodnoty* jako integrand $f(x)$, ale je *jednoduchá z hlediska výpočtu určitého integrálu*. Protože geometricky určitý integrál vyjadřuje (aspoň u nezáporných funkcí) obsah podgrafu, lze očekávat, že integrál $\int_a^b g(x) dx$ dá přibližně stejný výsledek, tj.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + R,$$

kde tzv. *chyba* R je malé číslo, které lze zanedbat. Obecně u numerických výpočtů je třeba mít na paměti, že celková chyba je dána součtem několika složek:

- chyba metody (právě zmíněné R) — té se vědomě dopouštíme, abychom úlohu zjednodušili,
- zaokrouhlovací chyby — kalkulačka i počítač (pokud nepočítají symbolicky) zaokrouhluje,
- chyby vstupních dat — pokud byly vstupní hodnoty získány měřením.

Mezi funkce, které se snadno integrují, patří především mnohočleny. Pokud je však integrační obor $\langle a, b \rangle$ delší, je požadavek, aby se hodnoty funkce $g(x)$ nelišily příliš od hodnot funkce $f(x)$ obvykle splnitelný jen za tu cenu, že mnohočlen má vysoký stupeň. To nepříznivě ovlivňuje zejména zaokrouhlovací chyby. Proto se obvykle postupuje tak, že se interval $\langle a, b \rangle$ rozdělí na menší podintervaly a na každém z nich se provede náhrada jiným mnohočlenem. Při výpočtu se integrál $\int_a^b g(x) dx$ pochopitelně rozdělí podle příslušných podintervalů. Vzorce na dílčích intervalech se někdy nazývají *jednoduché formule* a celkové vzorce pak *složené formule*.

V dalším budeme předpokládat, že interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejně dlouhých dílků, kde $n \in \mathbb{N}$ (takové dělení se nazývá *ekvidistantní*). Délku jednoho dílku (vlastně normu tohoto dělení) označíme $h > 0$ a dělicí body označíme $x_i, i = 0, \dots, n$ (tzv. *uzlové body*). Funkční hodnoty integrandu v uzlových bodech označíme y_i . Tedy

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

5.1. Obdélníková metoda

Nejjednodušším způsobem je volit funkci $g(x)$ konstantní. Za tuto konstantu zvolíme např. funkční hodnotu integrandu v levém konci intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, tedy bude $g(x) = f(x_i) = y_i$. Integraci dostaneme *jednoduchou obdélníkovou formulí*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \doteq \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i [x]_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i (x_{i+1} - x_i) = y_i h,$$

kde $x_{i+1} - x_i = a + (i + 1)h - (a + ih) = h$.

Odtud vyjde

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \\ &= y_0 h + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h + R(h), \end{aligned}$$

takže po úpravě a zanedbání chyby $R(h)$ dostaneme *složenou obdélníkovou formuli*

$$\int_a^b f(x) dx \doteq h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}). \quad (5.1)$$

Geometrické znázornění pro $n = 6$ je uvedeno na obr. 5.1. Vlastně jde o součet obsahů obdélníků o základnách stejné délky h a výškách y_0, y_1, \dots, y_{n-1} (obecně mohou být některé záporné).

Obdélníková metoda je tzv. *konvergentní* pro libovolnou integrovatelnou funkci $f(x)$. Tím se myslí, že pro $n \rightarrow +\infty$, tj. pro $h \rightarrow 0$ je $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$. To plyne z toho, že pravá strana v (5.1) je vlastně integrálním součtem.

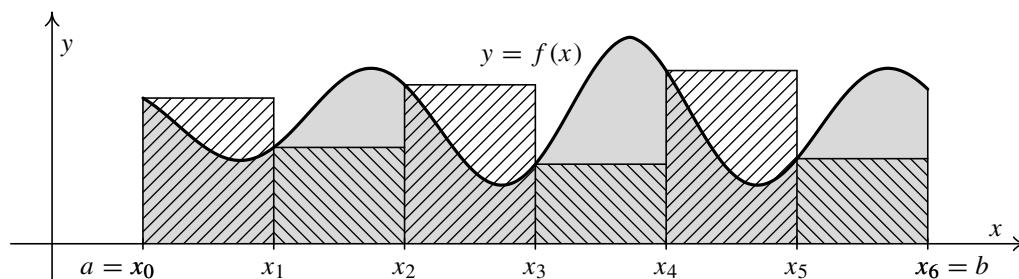
Obvykle chceme ale znát nějaký odhad chyby. Lze dokázat, že má-li funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou první derivaci, existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$R(h) = \frac{h}{2} (b - a) f'(\xi). \quad (5.2)$$

Skutečnou hodnotu čísla ξ ovšem neznáme. Vzorec je tedy možné použít jen tak, že chybu v absolutní hodnotě odhadneme shora a to tak, že $|f'(\xi)|$ nahradíme maximem absolutní hodnoty derivace $|f'(x)|$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. V konkrétních úlohách může být nalezení maxima značně pracné a navíc se ukazuje, že takový odhad je velmi pesimistický, skutečná chyba bývá mnohem menší. Proto je praktický význam takového odhadu malý.

