Modelování volatility v klasickém a bayesovském pojetí

Daniel Němec

Katedra ekonomie, Ekonomicko-správní fakulta

Masarykova univerzita

Content

Cíle

- Motivovat použitelnost modelů volatility.
- Ukázat běžně používané modely volatility.
- Prezentace používaných odhadových technik a testů.

Obsah tématu

Definice volatility

- Výnosy aktiva – náhodná veličina.
- Rozptýlenost výnosů – volatilita aktiva.

Využití ukazatelů volatility

- Primární použití k odhadu tržního rizika.
- Klíčový parametr k oceňování finančních derivátů.
- Techniky oceňování opcí – parametr volatility k jejich ocenění.
- Portfolio management (např. skládání portfolia s minimálním rozptylem).
- Potřeba znát nejen aktualní hodnotu volatility (pohled realizované volatility), ale i její budoucí hodnotu (predikování volatility).
- Predikce volatility $\rightarrow$ obchodování opcí, řízení portfolia.

VaR metodologie

- Value at Risk.
- Odhad náchylnosti finanční instituce k tržnímu riziku → klíčová role volatility.
- Parametry VaR (roční, měsíční, týdenní báze atd.) → nejvhodnější denní báze (rychlé změny situace na trhu).
- Potřeba korektního odhadu historické volatility krátkodobé předpovědi (odhady podmíněné volatility).

Obsah tématu

Měření tržního rizika

- Rizikové aktivum a jeho cena (denní): S_t.
- Pozitivní cena $\to$ výnos

$$r_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}.$$

- Výnos jako náhodná veličina: očekávaná (střední) hodnota μ a volatilita σ.
- Obvykle $\mu = 0 \Rightarrow \sigma$ nejdůležitější charakteristika.

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (r_t - \mu)^2}.$$

- σ^2 méně často používané.
- Volatilita vztažena k riziku (není to totéž): riziko je nejistota negativní realizace nějakého jevu $\times$ volatilita zahrnuje pozitivní i negativní realizace události.

Value at Risk (VaR)

- Ztrátová funkce spojená s negativní realizací výnosů.
- V_t je hodnota nějaké pozice (index, měna, akciový titul) ve dne $t \to$ logaritmický výnos další den $r_{t+1} \to$ ztráta další den $L_{t+1} = l(r_{t+1}) = -V_t r_{t+1}$ (pro jednoduchost $V_t = 1$).
- Portfolio rizikových aktiv $\to F_L(l) = P(L \leq l)$ (kumulativní distribuční funkce rozdělení ztrát).
- VaR jako maximální ztráta daného portfolia která s danou vysokou pravděpodobností není překročena.
- Počítáno pro danou úroveň spolehlivosti $a \in (0, 1)$.

$$VaR_a = \inf(l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - a) = \inf(F_L(l) \geq a).$$

Expected Shortfall (ES)

- Nevýhoda VaR: neznáme velikost ztráty přesahující danou mez.
- Expected shortfall:

$$ES_a = \frac{1}{1-a}\int_a^1 VaR_u(L)du.$$

- Alternativně jako očekávaná ztráta L realizována v případě, pokud je VaR překročeno:

$$ES_a = E(L|L \geq VaR_a).$$

Conditional risk management

- Přepočítávání klíčových měřítek rizikovosti (VaR, ES) na denní bázi při dané situaci na trhu.
- Podmíněný proces ztrát pro den t:

$$L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t,$$

- Z_t náhodná rezidua s nulovou střední hodnotou a rozptylem 1 + předpoklad kumulativní distribuční funkce G pro rezidua $\rightarrow$ obecné rovnice pro VaR a ES:

$$VaR_a^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} q_a(Z)$$
$$ES_a^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} ES_a(Z)$$

- $q_a(Z)$ jako kvantil rozdělení reziduí, $ES_a(Z)$ odpovídající ES a $a \in (0, 1)$ jako hladina spolehlivosti.
- Potřeba odhadu podmíněné střední hodnoty μ_{t+1} (prakticky brána jako nulová), podmíněné volatility σ_{t+1} a modelu rozdělení reziduí Z (pro odhad kvantilů a ES).

