2. test — Algebra I — jaro 2010 — 7. a 9. 4. — vzor

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (1 bod) Určete počet prvků grupy $(\mathbb{Z}_{2332}^{\times}, \cdot)$.

2. (1 bod) Určete řád prvku $[7]_{23}$ v grupě $(\mathbb{Z}_{23}^{\times}, \cdot)$.

3. (2 body) Nechť je dána grupa regulárních matic 2×2 nad $\mathbb{Z}_7$

$$\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_7, xv - yz \neq [0]_7 \right\}$$

s operací násobení. Určete počet prvků grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7), \cdot)$.

V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ určete podgrupu generovanou prvkem $\begin{pmatrix} [1]_7 & [2]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 \end{pmatrix}$.

4. (3 body) Určete poslední dvojčíslí čísla 7^{7^7}.

5. (3 body) U následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) rozhodněte, zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

a) $\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$, $\alpha(([a]_2, [b]_2)) = [|a + b|]_2$,

b) $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q}$.