Zkoušková písemka z Algebry I

2. termín — 20. 1. 2003

Jméno: ....
Obor: ....
UČO: ....

Zápočet		Ústní			Celkem

1. Buď $(G, \cdot)$ komutativní grupa s neutrálním prvkem 1 a označme $\mathrm{End}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ homomorfismus}\}$ množinu všech homomorfismů z grupy $(G, \cdot)$ do sebe. Označme dále $\mathbf{id} : G \to G$ a $\mathbf{konst} : G \to G$ zobrazení definovaná pro libovolné $a \in G$ takto: $\mathbf{id}(a) = a$, $\mathbf{konst}(a) = 1$. Dokažte, že

- **a)** $\mathbf{id}, \mathbf{konst} \in \mathrm{End}(G)$;
- **b)** pro libovolné $f, g \in \mathrm{End}(G)$ je $f + g \in \mathrm{End}(G)$, kde pro libovolné $a \in G$ definujeme $(f+g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.

Tedy $+$ je operací na množině $\mathrm{End}(G)$ a uvažme dále na této množině operaci $\circ$ skládání zobrazení. Dokažte, že

- **c)** $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ je okruh s nulovým prvkem **konst** a jednotkovým **id**.

2. Pro libovolnou grupu G značíme $\mathrm{D}_G = \{(a, a) \in G \times G \mid a \in G\}$. Dokažte, že

- **a)** D_G je podgrupa grupy $G \times G$;
- **b)** D_G je normální podgrupa grupy $G \times G$ právě tehdy, když G je komutativní grupa;
- **c)** pokud G je komutativní grupa, pak faktorgrupa $G \times G / \mathrm{D}_G$ je izomorfní grupě G, tj. definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \times G \to G$ a ukažte, že je to surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je podgrupa D_G.

3. V komutativní grupě $(G, \cdot)$ s neutrálním prvkem e uvažme podmnožinu K všech prvků grupy G konečného řádu, tedy $K = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = e\}$. Dokažte, že

- **a)** K je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$;
- **b)** K je uzavřena na odmocniny, tj. ukažte, že pro libovolný prvek $a \in G$ a libovolné přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí: $a^n \in K \implies a \in K$;
- **c)** ve faktorgrupě $(G/K, \cdot)$ je K jediný prvek konečného řádu.

4. Buď $a \in \mathbb{Q}$ takové, že polynomy $f = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + a \in \mathbb{Q}[x]$ a $g = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ jsou soudělné, tj. $r = \mathrm{nsd}(f, g)$ je nekonstantní polynom. Určete stupeň polynomu r a všechna $a \in \mathbb{Q}$ vyhovující podmínce. Pro všechna tato a rozložte polynomy f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Q}$.
(Návod: Ověřte, že g nemá racionální kořeny, a uvědomte si, co z toho plyne pro stupeň polynomu r, který dělí polynom g.)

5. Určete, který z polynomů $f = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.