Ze vzorce pro chybu (5.2) vyplývá, že obdélníková formule je zcela přesná pro konstantní funkce. Pak je totiž $f'(\xi) = 0$ pro libovolné ξ . Toto konstatování je ovšem jasné na první pohled i bez tohoto vzorce.

Použití obdélníkové formule je velice jednoduché, ale přesnost je pochopitelně malá, proto se používají jiné, účinnější metody, jimiž se budeme zabývat dále.



Obr. 5.1: Obdélníková metoda

5.2. Lichoběžníková metoda

U této metody nahradíme funkci $f(x)$ na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ lineární funkcí $g(x)$, mající za graf přímku, která prochází body $[x_i, y_i]$ a $[x_{i+1}, y_{i+1}]$. Ze známého směrnicového tvaru přímky vyplývá, že funkce $g(x)$ bude mít rovnici

$$g: y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad \text{tj.} \quad y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} (x - x_i).$$

Integraci dostaneme *jednoduchou lichoběžníkovou formulí*

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\doteq \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} (x - x_i) \right) dx = \\ &= y_i [x]_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} [(x - x_i)^2]_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i (x_{i+1} - x_i) + \\ &+ \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} (x_{i+1} - x_i)^2 = y_i h + \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} h^2 = \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1}). \end{aligned}$$

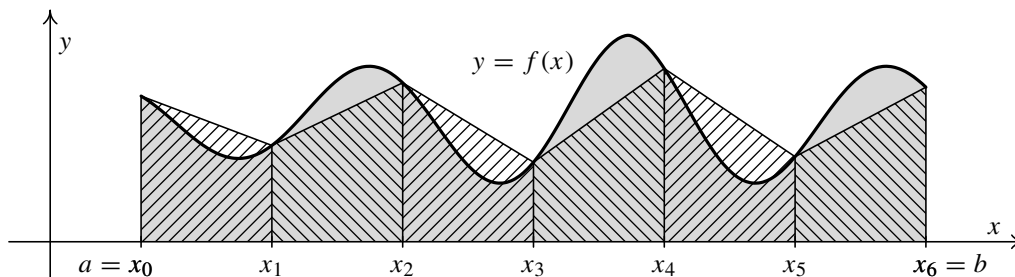
Tento výsledek je pro kladná y_i a y_{i+1} ve shodě se středoškolským vzorcem pro obsah lichoběžníku, který říká, že obsah lichoběžníku se rovná součtu délek základů násobenému poloviční výškou. Zmíněný lichoběžník vznikne náhradou grafu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ přímkou — viz obr. 5.2. Z předchozího vzorce dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \\ &= \frac{h}{2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{2} (y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n) + R(h), \end{aligned}$$

takže po úpravě a zanedbání chyby $R(h)$ dostaneme *složenou lichoběžníkovou formulí*

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (5.3)$$

Geometrické znázornění pro $n = 6$ je uvedeno na obr. 5.2. Vlastně jde v případě kladných y_i o součet obsahů lichoběžníků o stejných výškách h .



Obr. 5.2: Lichoběžníková metoda

Opět lze snadno dokázat, že lichoběžníková metoda je *konvergentní* pro libovolnou integrovatelnou funkci $f(x)$, tj. že platí $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$. Pravá strana v (5.3) je totiž aritmetickým průměrem dvou speciálních integrálních součtů

$$y_0h + y_1h + \dots + y_{n-1}h \quad \text{a} \quad y_1h + y_2h + \dots + y_nh.$$

Pro odhad chyby lze dokázat (viz [3, str. 643]), že má-li funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$R(h) = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi). \quad (5.4)$$

O použití tohoto vzorce platí stejný komentář jako u obdélníkové metody. Z předchozího vzorce vyplývá, že lichoběžníková metoda je zcela přesná pro lineární funkce $f(x) = kx + q$. V případě těchto funkcí je totiž $f''(\xi) = 0$ pro libovolné ξ . To je vzhledem ke geometrickému významu této metody a skutečnosti, že grafem lineární funkce je přímka, opět jasné i bez tohoto vzorce.

5.3. Simpsonova metoda

U této metody musí být počet dělicích intervalů sudý, protože parabola, jež bude $f(x)$ nahrazovat, je určena trojicí bodů. Označme proto $n = 2m$, kde $m \in \mathbb{N}$. Funkci budeme nahrazovat na intervalech $\langle x_0, x_2 \rangle, \langle x_2, x_4 \rangle, \dots, \langle x_{2m-2}, x_{2m} \rangle$. Na každém dílčím intervalu $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ se středem x_i , kde $i = 1, 3, \dots, 2m-1$, půjde o kvadratickou funkci $g(x) = p + qx + rx^2$, jejímž grafem je parabola, která musí procházet body $[x_{i-1}, y_{i-1}]$, $[x_i, y_i]$ a $[x_{i+1}, y_{i+1}]$. Ukážeme, že takový *mnohočlen stupně nejvýše dva* existuje a že je jediný. V případě speciální polohy trojice bodů, když budou ležet na přímce, totiž vyjde $r = 0$, takže nepůjde o parabolu, ale o přímku.

