Zápočtová písemka z Algebry I

25. 11. 2002 — skupina A — výsledky

1. (5 bodů) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_{10}$. Platí

$$f = (3,8,7,5) \circ (1,4,2), \quad g = (1,3,2,5) \circ (2,4,7,9,3).$$

Zapište permutace f^{-1}, g^{21}, $h = (f^{11} \circ g^{-3})^{20}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

U každé z permutací f, g, h, určete její paritu a řád.

Dokažte, že permutace $j = (s^3 \circ t^{-12})^{88} \circ s^{18}$ je sudá pro libovolné permutace $s, t \in \mathbb{S}_{10}$.

— $f^{-1} = (3,5,7,8) \circ (1,2,4)$, $g^{21} = (2,4,7,9)$, $h = (3,7,4) \circ (8,5,9)$. *Permutace f a g jsou liché permutace řádu 12, h sudá permutace řádu 3.*

Permutace s^n je sudá pro libovolnou permutaci s a sudé číslo n. Proto je permutace j součinem dvou sudých permutací a tudíž sudá permutace.

2. (1 bod) V grupě $(\mathbb{Z}_{37}^*, \cdot)$ určete řád prvku $[10]_{37}$.

— *Řád prvku je 3.*

3. (1 bod) Určete řád grupy $(\mathbb{Z}_{2200}^*, \cdot)$.

— $|\mathbb{Z}_{2200}^*| = \varphi(2200) = 800$.

4. (2 body) V grupě $(\mathbb{Z}_{727}^*, \cdot)$ nalezněte prvek inverzní k prvku $[115]_{727}$.

— $[115]_{727}^{-1} = [-177]_{727} = [550]_{727}$.

5. (2 body) Určete zbytek po dělení čísla $17^{18^{19}}$ číslem 15.

— $\varphi(15) = 8$, $18^{19} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8) \implies 17^{18^{19}} \equiv 17^0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 15)$. *Zbytek po dělení je tedy 1.*

6. (3 body) Určtěte jádro a obraz homomorfismu γ grupy $(\mathbb{Z}_9, +) \times (\mathbb{Z}_8, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ daného předpisem $\gamma(([a]_9, [b]_8)) = [4a + 3b]_{12}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Napište kolik má jádro a obraz prvků.

— $\mathrm{J}(\gamma) = \{([0]_9, [0]_8), ([3]_9, [0]_8), ([6]_9, [0]_8), ([0]_9, [4]_8), ([3]_9, [4]_8), ([6]_9, [4]_8)\}$, $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathbb{Z}_{12}$. *Pro počty prvků platí:* $|\,\mathrm{J}(\gamma)| = 6, |\,\mathrm{Im}(\gamma)| = 12$ $(|\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_8| = 72 = |\,\mathrm{J}(\gamma)| \cdot |\,\mathrm{Im}(\gamma)|)$.

7. (3 body) Buď P podgrupa grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ a $n \in \mathbb{N}$. Označme $G = \{A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \mid |A| \in P\}$. Dokažte, že množina G je podgrupa grupy $(\mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

— *Buď $A, B \in G$, pak $|A|, |B| \in P$. Proto podle Cauchyovy věty pro součin determinantů platí $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \in P$, neboť P je podgrupa $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Tedy $A \cdot B \in G$ a G je uzavřena na součiny.*

Neutrálním prvkem grupy $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ je jednotková matice E_n, která má determinant roven 1, což je prvek podgrupy P a tudíž $E_n \in G$.

Buď $A \in G$, pak $|A| \in P$ a tudíž i $|A|^{-1} \in P$, neboť P je podgrupa. Avšak $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, proto $A^{-1} \in G$, G je uzavřena i na inverze a jedná se tedy o podgrupu $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

8. (3 body) Určtěte všechny permutace $f \in \mathbb{S}_8$ takové, že $f^3 = (1,2) \circ (3,4) \circ (5,6)$.

— *Popsanou vlastnost má jednak permutace $(1,2) \circ (3,4) \circ (5,6)$ a poté 8 cyklů délky 6:*

$$(1,3,5,2,4,6), \quad (1,3,6,2,4,5), \quad (1,4,5,2,3,6), \quad (1,4,6,2,3,5),$$

$$(1,5,3,2,6,4), \quad (1,5,4,2,6,3), \quad (1,6,3,2,5,4), \quad (1,6,4,2,5,3).$$