Abstrakt

Rozvoj výpočetní techniky v současné době výrazně ovlivňuje i výuku matematiky. Inovace výukových metod jsou často založeny i na využití počítačů. Protože v našich podmínkách zatím neexistují učební texty věnované výuce za pomoci počítače, je tato disertační práce pokusem o vytvoření takového textu. Cílem práce je ukázat, jak lze pomocí počítače podporovat výuku diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Na počátku tvorby práce bylo třeba zmapovat již existující materiály přístupné prostřednictvím počítačové sítě Internet. V tomto období vznikly publikace [1], [2], [3], [4] a seriál článků [5], [6], [7] a [8], které jsou všechny věnované problematice Internetu a jeho služeb z oblasti matematiky a výuky matematické analýzy. Některé výsledky bezprostředně vázané na obsah této práce byly také publikovány v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie v příspěvku s názvem *O jednom využití počítače ve výuce matematické analýzy: Lokální extrémy funkcí dvou proměnných* ([9]). Kapitola Graf funkce dvou proměnných byla upravena pro potřeby časopisu MapleTech a zaslána k publikaci pod názvem *Graphing a Function of Two Variables with Maple* ([10]). Kromě toho byla část výsledků práce prezentována na seminářích věnovaných počítačem podporované výuce („Maple ve výuce matematické analýzy“, seminář „Využití Maplu ve výuce a výzkumu na VŠ“, FS VUT Brno, květen 1997, „Limita funkce dvou proměnných s programem Maple V“, celostátní seminář na téma „Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu“, Rybník u Poběžovic, září 1998, „Ovlivňují počítače výuku matematické analýzy?“, Didaktický seminář KM PřF MU, říjen 1998).

K počítačovému zpracování bylo zvoleno tradiční téma vzdělávání vysokoškoláků přírodovědného, ale i technického směru — Diferenciální počet funkcí více proměnných. Pochopení teorie a zvládnutí jejich aplikací zde činí studentům problémy (toto téma klade vyšší nároky na schopnost abstrakce a geometrickou představivost). Využití grafických a výpočetních možností počítačů je zde tedy obzvláště efektivní. K praktické realizaci byl zvolen systém počítačové algebry Maple. Veškeré příkazy systému Maple jsou uloženy v počítačové podobě na přiložené disketě a jsou také přístupné prostřednictvím počítačové sítě Internet (`http://www.math.muni.cz/~plch/difer/difer.html`).

Řada příkladů v práci uvedených již byla vyzkoušena při práci se studenty. Přitom se ukazuje, že vhodné použití počítače při výuce vede nejen k hlubšímu pochopení probírané problematiky, ale i k oživení výukového procesu a ke zvýšení zájmu o matematickou analýzu vůbec.

S používáním počítače ve výuce jsou však spojeny i problémy. Ne vždy totiž počítačový

program dává výsledek odpovídající skutečnosti. V textu na tyto případy upozorňujeme a snažíme se těchto případů využít jako motivaci k hlubšímu studiu probíraného tématu.

Úvod: Tato část disertační práce je věnována metodickým otázkám počítačem podporované výuky. Snažíme se zde najít odpověď na otázky: „Kde, proč a jak používat počítač při výuce matematické analýzy“?

V jednotlivých kapitolách hlavní části práce jsou vždy vytvořeny a shromážděny příklady ilustrační grafiky a počítačem řešené příklady (celkem 62 příkladů a 113 obrázků). Tématicky celý text navazuje na skripta Došlá Z., Došlý O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, koncipovaná pro výuku v učitelském studiu (studenti tohoto studia tvoří nejpočetnější skupinu a pochopení probíraných pojmů se zde dosahuje obtížněji než u studentů odborné matematiky). Tato skripta obsahují nezbytnou teorii, použitou v práci.

Všimněme si nyní podrobněji obsahu jednotlivých kapitol z hlavní části práce.