Ukazuje se, že je výhodné vyjádřit hledaný mnohočlen vzhledem k mocninám $x - x_i$ (následující výpočty se podstatně zkrátí). To lze udělat pomocí Taylorova vzorce dostatečně vysokého stupně, aby zbytek v Taylorově vzorci byl identicky nulový. V našem případě je to stupeň dva. Platí

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_i) + g'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} g''(x_i)(x - x_i)^2 = \\ &= (p + qx_i + rx_i^2) + (q + 2rx_i)(x - x_i) + r(x - x_i)^2. \end{aligned}$$

Označíme $\tilde{p} = p + qx_i + rx_i^2$, $\tilde{q} = q + 2rx_i$, $\tilde{r} = r$ a budeme hledat polynom ve tvaru $g(x) = \tilde{p} + \tilde{q}(x - x_i) + \tilde{r}(x - x_i)^2$. Z podmínek, že jeho graf prochází body $[x_{i-1}, y_{i-1}]$, $[x_i, y_i]$ a $[x_{i+1}, y_{i+1}]$, dostaneme soustavu tří rovnic pro neznámé koeficienty \tilde{p} , \tilde{q} a \tilde{r} :

$$\begin{aligned} \tilde{p} - \tilde{q}h + \tilde{r}h^2 &= y_{i-1}, \\ \tilde{p} &= y_i, \\ \tilde{p} + \tilde{q}h + \tilde{r}h^2 &= y_{i+1}. \end{aligned}$$

Z ní snadno určíme, že existuje právě jedno řešení

$$\tilde{p} = y_i, \quad \tilde{q} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad \tilde{r} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2h^2},$$

takže

$$g: y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} (x - x_i) + \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2h^2} (x - x_i)^2.$$

Integrací na intervalu $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ dostaneme *jednoduchou Simpsonovu¹ formuli*

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx &\doteq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x) dx = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(y_i + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} (x - x_i) + \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2h^2} (x - x_i)^2 \right) dx = \\ &= y_i [x]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{4h} [(x - x_i)^2]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{6h^2} [(x - x_i)^3]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \\ &= 2y_i h + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{4h} (h^2 - h^2) + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{6h^2} (h^3 + h^3) = \\ &= 2y_i h + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{3} h = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}). \end{aligned}$$

Z předchozího vzorce dále dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \\ &\quad + \frac{h}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) + R(h), \end{aligned}$$

takže po úpravě a zanedbání chyby $R(h)$ dostaneme *složenou Simpsonovu formuli*

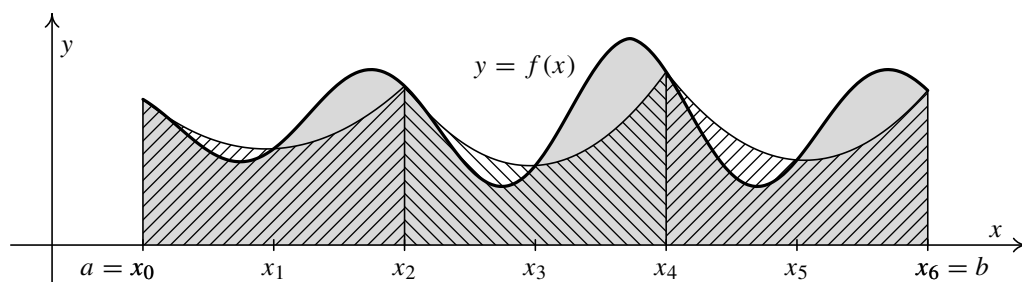
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\doteq \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) = \\ &= \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2m-2})]. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Geometrické znázornění pro $n = 6$ je uvedeno na obr. 5.3.

Rovněž lze dokázat, že lichoběžníková metoda je *konvergentní* pro libovolnou integrovatelnou funkci $f(x)$, tj. že platí $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$. Pravá strana v (5.5) je totiž aritmetickým průměrem tří speciálních integrálních součtů

$$\begin{aligned} y_0 h + y_1 h + \cdots + y_{2m-1} h, & \quad y_1 h + y_2 h + \cdots + y_{2m} h, \\ y_1 2h + y_3 2h + \cdots + y_{2m-1} 2h. & \end{aligned}$$

¹Thomas Simpson (1710–1761) — anglický matematik. Zabýval se interpolací a numerickou integrací.

