3. test — Algebra I — jaro 2010 — 28. a 30. 4. — vzor

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (2 body) Nechť je dán homomorfismus $\alpha : (\mathbb{Z}_{20}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +) \times (\mathbb{Z}_5, +)$ předpisem $\alpha([a]_{20}) = ([a]_5, [a]_5)$, pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$. (Není třeba dokazovat, že α je homomorfismus.) Určete jádro a obraz homomorfismu α a napište, kolik mají prvků.

2. (2 body) Nechť je dána grupa $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Q}, xv - yz \neq 0 \right\}$ všech regulárních matic 2×2 nad $\mathbb{Q}$ s operací násobení matic. Buď dále $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Určete, zda H je normální podgrupa grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$.

3. (4 body) Uvažme množiny reálných čísel $G = \{15^p 5^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ a $H = \{3^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ a operaci $\cdot$ (násobení reálných čísel). Zřejmě $(G, \cdot)$ je grupa a H je její normální podgrupa.

(a) Pro $p, \overline{p}, q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$ doplňte podmínku $(\cdots)$ tak, aby platilo:

$$15^p 5^q \text{ a } 15^{\overline{p}} 5^{\overline{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } {}^{G}\!/_{H} \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(b) Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

4. (2 body) Určete rozklad grupy $(\mathbb{Z}_{21}^{\times}, \cdot)$ na součin netriviálních cyklických p-grup. Dejte příklad příslušného izomorfismu.