Obsah tématu

Motivace

- Zájem o predikování volatility resp odhad podmíněné volatility σ_{t+1}(nebo σ^2_{t+1}).
- Potřeba zachytit fakta o vývoji cen aktiv na finančních trzích: tvorba shluků, možná nenormalita rozdělení výnosů, asymetrie ve vývoji volatility.

Obsah tématu

Historická volatilita

- Nejjednodušší model: historická volatilita.
- Výpočet rozptylu nebo směrodatné odchylky za určité období.
- Tato hodnota jako predikce pro další období.
- Stále užitečné jako benchmark pro porovnání predikčních schopností modelů.

Implikovaná volatilita

- Modely oceňování aktiv: využití parametru volatility.
- Pro danou cenu obchodované opce (z dat obchodů) lze determinovat predikci volatility na celou dobu trvání opce danou oceněním opce.
- Příklad Black-Scholesova modelu: cena opce, čas do splatnosti, bezriziková úroková míra, opční cena (strike price), spotová cena podkladového aktiva.
- Vše známo nebo získatelné z tržních dat $\rightarrow$ numerické metody k odvození volatility implikované Black-Scholesovým modelem.
- Implikovaná volatility $=$ tržní predikce volatility podkladového aktiva po dobu trvání opce.

EWMA modely volatility

- Exponentially weighted moving average.
- Rozšíření historické volatility (vážení dat dle stáří).

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}(r_{t+1-j}-\overline{r})^2,$$

- kde σ^2 je odhad rozptylu pro čas t (zároveň i predikce na další období), $\overline{r}$ je průměrný výnos v rámci pozorování (často bráno jako 0) a λ je tzv. „decay factor“ (koeficient zapomínání).
- λ odhadnutelná z dat (optimálně na základě minimalizace chyb predikce nebo maximalizace věrohodnostní funkce) nebo kalibrovaná např. na 0.94.

EWMA modely volatility (doplnění)

- Problém při omezení dat (součet vah nejedničkový) a konstantnost predikcí, které se nevracejí k nepodmíněnému rozptylu.
- Obvykle vážený průměr:

$$\bar{r} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\lambda^{i-1}r_{t+1-i}.$$

- Rekurzivní zápis:

$$\widehat{\sigma}_{t+1} = \sqrt{\lambda\widehat{\sigma}_t^2 + (1-\lambda)r_t^2}.$$

Autoregresní modely volatility

- Jednoduchý příklad třídy modelů stochastické volatility (v rovnici volatility je náhodná složka).
- Myšlenka: získání proxy proměnných pro volatilitu.
- Aplikace procedur Box-Jenkinsova typu pro odhad autoregresních nebo ARMA modelů pro takto definovanou volatilitu.
- Pro denní volatilitu: čtverec denních výnosů nebo denní estimátor rozpětí.

$$\sigma_t^2 = \log\left(\frac{high_t}{low_t}\right)$$

Obsah tématu

Motivace

- Volatilita na finančních trzích pozorovatelná ve shlucích.
- Období vysoké volatility doprovázené obdobími vysoké volatility a naopak.
- Autoregresní přístup k zachycení těchto vlivů.

ARCH model

- Změny volatility jako specifický autoregresní proces.
- ARCH(q) model:

$$r_{t+1} = \mu + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \; N(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

- Někdy značení $\sigma_t^2 = h_t$.
- Podmínky nezápornosti, $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, q$.
- Podmíněný rozptyl $\times$ nepodmíněný rozptyl (podmíněná normalita $\times$ nepodmíněná vyšší špičatost).
- Test ARCH efektu (restrikce na koeficienty – LM test).
- Dopad šoků trvá jen q období.
- Různé specifikace „ne-ARCH“ části.

