Písemky — Algebra I — jaro 2004

1 — 3.3.

A Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem

$$n \circ m = \begin{cases} n+m, & nm > 0 \\ 0, & nm \leq 0 \end{cases} \qquad \text{pro } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Ukažte, že $\circ$ je asociativní operace. Rozhodněte, zda existuje neutrální prvek. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, \circ)$ je grupa. Nalezněte všechny idempotenty.

B Na množině $\mathbb{Q}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem

$$p \circ q = \begin{cases} p, & pq > 0 \\ 0, & pq \leq 0 \end{cases} \qquad \text{pro } p, q \in \mathbb{Q}.$$

Ukažte, že $\circ$ je asociativní operace. Rozhodněte, zda existuje neutrální prvek. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Q}, \circ)$ je grupa. Nalezněte všechny idempotenty.

C Na množině $\mathbb{R}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem

$$x \circ y = \begin{cases} -xy, & x < 0, y < 0 \\ |xy|, & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že $\circ$ je asociativní operace. Rozhodněte, zda existuje neutrální prvek. Rozhodněte, zda $(\mathbb{R}, \circ)$ je grupa. Nalezněte všechny idempotenty.

2 — 10.3.

A 1) Rozhodněte, zda existuje 4-prvková grupa $(\{d, e, f, g\}, \circ)$ s neutrálním prvkem e, kde prvky d, f jsou navzájem inverzní. (Dejte příklad nebo zdůvodněte, že neexistuje.)
2) Doplňte následující tabulku operace na tříprvkové množině tak, aby výsledný grupoid byl pologrupou. (Zdůvodněte, že se jedná o pologrupu.)

$\circ$	a	b	c
a	a	b	a
b		b	b
c	c	b	

B 1) Rozhodněte, zda existuje 4-prvková grupa $(\{a, b, c, d\}, \circ)$, kde prvky a, b jsou navzájem inverzní a podobně c, d jsou navzájem inverzní. (Dejte příklad nebo zdůvodněte, že neexistuje.)
2) Doplňte následující tabulku operace na tříprvkové množině tak, aby výsledný grupoid byl pologrupou. (Zdůvodněte, že se jedná o pologrupu.)

$\circ$	e	f	g
e	e	f	
f	e		g
g	g	g	g

C 1) Rozhodněte, zda existuje 4-prvková grupa $(\{a, b, c, d\}, \cdot)$, kde prvky c je neutrální prvek a $a \cdot a = b$, $b \cdot b = c$. (Dejte příklad nebo zdůvodněte, že neexistuje.)
2) Doplňte následující tabulku operace na tříprvkové množině tak, aby výsledný grupoid byl pologrupou. (Zdůvodněte, že se jedná o pologrupu.)

$\circ$	e	f	g
e	e	g	
f	g	f	
g			

3 — 17.3.

A 1) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_9$. Platí $f = (8,6,7,5) \circ (1,2,4)$, $g = (1,5,2,8) \circ (1,4,7,9,8)$. Zapište permutace f^{-1}, g^{20}, $h = (f^{11} \circ g^{-4})^{-20}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

Permutace f a g napište jako součin transpozic a určete paritu těchto permutací.

2) Rozhodněte, zda existuje permutace $s \in \mathbb{S}_9$ taková, že $s \circ (1,2,3) = (1,2) \circ s$. (Uveďte příklad nebo důkaz.)

B 1) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_9$. Platí $f = (1,7) \circ (2,8) \circ (3,5,6,4,9)$, $g = (1,6,9,3,4) \circ (3,8,4,5,7)$. Zapište permutace f^{-1}, g^{10}, $h = (g^{-5} \circ f^{9})^{20}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

Permutace f a g napište jako součin transpozic a určete paritu těchto permutací.

2) Rozhodněte, zda existuje permutace $t \in \mathbb{S}_9$ taková, že $t^3 \circ (1,2) = (1,2,3) \circ t^3$. (Uveďte příklad nebo důkaz.)

C 1) Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_9$. Platí $f = (5,8,7,6) \circ (2,9,4)$, $g = (2,6,9,5) \circ (1,5,2,4,7)$. Zapište permutace f^{-1}, g^{21}, $h = (f^{23} \circ g^{-3})^{20}$ ve tvaru součinu nezávislých cyklů.

Permutace f a g napište jako součin transpozic a určete paritu těchto permutací.

