Označení příkladů C,B,A je čistě orientační a rozumějte mu tak, že student, který bude chtít u zkoušky získat hodnocení C (resp. B, resp A) by měl zvládnout vyřešit příklady označené písmenem C (resp. B, resp A), pokud tomu věnuje dostatek času. Tento můj odhad bude samozřejmě velice nepřesný. Mojí snahou je jen nějakým způsobem seřadit příklady dle obtížnosti a označit příklady (hvězdičkou), které mohou být skutečně náročné i pro šikovné studenty. Pokud je u příkladu navíc označení T, znamená to, že náročnost příkladu spočívá převážně v jeho technické náročnosti a vyřešení tedy vyžaduje delší bezchybné výpočty.

Pologrupy

Příklad 1. Maximální podgrupy.

^{B}i) viz Cvičení 3.5 v textu doc. Poláka. (Grupám G_e pak říkáme maximální podgrupy.)

^{C}ii) Určete maximální podgrupy v $(\mathbb{Z}_{18}, \cdot)$.

^{BT}iii) Určete maximální podgrupy v $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$.

Příklad 2. ^{A} Idempotenti v pologrupě $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.

i) Charakterizujte idempotenty v $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.

ii) Charakterizujte prvky maximální podgrupy příslušné idempotentu $[e]_n$ a určete velikost této grupy.

iii) Určete počet idempotentů v $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.

Permutační grupy

Příklad 3. Množiny generátorů v $\mathbb{S}_n$.

^{C}i) Ukažte, že libovolnou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin transpozic tvaru $(1, i)$.

^{A}ii) Ukažte, že libovolnou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin cyklů $(1, 2)$ a $(1, 2, \dots, n)$.

^{B}iii) Ukažte, že libovolnou sudou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin cyklů tvaru $(1, 2, i)$.

Rozmyslete si, že jste tím dokázali následující rovnosti: $\mathbb{S}_n = \langle (1, i) \mid i = 2, \dots n \rangle$, $\mathbb{S}_n = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$, $\mathbb{A}_n = \langle (1, 2, i) \mid i = 3, \dots n \rangle$.

Příklad 4. Normální podgrupy $\mathbb{S}_n$.

^{C}i) Nalezněte všechny podgrupy $\mathbb{S}_3$ a určete, které z nich jsou normální.

^{B}ii) Nalezněte všechny normální podgrupy $\mathbb{A}_4$ a $\mathbb{S}_4$.

^{A}iii) Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, existují právě tři normální podgrupy grupy $\mathbb{S}_n$ ($\{\mathrm{id}\}$, $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{S}_n$).

^{B}iv) Určete příslušné faktorgrupy.

Příklad 5. Vyjadřování prvků $\mathbb{S}_n$ ve speciálním tvaru.

^{A}i) Určete, pro která $m \in \mathbb{N}$ platí $(\forall a \in \mathbb{S}_n)(\exists b \in \mathbb{S}_n)(b^m = a)$.

*ii) Určete, které prvky $a \in \mathbb{S}_n$ lze psát ve tvaru $a = b^2c^2$ pro $b, c \in \mathbb{S}_n$.

Příklad 6. ^{B} Podgrupy $\mathbb{S}_n$.
Ukažte, že libovolná podgrupa grupy $\mathbb{S}_n$, která není podgrupou grupy $\mathbb{A}_n$, obsahuje právě polovinu sudých permutací a má tudíž sudý počet prvků.

Příklad 7. ^{B} Upravená Cayleyho věta
Ukažte, že libovolná konečná grupa je izomorfní s podgrupou grupy $\mathbb{A}_n$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 8. Grupy symetrií útvarů.

^{B} Určete následující grupy symetrií, jako podgrupy $\mathbb{S}_n$, pro vhodné n a ^{A} pokuste se najít prezentaci daných grup, případně popsat jakým grupám jsou izomorfní.

^{C}i) $\mathbb{D}_4$ grupa symetrií čtverce.

^{B}ii) $\mathbb{D}_n$ grupa symetrií pravidelného n-úhelníku.

^{C}iii) Grupa symetrií pravidelného čtyřstěnu.

*iv) Grupa symetrií krychle.

*Popište všechny podgrupy grupy $\mathbb{D}_n$.

Řády prvků a grup

Příklad 9. Eulerova funkce

^{C}i) Určete všechna přirozená čísla m, pro která platí $\varphi(m) = 18$.

^{B}ii) Určete všechna přirozená čísla n taková, že $\varphi(n) \mid n$.