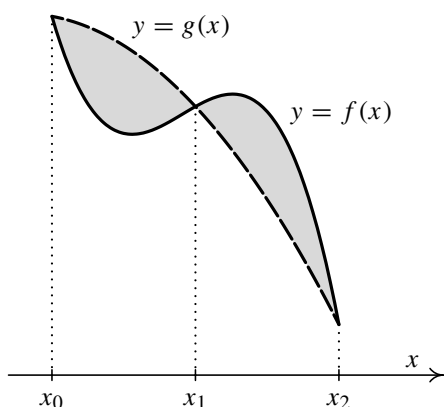


Obr. 5.3: Simpsonova metoda

Přitom norma dělení v prvních dvou integrálních součtech je h , kdežto ve třetím je $2h$.

Pro odhad chyby lze dokázat (viz [3, str. 645]), že má-li funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$R(h) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi). \quad (5.6)$$



Obr. 5.4

Tato vlastnost Simpsonovy metody je znázorněna na obr. 5.4. Funkce $f(x)$ představuje libovolný kubický polynom a funkce $g(x)$ je odpovídající kvadratickou funkcí, která nahrazuje $f(x)$ na jednom dílčím intervalu $\langle x_0, x_2 \rangle$. Platí

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x) - g(x)] dx = - \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx,$$

takže

$$\int_{x_0}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx = 0.$$

Použit tento vzorec pro odhad chyby je obecně obtížné, protože čtvrtá derivace může být značně komplikovaná a o to těžší by byla úloha najít maximum její absolutní hodnoty. Výsledek (5.6) ale stojí za povšimnutí z jiného důvodu. Nepřekvapí nás, že vzorec bude přesný pro kvadratické funkce $f(x) = p + qx + rx^2$, protože na každém dílčím intervalu splyne „náhradní“ funkce $g(x)$, která je rovněž kvadratická, s funkcí $f(x)$. Ale vzorec pro chybu obsahuje čtvrtou derivaci, takže formule bude přesná i pro kubické mnohočleny $f(x) = p + qx + rx^2 + sx^3$. Pro ty je totiž $f^{(4)}(\xi) = 0$ pro libovolné ξ .

Z právě uvedeného důvodu se Simpsonova formule často používá. Je totiž jednoduchá a i při menším počtu uzlových bodů poměrně přesná.

Podobně by bylo možné pokračovat dál a nahrazovat integrand kubickým mnohočlenem, který by procházel čtyřmi danými body grafu integrandu atd. Celá skupina těchto kvadraturních formulí, jejichž tři nejjednodušší případy jsme uvedli, se nazývá

Newtonovy-Cotesovy¹ formule. Odvození těchto formulí vyšších řádů je čím dál pracnější a většinou se tyto formule vyšších řádů nepoužívají a dává se přednost složené Simpsonově formuli s dostatečným počtem uzlových bodů.

Existuje celá řada dalších metod výpočtu určitého integrálu. Mezi nejvýznamnější patří *Gaussovy kvadraturní formule* a *Rombergova metoda*. O nich a dalších metodách se lze dočíst např. v [3, 20].

Pro zájemce:

Předchozí metody přibližného výpočtu určitého integrálu umožňují přibližně určovat i neurčitý integrál. Víme, že stačí nalézt jednu primitivní funkci, ostatní se liší o konstantu. Je-li integrand $f(x)$ spojité, je primitivní funkce $F(x)$ dána podle důsledku 3.29 vztahem $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, kde c je nějaký pevně zvolený bod integračního oboru. Hodnoty funkce $F(x)$ lze tedy v jednotlivých bodech počítat prostřednictvím určitého integrálu. Máme-li těchto hodnot dostatečný počet, můžeme funkci $F(x)$ aproximovat na celém integračním oboru některou z mnoha metod, které poskytuje numerická matematika.

Konečně připomeňme, že také hodnoty nevlastních integrálů lze přibližně určit pomocí vhodného určitého integrálu — viz začátek oddílu 4.4.



Příklad 5.1. Určete přibližnou hodnotu určitého integrálu $\int_1^3 \sqrt{x^3 - 1} dx$ pomocí obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovy metody. Integrační obor rozdělte na osm částí.

Řešení. V našem případě bude $n = 8$, tj. budeme mít devět uzlových bodů x_0, \dots, x_8 . Dále označíme $a = 1, b = 3$. Velikost kroku bude $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = 0,25$. V následující tabulce jsou uvedeny s přesností na čtyři desetinná místa potřebné funkční hodnoty $y_i = f(x_i), i = 0, \dots, 8$, kde $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000	2,2500	2,5000	2,7500	3,0000
y_i	0,0000	0,9763	1,5411	2,0879	2,6458	3,2235	3,8242	4,4494	5,0990

Označme I_n^O, I_n^L a I_n^S přibližnou hodnotu daného integrálu určenou po řadě obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovou metodou s použitím $n + 1$ uzlových bodů. Ze vzorce (5.1) dostaneme po zaokrouhlení na čtyři desetinná místa:

$$I_8^O = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) \doteq 4,6870.$$

Podobně ze vzorce (5.3) dostaneme:

$$I_8^L = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8) \doteq 5,3244.$$

¹**Roger Cotes** (1682–1716) (čti kouts) — anglický astronom a experimentální filosof. Zabýval se logaritmy, integrálním počtem a interpolací.



