3. test — Algebra I — jaro 2005 — 25. 4. — sk. A

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (2 body) Nechť je dána grupa matic

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_3, xv - yz = [1]_3 \right\}$$

s operací násobení. (Připomeňme, že $\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$.)

Dokažte, že

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3, ac = [1]_3 \right\}$$

je podgrupa grupy G.

Rozhodněte, zda je H normální podgrupa grupy G.

2. (1 bod) V grupě $(\mathbb{Z}_{120}, +)$ určete podgrupu generovanou danou množinou prvků. Určete počet prvků této podgrupy.

a) $\{[50]_{120}\}$,

b) $\{[18]_{120}, [50]_{120}\}$.

3. (2 body) U následujících předpisů (kde $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{S}_n$ a $p(s) \in \{1, -1\}$ značí paritu permutace s) rozhodněte, zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. (Pozor, odpovědi se mohou lišit v závislosti na n.)

a) $\alpha : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{S}_6, \circ)$, $\alpha([a]_6) = (1, 2) \circ (1, 2, 3)^a \circ (1, 2)$,

b) $\beta : (\mathbb{S}_n, \circ) \to (\mathbb{S}_n, \circ)$, $\beta(s) = s^{p(s)}$.

3. test — Algebra I — jaro 2005 — 25. 4. — sk. B

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (2 body) Nechť je dána grupa matic

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_3, xv - yz = [1]_3 \right\}$$

s operací násobení. (Připomeňme, že $\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$.)

Dokažte, že

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3, ac = [1]_3 \right\}$$

je podgrupa grupy G.

Rozhodněte, zda je M normální podgrupa grupy G.

2. (1 bod) V grupě $(\mathbb{Z}_{120}, +)$ určete podgrupu generovanou danou množinou prvků. Určete počet prvků této podgrupy.

a) $\{[45]_{120}\}$,

b) $\{[24]_{120}, [45]_{120}\}$.

3. (2 body) U následujících předpisů (kde $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{S}_n$ a $p(s) \in \{1, -1\}$ značí paritu permutace s) rozhodněte, zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. (Pozor, odpovědi se mohou lišit v závislosti na n.)

a) $\alpha : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{S}_6, \circ)$, $\alpha([a]_6) = (4, 5) \circ (3, 4, 5)^a \circ (4, 5)$,

b) $\beta : (\mathbb{S}_n, \circ) \to (\mathbb{S}_n, \circ)$, $\beta(s) = s^{-p(s)}$.