GARCH model

- GARCH(p,q) model:

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \; N(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- Podmínky pro stacionaritu podmíněného rozptylu (analogie k ARMA modelům), podmínky nezápornosti.

GJR modely

- Jednoduché rozšíření GARCH modelu pro zachycení možné asymetrie, např.:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma \epsilon_{t-1}^2 I_{t-1},$$

- kde $I_{t-1} = 0$ pro $\epsilon_{t-1} < 0$ a 0 jinak.
- Pákový efekt pro $\gamma > 0$ (velký negativní šok zvyšuje volatilitu).
- Rovněž pro $\gamma < 0$ model vhodný, pokud $\alpha_1 + \gamma \geq 0$.

EGARCH model

- Exponenciální GARCH model.
- Více variant vyjádření modelové rovnice, např. (pro Gaussovské η):

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right].$$

- Výhody oproti GARCH modelu:
    - Pro záporné parametry bude σ^2 pozitivní, a to díky $\log(\sigma_t^2)$.
    - Možná asymetrie, pokud vztah mezi výnosy a volatilitou záporný, bude γ záporné.
- V původní formulaci předpokládáno zobecněné rozdělení náhodných složek (Generalized Error Distribution - GED) $\times$ pro výpočetní jednoduchost spíše podmíněná normalita.

EGARCH model (obecněji)

- Jiná specifikace:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2),$$

- kde $\epsilon_t = \sqrt{\sigma_t^2}\eta_t$ a $g(\eta_t) = \theta\eta_t + \gamma[|\eta_t| - E|\eta_t|]$ jsou vážené inovace modelující asymetrii mezi pozitivními a negativními výnosy ($E[g(\eta_T)] = 0$).

$$g(\eta) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\eta_t - \gamma E(|\eta_t|) & \eta_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\eta_t - \gamma E(|\eta_t|) & \eta_t < 0 \end{cases}.$$

- Pro standardizovanou Gaussovskou náhodnou veličinu η:

$$E(|\eta_t|) = \sqrt{2/\pi}.$$

- Pro η ze standardizovaného t-rozdělení s d stupni volnosti:

$$E(|\eta_t|) = \sqrt{d}\Gamma[0.5(d-1)]/\sqrt{d}\gamma[0.5d].$$

IGARCH model

- Odhad ARCH modelu na delší časové řadě: součet parametrů blízký 1 (integrated GARCH effect).
- Integrated GARCH, IGARCH(p,q), odpovídá GARCH(p,q), kdy

$$\alpha_0 > 0 \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1.$$

- Stacionární řešení pro $\epsilon_t \times \epsilon_t$ nemá konečné druhé momenty (nepodmíněný rozptyl).
- Není to totéž co jednotkový kořen (a nestacionarita) u ARMA modelů.
- Permanentní dopady šoků na volatilitu.

Vícerozměrný GARCH model

- Diagonální VECH model a BEKK model.
- Pro jednoduchost dvě aktiva, pro která chceme modelovan rozptyly a kovariance.

VECH model

- Obvyklá specifikace:

$$VECH(H_t) = C + AVECH(\Xi_{t-1}\Xi'_{t-1}) + BVECH(H_{t-1}),$$

- kde $\Xi_t|\psi_{t-1}\ N(0, H_T)$, H_t podmíněnná kovarianční matice 2×2, Ξ_t vektor náhodných složek 2×1, ψ_{t-1} je informační množina v čase $t-1$, C je 3×1 vektor parametrů a A a B matice vektorů 3×3 a $VECH(\cdot)$ je operátor pro „half"-vektorizaci (aplikován na dolní trojúhelníkovou část matice, poskládání prvků do sloupců).