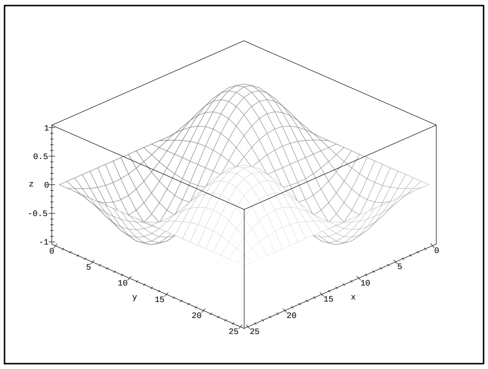
Kapitola 1 Pojem funkce více proměnných: Pojednává o problematice tvorby matematické grafiky. Pro odlišení skutečnosti (graf funkce dvou proměnných) od počítačového výstupu zavádíme pojem PC-graf. Rozdílnost grafu a PC-grafu ilustrujeme např. pro funkci $g(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Příklad 1. Vytvořte PC-graf funkce $g(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ pro x a y z intervalu $\langle 0, 25\rangle$ beze změny implicitního nastavení parametrů.

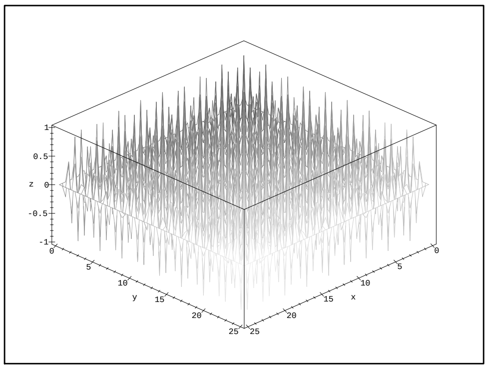
```
> plot3d(sin(2*Pi*x)*sin(2*Pi*y), x=0..25, y=0..25, axes=boxed,
> labels=[x,y,z]);
```

Podrobnější analýzou zadané funkce však zjistíme, že získaný PC-graf (obr. 1) neodpovídá skutečnosti, funkce $\sin(2\pi x)$ a $\sin(2\pi y)$ jsou periodické s periodou 1 a tomu PC-graf na obrázku 1 neodpovídá. Zhuštěním sítě dostáváme výsledek bližší skutečnému chování uvažované funkce (obr. 2):

```
> plot3d(sin(2*Pi*x)*sin(2*Pi*y), x=0..25, y=0..25, axes=boxed,
> grid=[60,60], labels=[x,y,z]);
```



obr. 1



obr. 2

Dále se věnujeme zejména problematice tvorby PC-grafů nespojitých funkcí. Na rozdíl od funkcí jedné reálné proměnné, kde je tvorba PC-grafu nespojité funkce usnadněna parametrem `discont`, musí u funkce dvou proměnných hledat vhodné parametry PC-grafu uživatel sám. Pokud nezvolíme hustotu sítě uzlových bodů tak, aby uzlové body nebyly totožné s body nespojitosti, je nejvýhodnější rozdělit tvorbu PC-grafu do několika částí. Jednotlivé samostatně vytvářené části PC-grafu v závěru interpretujeme v jediném.

Příklad 2. Vytvořte PC-graf funkce

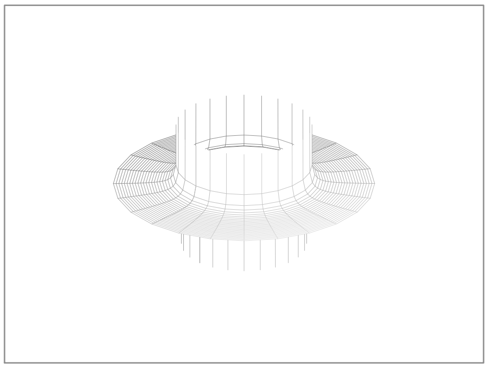
$$f(x,y)=\frac{2}{x^2+y^2-9}.$$

```
> f:=2/(x^2+y^2-9);
```