Příklad 10. ^{C} Podgrupa prvků konečného řádu

Buď $(G, \cdot)$ komutativní grupa. Ukažte, že pro dané $n \in \mathbb{N}$ tvoří množina $G_n = \{a \in G \mid a^n = 1\}$ podgrupu grupy $(G, \cdot)$. Ukažte dále, že množina všech prvků konečného řádu $\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}$ je taktéž podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

Příklad 11. ^{C} Řády prvků v $\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})$.

i) Ukažte, že množina $\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \mid |A| = 1\}$ společně s operací násobení matic tvoří grupu.

^{B}ii) Ukažte, že v grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ existuje právě jeden prvek řádu 2.

iii) Ukažte, že v grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ netvoří množina všech prvků konečného řádu podgrupu.

^{AT}iv) V grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ charakterizujte prvky konečného řádu.

Příklad 12. ^{C} Řády prvků v $\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Pro prvočíslo p označme $\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_p) \mid |A| = [1]_p\}$.

i) Ukažte, že $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p), \cdot)$, kde $\cdot$ je násobení matic, tvoří grupu.

ii) Určete řád grupy $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p), \cdot)$.

^{B}iii) Ukažte, že pro $p > 2$ existuje v grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p), \cdot)$ právě jeden prvek řádu 2.

iv) Ukažte, že $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot) \cong (\mathbb{S}_3, \circ)$.

^{B}v) V grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p), \cdot)$ charakterizujte prvky řádu 4.

^{AT}vi) V grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_{13}), \cdot)$ určete počet prvků řádu 4.

vii) V grupě $(\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}_p), \cdot)$ dejte příklad prvku řádu 3.

Grupa automorfismů a centrum grupy

Příklad 13. ^{C} Grupa automorfismů.

Pro libovolnou grupu $(G, \cdot)$ označme $\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ izomorfismus}\}$ množinu všech automorfismů grupy G.

i) Ukažte, že $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, je grupa.

ii) Dokažte, že pro libovolný prvek $a \in G$ je zobrazení ρ_a automorfismus grupy G, kde $\rho_a : G \to G$ je definováno vztahem $\rho_a(x) = axa^{-1}$. (Hovoříme o vnitřních automorfismech.).

iii) Ukažte, že množina všech vnitřních automorfismů $\mathrm{Inn}(G) = \{\rho_a \mid a \in G\}$ je normální podgrupa grupy $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

iv) Dokažte, že zobrazeni $\rho : G \to \mathrm{Aut}(G)$ dané předpisem $\rho(a) = \rho_a$ je homomorfismus grup.

Příklad 14. ^{B} Centrum grupy.

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Centrum C grupy G je množina všech prvků, které komutují s libovolným prvkem, tj. $C = \{a \in G \mid \forall x \in G : xa = ax\}$.

i) Ukažte, že C je normální podgrupa grupy G.

ii) Dokažte, že faktorgrupa G/C je izomorfní grupě $\mathrm{Inn}(G)$.

iii) Najděte centrum grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$.

Příklad 15. ^{A} Grupa automorfismů $\mathbb{S}_n$.

i) Ukažte, že libovolný automorfismu grupy $\mathbb{S}_n$ zachovává paritu permutace.

ii) Určete centrum grupy $\mathbb{S}_n$ pro libovolné $n \geq 2$.

iii) Dokažte, že pro $n > 2$ je grupa $\mathrm{Inn}(\mathbb{S}_n)$ izomorfní grupě $\mathbb{S}_n$.

iv) Dokažte, že $\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{S}_n$ pro $n = 3, 4, 5$.

Příklad 16. ^{A} Prvky jednoznačně zadané řádem.

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že grupa G obsahuje jedinný prvek řádu n (označme jej a). Dokažte, že tento prvek komutuje s libovolným prvkem grupy G, tj. $xa = ax$ pro libovolné $x \in G$.

Příklad 17. ^{B} Polopřímý součin.

Viz. Cvičení 4.2 v textu doc. Poláka.

Derivace grupy, prezentace grup

Příklad 18. ^{B} Derivace grupy.

Nechť G je grupa a označme G' podgrupu generovanou množinou prvků tvaru $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, tj.

$$G' = \{[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n] \mid n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in G\}.$$

i) Dokažte, že G' je normální podgrupa grupy G.

ii) Ukažte, že faktorgrupa G/G' je komutativní grupa.

iii) Ukažte, že G/G' je "největší" komutativní faktorgrupa grupy G, tj. ukažte, že pokud H je normální podgrupa grupy G taková, že G/H je komutativní grupa, potom $G' \subseteq H$.

iv) Určete "největší" komutativní faktorgrupu pro grupu

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Totéž pro $\mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$.

Příklad 19. * Prezentace grup.

