

# Zkoušková písemka z Algebry I

3. termín — 27. 1. 2003

Jméno: .....

Obor: .....

UČO: .....

Zápočet		Ústní		Celkem	

1. Uvažme množiny reálných čísel  $G = \{15^p 5^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$  a  $H = \{3^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$  a operaci  $\cdot$  (násobení reálných čísel). Zřejmě  $(G, \cdot)$  je grupa.

(a) Ukažte, že  $H$  je normální podgrupa grupy  $(G, \cdot)$ .

(b) Pro  $p, \bar{p}, q, \bar{q} \in \mathbb{Z}$  doplňte podmínku  $(\dots)$  tak, aby platilo:

$$15^p 5^q \text{ a } 15^{\bar{p}} 5^{\bar{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } G/H \iff \dots$$

(c) Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa  $G/H$ , tj. popište grupu  $(K, \cdot)$  a definujte vhodné zobrazení  $\alpha : G \rightarrow K$ , pro něž dokažte, že  $\alpha$  je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je  $H$ .

2. Pro libovolnou grupu  $(G, \cdot)$  označme  $\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ izomorfismus}\}$  množinu všech automorfismů grupy  $G$ . Víme, že  $(\text{Aut}(G), \circ)$ , kde  $\circ$  je skládání zobrazení, je grupa. Dokažte, že pro libovolný prvek  $a \in G$  je zobrazení  $\rho_a$  automorfismus grupy  $G$ , kde  $\rho_a : G \rightarrow G$  je definováno vztahem  $\rho_a(x) = a^{-1}xa$ . Ukažte, že množina všech těchto homomorfismů  $\text{Inn}(G) = \{\rho_a \mid a \in G\}$  je normální podgrupa grupy  $(\text{Aut}(G), \circ)$ .

3. Určete všechny čtveřice  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  takové, že předpis  $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$ , pro  $r, s \in \mathbb{R}$ , definuje homomorfismus  $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  okruhu  $\mathbb{C}$  do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

4. Určete všechny kořeny polynomu  $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$ , víte-li, že má dvojnásobný kořen  $1 + i$ . Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory nad  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , resp.  $\mathbb{C}$ .

5. Rozložte polynom  $g = x^8 - x^7 + 2x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$  na ireducibilní faktory.