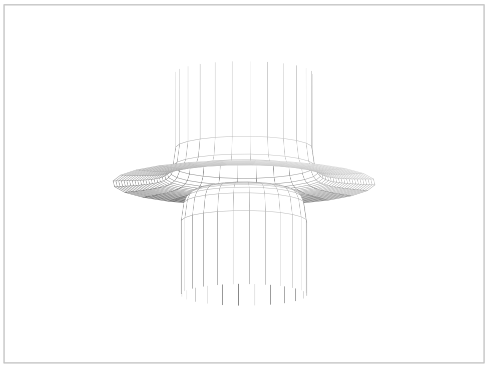
$$f := 2\,\frac{1}{x^2+y^2-9}$$

Provedeme parametrizaci $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \frac{2}{u^2-9}$ a generujeme PC-graf této funkce, přičemž tvorbu PC-grafu rozdělíme do dvou částí (parametr u bude postupně nabývat hodnot z intervalů $\langle 0,\, 2.999\rangle$ a $\langle 3.001,\, 6\rangle$):

```
> s1:=plot3d([u*cos(v), u*sin(v), subs({x=u*cos(v), y=u*sin(v)}, f)],
> v=0..2*Pi, u=0..2.999):
> s2:=plot3d([u*cos(v), u*sin(v), subs({x=u*cos(v), y=u*sin(v)}, f)],
> v=0..2*Pi, u=3.001..6):
> display3d({s1,s2}, view=-8..8);
> display3d({s1,s2}, view=-8..8, orientation=[40,102]);
```



obr. 3



obr. 4

Závěrečná část první kapitoly je věnovaná vysvětlení pojmu vrstevnice a znázorňování vrstevnic v Maplu.

Kapitola 2 Limita funkce: Ilustruje grafické a výpočetní možnosti Maplu při výkladu a procvičování problematiky limit funkce dvou proměnných. PC-grafy zde hrají důležitou roli při vytváření geometrické představy o zkoumaných funkcích. Přestože ve většině případů není možný přímý výpočet limity, je nám počítač nápomocen zejména při určování limit vzhledem k podmnožinám okolí limitního bodu a při transformaci do polárních souřadnic. Grafické i výpočetní možnosti nejlépe ilustruje následující příklad.

Příklad 3. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x,y]\neq[0,0],\\ 0, & [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

```
> f:=proc(x,y) if x=0 and y=0 then 0 else x^2*y/(x^4+y^2) fi end:
```

Pokud položíme $y=kx$, tj. k limitnímu bodu $[0,0]$ se blížíme po přímkách $y=kx$, dostáváme:

```
> Limit(f(x,k*x), x=0)=limit(f(x,k*x),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,k}{x^4+k^2\,x^2}=0$$

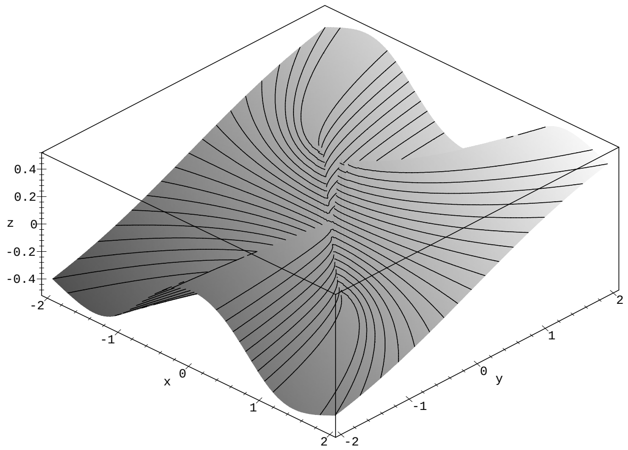
Ale při $y=kx^2$, tj. k limitnímu bodu se blížíme po parabolách $y=kx^2$, dostáváme:

```
> Limit(f(x,k*x^2), x=0)=limit(f(x,k*x^2),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4\,k}{x^4+k^2\,x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

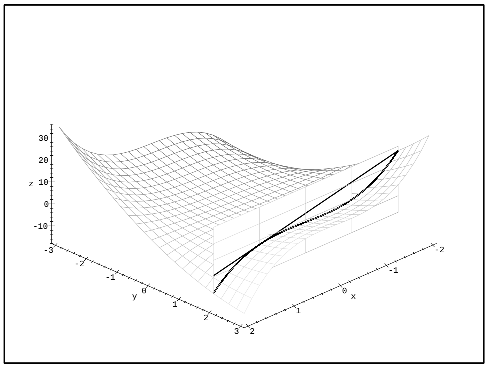
což je výsledek závisející na konstantě k a tedy funkce f nemá v bodě $[0,0]$ limitu (obr. 5).

