Racionální lomené funkce

Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Nechť $f, g \in R[x]$ jsou polynomy, přičemž $g \neq 0$. Víme, že pak polyom g má jenom konečný počet kořenů. Označme K_g množinu všech kořenů polynomu g. Pak definujeme zobrazení

$$\Re_{f/g} \;:\; R - K_g \;\to\; R$$

předpisem

$$(\forall c \in R - K_g)(\, \Re_{f/g}(c) = f(c) \cdot (g(c))^{-1}\,).$$

Zobrazení $\Re_{f/g}$ se nazývá **racionální lomená funkce** určená dvojicí polynomů f, g.

Na množině $R[x] \times (R[x] - \{0\})$ definujeme relaci $\approx$ následovně. Pro libovolné polynomy $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, klademe

$$(f, g) \approx (s, t) \quad\Longleftrightarrow\quad f \cdot t = s \cdot g.$$

Podotkněme, že na pravé straně zde vystupuje rovnost dvou polynomů v $R[x]$. Podle posledního důsledku z minulé kapitoly je tato rovnost $f \cdot t = s \cdot g$ ekvivalentní rovnosti polynomických funkcí $\wp_{f \cdot t} = \wp_{s \cdot g}$. Důkaz zmíněného důsledku je ovšem takový, že naprosto stačí požadovat rovnost těchto dvou funkcí pouze na množině $R - (K_g \cup K_t)$. Tento požadavek je ovšem ekvivalentní rovnosti racionálních lomených funkcí $\Re_{f/g}$ a $\Re_{s/t}$ na množině $R - (K_g \cup K_t)$. Znamená to tedy, že pro libovolné polynomy $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, máme

$$(f, g) \approx (s, t) \iff (\forall c \in R - (K_g \cup K_t))(\, \Re_{f/g}(c) = \Re_{s/t}(c)).$$

Dále je evidentní, že tato relace $\approx$ je ekvivalence na množině $R[x] \times (R[x] - \{0\})$. Tímto způsobem vzniká faktorová množina $R[x] \times (R[x] - \{0\}) \,/ \approx$. Pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, budeme třídu $[(f, g)]_{\approx}$ této faktorové množiny značit krátce symbolem $\frac{f}{g}$ a budeme mluvit o **zlomku** určeném dvojicí polynomů f, g. Uvedená faktorová množina je tedy potom množinou všech zlomků vytvořených z polynomů z $R[x]$. Při daném označení tedy pro libovolná $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, máme

$$\frac{f}{g} = \frac{s}{t} \iff f{\cdot}t = s{\cdot}g.$$

Každý zlomek $\frac{f}{g}$ je ovšem možno vyjádřit jednoznačně v následujícím speciálním, tzv. vykráceném tvaru.

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $s, t \in R[x]$, $t \neq 0$, takové, že $(s, t) = 1$, polynom t je normovaný a platí $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$. Polynomy s, t jsou přitom určeny jednoznačně.

Důkaz. Nechť a je vedoucí koeficient polynomu g. Položme $f' = a^{-1}{\cdot}f$ a $g' = a^{-1}{\cdot}g$. Pak polynom g' je normovaný a platí $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$. Nechť dále $h = (f', g')$. Pak existují polynomy $s, t \in R[x]$ takové, že $f' = h{\cdot}s$ a $g' = h{\cdot}t$. Z formule předcházející tomuto tvrzení je pak jasné, že $\frac{f'}{g'} = \frac{s}{t}$. Přitom $t \neq 0$ a t je nutně normovaný polynom, jelikož g' i h jsou takové polynomy. Kromě toho $(s, t) = 1$, neboť kdyby tomu tak nebylo, neplatilo by, že $(f', g') = h$.