Definice prezentace grup (speciální případ) — viz text doc. Poláka. Určete grupy zadané prezentacemi:

i) $Gp < a, b \ \mid \ a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 >$,

ii) $Gp < a, b \ \mid \ a^3 = 1, b^4 = 1, (ab)^2 = 1 >$,

iii) $Gp < a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, ab = ba^3 >$,

iv) $Gp < a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, ab = ba^2 >$,

v) $Gp < a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 >$.

^{A} Určete nějaké prezentace grup:

vi) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

vii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,

viii) $\mathbb{Z}_8$.

Řešte Cvičení 4.3 z textu doc. Poláka.

Poznámky, návody, výsledky

Určité příklady lze nalézt ve skriptech prof. Rosického (například prezentace $\mathbb{D}_n$ a $\mathbb{S}_n$ v kap. 5., vnitřní automorfismy a centrum v kap. 10.)

Následující návody a výsledky doporučuji číst co nejpozději (až je příklad vyřešen, nebo s ním nemůžete dlouho "pohnout"). Výsledky jsou bez záruky, budu rád, když mě upozorníte na jakékoli nedostatky.

Př. 1. ii) Idempotenti: $[0]_{18}$, $[1]_{18}$, $[9]_{18}$, $[10]_{18}$. Maximální podgrupy:

$$\{[0]_{18}\}, \quad \mathbb{Z}_{18}^* = \{[1]_{18}, [5]_{18}, [7]_{18}, [11]_{18}, [13]_{18}, [17]_{18}\}, \quad \{[9]_{18}\}, \quad \{[2]_{18}, [4]_{18}, [8]_{18}, [10]_{18}, [14]_{18}, [16]_{18}\}.$$

iii) Pro jednotkovou matici je to podgrupa $\mathbb{SL}_2(\mathbb{R})$, pro nulovou matici je to triviální podgrupa. Pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ jsou následující prvky zbývající idempotenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ (a-a^2)/b & 1-a \end{pmatrix}.$$

Podgrupa příslušná idempotentu E je pak množina matic $\{q \cdot E \mid q \in \mathbb{R}, q \neq 0\}$.

Př. 2. i) $[e]_n$ je idempotent $\iff n = (n,e) \cdot (n, e-1)$. ii) $[a]_n$ je v maximální podgrupě příslušné idempotentu $[e]_n \iff (n,e) \mid a$ a zároveň $(a, (n, e-1)) = 1$. Tzn. počet těchto prvků je $\varphi((n, e-1))$. iii) 2^k, kde k je počet různých prvočísel dělících n.

Př. 4. Uvědomte si, že permutace $g^{-1}ag$ se liší od permutace a pouze přečíslováním čísel $1, \ldots, n$.

Př. 5. i) Pokud prvočíslo p dělí m pak $p > n$. Tzn. tvrzení platí pro m nesoudělné s $n!$. ii) Prvky z $\mathbb{A}_n$.

Př. 6. Uvažte homomorfismus přiřazení parity.

Př. 7. Sestrojte vnoření $\mathbb{S}_n$ do $\mathbb{A}_{2n}$.

Př. 8. i)+ ii) Skripta kap. I.5. iii) $\mathbb{S}_4$ iv) Uvažujte podgrupu přímých symetrií (ty, které lze provést v "reálu") a ukažte, že je izomorfní $\mathbb{S}_4$. Poté ukažte, že grupa symetrií krychle je izomorfní $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Př. 9. i) $m = 19$, 38, 27, 54. ii) $2^k \cdot 3^l$.

Př. 11.+12. Prvek řádu 2 je matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prvky řádu 4 jsou matice jejichž druhá mocnina je prvek řádu 2, což vede k charakterizaci: matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je řádu 4 $\iff a + d = 0$ v obou příkladech. **12**vi) 195 (nebo 158?). **11**iv) Prvky konečného řádu jsou řádu 2, 3 (ty pro něž $a + d = -1$), 4 a 6 (ty pro něž $a + d = 1$).

Př. 15 i) Uvažte homomorfismus přiřazení parity a použijte tvrzení z příkladu 4. ii)-iv) Používejte tvrzení z příkladů 13. a 14.

Př. 16 Uvažte jaké vlastnosti má automorfismus ρa.

Př. 18 iv) Pro H je

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

a $H/H' \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Pro $G = \mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$ je $G' = \mathbb{SL}_2(\mathbb{R})$ a tedy $G/G' \cong \mathbb{R}^*$.

Př. 19 i) $\mathbb{A}_4$, ii) $\mathbb{S}_4$, iii) grupa kvaternionů, iv) $\mathbb{D}_3$, v) $\mathbb{D}_3$.