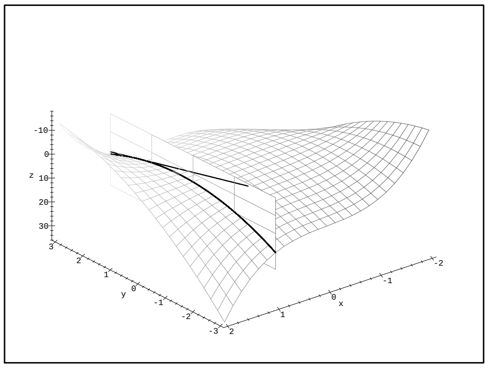
```
> plot3d(f, -2..2, -2..2,  grid=[100,100], style=patchcontour,
> orientation=[-46,35], contours=12,axes=boxed,labels=[x,y,'z']);
```



obr. 5

Kapitola 3 Parciální derivace: V této kapitole je pro výukové účely nejvýznamnější část věnovaná znázornění geometrického významu parciálních derivací (obr. 6 a 7).

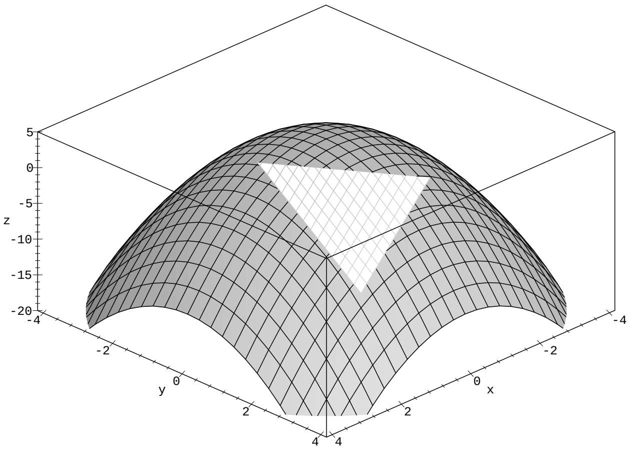




obr. 6 obr. 7

Podobně lze znázornit i geometrický význam směrových derivací.

Kapitola 4 Diferenciál funkce: PC-grafů zde využíváme k ilustraci pojmů diferencovatelná funkce a tečná rovina (obr. 8) a vztahů mezi difencovatelností, spojitostí a existencí parciálních derivací.



obr. 8

Výpočetních možností využíváme při určování diferenciálů, přibližných výpočtech pomocí diferenciálu a při hledání kmenové funkce. V souvislosti s těmito výpočty jsou nově naprogramovány procedury `difer`, `difern`, `GraphTan` a `kmen`.

Kapitola 5 Derivace složené funkce, Taylorův vzorec: V této kapitole je velmi efektivní použití Maplu při výpočtech parciálních derivací složené funkce. Možnosti nových procedur `dzd1`, `dzd2`, `dzdd1`, `dzdd2` a `dzdd12` dobře ilustruje následující příklad:

Příklad 4. Transformujte rovnici

$$x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} - 2xyz_{xy} + xz_x + yz_y = 0$$

do nezávisle proměnných $u = xy$ a $v = x/y$.

```
> zx:=dzd1(z, x*y,x/y,u,v,x,y);
```

$$zx := \left(\frac{\partial}{\partial u} z\right) y + \frac{\frac{\partial}{\partial v} z}{y}$$

```
> zy:=dzd2(z, x*y,x/y,u,v,x,y);
```

$$zy := \left(\frac{\partial}{\partial u} z\right) x - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial v} z\right) x}{y^2}$$

```
> zxx:=dzdd1(z, x*y,x/y,u,v,x,y);
```

$$zxx := \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} z\right) y^2 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v \, \partial u} z\right) + \frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2} z}{y^2}$$

```
> zyy:=dzdd2(z, x*y,x/y,u,v,x,y);
```