Konečně ze vzorce (5.5) dostaneme:

$$I_8^S = \frac{h}{3} [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] \doteq 5,3389.$$

Protože primitivní funkce k integrandu $\sqrt{x^3 - 1}$ není elementární, nemůžeme použít Newtonovu-Leibnizovu formuli a najít pro porovnání přesnou hodnotu I daného integrálu. Použijeme-li např. program Maple, dostaneme, že $I \doteq 5,356\,314\,216$. Je tedy vidět, že Simpsonova ale i lichoběžníková formule daly i při poměrně malém počtu uzlových bodů celkem slušný výsledek. ▲

Na závěr si všimneme problematiky posouzení přesnosti výsledku. Jak jsme uvedli, existují pro dostatečně hladké funkce vzorce pro určení chyby všech tří probíraných metod. V nich však figuruje neznámé číslo ξ , ležící někde v integračním oboru. Tedy konkrétní hodnotu chyby neznáme. Vzorce lze použít jen pro horní odhad absolutní hodnoty chyby způsobem vysvětleným u obdélníkové metody na str. 206. Výsledek je však často značně pesimistický, neboť skutečná přesnost je mnohem lepší, než kolik vyjde odhad.

V praxi se často zejména v souvislosti s nasazením počítačů používá následující postup. Zvolí se malé kladné číslo $\varepsilon > 0$. Pak se pomocí složené formule určí přibližná hodnota integrálu I_n pro nějaký konkrétní počet dělicích intervalů n a hodnota I_{2n} s dvojnásobným počtem dělicích intervalů. Ověří se, zda platí, že $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$.

Pokud tomu tak je, považuje se číslo I_{2n} za přibližnou hodnotu integrálu. Pokud tomu tak není, určí se I_{4n} se čtyřnásobným počtem dělicích intervalů a ověří se, zda je už $|I_{2n} - I_{4n}| < \varepsilon$. Pokud ano, považuje se číslo I_{4n} za přibližnou hodnotu integrálu. Pokud ne, opět se zdvojnásobí počet dělicích intervalů a tímto způsobem se pokračuje tak dlouho, až se takto získané dvě po sobě jdoucí přibližné hodnoty integrálu liší v absolutní hodnotě o méně než ε .

Obecně by stačilo jakkoli zvětšovat počet dělicích intervalů. Dvojnásobky jsou výhodné, protože není nutné počítat znovu všechny funkční hodnoty integrandu, naopak se všechny hodnoty z předchozího kroku využijí.



Příklad 5.2. Vypočtěte Simpsonovou metodou hodnotu určitého integrálu $\int_0^{4,5} \sin \frac{12}{x} dx$.

Začněte s počtem dělicích intervalů $n = 30$ a tento počet zdvojnásobte tak dlouho, až se budou poslední dva výsledky lišit o méně než $\varepsilon = 0,01$.

Řešení. Graf integrandu je znázorněn na obr. 3.10 b). Protože jde o mimořádně rychle oscilující funkci, lze očekávat, že potřebný počet uzlových bodů bude na dosažení požadované přesnosti vysoký. Integrand $g(x)$ není definován v nule. Zvolíme např. $g(0) = 0$. Na skutečnou hodnotu integrálu to nemá vliv, u numerického řešení to však výsledek při menším počtu uzlových bodů může ovlivnit. V podobném případě je rozumné chybějící funkční hodnotu doplnit tak, aby byla funkce spojitá, to ale zde nejde, protože limita integrandu pro $x \rightarrow 0^+$ neexistuje.

Je zřejmé, že tento příklad nelze řešit bez programovatelné kalkulačky nebo počítače s vhodným softwarem. S použitím vzorce (5.5) určíme přibližné hodnoty integrálu pro

$n = 30, 60, 120, \dots$. Při počítání na šest platných cifer dostaneme:

$$\begin{array}{lll} I_{30}^S \doteq -0,637\,770 & I_{240}^S \doteq -0,714\,130 & I_{1920}^S \doteq -0,720\,183 \\ I_{60}^S \doteq -0,672\,977 & I_{480}^S \doteq -0,793\,987 & I_{3840}^S \doteq -0,727\,127 \\ I_{120}^S \doteq -0,705\,837 & I_{960}^S \doteq -0,697\,963 & I_{7680}^S \doteq -0,715\,383 \end{array}$$

Je vidět, že $|I_{120}^S - I_{240}^S| = 0,008\,287 < \varepsilon = 0,01$. Avšak rozdíly mezi následujícími dvěma hodnotami se opět zvětšují. Až opět $|I_{1920}^S - I_{3840}^S| = 0,006\,953 < \varepsilon = 0,01$. Pak však zase dochází k mírnému nárůstu. Je tedy vidět, že s numerickým řešením tohoto integrálu jsou potíže. Pro zajímavost si uveďme, jaký výsledek dá Maple: $I \doteq -0,716\,973$.