Nechť dále $s, s', t, t' \in R[x]$, $t \neq 0$, $t' \neq 0$ jsou takové polynomy, že $(s, t) = 1$ a $(s', t') = 1$, polynomy t, t' jsou normované a platí pro ně $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$ i $\frac{f}{g} = \frac{s'}{t'}$. Pak ovšem $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$. Z formule zmiňované výše pak plyne, že $s{\cdot}t' = s'{\cdot}t$. Poněvadž $(s, t) = 1$, z této rovnosti na základě posledního důsledku z předminulé kapitoly plyne, že $s \mid s'$ a $t \mid t'$. Poněvadž také $(s', t') = 1$, podobně odtud plyne rovněž, že $s' \mid s$ a $t' \mid t$. Poněvadž polynomy t, t' jsou normované, znamená to, že $t = t'$, odkud vychází též, že $s = s'$.

Dále je možno na faktorové množině $R[x] \times (R[x] - \{0\}) \,/ \approx$ definovat binární operace $+$ a $\cdot$ následovně. Pro libovolná f, g,

$u, v \in R[x]$, $g \neq 0$, $v \neq 0$, klademe

$$\frac{f}{g} + \frac{u}{v} = \frac{f \cdot v + g \cdot u}{g \cdot v} \qquad \text{a} \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{u}{v} = \frac{f \cdot u}{g \cdot v}.$$

Je snadné ověřit, že tyto definice jsou korektní v tom smyslu, že výsledný zlomek v žádné z obou operací nezávisí na tom, kterými konkrétními dvojicemi polynomů jsme výchozí dva zlomky reprezentovali. Kromě toho se pak rovněž lehce ověří, že zmíněná faktorová množina, tedy množina všech výše popsaných zlomků spolu s právě definovanými operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří těleso. Mluvíme o tělese zlomků nad okruhem $(R[x], +, \cdot)$. Nakonec se snadno nahlédne, že zobrazení přiřazující každému polynomu $h \in R[x]$ zlomek $\frac{h}{1}$ je prostým homomorfismem okruhu polynomů $(R[x], +, \cdot)$ do tělesa zlomků nad tímto okruhem. Je tedy možno takto polynomy chápat jako speciální typ zlomků.

Nechť znovu $f, g \in R[x]$ jsou polynomy, $g \neq 0$. Řekneme, že zlomek $\frac{f}{g}$ je **ryzí**, jestliže $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$. Poznamenejme, že ani tato definice nezávisí na dané konkrétní reprezentci zlomku $\frac{f}{g}$, neboť jsou-li $s, t \in R[x]$, $t \neq 0$ takové polynomy, že $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$, pak máme $f \cdot t = s \cdot g$, takže $\mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(t) = \mathrm{st}(s) + \mathrm{st}(g)$. To znamená, že $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$ platí právě tehdy, když platí $\mathrm{st}(s) < \mathrm{st}(t)$.

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $h, u, v \in R[x]$, $v \neq 0$, takové, že $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$, přičemž $\frac{u}{v}$ je ryzí zlomek. Přitom polynom h i ryzí zlomek $\frac{u}{v}$ jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Podle věty o dělení polynomů se zbytkem existují polynomy $h, u \in R[x]$ takové, že $f = g \cdot h + u$, přičemž $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(g)$. To znamená, že pak $\frac{f}{g} = \frac{g \cdot h + u}{g} = \frac{h}{1} + \frac{u}{g}$, takže $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{g}$, kde $\frac{u}{g}$ je ryzí zlomek.

Nechť dále $h, h', u, u', v, v' \in R[x]$, $v \neq 0$, $v' \neq 0$, jsou takové polynomy, že $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$ i $\frac{f}{g} = h' + \frac{u'}{v'}$, přičemž oba zlomky $\frac{u}{v}$ i $\frac{u'}{v'}$

jsou ryzí. Pak tedy máme $h + \frac{u}{v} = h' + \frac{u'}{v'}$, takže $h - h' = \frac{u'}{v'} - \frac{u}{v}$, a tedy $(h - h')\cdot v\cdot v' = u'\cdot v - u\cdot v'$. Poněvadž ale $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(v)$ a $\mathrm{st}(u') < \mathrm{st}(v')$, plyne odtud, že $\mathrm{st}(u'\cdot v - u\cdot v') < \mathrm{st}(v\cdot v')$. To ovšem ukazuje, že předchozí rovnost může platit jenom tehdy, je-li $h = h'$. To má pak za následek také rovnost $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$.