$$zyy := \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} z\right) x^2 - 2 \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial v \, \partial u} z\right) x^2}{y^2} + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} z\right) x^2}{y^4} + 2 \frac{\left(\frac{\partial}{\partial v} z\right) x}{y^3}$$

```
> zxy:=dzdd12(z, x*y,x/y,u,v,x,y);
```

$$zxy := \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} z\right) y \, x - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} z\right) x}{y^3} + \left(\frac{\partial}{\partial u} z\right) - \frac{\frac{\partial}{\partial v} z}{y^2}$$

```
> tr:=expand(simplify(x^2*zxx+y^2*zyy-2*x*y*zxy+x*zx+y*zy=0));
```

$$tr := 4 \frac{x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} z\right)}{y^2} + 4 \frac{x \left(\frac{\partial}{\partial v} z\right)}{y} = 0$$

Dalšími úpravami dostáváme:

```
> tr:=factor(student[powsubs](x/y=v,tr));
```

$$tr := 4 \, v \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} z\right) v + \left(\frac{\partial}{\partial v} z\right)\right) = 0$$

```
> tr/(4*v);
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} z\right) v + \left(\frac{\partial}{\partial v} z\right) = 0$$

Druhá část této kapitoly je věnována ukázkám počítačové grafiky a výpočtů, používaných při výkladu Taylorova polynomu funkce dvou proměnných.

Příklad 5. Najděte Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[0, 0]$ pro funkci $f(x, y) = \sin x \cos y$.

```
>  f:=(x,y)->sin(x)*sin(y);
```

$$f := (x, y) \to \sin(x) \sin(y)$$

```
> fx:=D[1](f);fy:=D[2](f);
```

$$fx := (x, y) \to \cos(x)\sin(y)$$

$$fy := (x, y) \to \sin(x)\cos(y)$$

```
> fxx:=D[1,1](f);fxy:=D[1,2](f);fyy:=D[2,2](f);
```

$$fxx := (x, y) \to -\sin(x)\sin(y)$$

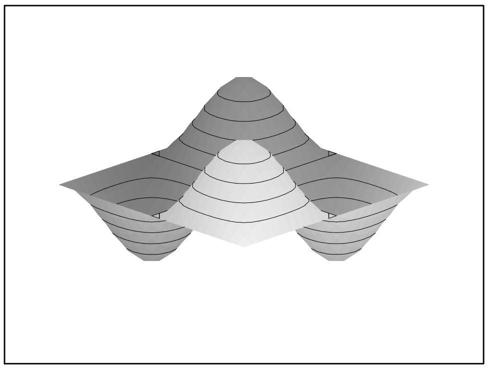
$$fxy := (x, y) \to \cos(x)\cos(y)$$

$$fyy := (x, y) \to -\sin(x)\sin(y)$$

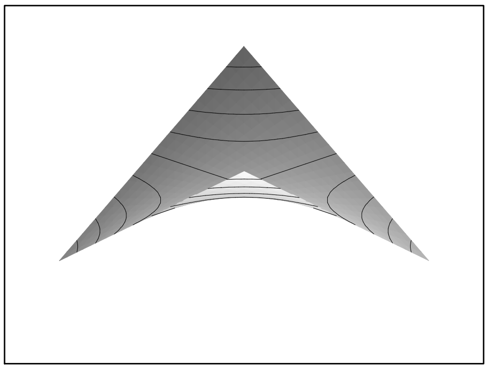
```
> T2:=f(0,0)+fx(0,0)*(x-0)+fy(0,0)*(y-0)+
> (1/2)*((fxx(0,0)*(x-0)^2+2*fxy(0,0)*(x-0)*(y-0)+fyy(0,0)*(y-0)^2));
```

$$T2 := x\,y$$