Protože problémy očividně působí chování integrandu v pravém okolí nuly, bylo by taktičtější rozdělit integrační obor na dvě části — menší levý interval, obsahující nulu, kde by se použilo více uzlových bodů, a větší pravý, kde by stačilo uzlových bodů relativně méně. Označíme-li $I_n^S(\alpha; \beta)$ hodnotu získanou pomocí Simpsonovy formule s $n + 1$ dělicími body na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, lze určit, že $I_{120}^S(0; 0,5) + I_{60}^S(0,5; 4,5) \doteq -0,716\,513$, což je v porovnání s hodnotou získanou z Maplu mnohem lepší výsledek než např. I_{7680}^S . To jasně ukazuje, že při řešení nelze postupovat bez přemýšlení a slepě dosazovat do vzorce, který najdeme v nějaké příručce. ▲

5.4. Cvičení ke kapitole 5

Příklady k procvičení



1. Vypočítejte následující určité integrály s použitím obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovy metody s počtem $n + 1$ uzlových bodů:

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{x^4 + 1} \, dx, \quad n = 6,$

b) $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx, \quad n = 6,$

c) $\int_0^2 x \sqrt{1 + x^4} \, dx, \quad n = 6,$

d) $\int_1^3 \frac{e^x}{x} \, dx, \quad n = 4,$

e) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad n = 6,$

f) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx, \quad n = 6,$

g) $\int_0^5 e^{-x^2} \, dx, \quad n = 4,$

h) $\int_1^2 x^2 e^{-x^2} \, dx, \quad n = 8,$

i) $\int_2^3 \frac{1}{\ln x} \, dx, \quad n = 4,$

j) $\int_1^2 (x + 1) e^{-x^2} \, dx, \quad n = 4.$

Návod: V zadáních e) a f) dodefinujte funkční hodnotu v $x = 0$ tak, aby byl integrand $f(x)$ spojitý.

2. S použitím Simpsonovy metody vypočítejte hodnoty zadaného integrálu pro n a $2n$ a rozhodněte, zda jejich rozdíl je v absolutní hodnotě menší než zadané ε :

a) $\int_0^2 \sqrt[3]{x^4 + 1} dx, \quad n = 4, \varepsilon = 0,005,$

b) $\int_{\pi/2}^{3\pi} \frac{\cos x}{x} dx, \quad n = 4, \varepsilon = 0,05,$

c) $\int_{1/3}^4 \frac{3x - 1}{\ln 3x} dx, \quad n = 2, \varepsilon = 0,02,$

d) $\int_1^2 x^2 e^{-2x^2} dx, \quad n = 4, \varepsilon = 0,05.$

Návod: V zadání c) dodefinujte funkční hodnotu v $x = 1/3$ tak, aby byl integrand $f(x)$ spojitý.

3. Vypočítejte následující určité integrály a porovnejte získané výsledky s výsledky získanými s použitím obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovy metody s počtem uzlových bodů $n + 1$:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y dy, \quad n = 4,$

b) $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx, \quad n = 6,$

c) $\int_0^{\pi/3} 5 \sin 4x dx, \quad n = 6,$

d) $\int_0^3 e^{x/3} dx, \quad n = 4,$

e) $\int_0^3 \frac{12}{x^2 + 9} dx, \quad n = 6,$

f) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x - 4} dx, \quad n = 6,$

g) $\int_{-\pi/2}^0 2 \sin 2x dx, \quad n = 4,$

h) $\int_0^4 \frac{x - 1}{x + 1} dx, \quad n = 8,$

i) $\int_{-1}^1 \ln(x + 2) dx, \quad n = 4,$

j) $\int_2^3 \frac{1}{x^2 + x} dx, \quad n = 6,$

k) $\int_{-\pi}^{\pi/3} 2 \cos y \sin y dy, \quad n = 6,$

l) $\int_{-1}^1 4y \operatorname{arctg} 2y dy, \quad n = 4.$

4. S použitím vhodného programu symbolické algebry vypočítejte následující integrály:

a) $\int_2^3 \sin x^2 dx,$

b) $\int_2^3 \cos x^2 dx,$

c) $\int_0^{8\pi} \cos \frac{1}{x} dx,$

d) $\int_2^8 (x - 3) \sqrt[5]{x^3 - 7} dx,$

e) $\int_0^{5\pi} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} dx,$

f) $\int_1^{10} \cos(x \ln x) dx.$



Klíč k příkladům k procvičení

Numerické výpočty byly provedeny pomocí programu Maple s nastavením přesnosti (při všech výpočtech) na pět platných cifer. Při použití jiného programu nebo kalkulačky se tedy mohou získané výsledky podle nastavení poněkud lišit.

