Vektorové prostory

Zobecníme nejprve představu vektorů z dvourozměrného nebo trojrozměrného prostoru na libovolný n-rozměrný prostor, kde n je jakékoliv přirozené číslo. Tento n-rozměrný prostor reprezentujeme jako kartézskou mocninu $\mathbb{R}^n$ množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Vezmeme-li libovolné dva body $A, B \in \mathbb{R}^n$, kde $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, pak tyto dva body určují vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tak, že $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $\ldots$, $u_n = b_n - a_n$. Pak ovšem můžeme stručně psát $B = A + \mathbf{u}$, chápeme-li tento součet po jednotlivých složkách. Tentýž vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je ovšem určen také kterýmikoliv jinými dvěma body $C, D \in \mathbb{R}^n$, $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$, $D = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$, pro něž platí $u_1 = d_1 - c_1$, $u_2 = d_2 - c_2$, $\ldots$, $u_n = d_n - c_n$, takže pak lze podobně psát $D = C + \mathbf{u}$. Samotný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je pak také n-ticí reálných čísel, a je tedy prvkem kartézské mocniny $\mathbb{R}^n$. Navíc máme-li tři body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, přičemž body A, B určují vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tak, že $B = A + \mathbf{u}$, a body B, C určují podobně vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tak, že $C = B + \mathbf{v}$, pak ovšem máme $C = A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$, takže součet $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$ je vektor určený body A, C. Kromě toho určuje-li dvojice bodů A, B vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pak dvojice bodů B, A určuje opačný vektor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$. Dvojice stejných bodů A, A určuje nulový vektor $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$. Takto je možno kartézskou mocninu $\mathbb{R}^n$ chápat také jako množinu všech vektorů v n-rozměrném prostoru, které spolu s právě popsanou operací $+$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{R}^n, +)$. Vedle toho máme možnost ještě pro každé číslo $r \in \mathbb{R}$ a pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, uvažovat také vektor $r \cdot \mathbf{u} = (r \cdot u_1, r \cdot u_2, \ldots, r \cdot u_n)$. Takto zavedená tzv. vnější operace $\cdot$, tj. násobení vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $r \in \mathbb{R}$ má některé další příznivé vlastnosti, které jsou popsány dále. Máme-li na zřeteli celou takto vzniklou strukturu, mluvíme

o vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel. Postoupíme-li v procesu zobecňování a abstrakce ještě dále a vezmeme-li místo reálných čísel jakékoliv těleso a místo jeho n-té kartézské mocniny jakoukoliv komutativní grupu, která bude svázána s daným tělesem vnější operací skalárního násobku mající analogické vlastnosti jako doposud, dostaneme následující obecný pojem vektorového prostoru.

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa. Nechť je dále dáno zobrazení

$$\cdot : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ prvek $s \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{V}$ takovým způsobem, že pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned} s \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= s \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}, \\ (s + t) \cdot \mathbf{u} &= s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{u}, \\ (s \cdot t) \cdot \mathbf{u} &= s \cdot (t \cdot \mathbf{u}), \\ 1 \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Pak trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem** $(T, +, \cdot)$.

Prvky množiny $\mathbf{V}$ se nazývají **vektory** a prvky množiny T se nazývají **skaláry**. Neutrální prvek grupy $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $\mathbf{o}$ a nazývá se **nulový vektor**. Opačný prvek k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ v grupě $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $-\mathbf{u}$ a nazývá se **opačný vektor** k vektoru $\mathbf{u}$. Vektor $s \cdot \mathbf{u}$, kde $s \in T$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, se nazývá **skalární násobek** vektoru $\mathbf{u}$ prvkem s.

Symbolem $+$ jsou ve struktuře vektorového prostoru označeny dvě binární operace, totiž sčítání $+ : T \times T \to T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a sčítání $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ v komutativní grupě $(\mathbf{V}, +)$. Podobně symbolem $\cdot$ je označena jednak binární operace násobení $\cdot : T \times T \to T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a také vnější operace skalárního násobku $\cdot : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, která je pak uváděna v rámci

trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Je třeba mít tuto okolnost na zřeteli, i když nebude moci dojít k nedorozumění, poněvadž z kontextu bude vždy jasné, o kterou operaci právě jde.

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ budeme opět synbolem $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ značit vektor $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Pak z vlastností operací ve struktuře vektorového prostoru uvedených až doposud plynou jako důsledky také následující vlastnosti.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned}
&s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v},\\
&(s - t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u},\\
&s \cdot (-\mathbf{u}) = (-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u}),\\
&s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff s = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}.
\end{aligned}$$

Důkaz. Ježto $(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{o}$ a $s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{v} + (-s{\cdot}\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, dostáváme odtud $s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) + s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v}$.