```
> plot3d(f(x,y), x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, orientation=[45,60],
> style=patchcontour);
> plot3d(T2, x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, orientation=[45,60],
> style=patchcontour);
```



obr. 9



obr. 10

Kapitola 6 Lokální a absolutní extrémy: Tato kapitola je věnována problematice hledání lokálních a absolutních extrémů funkce dvou proměnných. Uvedené příklady ukazují jak výhody použití počítače při jejich řešení, tak upozorňují na situace, kdy dostáváme neúplné nebo nepřesné výsledky. Často se opakující postupy jsou zde automatizovány pomocí Mapleovského programovacího jazyka a uloženy v procedurách `sing` a `mvextrem`. Pro ilustraci uveďme jeden příklad standardního postupu.

Příklad 6. Určete lokální extrémy funkce

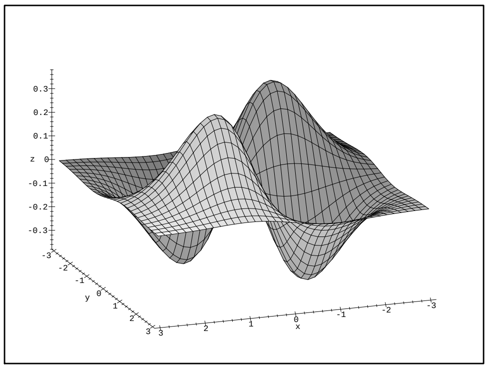
$$f(x, y) = xy\mathrm{e}^{(-\frac{x^2+y^2}{2})}.$$

```
> f := (x,y) -> x*y*exp(-(x^2+y^2)/2);
```

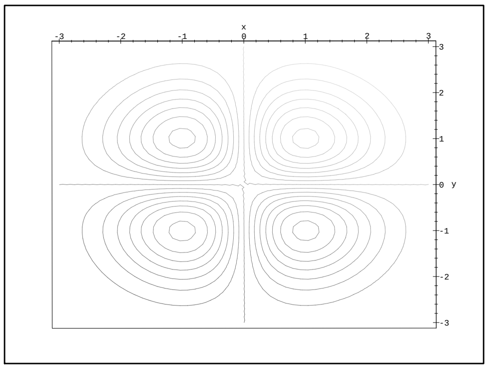
$$f := (x,\, y) \to x\, y\, e^{(-1/2\, x^2 - 1/2\, y^2)}$$

Generujme PC-graf funkce f (obr. 11) a PC-graf, znázorňující vrstevnice funkce f (obr. 12):

```
> plot3d(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3,style =patch,orientation=[70,65],
> axes=framed, grid=[40,30], labels=[x,y,z]);
> with(plots):
> contourplot(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3, grid=[50,50], axes=boxed);
```



obr. 11



obr. 12

Z uvedených PC-grafů usuzujeme na lokální extrémy v každém ze čtyř kvadrantů, a to na lokální maxima v prvním a třetím kvadrantu a na lokální minima v druhém a čtvrtém kvadrantu. Tuto úvahu ověřme nyní výpočtem.

```
> cp:=solve({diff(f(x,y),x)=0, diff(f(x,y),y)=0}, {x,y});
```

$$cp := \{x = 0, y = 0\}, \{y = 1, x = 1\}, \{y = -1, x = 1\}, \{x = -1, y = 1\},$$
$$\{x = -1, y = -1\}$$

```
> fxx := factor(diff(f(x,y),x,x));
```

$$fxx := x\, y\, \mathrm{e}^{(-1/2\, x^2 - 1/2\, y^2)}\, (-3 + x^2)$$

```
> fxy := factor(diff(f(x,y),x,y));
```

$$fxy := \mathrm{e}^{(-1/2\, x^2 - 1/2\, y^2)}\, (y - 1)\, (y + 1)\, (x - 1)\, (x + 1)$$

