1. test — Algebra I — jaro 2005 — 14. 3. — sk. A

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (1 bod) Následující tabulku operace $*$ lze jedním způsobem doplnit tak, aby vznikla pologrupa $(\{a,b,c\},*)$. Nalezěte jak.

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a		b
c	a	c	

2. (1 bod) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_9$. Platí

$$f = (3,8,7,5) \circ (1,4), \quad g = (1,3,5) \circ (7,4,9,2).$$

Zapište permutaci $h = (f^{-5} \circ g^{11})^{-1}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

U každé z permutací f, g, h, určete její paritu.

3. (1 bod) Určete, pro která přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ existuje permutace $s \in \mathbb{S}_6$ taková, že $s \circ (1,2,3,4,5) \circ s = (1,2)^n$. Pro tato n popište všechny takové permutace s.

4. (2 body) Označme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Buď nyní X pevně zvolená podmnožina množiny $\mathbb{N}$. Na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definujeme operaci $\square$ vztahem $A \square B = (A \cup B) \cap X$.

Dokažte, že operace $\square$ je asociativní.

Určete všechny množiny X takové, že $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \square)$ má neutrální prvek.

Pro které z nich je $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \square)$ grupa?

1. test — Algebra I — jaro 2005 — 14. 3. — sk. B

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (1 bod) Následující tabulku operace $*$ lze jedním způsobem doplnit tak, aby vznikla pologrupa $(\{a, b, c\}, *)$. Nalezěte jak.

$*$	a	b	c
a		b	c
b	b	b	b
c	a	b	

2. (1 bod) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_9$. Platí

$$f = (1, 8, 7, 6) \circ (3, 4), \quad g = (1, 6, 3) \circ (7, 4, 9, 2).$$

Zapište permutaci $h = (f^{-5} \circ g^{11})^{-1}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

U každé z permutací f, g, h, určete její paritu.

3. (1 bod) Určete, pro která přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ existuje permutace $s \in \mathbb{S}_7$ taková, že

$$s \circ (1,2,3,4,5,6,7) \circ s = (1,2)^n.$$

Pro tato n popište všechny takové permutace s.

4. (2 body) Označme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Buď nyní X pevně zvolená podmnožina množiny $\mathbb{N}$. Na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definujeme operaci $\Box$ vztahem $A \Box B = (A \cap B) \cup X$.
Dokažte, že operace $\Box$ je asociativní.
Určete všechny množiny X takové, že $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Box)$ má neutrální prvek.
Pro které z nich je $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Box)$ grupa?