3. test — Algebra I — jaro 2006 — 20. 4. — sk. A

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (2 body) Nechť jsou dány grupy $(H, \cdot)$, $(K, \circ)$. Nechť dále A je podgrupa grupy $(H, \cdot)$ a B je podgrupa grupy $(K, \circ)$. Dokažte, že $A \times B$ je podgrupa grupy $(H, \cdot) \times (K, \circ)$.

2. (3 body) Nechť $\mathbb{S}$ je množina všech bijekcí (permutací) množiny $\mathbb{N}$. Tato množina spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu $(\mathbb{S}, \circ)$. Označme dále

$$A = \{f \in \mathbb{S} \mid \text{ množina } \{i \mid f(i) \neq i\} \text{ je konečná } \},$$

$$B = \{f \in \mathbb{S} \mid \text{ množina } \{i \mid f(i) = i\} \text{ je konečná } \}.$$

Rozhodněte, zda A, respektive B, je podgrupa grupy $(\mathbb{S}, \circ)$.

Dejte příklad prvku $b \in B$ takového, že množina $\{id_{\mathbb{N}}, b\}$ je podgrupa $(\mathbb{S}, \circ)$.

3. (2 body) Nechť je dána grupa regulárních matic 2×2 nad $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_2, xv \neq yz \right\}$$

s operací násobení. Určete počet prvků grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$.

V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ určete podgrupu generovanou prvkem $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ určete podgrupu generovanou množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. (3 body) U následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) rozhodněte, zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

a) $\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$, $\alpha(([a]_2, [b]_2)) = [|a + b|]_2$,

b) $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q}$.

c) Určete všechna $c \in \mathbb{C}$ taková, že předpis $\gamma([a]_4) = c^a$, pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$, zadává zobrazení z množiny $\mathbb{Z}_4$ do $\mathbb{C}$. Pro která tato c, je γ homomorfismus z grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ do grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot)$? Pro která c je γ izomorfismus?

3. test — Algebra I — jaro 2006 — 20. 4. — sk. B

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (2 body) Nechť jsou dány grupy $(H, \cdot)$, $(K, \circ)$. Nechť dále $\varphi : H \to K$ je homomorfismus grup a A nechť je podgrupa grupy $(H, \cdot)$.
Dokažte, že $B = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ je podgrupa grupy $(K, \circ)$.

2. (3 body) Nechť $\mathbb{S}$ je množina všech bijekcí (permutací) množiny $\mathbb{N}$. Tato množina spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu $(\mathbb{S}, \circ)$. Označme dále

$$A = \{f \in \mathbb{S} \mid \text{ množina } \{i \mid f(i) \neq i\} \text{ je nekonečná }\},$$

$$B = \{f \in \mathbb{S} \mid \text{ množina } \{i \mid f(i) = i\} \text{ je nekonečná }\}.$$

Rozhodněte, zda A, respektive B, je podgrupa grupy $(\mathbb{S}, \circ)$.

Dejte příklad prvku $a \in A$ takového, že množina $\{id_{\mathbb{N}}, a\}$ je podgrupa $(\mathbb{S}, \circ)$.

3. (2 body) Nechť je dána grupa regulárních matic 2×2 nad $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_2, xv \neq yz \right\}$$

s operací násobení. Určete počet prvků grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$.

V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ určete podgrupu generovanou prvkem $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ určete podgrupu generovanou množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. (3 body) U následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) rozhodněte, zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

a) $\alpha : (\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$, $\alpha(([a]_3, [b]_3)) = [|a + b|]_3$,

b) $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q^2}$.

c) Určete všechna $c \in \mathbb{C}$ taková, že předpis $\gamma([a]_3) = c^a$, pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$, zadává zobrazení z množiny $\mathbb{Z}_3$ do $\mathbb{C}$. Pro která tato c, je γ homomorfismus z grupy $(\mathbb{Z}_3, +)$ do grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot)$? Pro která c je γ izomorfismus?