VECH model

Brooks (2008) – vícerozměrný VECH model (příklad)

Diagonální VECH model

- Neomezený VECH model pro dvě aktiva obsahuje 21 parametrů.
- Restrikce: A a B diagonální $\Rightarrow$ 9 parametrů:

$$h_{ij,t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij} u_{i,t-1} u_{j,t-1} + \beta_{ij} h_{ij,t-1} \quad i,j = 1,2,$$

- kde ω_{ij}, α_{ij} a β_{ij} jsou parametry.
- Problém s pozitivní semi-definitností kovarianční matice (pozitivní definitnost automaticky z dat pro v čase neměnnou kovarianční matici $\times$ problém nelineárních optimalizačních technik, nebo při překalibraci parametrů v rámci např. risk managementu).

BEKK model

- Vždy pozitivně definitní matice H.
- Reprezentace:

$$H_t = W'W + A'H_{t-1}A + B'\Xi_{t-1}\Xi_{t-1}'B,$$

- kde A a B matice parametrů (2×2) a W je horní trojúhelníková matice parametrů.
- Pozitivní definitnost díky kvadratickým členům.

Odhad a aplikace vícerozměrného GARCHU

- Za podmínky podmíněné normality:

$$l(\theta) = -\frac{TN}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\log|H_t| + \Xi_t' H_t^{-1}\Xi_t),$$

- kde θ označuje všechny neznámé parametry, N je počet ativ a T je počet pozorování.
- Rozdělení estimátoru asymptoticky normální.
- Obtížnější odhady než u jednorozměrných variant.
- Aplikace: vícerozměrný GARCH pro CAPM model s v čase proměnnými kovariancemi, odhad v čase proměnného poměru zajištění (hedge ratio) výnosů indexu.

Další specifikace modelů typu GARCH

Alternativní specifikace GARCH modelů

Další otázky a modifikace

- GARCH model s t-rozdělením nebo zobecněným exponenciálním rozdělením, např. GARCH(1,1)-t model (předpoklad normality u podmíněného rozptylu vede k nenormalitě nepodmíněného rozptylu).
- Modelování podmíněné střední hodnoty:

$$r_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} + \gamma_2 \epsilon_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t.$$

- Příklad *ARCH-in-mean* modelu:

$$\mu_t = \lambda_0 + \lambda_1 \sigma_t.$$

- Kde λ_1 chápáno jako kompenzace investorům za zvýšenou rizikovost aktiva.
- Příklad *GARCH-in-mean* modelu (GARCH-M):

$$r_t = \mu + \delta \sigma_{t-1} + \epsilon_t.$$

Modely stochastické volatility

- Podmíněný rozptyl pro GARCH modely plně deterministický.
- Dodání druhého náhodného členu.
- Příklad:

$$r_t = \mu + u_t \sigma_t, \quad u_t \ N(0,1)$$
$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \sigma_\eta \eta_t, \quad \eta_t \ N(0,1).$$

- Volatilita jako latentní proměnná (modelování nepřímo).
- Stochastická volatilita úzce propojena modely oceňování opcí (lze chápat jako diskretizace spojitých modelů).
- Není snadné tyto modely odhadovat.

Obsah tématu

Motivace

- Představení odhadových metod.
- Metody hodnocení predikční schopností modelů.

Obsah tématu

Estimátor nejmenších čtverců (LSE)

- LSE estimátor pro ARCH(p):

$$\widehat{\delta} = \left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{\epsilon}_{t-1} \tilde{\epsilon}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=2}^{T} \tilde{\epsilon}_{t-1} \epsilon_t^2,$$

- kde $\widehat{\delta} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)'$ a $\tilde{\epsilon}_t = (1, \epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2, \ldots, \epsilon_{t-p+1}^2)'$.