```
> fyy := factor(diff(f(x,y),y,y));
```

$$fyy := x\, y\, \mathrm{e}^{(-1/2\, x^2 - 1/2\, y^2)}\, (-3 + y^2)$$

> `Delta:=factor(fxx*fyy-fxy^2);`

$$\Delta := -(\,e^{(-1/2\,x^2-1/2\,y^2)}\,)^2\,(\,-5\,x^2\,y^2+y^4\,x^2+x^4\,y^2+1-2\,x^2-2\,y^2+x^4+y^4\,)$$

> `eval(subs(x=0,y=0,Delta));`

$$-1$$

V souladu s dobře známou postačující podmínkou existence a charakteru extrému ve stacionárním bodě v bodě $[0,0]$ extrém nenastává, jde o tzv. sedlový bod. V bodě $[1,1]$ nastává ostré lokální maximum, neboť:

> `subs(x=1,y=1,[Delta,fxx]);`

$$\left[4\,(\,e^{(-1)}\,)^2,\,-2\,e^{(-1)}\right]$$

Obdobně prokážeme, že v bodě $[-1,1]$ a $[1,-1]$ nastávají ostrá lokální minima a v bodě $[-1,-1]$ ostré lokální maximum:

> `subs(x=-1,y=1,[Delta,fxx]);`

$$\left[4\,(\,e^{(-1)}\,)^2,\,2\,e^{(-1)}\right]$$

> `subs(x=-1,y=-1,[Delta,fxx]);subs(x=1,y=-1,[Delta,fxx]);`

$$\left[4\,(\,e^{(-1)}\,)^2,\,-2\,e^{(-1)}\right]$$

$$\left[4\,(\,e^{(-1)}\,)^2,\,2\,e^{(-1)}\right]$$

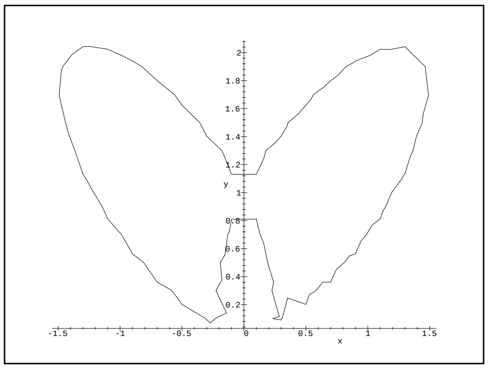
Závěrem určeme funkční hodnoty v bodech extrémů:

> `zip(f,[1,-1,-1,1],[1,1,-1,-1]);`

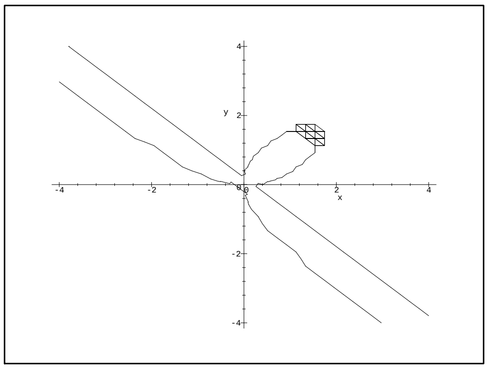
$$[\,e^{(-1)},\,-e^{(-1)},\,e^{(-1)},\,-e^{(-1)}\,]$$

V bodech $[1,1]$ a $[-1,-1]$ je tedy lokální maximum $f(1,1)=f(-1,-1)=1/\mathrm{e}$ a v bodech $[1,-1]$ a $[-1,1]$ lokální minimum $f(1,-1)=f(-1,1)=-1/\mathrm{e}$.

Kapitola 7 Funkce daná implicitně: V první části ukazujeme nedostatky algoritmu pro generování křivek daných implicitně (obr. 13 a 14):



obr. 13



obr. 14

```
> with(plots):
> implicitplot(2*x^4+y^4-3*x^2*y-2*y^3+y^2, x=-5/2..5/2, y=-5/2..5/2);
> Digits := 80:
> implicitplot((3*x*y)/(x^3+y^3)=1,x=-4..4,y=-4..4,grid=[40,40]);
```

Druhá část poté ukazuje výhody použití Maplu při výpočtech derivací funkce dané implicitně. Nově naprogramované jsou procedury `implicitdiff` pro výpočet první derivace funkce dané implicitně a `graf_t`, která určuje rovnici tečny v daném bodě ke křivce dané implicitně a generuje PC-graf.

Přílohy: V závěrečné části je popsán program Maple a představeny další CAS systémy, které se mohou využít pro přípravu podobných kurzů. Komerční CAS systémy je možno v některých případech doplnit či částečně nahradit public-domain softwarem. Jedna z příloh je proto věnována nejznámějším archivům těchto programů na Internetu a možnostem jejich prohledávání. Poslední příloha je věnována světovým archivům materiálů pro počítačem podporovanou výuku Diferenciálního počtu více proměnných a výuku matematické analýzy.