Dále poněvadž $(-t) + t = 0$ a $t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = t{\cdot}\mathbf{u} + (-t{\cdot}\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, dostáváme podobně $(s - t) \cdot \mathbf{u} = (s + (-t)) \cdot \mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = (s + (-t) + t) \cdot \mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u}$.

Poněvadž podle předchozího $s{\cdot}\mathbf{u} + s \cdot (-\mathbf{u}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $s \cdot (-\mathbf{u})$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme $s{\cdot}(-\mathbf{u}) = -(s{\cdot}\mathbf{u})$. Podobně poněvadž $s{\cdot}\mathbf{u} + (-s) \cdot \mathbf{u} = (s + (-s)) \cdot \mathbf{u} = (s - s) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $(-s) \cdot \mathbf{u}$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme také $(-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u})$.

Je-li $s = 0$, pak podle předchozích poznatků máme $0{\cdot}\mathbf{u} = (0 - 0) \cdot \mathbf{u} = 0{\cdot}\mathbf{u} - 0{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak podobně $s{\cdot}\mathbf{o} = s \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{o}) = s \cdot \mathbf{o} - s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$. Je-li naopak $s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$ a je-li přitom $s \neq 0$, pak $\mathbf{u} = 1{\cdot}\mathbf{u} = (s^{-1} \cdot s) \cdot \mathbf{u} = s^{-1} \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = s^{-1} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ podle posledního zjištění, takže pak $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť n je přirozené číslo. Pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s operací sčítání $+$ definovanou po složkách předpisem $(s_1, s_2, \ldots, s_n) + (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s_1 + t_1,\ s_2 + t_2,\ \ldots,\ s_n + t_n)$ a s vnější operací skalárního násobku $\cdot$ definovanou podobně předpisem $s \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s \cdot t_1, s \cdot t_2, \ldots, s \cdot t_n)$ tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Speciální případ, kdy tělesem $(T, +, \cdot)$ bylo těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel, byl rozebrán v úvodu této kapitoly.

Nechť opět $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť $T[x]$ je množina všech polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. V kapitole o okruzích polynomů jsme na množině $T[x]$ definovali binární operace $+$ a $\cdot$ tak, že pak $(T[x], +, \cdot)$ byl okruh, nazývaný okruh polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Zúžíme-li nyní druhou z těchto operací, tedy operaci $\cdot$ tak, že ji ponecháme definovanou pouze pro ty dvojice polynomů $f, g \in T[x]$, kde f je konstantní polynom, a tedy f je vlastně prvkem množiny T, dostaneme tak vnější operaci skalárního násobku přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému polynomu $g \in T[x]$ polynom $s \cdot g \in T[x]$. Tak vzniká vektorový prostor $(T[x], +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Je-li $(T, +, \cdot)$ těleso a je-li $S \subseteq T$ libovolné podtěleso, takže pak $(S, +, \cdot)$ s operacemi převzatými z $(T, +, \cdot)$ je zase těleso, pak ovšem operace $\cdot$ zůstává stále definována pro libovolné dvojice prvků z T, a tedy zejména je definována pro libovolné dvojice prvků s, t, kde $s \in S$ a $t \in T$, čili ji lze vnímat jako vnější operaci skaláího násobku. Při tomto pohledu se pak $(T, +, \cdot)$ stává vektorovým prostorem nad tělesem $(S, +, \cdot)$. Takto například komplexní čísla tvoří vektorový prostor $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina splňující následující podmínky:

$$\mathbf{o} \in \mathbf{W},$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}),$$
$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}).$$

Pak říkáme, že $\mathbf{W}$ je **podprostor** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Tato terminologie je ospravedlněna skutečností, že potom množina $\mathbf{W}$ je uzavřená vzhledem k operaci $+$ sčítání vektorů a také vzhledem ke skalárnímu násobení $\cdot$ vektorů libovolnými prvky tělesa $(T, +, \cdot)$; navíc množina $\mathbf{W}$ obsahuje nulový vektor $\mathbf{o}$ a dále ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ obsahuje také opačný vektor $-\mathbf{u}$, poněvadž $-\mathbf{u} = -(1 \cdot \mathbf{u}) = (-1) \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Takže pak $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podgrupa grupy $(\mathbf{V}, +)$ a celkem tak vzniká struktura $(\mathbf{W}, +, \cdot)$, která je zase vektorovým prostorem nad tělesem $(T, +, \cdot)$, neboť také ostatní shora uvedené definiční podmínky vektorového prostoru zůstávají splněny.