Metoda maximální věrohodnosti (ML)

- Z předpokladu ARCH modelu $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$ s IID η_t $N(0,2)$ věrohodnost pro ϵ_t:

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_t^2 \epsilon_t^2}\right).$$

- Podmíněná pravděpodobnostní funkce $f(\epsilon_t|\mathcal{J}_{t-1})$, kde $\mathcal{J}_{t-1} = \sigma(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots) \rightarrow$ iterace skrze $\mathcal{J}_{t-1}$:

$$\begin{aligned} f(\epsilon_T, \ldots, \epsilon_1|\epsilon_0) &= f(\epsilon_T, |\epsilon_{T-1}, \ldots, \epsilon_0) \cdots f(\epsilon_2|\epsilon_1, \epsilon_0) f(\epsilon_1|\epsilon_0) \\ &= \prod_{t=1}^{T} f(\epsilon_t|\mathcal{J}_{t-1}). \end{aligned}$$

Metoda maximální věrohodnosti (ML) (dokončení)

- Sdružená věrohodnostní funkce: $L = \prod_{t=1}^{T} l_t$.
- Logaritmus věrohodnosti:

$$\begin{aligned}\log f(\epsilon_T, \dots, \epsilon_1 | \epsilon_0) &= \sum_{t=1}^{T} \log f(\epsilon_t | \mathcal{J}_{t-1}) \\ &= -\frac{T}{2} \log 2\pi + \sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{2} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2}\end{aligned}$$

- Podmíněná věrohodnost:

$$L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\log 2\pi + \log \sigma_t^2(\theta) + \frac{\epsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right),$$

- kde $\theta = (\alpha_0, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$.
- Numerické metody, řada lokálních maxim a minim BHHH algoritmus $\times$ problém s konvergencí při počátečních hodnotách vzdálených od řešení.

ML a metoda quasi-maximální věrohodnosti (QML)

- Pro ML metodu potřeba počátečnách hodnot θ a řad ϵ_t^2 a σ_t^2.
- Inicializace počátečních hodnot na základě počátečního vzorku – LS odhad rovnice pro výnosy a nastavení parametrů (kromě α_0) v rovnici podmíněného rozptylu na nulu.
- Inicializace σ_t^2: součet čtverců reziduí z regrese závisle proměnné na konstantu dělený počtem pozorování.
- QML: použití Gaussovské MLE při nenormalitě procesu inovací, nebo ne zcela známém podmíněném rozdělení.
- Alternativně GMM (zobecněná metoda momentů).

Obsah tématu

Realizovaná volatilita

- Predikovaná volatilita h_t^2, realizovaná volatilita $\widehat{\sigma}_t^2$
- Důležitá otázka měření „ex post" volatility.
- Pro denní výnosy obvykle čtverec denních výnosů (použití jen otevírací a uzavírací ceny).
- Pokud vyšší frekvence, potom denní volatilita jako variabilita výnosů v rámci dne (např. 5 minutové intervaly, hodinové intervaly apod. s možnými zpřesňujícími modifikacemi).
- Např. pro týdenní výnosy spočítání variability mezidenních výnosů v týdnu a násobení počtem obchodních dnů.

Měřítka přesností predikce

- Hodnocení kvality modelů na základě informačních kritérií $\times$ otázka předpokladů na rozdělení věrohodnostní funkce a také problém toho, že in-sample výkonnost nezaručí out-of-sample výkonnost.
- R^2 z regrese:
$$r_t^2 = \alpha + \beta h_t^2 + u_t.$$
- Pro eliminaci vlivu odlehlých pozorování R^2 z regrese:
$$\log(r_t^2) = \alpha + \beta \log(h_t^2).$$

Ztrátové funkce

$$MSE_2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{\sigma}_t^2 - h_t^2\right)^2 \qquad MSE_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\sigma}_t - h_t)^2$$

$$PSE = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{\sigma}_t^2 - h_t^2\right)^2 h_t^{-4} \qquad QLIKE = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\log(h_t^2) + \widehat{\sigma}_t^2 h_t^{-2}\right)$$

$$R2LOG = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\log(\widehat{\sigma}_t^2 h_t^2)\right)^2 \qquad MAD_2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{\sigma}_t^2 - h_t^2\right|^2$$

$$MAD_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\widehat{\sigma}_t - h_t|$$