1. V dalším značí po řadě I_O , I_L , I_S hodnotu integrálu určenou obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovou metodou.

a) $I_O = 2,2051,$

$I_L = 2,2051,$

$I_S = 2,1786,$

- b) $I_O = 1,0794$, $I_L = 1,1139$, $I_S = 1,1114$,
 c) $I_O = 3,3732$, $I_L = 4,7476$, $I_S = 4,6473$,
 d) $I_O = 7,1368$, $I_L = 8,1310$, $I_S = 8,0409$,
 e) $I_O = 2,1065$, $I_L = 1,8520$, $I_S = 1,8520$,
 $f(0) = 1$,
 f) $I_O = 2,2215$, $I_L = 1,9596$, $I_S = 1,9340$,
 $f(0) = 0$,
 g) $I_O = 1,5144$, $I_L = 0,88942$, $I_S = 0,76764$,
 h) $I_O = 0,25138$, $I_L = 0,23296$, $I_S = 0,23325$,
 i) $I_O = 1,1890$, $I_L = 1,1224$, $I_S = 1,1185$,
 j) $I_O = 0,39988$, $I_L = 0,31478$, $I_S = 0,30989$.
2. I_n značí výsledek s použitím $n + 1$ uzlových bodů.
 a) $I_4 = 2,9111$, $I_8 = 2,9109$, ano,
 b) $I_4 = -0,45116$, $I_8 = -0,45898$, ne,
 c) $I_2 = 10,499$, $I_4 = 10,529$, ne,
 $f(1/3) = 1$,
 d) $I_4 = 0,040673$, $I_8 = 0,040780$, ano.
3. a) 2, $I_O = 1,8961$, $I_L = 1,8961$, $I_S = 2,0046$,
 b) -4, $I_O = -5,3333$, $I_L = -4$, $I_S = -4$,
 c) 1,8750, $I_O = 2,1761$, $I_L = 1,7982$, $I_S = 1,8778$,
 d) 5,1549, $I_O = 4,5373$, $I_L = 5,1817$, $I_S = 5,1549$,
 e) 3,1416, $I_O = 3,3036$, $I_L = 3,1370$, $I_S = 3,1416$,
 f) -0,5108, $I_O = -0,48926$, $I_L = -0,51148$, $I_S = -0,51083$,
 g) -2, $I_O = -1,8961$, $I_L = -1,8961$, $I_S = -2,0046$,
 h) 0,7812, $I_O = 0,34206$, $I_L = 0,74206$, $I_S = 0,77831$,
 i) 1,2958, $I_O = 1,0075$, $I_L = 1,2821$, $I_S = 1,2953$,
 j) 0,1178, $I_O = 0,12494$, $I_L = 0,11799$, $I_S = 0,11778$,
 k) 0,75, $I_O = 0,32166$, $I_L = 0,62395$, $I_S = 0,77037$,
 l) 3,5355, $I_O = 3,7850$, $I_L = 3,7850$, $I_S = 3,5705$.
4. a) -0,03130, b) 0,14967, c) 23,582,
 d) 36,718, e) 0,67990, f) 0,38210.



Literatura

- [1] Bronstein, M.: *Symbolic Integration: toward Practical Algorithms*. Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier (Ed.), Academic Press, 1989, str. 59–85.
- [2] Bronstein, M.: *Integration of Elementary functions*. J. Symbolic Computation (1990), str. 117–173.
- [3] Děmidovič, B. P. – Maron, I. A.: *Základy numerické matematiky*. SNTL, Praha 1966.
- [4] Došlá, Z. – Kuben, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Skriptum. MU v Brně, Brno 2003.
- [5] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija, díl II*. 7. vydání. Nauka, Moskva 1969.
- [6] Hildebrandt, T. H.: *Definitions of Riemann-Stieltjes Integral*. Amer. Math. Monthly, vol. 45 (1938), str. 265–278.
- [7] Hošková, Š. – Kuben, J.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Skriptum. 1. vydání. Vojenská akademie v Brně, Brno 2004.
- [8] Jarník, V.: *Integrální počet (I)*. 5. vydání. Academia, Praha 1974.
- [9] Jarník, V.: *Integrální počet (II)*. 2. vydání. Academia, Praha 1976.
- [10] Kropáč, J. – Kuben, J.: *Funkce gama a beta, transformace Laplaceova, \mathcal{L} a Fourierova*. Skriptum, 3. vydání. Vojenská akademie v Brně, Brno 2002.
- [11] Kropáč, J. – Kuben, J.: *Skalární a vektorové pole, křivkový a plošný integrál*. Skriptum. Vojenská akademie v Brně, Brno 1999.
- [12] Kuben, J. – Šarmanová, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Studijní opora. Součást projektu Operační program Rozvoje lidských zdrojů CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*. VŠB–TU Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1192-8
- [13] Kurzweil, J.: *Henstock-Kurzweil Integration: Its Relation to Topological Vector Spaces*. World Scientific, Singapore 2000.

