Opravy ke sbírce příkladů z grup

Následující výčet obsahuje odhalené nedostatky. Pokud máte jakékoli pochybnosti o správnosti řešení nebo výsledku ve sbírce, ihned pište. Za nalezení dalších chyb a korekcí budeme vděčni. O.Klíma

Opravy překlepů a nepřesností

strana 11 ***Úloha i:*** V zadání má správně být:
Pomocí Euklidova algoritmu zjistěte $(6000, 9432)$.
strana 19 ***Úloha i:*** Popište všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.
Řešení: Buď k přirozené číslo nebo nula. Pak $k \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa v $(\mathbb{Z}, +)$ (dokažte sami). Ukážeme, že další neexistují.

Buď H podgrupa v $(Z, +)$, pak je buď $H = \{0\}0 \cdot \cdot \mathbb{Z}$ nebo $H \neq \{0\}$, pak ovšem H obsahuje nějaké nenulové celé číslo a. Pro takové $a \in H$ platí, že $-a \in H$, přičemž jedno z nich je kladné a tedy H obsahuje nějaká přirozená čísla. Označíme k nejmenší přirozené číslo v H a dokážeme, že $H = k \cdot \mathbb{Z}$.

1) „$k \cdot \mathbb{Z} \subseteq H$“ Nechť $x \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Chceme ukázat, že $k \cdot x \in H$. Pro $x \in \mathbb{N}$ je číslo $k \cdot x$ součtem x kopií prvku k a protože H je uzavřeno na sčítání, z $k \in H$ plyne $k \cdot x \in H$. Podobně, pro $x < 0$ je číslo $k \cdot x = (-k) \cdot (-x)$ součtem $-x$ kopií prvku $-k \in H$ a protože H je uzavřeno na sčítání, dostáváme $k \cdot x \in H$.

2) uv$k \cdot \mathbb{Z} \supseteq H$ Nechť $h \in H$ je libovolné číslo. Dělme jej číslem k se zbytkem: $h = k \cdot q + r$, $q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < k$. Z toho, že $r = h + (-k) \cdot q \in H$ plyne $r = 0$ vzhledem k předpokladu $0 \leq r < k$ a definici čísla k.

Tím jsme dokázali, že $H = k \cdot \mathbb{Z}$ a tedy, že všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jsou tvaru $k \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}, k \in \mathbb{N}_0$.
strana 22 Příklad 5.13: Chyba v definici množiny M_P, správně má být:
Nechť P je podgrupa grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, dokažte, že

$$M_P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P \right\}$$

je podgrupa grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
strana 30 Příklad 8.4: Chybně použité α místo a v první části příkladu:
Je dáno zobrazení α grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\mathbb{S}_6, \circ)$ předpisem

$$\alpha([a]_6) = (1, 2, 3) \circ (1, 2, 3)^a \circ (1, 2, 3)$$

pro libovlné celé číslo a ....
strana 34, řádek „1.Homomorfismus ...“ místo posledního a na řádku patří y.

Opravené a přidané výsledky příkladů

4.7 Chybí umocnění na k-tou. Tedy úplný výsledek má být $\cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n}$, kde $k, n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná.
4.8 $n \geq 33$
5.10 Z definice podgrupy. Například $H' = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
5.11 $\{[0]_{10}\}, \mathbb{Z}_{10}, \langle [2]_{10} \rangle, \langle [5]_{10} \rangle$
5.12 $\{[0]_n\}, \langle [a]_n \rangle$ pro každé a takové, že $a|n$
7.3 Viz *Úloha i* na straně 26, dělitelem je např. 7.
9.4 $\mathbb{A}_3, \langle (1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4) \rangle$
9.6 $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
10.4 Patří $\circ$ místo $\times$.