V každém vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou podmnožiny $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{V}$ množiny $\mathbf{V}$ podprostory vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Znamená to mimo jiné, že $(\{\mathbf{o}\}, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, kterému říkáme **nulový vektorový prostor**. Kromě toho ovšem může mít daný vektorový prostor množství dalších podprostorů.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť m, n jsou přirozená čísla splňující $m < n$. Viděli jsme, že pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a skalárního násobení $\cdot$ definovanými po složkách tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak množina $T^m \times \{0\}^{n-m} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in T\}$, jež je podmnožinou kartézské mocniny T^n, je podprostorem vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Buď opět $(T, +, \cdot)$ těleso. Viděli jsme, že pak okruh polynomů $(T[x], +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak množina $\{f \in T[x] \mid (\forall t \in T)(f(t) = f(-t))\}$ tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(T[x], +, \cdot)$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor podprostorů $\mathbf{W}_i$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde $i \in I$, platí, že průnik tohoto souboru podprostorů $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ je také podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Ověření faktu, že množina $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ splňuje všechny výše uvedené definiční podmínky vektorového podprostoru, pokud jednotlivé množiny $\mathbf{W}_i$ pro $i \in I$ tyto podmínky splňují, je rutinní záležitostí.

Buď dále $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Buď $M \subseteq \mathbf{V}$ libovolná podmnožina. Pak existuje alespoň jeden podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ obsahující množinu M – například celá množina $\mathbf{V}$ je takovým podprostorem. To znamená, že soubor všech těch podprostorů vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, které obsahují množimu M, je neprázdný. Můžeme tedy utvořit průnik tohoto souboru podprostorů. Podle předchozího tvrzení je tento průnik sám podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Tento poslední podprostor pak značíme symbolem $\langle M \rangle$. Je to nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ v systému všech podprostorů tohoto vektorového prostoru částečně uspořádaném inkluzí, který obsahuje množinu M. O podprostoru $\langle M \rangle$ říkáme, že je to podprostor **generovaný** množinou M, a o samotné množině M říkáme, že je to množina **generátorů** podprostoru $\langle M \rangle$. Tato terminologie je odůvodněna následující skutečností. Poznamenejme ještě předtím, že pro $M = \emptyset$ zřejmě máme $\langle M \rangle = \{\mathbf{o}\}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $M \subseteq \mathbf{V}$, $M \neq \emptyset$ je libovolná podmnožina. Pak platí následující rovnost:

$$\langle M \rangle = \{s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N},\ s_1, s_2, \ldots, s_n \in T,\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in M\}.$$

Poznámka. O vektoru $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n$ říkáme, že je to **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Podle uvedeného tvrzení je tedy podprostor $\langle M \rangle$ tvořen všemi lineárními kombinacemi konečných posloupností vektorů z M s koeficienty z T.

Důkaz. Označme množinu uvedenou napravo v dokazované rovnosti jako $\mathbf{U}$. Máme ukázat, že pak $\langle M \rangle = \mathbf{U}$. Podle definice je $\langle M \rangle$ nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vzhledem k inkluzi obsahující množinu M. Stačí, když ukážeme, že tytéž podmínky platí také pro množinu $\mathbf{U}$. Pak budeme vědět, že vskutku $\langle M \rangle = \mathbf{U}$.

Nejprve ověříme, že $\mathbf{U}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Ovšem $M \neq \emptyset$ a pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in M$ máme $\mathbf{o} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$, takže $\mathbf{o} \in \mathbf{U}$. Dále pro libovolné dva vektory $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n$ a $t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k$ z $\mathbf{U}$, kde $n, k \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in M$, také vektor $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n + t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k$ náleží do $\mathbf{U}$. Rovněž pro libovolné $t \in T$ také vektor $t \cdot (s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n) = (t \cdot s_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (t \cdot s_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (t \cdot s_n) \cdot \mathbf{u}_n$ náleží do $\mathbf{U}$. Je tedy $\mathbf{U}$ podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Dále pro každý vektor $\mathbf{u} \in M$ máme $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u}$, takže $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Je tedy vidět, že $M \subseteq \mathbf{U}$.

Nakonec ukážeme, že $\mathbf{U}$ je nejmenší podmnožina ve $\mathbf{V}$ s předchozími dvěma vlastnostmi vzhledem k inkluzi, tedy že $\mathbf{U}$ je nejmenší podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ splňující $M \subseteq \mathbf{U}$. Buď tedy $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ takový že $M \subseteq \mathbf{W}$. Pak je třeba ukázat, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$. Tedy pro libovolný vektor $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in M$, máme ukázat, že $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \in \mathbf{W}$. Ovšem z definičních vlastností podprostoru ihned plyne, že podprostor $\mathbf{W}$ je uzavřen vzhledem k tvorbě libovolných lineárních kombinací vektorů s koeficienty z T. Skutečně tedy platí, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.