- [14] Kurzweil, J.: *Integration between the Lebesgue Integral and the Henstock-Kurzweil Integral. Its Relation to Local Convex Vector Spaces*. World Scientific, Singapore 2002.
- [15] Lazard, D.: *Primitives des fonctions élémentaires*. Séminaire BOURBAKI. 36ème année, 1983–84, n° 630.
- [16] Nagy, J. – Nováková, E. – Vacek, M.: *Integrální počet*. MVŠT, sešit VI, SNTL, Praha 1984.
- [17] Novák, V.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Skriptum. UJEP Brno, Brno 1980.
- [18] Novák, V.: *Integrální počet v \mathbb{R}* . Skriptum, 3. vydání. MU v Brně, Brno 2001.
- [19] Petr, K.: *Počet integrální*. JČMF, Praha 1915.
- [20] Ralston, A.: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha 1973.
- [21] Risch, R. H.: *The Problem of Integration in Finite Terms*. Trans. of the Am. Math. Soc. 139(1969), str. 167–189.
- [22] Ritt, J. F.: *Integration in Finite Terms*. Columbia Univ. Press, New York 1948.
- [23] Rosenlicht, M.: *Integration in Finite Terms*. Amer. Math. Monthly 79 (1972), str. 963–972.
- [24] Schwabik, Š.: *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)*. Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha 1999.
- [25] Schwabik, Š. – Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu*. Dějiny matematiky, sv. 6, MU v Brně. Prometheus, Praha 1996.
- [26] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele 1, 2*. Druhé vydání. MATFYZPRESS, Praha 2001.



Rejstřík

A

aditivita určitého integrálu
vzhledem k integračnímu oboru, 114
vzhledem k integrandu, 113

B

bod
singulární, 177, 179, 183
uzlový, 205

D

dělení intervalu, 107
ekvidistantní, 107, 205

F

formule
Gaussovy, 211
jednoduchá
lichoběžníková, 207
obdélníková, 205
Simpsonova, 209
Newtonova-Leibnizova, 117
zobecněná, 129
Newtonovy-Cotesovy, 211
složená
lichoběžníková, 207
obdélníková, 206
Simpsonova, 209
funkce
elementární, 10
integrovatelná, 108
primitivní, 6
zobecněná, 129
transcendentní
elementární, 80
vyšší, 80

H

homogenita určitého integrálu, 113

I

integrační konstanta, 7
integrační meze, 108
integrační obor, 108
integrál
neurčitý, 6
nevlastní
divergentní, 172, 177, 184
hlavní hodnota, 190
konvergentní, 172, 177, 184
konvergentní absolutně, 199
konvergentní neabsolutně, 199
konvergentní relativně, 199
určitě divergentní, 189
určitý, 108
Henstockův-Kurzweilův, 109
Lebesgueův, 109
Newtonův, 132
Riemannův, 109
integrální součet, 108
integrand, 6, 108

K

konvergence nevlastního integrálu
absolutní, 199
neabsolutní, 199
relativní, 199
kritérium konvergence
Dirichletovo, 200
limitní srovnávací, 196
srovnávací, 195
křivka

- prostorová
 - délka, 143
 - hmotnost, 157
 - parametrické rovnice, 142
 - souřadnice těžiště, 157
- rovinná
 - délka, 140, 141
 - hmotnost, 153, 155
 - parametrické rovnice, 141
 - souřadnice těžiště, 153, 155
- křivočarý
 - lichoběžník, 137
 - obdélník, 137
 - hmotnost, 158
 - obsah, 137
 - souřadnice těžiště, 158
- M**
- majoranta, 195
- metoda
 - druhá substituční
 - pro neurčitý integrál, 35
 - per partes
 - pro neurčitý integrál, 20
 - pro určitý integrál, 122, 131
 - první substituční
 - pro neurčitý integrál, 28
 - substituční
 - pro neurčitý integrál, 35
 - pro určitý integrál, 124
- mez
 - dolní, 108
 - horní, 108
- minoranta, 195
- moment statický
 - vzhledem k souřadné ose, 155, 158
 - vzhledem k souřadné rovině, 157
- N**
- norma dělení, 107
- P**
- podgraf funkce, 136
 - obsah, 136, 148
- R**
- Rombergova metoda, 211
- rotační těleso, 143
 - objem, 144, 148
 - obsah pláště, 144, 148
 - plášť, 143
- S**
- střední hodnota funkce, 116
- substituce
 - lineární, 32
- U**
- určitý integrál jako funkce
 - dolní meze, 131
 - horní meze, 130
- V**
- věta
 - o střední hodnotě integrálního počtu, 116
- výběr reprezentantů dělení, 107

Název: Integrální počet funkcí jedné proměnné
Autoři: RNDr. Šárka Hošková, Ph.D., Doc. RNDr. Jaromír Kuben, CSc.,
PhDr. Pavlína Račková
Rok vydání: 2006
Počet stran: 225
Počet obrázků: 71