2) Určete, pro která přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ existuje permutace $s \in \mathbb{S}_{2n}$ taková, že $s^2 = (1,2)(3,4)\dots(2n-1,2n)$.

4 — 24.3.

A 1) Určete $[51]_{1042}^{-1}$ v grupě $\mathbb{Z}_{1042}^{*}$.

2) Určete řád prvku $[3]_{16}$ v grupě $\mathbb{Z}_{16}^{*}$.

B 1) Určete $[37]_{500}^{-1}$ v grupě $\mathbb{Z}_{500}^{*}$.

2) Určete řád prvku $[5]_{13}$ v grupě $\mathbb{Z}_{13}^{*}$.

5 — 31.3.

A Určete zbytek po dělení čísla $13^{13^{13}} + 14^{14^{14}}$ číslem 72.

B Určete zbytek po dělení čísla $9^{9^{9}} + 22^{22^{22}}$ číslem 72.

6 — 7.4.

A Určete podgrupu grupy $(\mathbb{S}_7, \circ)$ generovanou množinou $\{(1,3), (1,5)(3,7), (1,3,5)\}$. Kolik má tato podgrupa prvků?

B Určete podgrupu grupy $(\mathbb{Z}_{37}^{*}, \cdot)$ generovanou množinou $\{[11]_{37}, [36]_{37}\}$. Kolik má tato podgrupa prvků?

7 — 14.4.

A U obou následujících předpisů (kde $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0 \neq q$) rozhodněte, zda zadávají zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. Odpovědi zdůvodněte!
$\alpha : (\mathbb{Z}_8, +) \times (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{S}_{10}, \circ)$, $\alpha(([a]_8, [b]_6)) = (1,2,3,4)^a (5,6,7)^b$; $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = \frac{q}{p} i$.

B U obou následujících předpisů (kde $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0 \neq q$) rozhodněte, zda zadávají zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. Odpovědi zdůvodněte!
$\alpha : (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{S}_4, \circ)$, $\alpha(([a]_4, [b]_4)) = (1,2,3,4)^{ab}$; $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = p + q \cdot i$.

8 — 21.4.

A Buď dána operace $\circ$ na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vztahem $(a,b) \circ (c,d) = (a + c, b \cdot (-1)^c + d)$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Víme, že $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$ je grupa (neutrální prvek je $(0,0)$ a inverze k prvku (a,b) je prvek $(-a, b \cdot (-1)^{a+1})$).

i) Dokažte, že množiny $H = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ a $K = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ jsou podgrupy grupy $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$.

ii) Rozhodněte, zda je H normální podgrupa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$. (Odpověď zdůvodněte.)

iii) Rozhodněte, zda je K normální podgrupa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$. (Odpověď zdůvodněte.)

B Buď dána operace $\square$ na množině $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$ vztahem $(a,b) \square (c,d) = (a \circ c, b \circ a \circ d \circ a^{-1})$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{S}_3$ a $\circ$ je operace skládání permutací. Víme, že $(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3, \square)$ je grupa (neutrální prvek je $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ a inverze k prvku (a,b) je prvek $(a^{-1}, a^{-1} \circ b^{-1} \circ a)$).

i) Dokažte, že množiny $H = \{(a, \mathrm{id}) \mid a \in \mathbb{S}_3\}$ a $K = \{(\mathrm{id}, b) \mid b \in \mathbb{S}_3\}$ jsou podgrupy grupy $(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3, \square)$.

ii) Rozhodněte, zda je H normální podgrupa $(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3, \square)$. (Odpověď zdůvodněte.)

iii) Rozhodněte, zda je K normální podgrupa $(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3, \square)$. (Odpověď zdůvodněte.)

9 — 28.4.

A Buď dána množina komplexních čísel $G = \{i^a \cdot q \mid a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}^*\}$, která společně s operací násobení tvoří grupu. Určete pravý a levý rozklad této grupy podle podgrupy $\mathbb{Q}^*$.

B Buď dána množina reálných čísel $G = \{(\sqrt[3]{2})^a \cdot q \mid a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}^*\}$, která společně s operací násobení tvoří grupu. Určete pravý a levý rozklad této grupy podle podgrupy $\mathbb{Q}^*$.

10 — 5.5.

A Uvažujme normální podgrupu grupy $(G, +) = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ definovanou takto: $H = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

B Uvažujme normální podgrupu grupy $(G, +) = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ definovanou takto: $H = \{(a, \sqrt{2}a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.