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Nechť $f, g, h \in R[x]$, $g \neq 0$, $h \neq 0$ jsou takové polynomy, že $(g, h) = 1$ a $\frac{f}{g\cdot h}$ je ryzí zlomek. Potom existují polynomy $u, v \in R[x]$ takové, že $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$, přičemž oba zlomky $\frac{u}{g}$ i $\frac{v}{h}$ jsou ryzí. Navíc polynomy u, v jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Poněvadž $(g, h) = 1$, podle Bezoutovy rovnosti existují polynomy $s, t \in R[x]$ takové, že $1 = h\cdot s + g\cdot t$. Pak ovšem $f = f\cdot 1 = f\cdot h\cdot s + f\cdot g\cdot t$, takže $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{f\cdot h\cdot s + f\cdot g\cdot t}{g\cdot h} = \frac{f\cdot s}{g} + \frac{f\cdot t}{h}$. Podle předchozího tvrzení a jeho důkazu pak ale existují polynomy $p, q, u, v \in R[x]$ takové, že $\frac{f\cdot s}{g} = p + \frac{u}{g}$ a $\frac{f\cdot t}{h} = q + \frac{v}{h}$, přičemž $\frac{u}{g}$ i $\frac{v}{h}$ jsou ryzí zlomky. Takže dostáváme $\frac{f}{g\cdot h} = p + q + \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$. Poněvadž všechny zlomky v této rovnosti jsou ryzí, podobnou argumentací jako v závěru předchozího důkazu odtud odvodíme, že nutně $p + q = 0$. Vychází tedy, že $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$.

Nechť dále $u, u', v, v' \in R[x]$ jsou takové polynomy, že platí $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$ i $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u'}{g} + \frac{v'}{h}$, přičemž všechny zlomky $\frac{u}{g}, \frac{v}{h}, \frac{u'}{g}, \frac{v'}{h}$ jsou ryzí. Pak ovšem $\frac{u}{g} + \frac{v}{h} = \frac{u'}{g} + \frac{v'}{h}$, takže máme $u\cdot h + v\cdot g = u'\cdot h + v'\cdot g$, a tedy $(v - v')\cdot g = (u' - u)\cdot h$. Poněvadž $(g, h) = 1$, podle posledního důsledku z předminulé kapitoly odtud plyne, že $g \,|\, (u' - u)$ a $h \,|\, (v - v')$. Protože ale $\mathrm{st}(u' - u) < \mathrm{st}(g)$ a $\mathrm{st}(v - v') < \mathrm{st}(h)$, je to možné jenom tak, že $u = u'$ a $v = v'$.

Nechť $p \in R[x]$ je ireducibilní polynom, nechť $f \in R[x]$ je polynom takový, že $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(p)$ a nechť k je přirozené číslo. Položme $g = p^k$. Pak o zlomku $\frac{f}{g}$ říkáme, že je to **prostý** zlomek.

Nyní jsme připraveni formulovat následující větu o rozkladu racionálních lomených funkcí na parciální zlomky.

Věta. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak libovolný nenulový ryzí zlomek vytvořený z polynomů z R[x] lze vyjádřit ve tvaru součtu konečného počtu prostých zlomků. Přitom toto vyjádření je pro daný ryzí zlomek jediné.

