Zkoušková písemka z Algebry I

1. termín — 13. 1. 2003

Jméno: ....

Obor: ....

UČO: ....

Zápočet		Ústní			Celkem

1. Víme, že množina

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon \in \{1, -1\}, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

společně s operací násobení matic tvoří grupu $(G, \cdot)$. Označme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$$

podmnožinu G. Ukažte, že H je normální podgrupa grupy G. Popište rozklad G/H, tj. charakterizujte kdy dvě matice $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \varepsilon' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ náleží do stejné třídy rozkladu. Určete počet tříd rozkladu G/H. Určete, které grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

2. Nechť grupa $(K, \cdot)$ má dvě normální podgrupy G a H takové, že $G \cap H = \{1\}$ a $\langle G \cup H \rangle = K$. Dokažte, že zobrazení $\alpha : G \times H \to K$ definované předpisem $\alpha((g, h)) = gh$ je izomorfismus grup.
(Návod: ukažte nejdříve, že pro libovolné $g \in G$ a $h \in H$ platí $g^{-1}h^{-1}gh \in G \cap H$.)

3. Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso a vysvětlete, kde v důkazu využijete faktu, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

4. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

5. O polynomu $g = x^4 + 2\mathrm{i}x^3 + x^2 + 2\mathrm{i}x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ víte, že má dvojnásobný kořen. Rozložte polynom g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$.