Obsah tématu

Základní principy

- Jeden model závisející na parametrech θ (např. regresní model s vysvětlujícími proměnnými).
- Zajímá nás posteriorní hustota a její vlastnosti $p(\theta|y)$.
- Bayesovo pravidlo:
$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$
- Pro náš model:
$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}$$

Klasický a bayesovský přístup

- $p(\theta|y)$ – otázka „Při daných datech, co víme o θ?“.
- Bayesiánský přístup – θ je náhodná veličina.
- Klasický přístup – θ není náhodná veličina.
- V rámci odhadu lze ignorovat $p(y)$, neboť neobsahuje θ:

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta).$$

Základní pojmy

- $p(\theta|y)$ – posteriorní hustota pravděpodobnosti.
- $p(y|\theta)$ – věrohodnostní funkce.
- $p(\theta)$ – apriorní hustota pravděpodobnosti.
- $\propto$ – „je proporcionální vzhledem“.
- $p(\theta)$ – nezávisí na datech, obsahuje nedatovou informaci o θ.

Bayesovské metody

- Gibbsův vzorkovač.
- Metropolis-Hasting algoritmus.
- Importance sampling.
- Rejection sampling.
- MCMC metody – potřeba konvergenčních diagnostik.

Obsah tématu

Formulace modelu

- GARCH (1,1) model:

$$r_t = X_t\gamma + \sigma_t\epsilon_t,$$

- pro $t = 1, \ldots, T$.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2,$$

- kde $u_{t-1} = r_t - X_t\gamma$.

Věrohodnostní funkce

- Data výnosnosti $r = (r_1, \dots, r_T)$.
- Vektor parametrů $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \nu, \gamma')$.
- Předpoklad Studentova t-rozdělení pro ϵ_t s ν stupni volnosti.
- Věrohodnostní funkce:

$$L(\theta|r, \mathcal{J}_0) \propto \prod_{t=1}^{T} \left[(\sigma_t^2)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(r_t - X_t\gamma)^2}{\sigma_t^2} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \right],$$

- kde σ_0^2 je pro jednoduchost brána jako známá konstanta.
- Za přepdokladu Studentova t-rozdělení pro ϵ_t je podmíněná volatilita dána (pro $\nu > 2$ jako):

$$\frac{\nu}{\nu - 2} \sigma_t^2.$$

Apriorní hustota

- Difuzní (neinformativní) apriorní hustota pro ω, α, β (parametry podmíněného rozptylu):

$$p(\omega, \alpha, \beta) \propto 1I_{(\theta_G)},$$

- kde $I_{(\theta_G)}$ je indikační funkce rovna 1 pro $\omega > 0$, $\alpha > 0$ a $\beta > 0$.
- Problém s neinformativností pro ν (posteriorní rozdělení nebude platná funkce hustoty), obvykle používáno:

$$p(\nu) = \lambda \exp(-\nu\lambda),$$

- kdy střední hodnota exponenciálního rozdělení je $1/\lambda$ ($\Rightarrow$ volba λ). ALternatinvě používáno rovnoměrné rozdělení na intervalu 0-20 (z empirické praxe).
- Parametry γ:

$$p(\gamma) = N(\mu, \Sigma_\gamma).$$

Posteriorní hustota

- Z Bayesova teorému:

$$p(\theta|r,\mathcal{J}_0) \propto \prod_{t=1}^{T}\left[(\sigma_t^2)^{-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\frac{(r_t-X_t\gamma)^2}{\sigma_t^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\right]$$
$$\times \exp(-\nu\lambda)$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma-\mu_\gamma)'\Sigma_\gamma^{-1}(\gamma-\mu_\gamma)\right)$$
$$\times I_{(\theta_G)}.$$

- Alternativní restrikce (stacionarity) v rámci apriorních hustot.
- Zjednodušení výpočtů a posteriorních simulací při nahrazení *t*-rozdělení kompozicí normálních rozdělení.

