4. test — Algebra I — jaro 2005 — 16. 5. — sk. A

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (1 bod) Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 2x^5 + 15x^4 + 36x^3 + 26x^2 - 6x - 9 \in \mathbb{Q}[x].$$

2. (1 bod) Nalezněte všechny kořeny polynomu $g = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že g má vícenásobný kořen.

3. (1 bod) Buď α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +) \times (\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ definovaný předpisem $\alpha(([a]_{10}, [b]_6)) = [3a + 5b]_{30}$. Určete jádro $Ker(\alpha)$ a obraz $Im(\alpha)$ homomorfismu α. Kolik mají $Ker(\alpha)$ a $Im(\alpha)$ prvků?

4. (2 body) Uvažme množiny reálných čísel $G = \{2^p 3^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ a $H = \{12^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ a operaci $\cdot$ (násobení reálných čísel). Zřejmě $(G, \cdot)$ je grupa a H její normální podgrupa.

(a) Pro $p, \overline{p}, q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$ doplňte podmínku $(\cdots)$ tak, aby platilo:

$$2^p 3^q \text{ a } 2^{\overline{p}} 3^{\overline{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } {}^{G}\!/_{H} \iff \cdots.$$

(b) Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro které dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

4. test — Algebra I — jaro 2005 — 16. 5. — sk. B

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (1 bod) Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 2x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 22x^2 + 30x + 9 \in \mathbb{Q}[x].$$

2. (1 bod) Nalezněte všechny kořeny polynomu $g = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že g má vícenásobný kořen.

3. (1 bod) Buď α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_6, +) \times (\mathbb{Z}_{10}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ definovaný předpisem $\alpha(([a]_6, [b]_{10})) = [5a + 6b]_{30}$. Určete jádro $Ker(\alpha)$ a obraz $Im(\alpha)$ homomorfismu α. Kolik mají $Ker(\alpha)$ a $Im(\alpha)$ prvků?

4. (2 body) Uvažme množiny reálných čísel $G = \{2^p 3^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ a $H = \{18^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ a operaci $\cdot$ (násobení reálných čísel). Zřejmě $(G, \cdot)$ je grupa a H její normální podgrupa.

(a) Pro $p, \overline{p}, q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$ doplňte podmínku $(\cdots)$ tak, aby platilo:

$$2^p 3^q \text{ a } 2^{\overline{p}} 3^{\overline{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } {}^{G}\!/_{H} \iff \cdots.$$

(b) Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro které dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.