Důkaz. Mějme libovolný ryzí zlomek $\frac{f}{g}$, kde $f, g \in R[x]$ jsou takové polynomy, že $f \neq 0$, $g \neq 0$ a $\operatorname{st}(f) < \operatorname{st}(g)$. Pak g je nekonstantní polynom. Poněvadž okruh polynomů $(R[x], +, \cdot)$ je okruhem s jednoznačným rozkladem, existují konstanta $a \in R$, $a \neq 0$, přirozené číslo ℓ, vzájemně různé normované ireducibilní polynomy $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ z $R[x]$ a přirozená čísla $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ taková, že platí $g = a \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{k_\ell}$. Položme ještě $f' = a^{-1} \cdot f$ a $g' = a^{-1} \cdot g$ a poznamenejme, že pak $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$ a $g' = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{k_\ell}$. Podotkněme ještě, že potom pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ je polynom $p_i^{k_i}$ nesoudělný se součinem všech zbývajících polynomů mezi $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_2}$, $\ldots$, $p_\ell^{k_\ell}$. Vzhledem k této okolnosti je možno opakovanou aplikací předchozího tvrzení postupně najít polynomy $u_1, u_2, \ldots, u_\ell \in R[x]$ tak, že platí

$$\frac{f}{g} = \frac{u_1}{p_1^{k_1}} + \frac{u_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{u_\ell}{p_\ell^{k_\ell}},$$

přičemž všechny zlomky napravo v této rovnosti jsou ryzími zlomky. Vezměme nyní libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ a zkoumejme zlomek $\frac{u_i}{p_i^{k_i}}$. Označme ho kvůli jednoduchosti jako $\frac{u}{p^k}$. Je-li $k = 1$, je to již prostý zlomek. Předpokládejme tedy dále, že $k > 1$. Pak opakovaným dělením polynomů se zbytkem postupně najdeme polynomy $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1} \in R[x]$ a $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1} \in R[x]$ takové, že platí:

$$\begin{aligned}
u &= p \cdot q_1 + r_1, \quad \operatorname{st}(r_1) < \operatorname{st}(p),\\
q_1 &= p \cdot q_2 + r_2, \quad \operatorname{st}(r_2) < \operatorname{st}(p),\\
q_2 &= p \cdot q_3 + r_3, \quad \operatorname{st}(r_3) < \operatorname{st}(p),\\
&\cdots\\
q_{k-2} &= p \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, \quad \operatorname{st}(r_{k-1}) < \operatorname{st}(p).
\end{aligned}$$

Poněvadž $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(p^k)$, vychází odtud postupně také, že $\mathrm{st}(q_1) < \mathrm{st}(p^{k-1})$, $\mathrm{st}(q_2) < \mathrm{st}(p^{k-2})$, $\mathrm{st}(q_3) < \mathrm{st}(p^{k-3})$, $\dots$, $\mathrm{st}(q_{k-1}) < \mathrm{st}(p)$. Z předchozích rovností rovněž dále plyne, že $u = r_1 + p{\cdot}r_2 + p^2{\cdot}r_3 + \cdots + p^{k-2}{\cdot}r_{k-1} + p^{k-1}{\cdot}q_{k-1}$. To znamená, že dostáváme

$$\frac{u}{p^k} = \frac{r_1}{p^k} + \frac{r_2}{p^{k-1}} + \frac{r_3}{p^{k-2}} + \cdots + \frac{r_{k-1}}{p^2} + \frac{q_{k-1}}{p},$$

kde všechny zlomky uvedené vpravo v této rovnosti jsou prostými zlomky. Tento fakt spolu s předchozím rozkladem ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ dokazují existenci požadovaného vyjádření zlomku $\frac{f}{g}$ ve tvaru součtu několika prostých zlomků. Jednoznačnost tohoto vyjádření se dokáže argumenty podobnými těm, které byly použity v důkazech předchozích dvou tvrzení.

Poznámky. Před rozkladem daného ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ na součet prostých zlomků je rozumné vyjádřit tento zlomek ve vykráceném tvaru podle prvního tvrzení této kapitoly.

Požadujeme-li, aby zde prosté zlomky byly vyjádřeny v takovém tvaru, který byl dán v jejich definici, a chceme-li navíc, aby přitom ireducibilní polynomy v těchto tvarech byly normované, pak dostáváme jednoznačnost rozkladu ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ na součet prostých zlomků netoliko, pokud jde o vlastní prosté zlomky v tomto rozkladu obsažené, ale dokonce, pokud se týče samotných polynomů použitých ve vyjádřeních těchto zlomků.