Modifikace věrohodnostní funkce

- Původní předpoklad:

$$r_t|\gamma, \sigma_t^2 \;\; t_\nu(X_t\gamma, \sigma_t).$$

- Ekvivalentní nahrazení (hierarchické apriorní hustoty):

$$r_t|\gamma, \sigma_t^2, \eta_t \;\; N\left(X_t\gamma, \frac{\sigma_t^2}{\eta_t}\right),$$

- kde η_t jsou tzv. kompozitní proměnné (mixing variables), přičemž jsou IID (pro $t = 1, \ldots, T$):

$$\eta_t|\nu \;\; G\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right).$$

- Nový vektor $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \nu, \gamma', \eta')$.

Věrohodnostní funkce a posteriorní hustota

- Věrohodnostní funkce:

$$\log(L(\theta|r,\mathcal{J}_0)) = \text{const} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log(\sigma_t^2) - \log(\eta_t) + \frac{\eta_t(r_t - X_t\gamma)^2}{\sigma_t^2}\right].$$

- Posteriorní rozdělení:

$$\begin{aligned}\log(p(\theta|r,\mathcal{J}_0)) = \text{const} &- \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log(\sigma_t^2) - \log(\eta_t) + \frac{\eta_t(r_t - X_t\gamma)^2}{\sigma_t^2}\right] \\ &- \frac{1}{2}(\gamma-\mu_\gamma)'\Sigma_\gamma^{-1}(\gamma-\mu_\gamma) \\ &+ \frac{T\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - T\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\sum_{t=1}^{T}\log(\eta_t) \\ &- \frac{\nu}{2}\sum_{t=1}^{T}(\eta_t) - \nu\lambda.\end{aligned}$$

- pro $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ a $\beta \geq 0$.

Systém podmíněných hustot

- Bloky parametrů: $\theta = (\theta_G, \nu, \gamma', \eta')$, kde $\theta_G = (\omega, \alpha, \beta)$.
- Odvození podmíněných hustot (ne všechny známé rozdělení):

$$
\begin{aligned}
& p(\theta_G|\gamma, \eta, \nu, r, \mathcal{J}_0), \\
& p(\nu|\theta_G, \gamma, \eta, r, \mathcal{J}_0), \\
& p(\gamma|\theta_G, \eta, \nu, r, \mathcal{J}_0), \\
& p(\eta|\theta_G, \gamma, \nu, r, \mathcal{J}_0),
\end{aligned}
$$

- Konkrétní podoba podmíněných hustot (jader hustot).

Obsah tématu

Modelování volatility v Matlabu

- Econometrics Toolbox
- Mimo jiné modely: GARCH, EGARCH, GJR (specifikace, odhady, simulace, predikce).
- Další modely: Hestonovská volatilita (modely stochastických diferenciálních rovnic).

Užitečné funkce

- Specifikace modelů: `garch`, `egarch`, `gjr`.
- Odhady modelů: `estimate`, `infer`, `print`.
- Simulace: `simulate`, `filter`.

Bayesovský odhad

- Potřeba specifikovat jádra podmíněných hustot.
- Odhad Gibbsovým vzorkovačem v kombinaci s M-H algoritmem.
- Testování konvergence atd.

Použitá literatura

- Rachev et al. (2007): Financial eocnometrics.
- Rachev et al. (2008): Bayesian methods in finance.
- Brooks, C. (2008): Introductory econometrics for finance.
- Hansen, P. R., Lunde, A. (2001): A comparison of volaility models: Does anything beat a GARCH(1,1). Working Paper Series No. 84.
- Ladokhin, S. (2009): Volatility modeling in financial markets. Master thesis, VU University Amsterdam.